MATHESIS
Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe
Version 1

Mathesis. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe. Version 1. Bearbeitet von Sandra Bella, Mattia Brancato, Davide Crippa, Vincenzo De Risi, Siegmund Probst und Achim Trunk unter Verwendung von Vorarbeiten von Vincenzo De Risi, Javier Echeverría und den Editionsstellen in Hannover und Münster, hrsg. von der Leibniz-Forschungsstelle Hannover der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen beim Leibniz-Archiv der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek. Hannover, 31. August 2021.

ZU DIESEM DOKUMENT

Die Sammlung *Mathesis. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe* enthält mathematische Texte von Leibniz, die bisher nicht veröffentlicht wurden oder nur in Drucken außerhalb der Akademie-Ausgabe vorliegen. Das Dokument gibt den Stand der Arbeiten an diesen Stücken vom Mai 2021 wieder, wobei der Bearbeitungsstand von Transkriptionen bis hin zu nahezu abgeschlossenen Editionen reicht.

Die Texte wurden auf Grundlage der Handschriften in Zusammenarbeit mit dem Projekt ANR MATHESIS: ÉDITION ET COMMENTAIRES DE MANUSCRITS MATHÉMATIQUES INÉDITS DE LEIBNIZ (2017–2021), N° ANR-17-CE27-0018-01 AAP GENERIQUE 2017 (Leitung: David Rabouin), von Sandra Bella, Mattia Brancato, Davide Crippa, Vincenzo De Risi, Siegmund Probst und Achim Trunk erarbeitet. Zum Teil konnte auf Vorarbeiten von Vincenzo De Risi, Javier Echeverría und der Editionsstellen in Hannover und Münster zurückgegriffen werden. Die Erfassung der Stücke hat Manuela Mirasch-Müller, teilweise nach Vorarbeiten der Bearbeiterin und der Bearbeiter und von Christopherus Ray'onaldo, Jule Schwarzkopf und Yixiao Wang, durchgeführt.

Der Satz ist mit Hilfe des von John Lavagnino und Dominik Wujastyk entwickelten TeX-Macropakets EDMAC erstellt worden. Einige Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris erstellt und in TeX weiterbearbeitet.

Vorläufigkeit

Bei den Texten dieser Sammlung handelt es sich um vorläufige Ergebnisse. Spätere Versionen werden in einigen Aspekten davon abweichen. So werden sich die Anzahl und die Reihenfolge der Stücke und damit auch ihre Nummern und Seitenzahlen ändern. Bei Seitenumbrüchen und Zeilenzählung kann es ebenfalls zu Verschiebungen kommen. Schließlich können sich auch inhaltliche Änderungen ergeben; insbesondere sind die Datierungen noch vorläufig. Zur leichteren Identifikation wird jeder Text mit seiner Nummer aus dem Leibnizeditionskatalog gekennzeichnet. Die Texte werden sukzessive in künftige Bände der Leibniz-Akademie-Ausgabe übernommen und dann aus dieser Sammlung entfernt.

Versionierung und Langfristigkeit

Im Lauf der editorischen Arbeit an den Texten können geänderte vorläufige Fassungen zugänglich gemacht werden. Unterschiedliche Fassungen des Dokuments werden durch Versionsnummern kenntlich gemacht und sind so eindeutig identifizierbar.

Wir empfehlen ausdrücklich, stets die aktuellen Fassungen der Bearbeitungen der Stücke zu nutzen. Bitte überprüfen Sie deshalb vor der Nutzung auf unserer Webseite, ob eine neuere Version dieses Dokuments verfügbar ist oder ob ein Text inzwischen in eine Vorausedition oder einen publizierten Band übernommen wurde.

Die Langzeitarchivierung und die langfristige Bereitstellung der Dokumente erfolgen über die Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, die das Akademien-Vorhaben „Leibniz-Edition“ gemeinsam mit der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften betreut. Die Zitierfähigkeit wird gewährleistet.

Zitierhinweis

Die vollständigen bibliographischen Angaben des Dokuments können der Titelseite entnommen werden. Wir empfehlen, bei Zitaten aus der Sammlung *Mathesis* oder Verweisen auf diese stets die Versionsnummer mit anzugeben. Eine Zitation einer Handschrift könnte in einer Kurzform nach dem Muster des folgenden Beispiels gestaltet werden:

G. W. Leibniz, *Numisma Memoriale meorum inventorum* (GWLB LH 35 II 1 Bl. 2; vgl. *Mathesis. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe, Version 1*, dort N. 7 S. 15-16).

Die Signatur der edierten Handschrift findet sich jeweils im Kopf des Stückes.

Kontakt

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Deutschland
Leitung: Michael Kempe
Email: leibnizarchiv@gwlb.de
Internetauftritt: http://www.gwlb.de

Das Projekt MATHESIS betreibt die Webseite *MATHESIS – Editing Leibniz's Mathematical Manuscripts* (http://mathesis.altervista.org), auf der HTML-Versionen von Transkriptionen und Übersetzungen sowie weitere Materialien zur Verfügung gestellt werden.

À PROPOS DE CE DOCUMENT

La collection *Mathesis. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe* contient des textes mathématiques de Leibniz qui n'ont pas été publiés à ce jour ou qui ne sont disponibles qu'en version imprimée en dehors de l'édition académique. Le document montre l'état du travail sur ces pièces en mai 2021, avec l'état de traitement allant des transcriptions aux éditions presque achevées.

Les textes suivants ont été élaborés à partir des manuscrits en collaboration avec le projet ANR MATHESIS: ÉDITION ET COMMENTAIRES DE MANUSCRITS MATHÉMATIQUES INÉDITS DE LEIBNIZ (2017–2021), N° ANR-17-CE27-0018-01 AAP GÉNÉRIQUE 2017 (responsable du groupe: David Rabouin), par Sandra Bella, Mattia Brancato, Davide Crippa, Vincenzo De Risi, Siegmund Probst et Achim Trunk, aidés pour partie par les travaux préparatoires de Vincenzo De Risi, de Javier Echeverría et des éditeurs de Hanovre et de Münster. La saisie des textes a été effectuée par Manuela Mirasch-Müller, en partie à partir du travail préparatoire des collaborateurs et de Christopherus Ray'onaldo, Jule Schwarzkopf et Yixiao Wang.

La mise en page a été réalisée à l'aide du logiciel TEX EDMAC développé par John Lavagnino et Dominik Wujastyk. Quelques figures ont été élaborées avec les programmes WINGEOM et WINPLOT de Richard Parris et traitées par la suite dans TEX.

Caractère provisoire des textes

Les textes de cette collection sont des résultats préliminaires. Les versions ultérieures différeront à certains égards. Ainsi, le nombre et l'ordre des pièces et avec eux leurs numéros et numéros de page changeront. Il peut également y avoir des décalages dans le cas de sauts de page et de comptage de lignes. Enfin, il peut également y avoir des changements dans le contenu; en particulier, les dates sont encore provisoires. Pour faciliter l'identification, chaque texte est indiqué par son numéro dans le catalogue de l'Édition Leibniz. Les textes seront progressivement intégrés dans les futurs volumes de l'édition de l'Académie puis retirés de cette collection.

Gestion des versions et disponibilité à long terme

Au cours du travail éditorial sur les textes, des versions préliminaires modifiées peuvent être rendues accessibles. Les différentes versions du document sont identifiées par des numéros de version et peuvent donc être clairement identifiées.

Nous vous recommandons expressément de toujours utiliser les dernières versions de l'édition des pièces. Par conséquent, veuillez vérifier avant d'utiliser notre site Web si une version plus récente de ce document est disponible ou si un texte a depuis été incorporé dans une pré-impression d'un volume ou un volume publié.

L'archivage à long terme et la disponibilité de nos documents sont assurés par l'Académie des sciences de Göttingen, qui est co-responsable avec l'Académie des sciences de Berlin-Brandebourg du projet interacadémique de l'Édition Leibniz. La citabilité est garantie.

Format de citation

Les références bibliographiques complètes se trouvent sur la page du titre. Nous vous recommandons de toujours inclure le numéro de version lors de la citation ou de la référence à la collection *Mathesis*. Une citation d'un manuscrit sous forme abrégée pourrait ressembler à l'exemple suivant:

G. W. Leibniz, *Numisma Memoriale meorum inventorum* (GWLB LH 35 II 1 fol. 2; cf. *Mathesis. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe, Version 1*, N. 7 p. 15-16).

La cote du manuscrit édité se trouve dans la tête de la pièce.

Adresse de contact

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Allemagne
Directeur du département: Michael Kempe
adresse e-mail: leibnizarchiv@gwlb.de
site web: http://www.gwlb.de

Le projet MATHESIS exploite le site *MATHESIS – Edition des manuscrits mathématiques de Leibniz* (http://mathesis.altervista.org), sur lequel des versions HTML des transcriptions et des traductions ainsi que d'autres documents sont disponibles.

ABOUT THIS DOCUMENT

The collection *Mathesis. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe* contains mathematical writings by Leibniz which are either previously unpublished or available only in printed publications outside the Academy edition. The document presents the state of work on these texts as of May 2021, ranging from simple transcriptions to nearly completed scholarly editions.

The following texts have been prepared from manuscript sources in collaboration with the project ANR MATHESIS: ÉDITION ET COMMENTAIRES DE MANUSCRITS MATHÉMATIQUES INÉDITS DE LEIBNIZ (2017–2021), N° ANR-17-CE27-0018-01 AAP GENERIQUE 2017 (head: David Rabouin), by Sandra Bella, Mattia Brancato, Davide Crippa, Vincenzo De Risi, Siegmund Probst, and Achim Trunk. For some, the editors were able to build on preliminary work carried out by Vincenzo De Risi, Javier Echeverría, and by members of the Academy editorial groups in Hanover and Münster. Manuela Mirasch-Müller was responsible for inputting the texts, partly on the basis of preparatory work by the editors and by Christopherus Ray'onaldo, Jule Schwarzkopf, and Yixiao Wang.

The TEX macro suite EDMAC, developed by John Lavagnino and Dominik Wujastyk, was used for typesetting. Some of the figures were initially produced using the WINGEOM and WINPLOT programs created by Richard Parris, and completed using TEX.

Preliminary status

The writings presented in this collection are preliminary research results. Later versions can be expected to diverge from them in some respects. Thus, the quantity and the sequence of the texts will change, as will their numbering and pagination. Likewise, there may be shifts in page transitions and line numbers. Finally, changes may occur to the content itself; the dates assigned to the writings, in particular, are only preliminary. For easy identification, each text is cited using its number in the Leibniz edition's working catalogue. The writings will be progressively integrated into future volumes of the Academy Edition of Leibniz, after which they will be removed from this collection.

Versions and long-term availability

Over the course of editorial work, successive versions of the preliminary presentation may be made available. Distinct versions of the document are marked with version numbers and are thus unambiguously identifiable.

We strongly recommend always using the most recently published version of our edition of each text. Please check our website before citing this document to ascertain whether a newer version of *Mathesis* has become available or a particular text has been incorporated into a preliminary edition or a published volume.

Long-term archiving and availability of our documents are provided by the Göttingen Academy of Sciences and Humanities, which is jointly responsible with the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities for the interacademic project of the Leibniz Academy Edition. Citability will remain assured.

Suggestions for citation

The complete reference of this document can be found on the title page. We recommend always specifying the version number when citing or referring to *Mathesis*. The following is an example of how a citation of a manuscript may be provided in an abreviated form:

G. W. Leibniz, *Numisma Memoriale meorum inventorum* (GWLB LH 35 II 1 fol. 2; see *Mathesis. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe, Version 1*, N. 7 p. 15-16).

The shelfmark for the manuscript source may be found in the introductory notes to each individual text.

Contact

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Germany
Head of department: Michael Kempe
E-mail: leibnizarchiv@gwlb.de
Website: http://www.gwlb.de

The MATHESIS Project operates the website *MATHESIS – Editing Leibniz's Mathematical Manuscripts* (http://mathesis.altervista.org), where HTML versions of transcribed and translated Leibniz writings are provided along with various other materials.

INHALTSVERZEICHNIS

MATHESIS

Transkriptionen und Vorauseditionen 1677 – 1716

MATHESIS

Transkriptionen und Vorauseditionen 1677 – 1716

1 (863). SIGNA AMBIGUA
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 4 V 10 Bl. 62. Papierstreifen, ca 7 × 2 cm. 2 Z. auf Bl. 62 r°, Rückseite leer.
Cc 2, Nr. 863 K

Datierungsgründe: In der kurzen Notiz treten die beiden *signa ambigua* (Doppelvorzeichen) $\mp$ und $\pm$ auf, die Leibniz seit Anfang 1675 verwendet. Die Notiz hält eine Rechenregel für den Umgang mit einer besonderen Gruppe der Doppelvorzeichen, der sogenannten *signes heterogenes* — also unabhängig voneinander gebildeter und durch Klammerung unterschiedener Zeichen —, fest. Die Annahme liegt nahe, dass eine solche Rechenregel relativ bald nach der Einführung der beiden Doppelvorzeichen festgehalten worden ist. Doch sprechen zwei Indizien gegen eine Abfassung in der Pariser Zeit: *(1)* Das Gleichheitszeichen *aequ.* (bzw. seine Variante ohne Punkt) verwendet Leibniz in der Pariser Zeit eher selten; er setzt es vor allem ein, wenn er beabsichtigt, eine Information weiter zu reichen, womit im Zusammenhang mit Fragen der Doppelvorzeichen nicht zu rechnen ist. *(2)* In der Pariser Zeit schreibt er *aequ.* in der Regel mit *qv*, in der Hannoverschen Zeit dagegen häufiger auch mit *qu*, wie das in der vorliegenden Notiz der Fall ist. Aufgrund dieser Indizien ist eine Entstehung der Notiz in der Hannoverschen Zeit anzunehmen.

Signa ambigua

$\pm\,(\pm)$ aequ. $\mp\,(\mp)$
quia $-,-$ aequ $+$

17 Signa ambigua *erg. L*

2 (981). MICH. DARY METHODI APPROPINQUANDI
[Zweite Hälfte 1677]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VII 7 Bl. 5. 1 Bl. 8°. 2 S. Textfolge Bl. 5v°, 5r°.

Datierungsgründe: [vgl. III, 2 N. 64]

Mich. Dary methodi appropinquandi affectis aequationibus in numeris.

M e t h o d u s I. Sit resolvendus solus signo + affectus. Assume radicem aliquam verae quantum potes propinquam, divinando et ex ea inveni resolvendum, quod ut fiat facilius operaberis per logarithmos. Deinde sume aliam, radicem, donec habeas duos resolvendos inter quos datus resolvendus sit medius. Si non possit hoc fieri aequatio est impossibilis; saltem in radice affirmativa inde sic dicito: ut differentia supposititiorum resolvendum resolvendorum ad differentiam supposititiarum radicum: ita differentia propositi resolvendi et proximi resolvendi suppositii est ad differentiam radicum eorum quanto propiores assumseris radices supposititias, eo accuratius habebis quaesitum.

M e t h o d u s I I. Supremus terminus ponatur solus ab una parte signo + affectus. Utrumque latus aequationis divide per potestatem altissimam lateris explicatis terminis compositis, extrahe utrobique radicem ut incognita ab uno latere sola habeatur. Inde divinando quaere valorem radicis, eum substituendo a latere multitermino, debet resultare valor radicis prope verus. Si resultans non potest esse affirmativum etiam aequatio erit impossibilis affirmativa radice. Si resultans affirmativum nimis adhuc absit a supposititia radice, ipsum resultans pro supposititia radice sumatur et similiter proceditur, et accedes quaesitae radici magis magisque. Si aequatio habet tantum unam radicem affirmativam series procedet oscillatorie ut ita dicam progrediendo et regredendo. Si plures una affimativae series procedet continue vel directe ( ). Nempe resultantia crescent vel descrescent. Sed haec non ante disces quam tres terminos habeas in serie, nempe primam suppositionem et tres resultationes. Compendium promovendi periodum: tripla novissimam resultationem, et inde subduc duplum novissimae radicis suppositi[ti]ae et habebis novam radicem supposititiam. Ita continuandum donec series forte regrediatur, tunc amplius utendum hac methodo, sed potius continuandum a novissima supposita

5 methodi: M. Dary, *Interest epitomized*, 1677, S. 32–38.

radice ante regressum ut resultans pro nova radice sumamus.

(+ $y = ay^3 + b$ sit $y = 1 = a + b$. Haec methodus mea incipit ab unitate. $a\,\overline{\boxed{3}a+b}+b$; $a\,\overline{\boxed{3}a\,\overline{\boxed{3}a+b}+b}$; $a\,\overline{\boxed{3}a\,\overline{\boxed{3}a\,\overline{\boxed{3}a+b}+b}+b}+b$; etc. et ita porro in infinitum. Ergo $y = \overline{\overline{\overline{a+b\boxed{3}}a+b\boxed{3}}a+b\boxed{3}}a$ etc. $+b$. +)

Si series procedat interrupte hoc auxilio uti licebit ut dimidiam summam proximae resultationis sumas et proximae radicis suppositae, eaque summa dimidia erit proxima radix supposititia, eaque ratione mox ad periodum venies. Ea natura est methodi hujus ut maximam radicem venetur nisi aliam in via offendat. Itaque si ab initio satis magnam sumas, methodus te certo ad maximam ducet.

3 (35763). AD HOSPITALII ANALYS. INF. PAG. 75 [Dezember 1696]

Überlieferung: L Konzept: LH 35 XV 5 Bl. 15. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 15 r°. — Bl. 15 v° enthält das fragmentarische Briefkonzept I, 13 N. 276.

Datierungsgründe: Leibniz erhielt ein Exemplar von G. F. de L'Hospital, *Analyse des infiniment petits*, 1696, in der ersten Hälfte des Novembers 1696 (vgl. die Erl. zu III, 7 N. 42 S. 163). N. 3 (35763) dürfte um etwa dieselbe Zeit entstanden sein wie I, 13 N. 276.

Ad Hospitalii *Analys. inf.* pag. 75

AP x. PM y. C centrum curvedinis. ME, z. CE, ψ. dz pro hoc casu seu $R\mu = dy$ ipse radius curvedinis. MC, $M\mu$ sit dm fiet $r = z\,dm : dx$ jam $dr = 0$ hoc loco fiet utique $0 = z\,d(dm : dx) + dy\,dm : dx$. Adeoque $dy : z = -d(dm : dx) : (dm : dx)$ adeoque $\int dy : z = \log\ (dx : dm)$ vel $z = dy : d\ \log\ (dx : dm)$ vel z est ad constantem, ut Elementum ordinatae ad elementum logarithmi rationis quem habet consinus declivitatis ad radium. Est autem declivitatis angulus quem Tangens curvae facit ad horizontem, posito axe verticaliter erecto. Declivitas enim crescit angulo hoc crescente. Porro radius curvedinis est ad z ut radius ad consinum declivitatis. Ergo radius curvedinis est ad constantem in ratione composita ex ratione radii ad consinum declivitatis, et ratione quem habet Elementum ordinatae ad Elementum logarithmi exponentis rationem consinus declivitatis erga radium.

$r = dy(dm : dx)\ d\ \log\ (dx : dm)$ vel $r = -(dm : dx)\,dy : (d(dm : dx) : (dm : dx))$. Seu $r = -\,(dmdm : dxdx)\,dy\,d(dm : dx)$ radius osculi.

Hinc $\int dy : r = (b : a) - dm : dx$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} MR & : & R\mu & : & M\mu & = & ME & : & EC & : & CM \\ dx & & dy & & dm & & z & & \psi & & r \end{array}$$

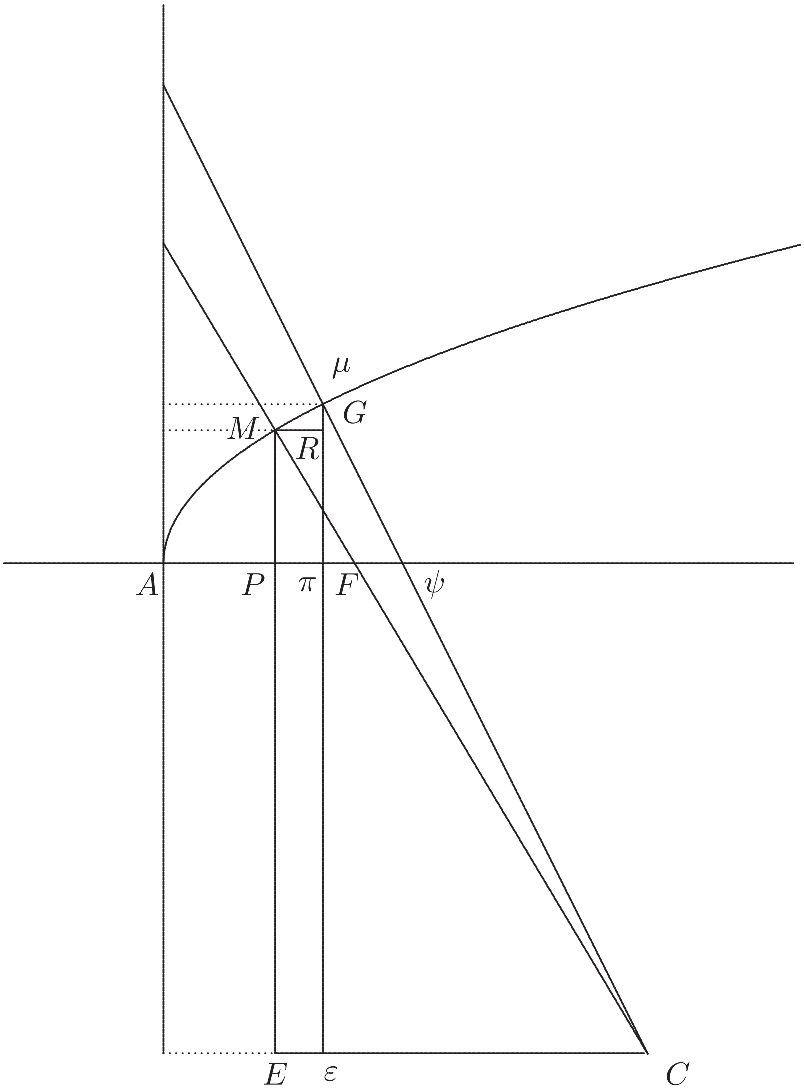
$r\,dy = \psi\,dm$. $d\psi = dx$. $dz = dy$.

$r = \psi\,dm : dy$. $0 = dx\,(dm : dy) + \psi\,d(dm : dy)$. Ergo $\psi = -\,dx\,(dm : dy) : d(dm : dy)$.

Adeoque $-r = dx\,(dmdm : dydy) : d(dm : dy) = dy\,(dmdm : dxdx) : d(dm : dx)$

12 f. constantem (*1*) ut elementum (*2*) | ut *erg.* | Elementum (*a*) logarithmi rati (*b*) ordinatae L

jam $d(dm : dy) = dyddm - dmddy, : dydy$ et $d(dm : dx) = dxddm - dmddx, : dxdx$. Ergo tandem $-r = dxdmdm :, dyddm - dmddy$.



[*Fig. 1*]

Et eodem modo $-r = dydmdm :, dxddm - dmddx$. Si dm sit constans fiet $dxdm : ddy = r = dydm : ddx$. Itaque si curva crescat uniformiter, fiet elementum unius coordinatae, ad alteram coordinatam, ut elementum curvae ad radium curvedinis. Si generaliter $dy : r\,d \log dx : dm$ seu radius est ad elementum coordinatae, ut elementum logarithmi rationem exprimentis, quam alterius coordinatae elementum habet elementum curvae; vel si mavis radius curvedinis est ad unitatem, ut elementum coordinatae ad elementum Logarithmicum rationis quam habent elementa alterius coordinatis et curvae. $r : 1 = dy : d \log\,(dx : dm)$.

4 (37978). METHODUS UNO EXEMPLO INVENTO EXHIBENDI PLURA [Frühjahr 1701 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 43 Bignon10 Bl. 119 (alt: LBr 68 Bl. 119). 1 Zettel ca 9,7 × 8 cm. 1 S. auf Bl. 119 r°. — Auf Bl. 119 v° IV, 9 N. 132.

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte etwa um dieselbe Zeit entstanden sein wie das in IV, 9 N. 132 gedruckte Gedicht auf der Rückseite des Blattes.

Methodus uno exemplo invento exhibendi plura

$bmm + cm + d = 0$. Detur exemplum posito m aequari numero e, et fiat $m = n + e$ et fiet

$$\begin{array}{llll} +bnn & +2ben & +bee & = 0. \\ & +cn & +ce & \\ & & +d & \end{array}$$

Quia ergo ex hypothesi est $bee + ce + d = 0$ poterunt omnia dividi per n, et fiet: $bn + 2be + c = 0$, seu $n = 2be + c, : -b$. Ita habemus novum exemplum, ex quo rursus inveniri poterit tertium. Et ita porro: Hinc exempla singularia in numeris observando venitur ad modum inveniendi alia similia.

5 (37993). CUM VIRI DOCTI ET A ME PRO MERITO AESTIMATI [Juli 1705]

Überlieferung: *L* Konzept: GOTHA *Forschungsbibl.* Chart. A 448–449 Bl. 41–42.

Datierungsgründe: [**noch**]

Cum viri docti et a me pro merito aestimati sententiam meam desideraverint, de solutione Problematis a Cl$^{\text{mo}}$ Saurino data, objectionibus quas vir quidam Calculo Algebraico bene versatus, opposuit, et quibus Saurinus in diario Eruditorum parisiis 13 April. 1705. edito nuper respondit; dissimulare nequeo, admiratum me non mediocriter solutioni evidentissimae talia opponi potuisse.

Huc enim res fere redit ut objectionum autor Calculo differentiarum summarumque utentibus libertatem neget prima Geometriae axiomata in usum suum transferendi. Neque enim permittit substitui *a e q u a l i b u s* *a e q u a l i a* et loco rationis dy ad dx valorem ejus in terminis ordinariis repertum poni eo quidem loco quo Saurinus hoc sibi commodum judicarat successu consilium comprobante. Quid facias ad exceptiones confugienti, quas perspectas nemo intelligentium ferat, aut aliter quam ab affectu animi judicium perturbantis excuset. Et tamen Saurinus fiducia causa, et in cumulum responsionis nuperrime adversario morem gessit, substitutioneque huic exosa abstinens, ad eandem tamen conclusionem pervenit, quod eventurum alter praevidere poterat, et negare non debebat. Fateor cum forte diarii supradicti paginam 250 oculos conjecissem praecedentibus nondum lectis, non potuisse me mihi imperare, quin suspicarer objectiones

5 *(1)* Cum amici *(2)* Cum *L* 5 f. desideraverint *(1)* de objectionibus qvas Cl. Saurino Vir doctus alioqvi *(2)*, de solutione | cujusdam *gestr.* | Problematis *L* 7 qvibus *(1)* ille 13 April. 170 *(2)* prior *(3)* Saurinus *L* 8 edito *(1)* respondit, non possum *(2)* nuper *L* 9 evidentissimae | a Saurino datae *gestr.* | talia *L* 10 objectionum autor *erg. L* 14 sibi *(1)* faciendum | ⟨p⟩utat. *nicht gestr.* | *(a)* Et tamen Sau *(b)* Qvi tamen, qvo magis convinceret adversarium, nuperrima responsione etiamsi morem ei gereret, substitutioneqve *(aa)* oporteret *(bb)* abstineret, idem tamen prodire ostendit, qvod eventurum ipse vir *(aaa)* Algebr *(bbb)* in Analysi ⟨v⟩ersatus praevidere poterat, et negare non debebat *(2)* commodum judicarat | successu consilium comprobante *erg.* |. Qvid *L* 16 fiducia causa, et *erg. L* 18 eventurum *(1)* vir in Analysi versatus *(2)* adversarius *(3)* alter *L* 20 lectis, *(1)* suspicatum me objectiones adversario *(2)* non potuisse mihi *(3)* non *L* 20 suspicarer *(1)* usqve adeo objectiones huiusmodi Ad *(2)* objectiones *L*

usque adeo leves Saurinum adversario attribuere animo irridendi, sed vix oculis meis fidem habui, cum ipsa hujus verba legi, quibus inter alia diserte habetur *⟨u⟩trumque aequationis $s = xdy : dx$ latus ad ⟨q⟩uadratum attollere, operationem esse in Geometria transcendente inauditam, nullaque ejus regula praescriptam.* Qui talia scribere in animum inducit suum, eumne lectoris judicium curare putabimus? Quid ergo, an permissione nobis opus erit, aut regulae ullius autoritate, ut axiomate vulgatissimo utamur, quod docet aequalium quantitatum etiam quadrata aequalia esse? An necesse putat in Regulis calculi novi facillima quaeque veteris repeti; aut Geometriam infinitesimalibus utentem, adeo esse transcendentem, et ab antiqua avulsam, ut regulis ejus uti non possit in rem suam quanquam alioqui in vetere pariter et novo Calculo periti etiam mille novis artibus quotidie cum laude utantur pro re nata, quas nullo jure rejecerit, is qui fortasse earum neque exemplum antea neque regulam vidit.

Unam tamen objectionem viri animadverto speciem aliquam habere, si non e propinquo inspiciatur. Eam ergo examinare operae pretium est. Proposita erat Curva linea, cujus aequatio est

$$\begin{array}{ccccccccccc} y^4 & - & 8y^3 & - & 12xyy & + & 48xy & + & 4xx & = & 0 \\ & & & + & 16yy & & & - & 64x & & \end{array}$$

ubi y est abscissa, x ordinata. Instituta differentiatione prodit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3yy - 12y - 2x + 16 = v}{y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x = z}$$

vel compedio, $dy : dx = v : z$. Quaeritur subtangens hujus curvae, seu (quod idem est) valor quantitatis $xdy : dx$, eo casu, quo est $x = 2 = y$ seu quo fit $v = 0 = z$, ubi pro $dy : dx = v : z$ habebimus $dy : dx = 0 : 0$, quo loco haeret Analysis vulgaris. Hic ergo Cl. Saurinus adhibito articulo 163 Analyseos infinitesimalis ab ill. Marchione Hospitalio editae pulchre ostendit pro $0 : 0$ scribendum $dv : dz = dy : dx$. Et ipsis dv et dz actu ipso secundum valores supra assignatos per x, y, dx, dy, expositis et pro x et y denique substituendo valorem 2 quem in hoc casu habent, prodire tandem $dy : dx =$

1 adversario *(1)* attribuere irridendi causa *(2)* attribuere animo irridendi, *(a)* non ut factas, sed ut *(b)* sed *L* 2 habui, *(1)* cum hunc opponere viderem, qvod duo aeqvati *(2)* cum *(a)* ab hoc *(b)* ipsa *L* 6 suum, *(1)* an sese ipse primus *(2)* eumne *L* 9 novi *(1)* vulgatissima *(2)* facillima *L* 12 nata, *(1)* qvarum ille fortasse neqve exemplum neqve *(2)* qvas *L* 14 viri *erg. L* 21 curvae, *(1)* seu valor *(2)* seu *L* 26 supra *(1)* positos *(2)* expositis per assignatos *gestr. L*

$\pm\sqrt{1:8}$ adeoque $xdy : dx = \pm\sqrt{1:2}$ quod desiderabatur. At Autor objectionis negavit in Methodo Tangentium, quae Calculo differentiarum utitur, permissam esse duplicem differentiationem; affirmans non nisi priorem esse ferendam per quam ex aequatione locali deducitur $dy : dx = v : z$, rejecta secunda quae adhibet $dv : dz$. Sed responsio facilis est. Methodum Tangentium generatim non imperare alteram differentiationem, nec tamen eam prohibere cum aliunde in casu particulari imperatur, ut fit hoc loco, postquam methodus generalis tangentium nos deduxit ad $0 : 0$ ubi utique regula aliunde sumta, (etsi et ipsa ad Calculum infinitesimalem pertinente) utendum est, quae docet explicare $0 : 0$, et quae sane a tangentium negotio per se spectato, adeo est independens, ut in eodem articulo 163 exempla non ad tangentes, sed ad ordinatas curvae Algebraicae definiendas pertinentia adhibeantur; salva tamen cuique libertate eandem regulam cum res postulat, ad tangentes applicandi. Eoque magis commendari meretur Saurinus, quod tam opportune de Methodo cogitavit, quae vulgo in Tangentium calculo (quia scilicet raro opus est) non adhibetur. Ut possumus autem huc applicare articulum 163, figuramque 130 ei respondentem concipiendo PN ut v, PO ut z, et PM ut $v : z$, ita in casu PN, et PO evanescentium seu in casu punti B, manifestum est $v : z$ fore BD. Neque adeo vel minima rationis specie applicatio articuli 163 ad praesentem subtangentis determinandae casum in dubitum revocari potest, cum utique pro curva cujus aequatio localis supra fuit proposita, fiat subtangens ad ordinatam ut BD ad unitatem.

Sed quo minus miretur aliquis pro $v : z$ poni hoc loco $dv : dz$, addam paucula, quae fortasse ad illustrandum artic. 163 prodesse possint. Sciendum est nimirum non posse determinari quid sit $0 : 0$, (seu 0 divisum per 0,) si ita simpliciter spectetur: neque enim major ratio est cur dicamus $0 : 0 = 1$ quam $0 : 0 = 2$ aut etiam generatim $0 : 0 = b$. Nam utrumque cujuslibet harum aequationum latus multiplicando per 0, fiet 0 aequale ipsi 0 multiplicato per 1, aut ipsi 0 multiplicato per 2, aut ipsi 0 multiplicato per b. Quorum unumquodque aeque verum est, cum quivis numerus per 0 multiplicatus faciat 0.

Itaque hoc loco non sumemus z et v pro N i h i l i s (ex quibus nihil discemus) sed

1 qvod desiderabatur *erg.* *L* 1 objectionis | tam inexpectatae *gestr.* | negavit *L* 3 esse *(1)* permittendam, qva *(2)* concede *(3)* ferendam *L* 4 rejecta ... dv : dz *erg.* *L* 9 negotio *(1)* universim sumto, adeo *(2)* adeo *(3)* per *L* 14 adhibetur. *(1)* Sed qvo minus miretur aliqvis *(2)* Et in objectore hoc loco id unum laudandum, qvod ei re⟨i⟩ occasionem dedit *(3)* Sed qvo minus *(4)* Et sane *(a)* articulus *(b)* possumus v : z concipere *(5)* Ut *L* 15 v : z | quo facto *gestr.* | ita *L* 18 utiqve *(1)* fiat subtangens ad ordinatam ut BD ad unitatem *(2)* pro *L* 19 proposita, *(1)* ut BD ad unitatem *(2)* fiat *L* 21 163 | supradictum *gestr.* | prodesse *L* 27 (ex ... discemus) *erg.* *L*

pro evanescentibus, vel nascentibus, hoc est in nihilum nunc abeuntibus, vel a nihilo jam venientibus aut ut generatim dicam, a nihilo inassignabiliter differentibus. Nihila quippe non sunt magnitudines neque enim in magnitudinibus fieri potest, ut totum sit aequale parti, aut ut duplum sit aequale simplo, cum tamen bis nihil non plus sit quam semel nihil. Itaque pro statu nihili ipso statu transitus utemur ubi adhuc aliquid aut jam aliquid rei adest, etsi assignabile non sit. Porro quantitas z, ubi est nascens aut evanescens, idem est quod dz ibidem existens; et v in simili casu idem est quod dv cum magnitudo nascens aut evanescens, seipsa a nihilo differat inassignabiliter, primaque adeo seu ultima differentia (infinitesimalis scilicet) coincidat cum termino ipso. Quomodo autem casus evanescentium vel nascentium non differat assignabiliter a casu nihilorum; vel ex fig. 130 Analyseos infinitesimalis Hospitalianae manifestum est; Ubi distantia inter B et b quavis assignabili minor intelligitur. Itaque hic casus calculo tractabilis, merito pro casu nihilorum hic intractabili adhibetur. Quemadmodum et in ipsa methodo tangentium fit ex eodem prorsus fundamento, dum enim scribimus $dy : dx$, differentias abscissarum vel ordinatarum adhibemus non jam coincidentium, ubi differentia plane nulla est, sed in coincidentiam abeuntium, ubi differentiae quoque non adhuc nullae sunt, sed tamen positae in actu evanescendi.

Idque hoc quoque ipsa rei natura admonet intelligentes: cum enim z et v evanescunt, non sufficit loco $z : v$ poni $0 : 0$ quia 0 nullam relationem peculiarem, indicat ad z vel v unde oritur: nobis vero ipsa hujus relationis expressione est opus ex Artis characteristicae praeceptis, indicandumque id quod evanescit esse z vel v non aliud quidvis; neque enim alias ad determinatam problematis solutionem perveniretur. Origo vero hujus nihili ex z vel v tum denum indicabitur si pro z vel v non ponamus id quod prodit ubi jam evanuit (quod omnino nihil est) sed z vel v evanescens, id est dz vel dv. Quemadmodum hoc loco rectissime factum res ipsa ostendit.

Ex his jam intelligitur affirmative a me responderi ad quaestiones sequentes ab amicis propositas.

1 nunc *erg.* *L* 2 aut ... differentibus *erg.* *L* 3 f. sit *(1)* majus *(2)* aeqvale *L* 5 f. Itaqve ... ubi est *erg.* *L* 7 dz *(1)* ibidem locum habens *(2)* ibidem *L* 8–10 cum ... autem *erg.* *L* 13–17 Qvemadmodum ... evanescendi *erg.* *L* 14 enim *(1)* adhibemus dy : dz *(2)* scribimus *L* 14 f. abscissarum vel *erg.* *L* 16 f. tamen *(1)* evanescentes *(2)* positae *L* 18 hoc qvoqve *erg.* *L* 19 sufficit *(1)* ejus loco *(a)* poni 0 : 0 *(b)* poni z *(2)* loco *L* 20 unde *(1)* nascitur, qva tamen utiqve indigere manifestum est, *(2)* oritur: *L* 21–23 non ... indicabitur *erg.* *(1)* Id vero tum demum obtinebitur fiet *(2)* si *L* 24 (qvod *(1)* absolutissime *(2)* omnino *L*

(1) Annon in Diario Eruditorum Parisino 3 Aug. 1702 exhibita et 23 April. 1705 repetita solutio problematis quo quaeritur subtangens curvae cujus aequatio localis supra proposita est, conformis sectionis 2 Analys. Inf. parv. articulo 9. Et sectionis 9. articulo 163.

(2) An non liberum sit adhibere articulum 163 antequam pro $dy : dx$ substitutio valoris sit facta in generali tangentis expressione quae est $xdy : dx$.

(3) An non manifeste et graviter errasse convictus sit qui putavit per applicationem articuli 163 ante hanc substitutionem non solutionem problematis sed meras absurditates prodire debere.

(4) An non prorsus inanes, proponique ac refutari indignae sint caeterae objectiones ejusdem autoris contra sublationem ipsius $dy : dx$ substituto valore factam aliasque operationes analyticas non minus evidentes quas tanquam interpolationes et reformationes calculi infinitesimalis antea inauditas admittere non vult.

(5) An non idem manifesti erroris convictus sit dum alteras differentiationes hoc loco concedendas negat.

(6) An non manifestissimum errorem defendat qui curvam cujus ordinatae valor sit $v : z$, vel $xv : z$ impossibilem esse contendit.

1 (1) *(1)* An Aeqvatio localis ac *(2)* Annon *(a)* solutio problematis *(b)* solutio problematis qvo qvaeritur *(3)* Annon *(a)* solutio proposita *(b)* in *L* 5 163 *(1)* anteqvam substitutio sit facta pro fractione v : z | secundum valorem ipsarum v et z per x et y supra expositum *erg.* | *(2)* anteqvam *L* 7 non *(1)* erraverit *(2)* ad oculum *(3)* manifeste et graviter *(a)* erraverit *(b)* errasse *L* 7 per *erg. L* 8 substitutionem *(1)* pro *(a)* substitutione *(b)* solutione problematis non nisi absurditas obtineri *(2)* non *L* 10 non | *(1)* vanae *(2)* vanissimae sint *(3)* prorsus . . . sint *erg.* | caeterae *L* 11 substituto valore factam *erg. L* 12 analyticas *(1)*, qvas *(a)* tanqvam *(aa)* additionis supplementa, aut reformationes calculi infi *(bb)* pro additionibus atqve pro interpolationibus ac reformationibus Calculi *(aaa)* novi *(bbb)* infinitesimalis *(b)* tanqvam additiones, interpolationes *(2)* non *L* 13 calculi *(1)* analy *(2)* infinitesimalis | antea inauditas *erg.* | admittere *L* 14 differentiationes *(1)* hoc loco non admittit *(2)* hoc *L* 16 non *(1)* manifestissime *(a)* erret, qvi *(b)* labatur qvi curvam *(2)* manifestissimos errores *(3)* manifestissimum *L* 17 xv : z *(1)* pro impossibili habeat *(2)* impossibilem *(a)* dicat *(b)* esse *L*

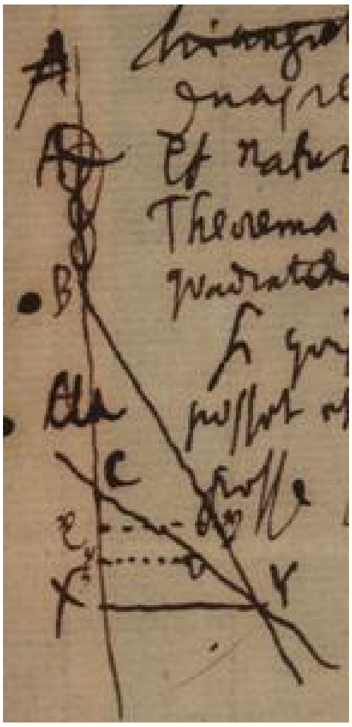
6 (38367). ELEMENTA GEOMETRIAE EX CONSIDERATIONE SIMILITUDINIS [1677 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LBr. 695 Bl. 71. 1 Bl. 8°. 1 S. auf Bl. 71 r°. Bl. 71 v° leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

Ex consideratione similitudinis videntur Elementa Geometriae brevius demonstrari posse. Assumendo enim rectam esse lineam sibi ubique similem, consequitur duas rectas non posse sibi occurrere plus semel. Consequitur et natura triangulorum similium, et ex his sequitur Theorema pythagoricum; adeoque et proprietas circuli, ut quadrata sinus et sinus complementi simul aequentur radio.

Si quis nollet conjungere calculum magnitudinum posset etiam hinc demonstrare rectas binas se non posse secare nisi in uno puncto.



[*Fig. 1*]

Sit AX, $A\mathfrak{x}$, $A\xi$ sit x et XY; $\mathfrak{xy}$, $\xi\upsilon$ sit y, AB sit b, AC, sit c, sit directrix AX, rectae $B\mathfrak{y}$ ordinatae $\mathfrak{xy}$ sunt $y = x + b, p : a$ et ordinatae $\upsilon\xi$ sunt $y = x + c, k : a$. Ergo in casu concursus fit $xp + bp = xk + ck$, seu fiet $x = bp + ck, :, k - p$ seu $x = kc - pb, : k - p$. Itaque x habet unum tantum valorem; sed cum recta secat circulum, aut circulus circulum prodit aequatio secundi gradus capax duorum valorum. Sed hae tamen melius ex figuris consequi licet et brevius.

---

2 *Nebenbetrachtung:* $y = x - b, a : f$. $x = b\varphi - pf, :, \varphi - f$ fit $y = \boxed{b\varphi} - pf \boxed{-\varphi b} + fb, a, :, \varphi - f, f = b - p, a :, \varphi - f$.

---

3 fiet: Richtig wären $x = (ck - bp) : (p - k)$ bzw. $x = (bp - ck) : (k - p)$; das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

7 (38950). NUMISMA MEMORIALE MEORUM INVENTORUM [1677 – 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 2. 1 Zettel ca 12°. $\frac{2}{3}$ S. auf Bl. 2 r°. — Auf Bl. 2 v° Fragment gedruckten Textes (Hann⟨—⟩) sowie Siegelrest.

Datierungsgründe: **[noch]**

Numisma Memoriale meorum inventorum Tetragonismi Et Machinae Arithmeticae

[*Fig. 1*]

---

7 *Text im Avers der Medaille:* Nescia falli aeternis secura fides. *Umschrift:* Ut 1 ad $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. ita et quadratum diametri ad circulum. *Umschrift im Revers:* G W ⟨L⟩

1,9 etc. | ita … diametri *(1)* ad ○ *(2)* ad circulum *gestr., erg. Hrsg.* | *L*

Demonstrationes infallibiles circa numeros et motus sunt divinae fidei symbola. Et series infinitae sunt symbola rerum aeternarum.

1 Demonstrationes *(1)* aeternarum veritatum sunt Divinae fidei symbola *(2)* infallibiles *L*

8 (39008). QUADRATURAE CIRCULI APPROPINQUATIONES [1677]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 B. 128. 1 Bl. 4°. $1\frac{2}{3}$ S.

Datierungsgründe: [noch]

Quadraturae Circ. appropinq. Ludolphina et similes

[*Seite mit Tabelle am Ende des Textes*]

L'on voit par là que tous ces autres s'accordent, et que l'un pousse seulement l'exactitude plus loin que l'autre. Aussi les Geometres en sont persuadés, et l'on ne demande point de meilleur proportion du Diametre à la Circomference, pour l'usage.

Mais pour ce qui est de la beauté de la contemplation, on seroit bien aise d'avoir une seule expression exacte à l'infini. Car celle de Viete ou de Ludolphe ne va qu'aussi loin que l'on pousse le calcul par regle, quoyqu'elle ne consiste pas en nombres entiers, mais dans une addition et soubstraction des nombres rompus. Sçavoir

Le Quarré circonscrit estant	1.
L'aire ou l'espace du Cercle sera	$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc.

Cette regle est juste à l'infini: et si vous voulez qu'elle surpasse en exactitude celle de Ludolphe, il faut continuer ainsi au mois par l'imagination toutes les fractiones des nombres impairs (: avec plus et moins alternativement :) jusques à $\frac{1}{100{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}001}$ et l'erreur sera moindre que cette fraction. Je dis qu'il suffit de la continuer par l'imagination car une progression reglée telle que l'est celle cy se connoist déja par avance, quoyqu'elle ne soit pas écrite tout au long. Puisqu'aussi il ne s'agit en cela que de la beauté de la contemplation.

Selon Ptolemée

La diametre estant,	la circomference	31416	trop	et l'erreur sera moindre que
10000	sera	31415	trop peu	$\frac{1}{10000}$ du Diametre

Selon Viete

La diametre estant,	la circomference	31415926536	trop	et l'erreur sera moindre que
$10,000,000,000$	sera	31415926535	trop peu	$\frac{1}{10,000,000,000}$ du Diametre

Enfin selon Ludolphe

La diametre estant,	la circomference	314159265358979323847	trop	et l'erreur sera moindre que
$100,000,000,000,000,000,000$	sera	314159265358979323846	trop peu	$\frac{1}{100,000,000,000,000,000,000}$du Diametre

1 *Darüber*: et par consequent la grandeur de la circomference selon le S$^{\text{r}}$ Bertrand est plus que $3142\frac{1}{2}$.

2,10 plus que: vgl. B. de La Coste, *La démonstration de la quadrature du cercle*, 1677, S. 3–9.

9 (39116). NUMERORUM OMNIUM SERIES
[um 1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 2 Bl. 6. 1 Bl. 8°. 2 S.

Datierungsgründe: [noch]

Numerorum omnium series et de progressione binaria.

Quoniam omnes numeri ordine prodeunt ex his 1. 2. 4. 8. 16. Hinc utile erit investigare quomodo hinc duci possint numerorum proprietates. Quaerenda est demonstratio unius, quod omnes numeri sola horum additione possint haberi, sed hoc ita demonstratur quia si numerus aliquis exprimeretur per progressionem decadicam, non alius inde oriretur modus exprimendi quam hic 1001010001 etc. nam binarius in tali expressione non posset poni uti nec decanius ponitur in decadica; Mira oriuntur ex hac expressione. Est enim sola a natura determinata, caeterae omnes arbitrariae. Facillimae in ea additiones multiplicationes divisiones. Admirabilis ad progressiones periodicas in quantitatibus quae integrae rationalesve non sunt exprimendis. Breviter omne in ea latet arcanum Arithmeticae et Geometriae. Videamus quomodo numeri in ea exprimantur.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1111	10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000	11001

Unde patet et modus variandi et ratio progressionis, nam exempli causa ut omnes inter 10000 et 100000 seu inter 16 et 32 inveniantur primum ad 10000 adde 1. Inde 10 et omnes ejus variationes (10. 11) inde 100 et omnes ejus variationes (omnes autem variationes ipsius 100 oriuntur ex variationibus 1. et 10 simul additis) inde 1000 et omnes ejus variationes. Quae fiunt ex variationibus 1. 10. 100. simul additis.

Ex qua NB, perpetua replicatione patet etiam demonstratio vera mirabilis illius propositionis cur summae numerorum replicatorum quos vocant figuratos, sint numeri

15 *Randbemerkung, quer:* Posset et sic scribi: y^4 y^2 idem quod 10101 etc.

progressionis Geometricae unitate minuti.

Numerum datum progressionis decadicae mutares in dyadicum. Habeatur in promtu mutatio tantum numerorum decem centum mille in dyadicos et numerorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. Inde potestates ipsius decem per numeros simplices dyadice expressos multiplicentur. Sed si tabula major detur opus tantum datum numerum in duas dividere partes ut 13265 in 13, 1000 et 265. Nota nil nisi miracula in hac progressione. Puto multiplicandum statim additione fieri posse dividi sine tentando facile inveniri posse numerorum datorum logarithmos. Demonstrari an possibilis Tetragonismus etc.

10 (39275). REMARQUES SUR L'ANALYSE DÉMONTRÉE [1713 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 16 Bl. 1–4.

Datierungsgründe: In den *Acta Eruditorum*, Juni 1709, S. 274–280, ist eine anonyme Rezension des Buches erschienen. Leibniz hatte ein für ihn gesandtes Exemplar des Werkes von Reyneau bis zum 23. April 1713 noch nicht erhalten (vgl. den Brief von Leibniz an J. Bernoulli vom 26. April 1713, gedr. Gerhardt, *Math. Schr.* 3, S. 903–906). **[noch]**

Remarques sur l'*Analyse demontrée* du R. P. Charles Reyneau

Il paroist que le R. P. Reyneau n'a pas eté bien informé du merite de certaines personnes à qui l'Analyse a de grandes obligations; autrement il leur auroit rendu justice sans doute.

Scipion du Fer natif de Boulogne a eté le premier qui a trouvé les racines du 3^me^ degré; et Nicolas Tartalea, ayant receu un defi d'un disciple de Scipion du Fer, les trouva aussi.

Louis de Ferrare, disciple de Cardan a trouvé le premier les racines ou la solution analytique du quatrième degré.

Viete a été premier qui a donné ce qu'on appelle l'Analyse specieuse, c'est à dire l'Algebre literale dans la generalité qui luy convient. Et l'on voit bien qu'il a seu le moyen d'exprimer les courbes par des expressions locales; puisqu'en faisant l'Analyse d'Apollonius cela ne luy pouvoit point manquer. Mais Descartes a publié le premier cette expression des courbes.

On doit à Thomas Harriot Anglois presque tout ce que Descartes nous a donné dans la 3^me^ partie de sa Geometrie, sur l'Analyse des Equations par la multiplication de leur racines et en comparant ces deux auteurs, on ne peut point douter que Descartes n'ait profité des decouvertes de Harriot. Et cela est sur tout visible par cette merveilleuse regle de l'alternation ou consecution des signes qui donne le nombre des racines positives ou privatives ce qu'Harriot avoit trouvée par induction, que Descartes en a copié mais que

12 Scipion *(1)* de *(2)* du Fer | natif de Boulogne *erg.* | à eté *L* 13 Scipion de Fer *L ändert Hrsg.* 15 f. ou . . . analytiqve *erg. L* 23 f. sur . . . racines *erg. L* 26 f. signes . . . ce *erg. L* 27 induction, *(1)* et dont et M. *(2)* et qve *L*

personne a pû demontrer jusqu'icy.

On doit à Descartes les expressions des Courbes par des Equations locales, et la recherche des tangentes par les racines egales. François Slusius dans son *Mesolabum* a monstré comment les equations locales servent à la resolution des Equations.

Jean Hudde a porté plus avant l'Analyse des Equations en considerant leur production par multiplication. Fermat, Frenicle et Osannam ont avancé l'Arithmétique de Dioφante, qui cherche des nombres rationaux.

On doit à Fermat la methode de maximis et minimis et des Tangentes par des grandeurs infiniment petites et Hudde a poussé cette methode.

On doit à Kepler, Galilei, Cavalerius et Torricelli, l'avancement d'une certaine Geométrie des indivisibles mais fort bornee; par le moyen de ce qu'ils appelloient les sommes des ordonnées.

Le Pere Gregoire de S. Vincent a fort avance cette doctrine par ses ductus, et par la reduction de l'Hyperbole aux Logarithmes.

Fermat, Roberval, Pascal, Wallis ont aussi avancé la doctrine des Quadratures.

Mais Hugenius, Wallis, Jaques Gregori et Barrovius ont avancé la Geometrie des infiniment petits à quelque chose de plus considerable.

C'est par leur ouvertures que j'ay trouve l'Analyse des infinitesimales; en reduisant au Calcul ce qu'Archimede et ces Modernes faisoient par figures; comme Viete et Descartes ont reduit au calcul ce qu'Apollonius faisoit par figures.

Nicolaus Mercator de Holstein trouva le premier la Quadrature de l'Hyperbole par une series qui va a l'infini.

Newton et Jaques Gregory pousserent cette ouverture. Et moy je la poussay aussi, non seulement en donnant la Quadrature Arithmetique du Cercle par le meme moyen, mais aussi en donnant ces sortes de series per regressum pour toutes sortes de problemes ordinaires et transcendans, ce qui contenoit aussi des approximations.

Cependant la doctrine des approximations a été aussi poussé par d'autres voyes.

3–7 François ... rationaux *erg.* *L* 8 doit à *(1)* Fermatius *(2)* Fermat *L* 9 et Hudde ... methode *erg.* *L* 10 Torricelli, *(1)* une *(2)* Roberval *(3)* l'avancement *L* 12 f. ordonnées. | c'est ce qve Wallisius et Bullialdus ont poussé *gestr.* | Le *L* 14 f. Logarithmes. *(1)* Fermatius, Pascal, Roberval, Wallis, *(2)* Fermat *L* 16 Wallis, *(1)* Gregori et *(2)* Jaqves *(a)* Gregory *(b)* Gregori *L* 16 ont | plus *gestr.* | avancé *L* 19 comme *(1)* M. Desca *(2)* Viete *L* 21 premier *(1)* les *(2)* les expressions des gran *(3)* la *L* 22 f. l'infini. *(1)* Messi *(2)* Newton et *(a)* Gregory p *(b)* Jaqves *L* 25 series *(1)* per regressum; via generali *(2)* per *L*

Viete a été le premier qui a fait des grands progrès la dessus, per Resolutionem Numericam Aequationum.

Depuis Hugenius, et Jaques Gregory ont donné de belles approximations sur le Cercle.

Plusieurs ont travaillé à des approximations assés abrégées des valeurs des Equations. Il y a longtemps qu'on a donné la dessus des bons essais en Angleterre. Mais en Angleterre meme on a fort approuvé ce que M. Lagny a fait et quelqu'un l'a avancé. Il paroist aussi que M. Rolle a fait des progrès considerables là dessus, quoyque je n'en sache, que ce que le R.P. Reyneau en rapporte.

Messieurs Newton, Bernoulli et M. le Marquis de l'Hospital ont fort avancé l'Analyse des infinitesimales.

Nous pouvons dire que l'Arithmetique et Geometrie, ou en un mot la Mathematique pure est reduite à sa perfection quant à la practique. Mais elle est encor infiniment imparfaite, quant à la theorie, ou quant à l'art de l'inventer.

Dans l'Arithmetique le plus souvent nous ne savons pas encor le moyen de venir a bout des problemes à la methode de Dioφante, et souvent nous ne savons pas meme juger s'ils sont possibles. La Dyadique nouvelle que j'ay trouvée donne un moyen pour en venir à bout.

Dans l'Algebre ou dans l'Arithmetique indeterminee, nous n'avons pas encor le moyen de trouver les racines du 5me degré et au delà. Car la Methode generale du R. P. Reyneau ne reussit pas.

Notre Analyse Geometrique pour la construction de problemes ordinaires ne vaut rien le plus souvent. On force les problemes Geometriques pour les faire devenir Arithmetiques en les reduisant aux Equations; et puis on force derechef ces problemes arithmetiques ou Equations pour les faire redevenir Geometriques, en tirant des Equations une telle quelle construction.

Et il est rare quand par cette voye on arrive aux bonnes constructions. Ainsi la vraye Analyse Geometrique, et la bonne methode de constructions nous manquent entierement.

Les anciens en savoient plus que nous. Puisque nostre Arithmetique, Algebre et

11 f. infinitesimales. *(1)* Mais avec tout cela nous ne so *(2)* Nous *L* 12 et | Geometriqve *ändert Hrsg.* | , ou *L* 14 l'inventer. *(1)* Dans l'Analyse nous ne *(2)* dans *L* 15 encor *(1)* qvand les problemes son *(2)* le moyen *L* 17 f. La Dyadiqve ... bout *erg. L* 19 Dans *(1)* l'Analy *(2)* l'Algebre *L* 19 nous *(1)* ne savons *(2)* n'avons *L* 22 f. vaut *(1)* ordinairement *(2)* rien *L* 24 derechef *(1)* les eqv *(2)* ces *L* 29–24,1 nous. *(1)* Apres cela *(2)* | Puisqve *(a)* l'Algebre et l'Arithmetiqve *(b)* nostre ... imparfaites *erg.* | il *L*

Geometrie sont encor si imparfaites il ne faut pas s'etonner si l'Analyse des infinitesimales n'est que dans les commencemens; et que nous ne sommes pas encor absolument les maitres ny des quadratures, ny encor moins de l'inverse des Tangentes; et bien moins encor de la solution des Equations differentielles des degrés suivans.

Pour ne rien dire de certains problemes, qui ne sauroient pas memes etre reduits aux Equations differentielles et qui passent tout ce qu'on a inventé jusqu'icy.

Je voudrois que ceux qui nous expliquent ces matieres, reconnussent bien l'imperfection de notre science, et s'ils l'ont reconnue, qu'ils ne la deguisassent point. C'est pour reveiller les esprits et les exciter à aller plus avant, au lieu qu'ils s'endorment s'ils croyent que tout est fait.

Je viens maintenant à l'ouvrage même du R. P. Reyneau. Il commence par des Problemes et je ne le desapprouve point, par ce qu'il suppose la demonstration des regles du Calcul donné par M. Bartholin et autres. Mais il y a encor des difficultés là dessus qui meritent d'être éclaircies par exemple il n'est pas vray (au juste) que les racines du meme degré de grandeurs egales sont egales. Et il n'est pas tousjours vray non plus que deux formules egales divisées par des formules egales, donnent des quotiens egaux.

Je souhaiterois que les exemples fussent pris de questions belles et utiles, au lieu d'etre purement abstraits le plus souvent.

J'aurois desiré des formules canoniques les quelles une fois bien calculées, et bien réglées, servent tousjours, et donnent des grandes ouvertures: Par exemple le produit des formules $a+b+c$ etc et $l+m+n+$ etc multipliées ensemble est la somme de toutes les binions ou les deux lettres sont prises des deux formules produisantes.

Et le produit de trois formules $a+b+c+$ etc. par $l+m+n+$ etc., par $s+t+v+$ etc. est la somme de toutes les ternions, ou les trois lettres sont prises des trois formules proposantes. Et il en est de meme de tant de formules qu'il vous plaira. De ce Canon, peut estre tiré le Canon general des puissances. Il y a quantité de Canons semblables qu'il seroit important de donner. Ces Canons auroient été importans sur tout pour degager les Equations des inconnues, et pour trouver les valeurs de ces inconnües, quand il y a plusieurs Equations a plusieurs inconnues.

4 degrés *(1)* inferieurs *(2)* suivans *L* 11 f. par *(1)* les Theoremes, et je ne les de *(2)* des Problemes *L* 14–16 par exemple ... egaux *erg. L* 16 deux *(1)* grandeu *(2)* formules *L* 19 des *(1)* Canons ou *(2)* formules *L* 20 f. produit *(1)* d'a + b + c etc par *(2)* des formules *L* 22 formules *(1)* proposées *(2)* produisantes *L* 27 tout *(1)* pour avoir *(2)* pour degager *L*

Le signe $\times$ pour marquer les Multiplications, me paroit inutile le plus souvent, les points commes, parenthèses et souvent meme les simples appositions y suffisent ordinairement; outre que ce signe est sujet à l'equivoque, étant pris pour x par les copistes et imprimeurs.

Je voudrois qu'on ne negligeast pas sans sujet la loy des homogenes, et en cela je suis plus tost pour la manière de Viete que pour celle de Descartes. L'observation de cette loy fait mieux connoitre les rapports; outre qu'elle sert souvent a eviter les erreurs du calcul.

Je trouve aussi que bien souvent on doit observer ce que j'appelle la l o y d e l a j u s t i c e la quelle donne des grands abregés du calcul.

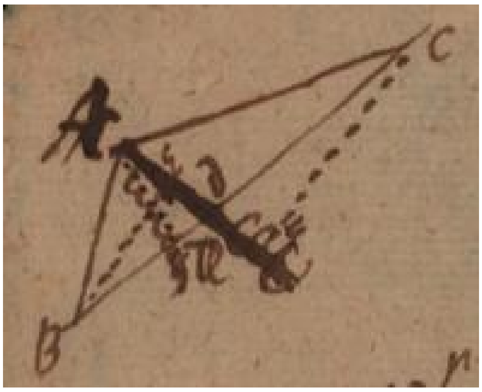
En voicy un exemple facile à l'occasion de ce qui se dit au premier livre de l'*Analyse démontrée* p. 16.17. Il y a quatre inconnues, v, x, y, z; et quatre equations $v+x+y-z = a \quad v+x+z-y = b \quad v+y+z-x = c \quad x+y+z-v = d$, l'on trouve par le calcul ordinaire suivant ces pages, $x = a+b-c+d,: 4$ cela etant trouvé, j'en tire cette consequence par la loy de la justice, les rapports estant semblables qu'il y aura $v = a+b+c-d,: 4$, et $y = a-b+c+d,: 4$, et $z = -a+b+c+d,: 4$, sans qu'on ait besoin de calcul et des substitutions qui se font pag. 17. pour trouver y, z et v, apres avoir trouvé x. J'ay reconnu que cette doctrine des rapports semblables est d'un grand usage dans l'Analyse, et cependant elle n'a pas encor été cultivée.

1 les *(1)* publications *(2)* Multiplications *L* 2 points *(1)* ou commes, y suffisent *(2)* commes, *L* 16 besoin *(1)* des substitutions *(2)* de calcul *L* 17 f. J'ay *(1)* trouué *(2)* reconnu qve *L*

11 (39295). TRIANGULA SIMILIA
[Sommer 1678 – Sommer 1679 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III B 18 Bl. 9. 1 Zettel **[noch]**. $1\frac{1}{2}$ S. — Bl. 9 hing ursprünglich zusammen mit LH 35 III B 18 Bl. 8 (Bl. 8 r° = VI, 4 N. 27) und LH 35 III B 28 Bl. 9.

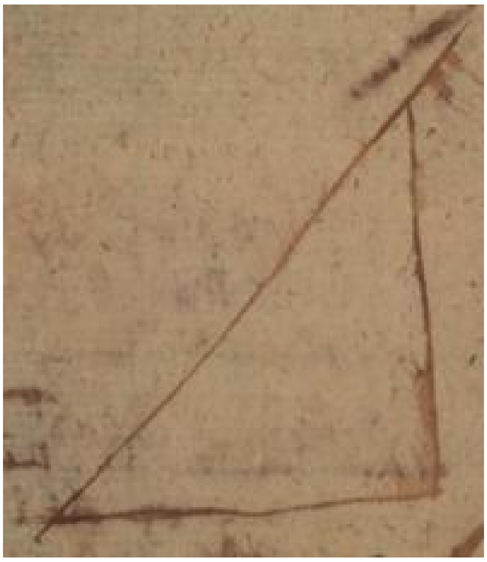
Datierungsgründe: Die Notiz dürfte etwa zur selben Zeit entstanden sein wie die von den Herausgebern auf Sommer 1678 – Sommer 1679 (?) datierte Notiz VI, 4 N. 27.



[*Fig. 1*]

Si in Triangulo recta angulum bisecet, segmenta lateris oppositi erunt lateribus adjacentibus proportionalia, seu si angulus CAD aequalis sit angulo BAD, erit CD ad BD, ut CA ad BA. Demissis perpendicularibus BE et CF in AD et AG in BC, erit et $CF : BE :: CD : BD$ et rursus ob angulos BAE, CAF aequales seu triangula BEA, CFA similia, erit $CF : BE :: CA : BA$. Ergo $CD : BD :: CA : BA$.

[*Figur auf der Rückseite*]

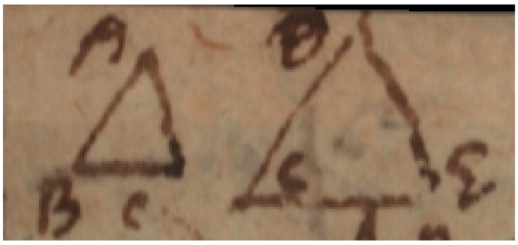


[*Fig. 2*]

12 (39301). SIMILITUDO, RATIO, ANALOGIA
[1680 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III B 18 Bl. 16. 1 Zettel **[noch]**. 5 Z. auf Bl. 16 r°. — Auf Bl. 16 v° Rechnungen ohne direkten Bezug.

Datierungsgründe: **[noch]**



[*Fig. 1*]

ABC ::: DCE similitudo.
$AB : BC$ ratio AB ad BC.
$AB : BC :: DC : CE$ analogia.

[*Rechnungen auf der Rückseite*]

1	12	120	f	3	2	12
1		36			2	28
2	28					
1						
5	4					

13 (39360). PROPOSITIONES PRIORES SEX ELEMENTORUM [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 63. 1 Bl. ca 8°, von dem der linke Rand unregelmäßig beschnitten ist. 1 S. Bl. 63 v° leer.

Datierungsgründe: [**noch**]

Propositiones quae in sex prioribus propositionibus 1^{mi} libri Elementorum Euclidis tacite sine probatione assumuntur. Utor autem hic editione Barrovii. Pleraeque non sunt faciliores vigesima primi: Quod duo trianguli latera sunt major tertio.

In prop. 1. Si duo circuli mutuo habeant centrum in alterius circumferentia, sibi occurrunt eorum circumferentiae.

In prop. 2. Si rectae extremum unum sit centrum circuli, ea recta producta ex hoc extremo occurret circumferentiae circuli.

In prop. 3. Si recta sit major radio circuli, et unum ejus extremum sit centrum circuli, ipsa circumferentiae ejus occurrit.

In prop. 4. Si duae rectae sint aequales extremumque unum unius congruat uni extremo alterius, et adhuc aliud punctum unius alicui puncto alterius congruat, totae rectae congruunt.

In eadem. Si duo sint anguli aequales, possunt ita sibi applicari, ut uno latere uni congrunete, etiam alterum alteri congruat. In eadem. Si duae lineae habeant eadem extrema, et non comprehendant spatium, inter se congruent.

In eadem. Si triangulorum latera congruunt, ipsa triangula congruunt.

In eadem. Si angulorum latera congruunt ipsi anguli congruunt.

In prop. 6. Si ex trianguli angulo uno ad punctum sumtum in latere opposito, aliud ab ejus extremis, agatur recta: triangulum comprehensum sub recta ducta, parte lateris oppositi inter extremum et punctum ejus cui recta ducta occurrit intercepta, et latere trianguli alio ad idem extremum pertinente; erit pars prioris trianguli.

---

7 editione Barrovii: EUKLEIDES, *Elementorum libri XV*. Hrsg. v. I. Barrow. Cambridge 1655; London 1659; 2. Aufl. Osnabrück 1676 [Marg.].

14 (39361). EXEMPLA DEMONSTRATIONUM GEOMETRICARUM [1684 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 64–65. 1 Bog. 8°. $2\frac{2}{3}$ S. Bl. 64 v° leer.

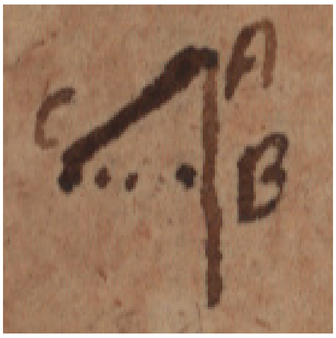
Datierungsgründe: [**noch**]

[*Teil 1*]

Superpositio utilis est ad demonstrationem non vero ad constructionem. Unde Euclides puncto A alicui apponere volens rectam datae BC aequalem non eam huc transtulit Circino cum alioqui potuisset tantum centro A intervallo aequali ipsi BC describere circulum, et producere rectam ex A occurrentem Circulo quae fuisset quaesita.

[*Teil 2*]

Ex rectae datae puncto dato educi potest recta angulo dato. Hoc fieri potest si angulus datus puncto dato, crus autem unum rectae datae applicetur, alterum crus erit recta quaesita.



[*Fig. 1*]

Ad rectam datam AB ex puncto dato C duci potest recta angulo dato CAB. Ex puncto dato C in rectam AB agatur perpendicularis CB. ex cujus puncto C angulo ACB qui sit complementum ipsius anguli dati ad rectum educi potest (per praecedentem) recta CA. Occurret illa rectae AB alicubi in A angulo dato CAB. quia anguli A et C simul

7 volens: Eukleides, *Elementa*, I, 2.

sunt aequales recto.

[*Teil 3*]

Si duo quaedam puncta aequaliter distent ab aliqua recta etiam recta per ea transiens ab ea aequaliter distet.

Videamus an hoc compendiose demonstrari possit ex nostris Axiomatibus. Sit recta AB et duo puncta C et D, cum puncti C eadem sit distantia ab AB, quae puncti D, patet C et D eodem modo se habere ad AB, seu esse $C.AB \infty D.AB$. Jam recta per C et D ex solis C et D positis determinatur, seu est sui situs unica ad C et D. Unde videndum quomodo consequatur et ipsam sese ubique eodem habere ad rectam AB. Et generaliter an talis procedat consecutio: Si plura determinantia idem eodem vel simili modo se habeant ad aliquid; etiam quaelibet sui ad ipsa situs unica, seu ex pluribus illis determinata eodem vel simili modo se habebunt.

In recta per $C.D.$ sit punctum E erit $E.C.D.$ un. Jam $C.AB \infty D.AB$. Ergo ∞ $E.AB$. Nimirum quia E resultat ex relatione ipsarum C et D ad AB. Jam si alia est relatio E ad AB, quam ipsius C vel D ad AB non potest reddi ratio cur distantia sit major vel minor, quae tamen ex his solis EC et ED invenienda est, seu per circulos centris C et D, intervallis CE et DE descriptos se tangentes in E. Sed cum in his circulis nihil aliud contineatur, quam centrum et magnitudo radii et haec sola ad E determinandum sufficient; centra autem ejusdem situs ad AB, magnitudo vero sola radii nihil ad position⟨em⟩ faciens superaddat, nihil intelligi potest, quod positionem ipsius E aliam faciat ad AB, quam quae est in C et D. Sane si circuli se non tangerent sed secarent, adeoque E non esset in recta CD, duo forent E diversa et ad determinandum alterutrum accedere deberet aliquid, quod variare positionem potest. Ubi tamen rursus in ambobus simul sumtis ratio determinantium C et D haberetur, ita ut quanto unum E esset propius ad AB, quam CD, tanto alterum E foret remotius; ita ut medium inter ipsa (quod ad C et D unicum est) sit aeque propinquum ad C et D.

Hoc nostrum axioma etiam in exemplis aliis innumeris succedit, ut si tria puncta eodem modo se habeant ad aliquid, etiam planum per ipsa transiens aequaliter se ad id habebit; v. g. ad rectam, ad aliud planum, ad circulum. Sunt tamen instantiae in contrarium, v. g. duo sint puncta A et B aequidistantia a puncto C, non ideo recta AB ubique eodem modo ad C se habebit, seu a C distabit. Hic operae pretium foret invenire veram limitationem.

15 (39363). AD PRIMAM PRIMI EUCLIDIS [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 66–67. 1 Bog. 8°. 3 S. Bl. 66 v° leer. Textfolge Bl. 67 r°, 67 v°, 66 r°.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für das Jahr 1686 belegt.

[*Teil 1*]

In prima 1$^{\text{mi}}$ Euclidis duo sine demonstratione et postulatione assumuntur. P r i m o duos circulos centris extremis rectae intervallo ipsa recta descriptos se secare, s e c u n d o si se secent, punctum intersectionis cadere intra rectam. P r i m u m sequitur ex hac generali propositione. Si continuum partem habeat intra figuram partem extra, occurrit circumferentiae ejus in aliquo puncto. Nam cum continuum sit, ideo pars intra et pars extra figuram habent communem punctum, at quicquid commune est extra et intra figuram existenti, cadit in ejus circumferentiam. Ergo punctum aliquod continui cadit in figurae circumferentiam. Est autem circulus figura undique clausa, quo planum in duas partes dividit, quam a plano abscindit et totum reliquum planum.

Quod s e c u n d u m a t t i n e t intersectionem cadere in circulorum aequalium ex recta radio, extremis centris descriptorum non cadere in rectam ex eo patet, quod non dantur tria puncta in eadem recta quorum unumquodque ab unoquoque reliquorum aequaliter distet. Sed ipsam demonstrationem exhibeamus pagina sequenti.

[*Teil 2*]

Si duo circuli in eodem plano habeant mutuo centrum in alterius circumferentia eorum circumferentiae sibi occurrunt, extra rectam per centra.

[*Fig. 1*]

Sit circulus centro A intervallo AB et alius centro B intervallo BA. Ajo eos sibi occurrere extra rectam per centra A. B transeuntem. Producatur recta AB usque ad D sitque AD dupla AB seu $AB = BD$. Porro planum vocetur $\overline{P}$. seu quodlibet plani punctum P. Circulus centro A descriptus vocetur $\overline{L}$ seu quodlibet punctum intra circulum sit L ita ut $AL \sqcap AB$. At circumferentia circuli vocetur $\overline{M}$ et $AM = AB$ et planum extra Circulum vocetur $\overline{N}$. ita ut sit $AN \sqcap AB$. Circumferentia autem Circuli centro B descripti vocetur $\overline{R}$ ita ut sit $BR = BA$. Ajo quoddam R esse M. Nam si ostenderimus quoddam R esse L et quoddam R esse N adeoque in duobus plani partibus cum $\overline{R}$ sit continuum sequetur etiam quoddam R esse M in partium L et N communi termino M. Jam quoddam R est L. Nam quoddam R est A (quia $BA = BA$) et A est L (quia $AA \sqcap AB$. Similiter quoddam R est N. Nam quoddam R est D (quia $BD = BA$) et D est N (quia $AD \sqcap AB$). Habemus ergo quoddam R esse M seu duas circumferentias $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sibi alicubi occurrere in C. Superest ut ostendamus C non cadere in rectam per A et B. Cadant enim A, B, C in eandem rectam. Ex his tribus AB, AC, BC una aequalis foret summae duarum reliquarum, ac proinde major una ex ipsis, cum tamen sit aequalis.

[*Teil 3*]

Recta Linea Circulo in pluribus quam duobus punctis occurrere non potest.

Demonstratio

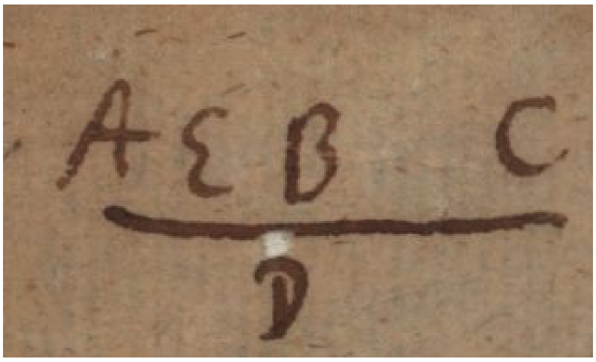
Si tria aliqua puncta circumferentiae circuli A. B. C. sunt in eadem recta, erit unum ex ipsis ut C sui situs unicum ad duo reliqua A et B (ex definitione rectae mea). Jam centrum circuli D est etiam sui situs unicum ad tria puncta circumferentiae A. B. C. Ergo etiam D unic. ad A. B. Ergo erit etiam D in eadem recta. Sed impossibile est centrum circuli esse in eadem recta cum tribus circumferentiae punctis. Nam ab unoquoque eorum aequaliter distare debet; impossibile est autem punctum D sumi in recta, quod a tribus ejusdem rectae punctis A, B, C aequaliter distet. Ex his enim tribus punctis sint inter se maxime remota A et C, erit AB pars ipsius AC. Et quia $AD = BD$, erit AD dimidia AB, similiter quia $AD = CD$ erit AD dimidia AC. Aequales ergo sunt AB et AC pars et totum. Quod est absurdum.

16 (39365). DE PARTIBUS ET TOTO [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 68. 1 Bl. 8°. 2 S.

Datierungsgründe: **[noch]**

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

(1) E est in AC. (2) E est in AB. (3) $AB = AD$. (4) $AD + DC \infty AC$. (5) $AE + EC \infty AC$ (per 1). $AE + EB \infty AB$ (per 2). (6) Ostendendum est E esse in AD. seu $AE + ED \infty AD$.

$AD + DC(\infty AC) \infty AE + EC$. $AD - AE \infty EC - CD$. Ergo $AD - AE - CD \infty EC - CD - DE$.

R u r s u s $AB = AD$. Demonstr. $AB \infty AD$. $AE + EC \infty AC$. $AE + EB \infty AB$. $AD + DC \infty AC$.

$AD = AB$. Ostendendum est esse $AE + ED \infty AD$. Hoc ostendetur, si ostensum sit AE et ED non habere partem communem. AE et EB non habent partem communem, AE et EC non habent partem communem. AD et DC non habent partem com. sed AD et [*bricht ab*]

[*Teil 2*]

[*Fig. 2*]

(1) Si sit dist. $AY+$ dist $YB =$ dist AB erit (2) rect. $AY+$ rect. $YB \infty$ rect. AB.

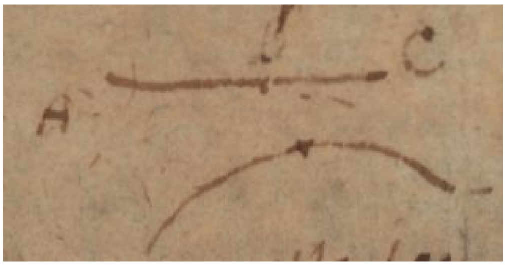
(3) Est rect. $AB \sqcap$ rect. AY. ((4) Nam ex 1. dist. AB id est magnitudo rect. AB est $\sqcap$ dist. AY.)

(5) Ergo potest intelligi $AZ+$ rect. $ZB \infty$ rect. AB. ita ut sit rect. $AZ =$ rect. AY (ex definitione maj. et min.).

(6) Ergo et rect. $ZB =$ rect. YB (per 1 et 5). Ergo Z ejusdem est situs.

Si $A.B.C.$ sint in eadem recta erit aut $AB + BC = AC$, aut $AC + CB = AB$ aut $BA + AC = BC$. Sit AC caeteris majus seu $AC \sqcap AB$ seu $AC \infty AE + EC$ posita $AE = AB$ seu $AC = AB+EC$. Sit $AC \sqcap BC$ erit $AC = BC+DA$, $AB-BC = DA-EC$ seu $EC - BC$ [=] $DA - AB$.

Si duae lineae terminentur ad idem punctum, nec habeant aliud punctum commune component totum aequale ambobus.



[*Fig. 3*]

Si duae sint partes ejusdem rectae, AB, BC consistentes ad commune punctum B, nec habeant partem communem componunt rectam cui ambae simul aequantur.

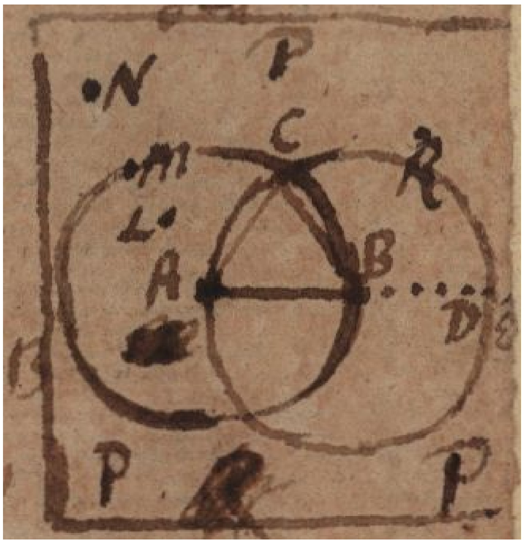
Nam AB et BC non habent partem communem (ex hyp.[)]. Ergo $AB + BC = AC$ (nam per ax. 7. totum coincidit omnibus partibus simul sumtis partem communem non habentibus[)]. Jam AB et BC sunt in aliqua recta seu partes rectae (ex hyp.). Ergo sunt ipsae rectae (per prop. 4). Ergo per prop. 9. $AB + BC \infty$ rectae AC.

17 (39366). PRIMAE PROPOSITIONES PRIMI ELEMENTORUM [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 69–72. 2 Bog. 8°. 6 S. Bl. 69 v° u. Bl. 70 v° leer.

Datierungsgründe: [**noch**]

Prop. 1. lib. 1$^{\text{mi}}$ Euclidis



[*Fig. 1*]

Super data recta linea terminata AB triangulum aequilaterum ABC construere.

Circumferentia circuli centro A radio AB descripta sit $\overline{M}$ et $AM = AB$. Et circumferentia circuli centro B radio BA sit $\overline{R}$ et $BR = BA$. Circumferentiae sibi occurrent seu erit aliquid M $\diagup\!\!\varrho$ aliq. R (per Lemma sequens). Id sit C. Junge AC ($= AM = AB$) et BC ($= BR = BA$). Ergo $AC = AB = BC$. Quod erat Fac.

Lemma

Si duo Circuli MB ex A et RA ex B habeant mutuo centrum in alterius circumferentia B in $\overline{M}$ et A in $\overline{R}$. eorum circumferentiae $\overline{M}$ et $\overline{R}$ sibi occurrent alicubi in C.

Iisdem quibus supra positis, plani $\overline{P}$ in quo omnia sunt[,] duae sunt partes $\overline{L}$ intra circulum ex centro A, et $\overline{N}$ extra circulum. $AL \sqcap AB$. $AN \sqcap AB$. Jam qu. R est L (nam qu. R est A quia $BA = BA$ et A est L quia $AA \sqcap AB$) et qu. R est N. (Quod sic ostendo: Producatur AB in D ut sit $BD = BA$ seu AD dupla AB. D erit R et D erit N: Ergo qu. R est N.) Ergo per axioma de continuis qu. R est M. Qu. E. D.

Axioma de continuis

Si ejusdem continui $\overline{P}$ duae sint partes integrantes L et N, sitque aliud continuum $\overline{R}$ tam intra $\overline{L}$ quam intra $\overline{N}$ erit aliquod ejus punctum C in $\overline{M}$. communi termino ipsorum $\overline{L}$ et $\overline{N}$. Potest demonstrari ex definitione continui $\overline{R}$ cujus duae partes quae est intra et quae est extra $\overline{L}$ habent terminum communem qui est in termino communi $\overline{L}$ et $\overline{N}$.

Secunda primi

[*Fig. 2*]

Ad datum punctum A ponere datae rectae BC aequalem rectam AG.

Solutio: Jungatur AC, super qua Triangulum aequilaterum construatur per 1.1.

Centro C radio CB describatur circumferentia BE cui recta DC producta versus C occurret in E (per Lemma sequens). Centro D radio DE describatur Circulus, cui recta DA producta versus A occurret in G (per idem

Lemma). Ergo $AG = BC$.

Demonstratio

$$DC + CE = DE = DG = DA + DG = DC + AG.\ \text{Ergo}\ AG = CE = BC.$$

Lemma

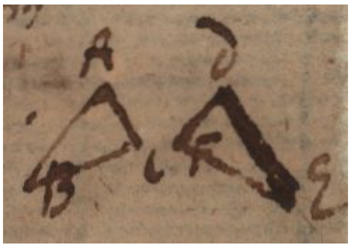
[*Fig. 3*]

Si recta DC cujus terminus C est centrum circuli BE producatur ad partes centri occurret circumferentiae alicubi in E. Produci enim potest in infinitum, ergo aliquando erit extra circulum cum scilicet distantia a C est major radio, prius ergo in circumferentia, ex natura continuorum.

De qua ad 1. 1^{mi}.

3^{tia} primi ex his clara est, ita ut nihil opus sit addi.

Quarta primi



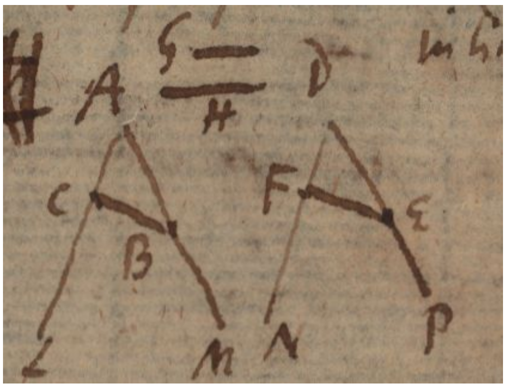
[*Fig. 4*]

Si duo Triangula BAC, EDF duo latera BA, AC duobus lateribus ED, DF respective aequalia habeant, habeant vero angulum A angulo D aequalem sub aequalibus lateribus contentum, tunc etiam basin BC basi EF aequalem habebunt, eritque triangulum BAC triangulo EDF aequale ac reliqui anguli B, C reliquis E, F. quibus aequalia latera subtenduntur.

[*Fig. 5*]

Haec propositio ab Euclide et ejus interpretibus demonstratur per superpositionem, ubi tamen aliqua praesupponuntur, primo si recta DE rectae AB superponatur sic ut D cadat in A, sintque DE et AB aequales, coincidere seu congruere DE et AB. Secundo si anguli duo aequales CAB, FDE consistant ad idem punctum coincidentibus D et A coincidatque indefinite latus unum unius anguli, lateri uni alterius anguli, AB ipsi DE, denique duo reliqua latera AC, AF sint ad easdem partes; etiam ipsa haec latera indefinite coincident. Quae duo cum non contineantur inter Axiomata, erant demonstranda.

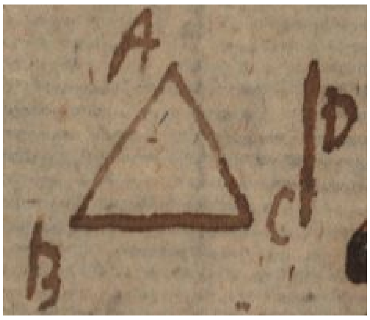
Mihi hanc propositionem consideranti videtur talis institui posse demonstratio: Triangulum datis duobus lateribus et uno angulo est datum. Itaque haec sunt determinantia sufficientia. Eademque utrobique congrua sunt; ex Hypothesi, et Determinantibus existentibus congruis congrua sunt determinata per Axioma meum. Itaque Triangulum triangulo congruum est.



[*Fig. 6*]

In literis[:] Sint duo anguli aequales LAM, et NDP, seu ang. $LAM \infty$ ang. NDP. Ex AL et DN abscindantur DC, et DF, $= G$; et ex AM et DP abscindantur AB, DE, $= H$. Dabuntur positione puncta C, B, item F, E; ergo et triangula ABC, DEF, cumque nullum discrimen sit in modo quo inveniuntur, congrua erunt ABC et DEF.

Quinta primi



[*Fig. 7*]

Triangulum isosceles isogonium est et contra seu in triang. ABC si $AB = AC$ erit ang. $B =$ ang. C, nam fit triang. isosceles.

Centris B et C. radio $= D$ describendo circulos se secantes in A (ad instar prim. 1.) et jungendo BA, CA, inveniuntur anguli B et C. ambo eodem modo. Ergo aequales sunt.

Sexta primi

Triang. isogonium isosceles est. Datis angulis B et C ad BC aequalibus eductae rectae se secant in A, cum ergo AB et AC eodem modo inveniantur erunt aequales.

18 (39450). UNA LINEA (I)
Januar 1680

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XII 1 Bl. 219. 1 Bl. 16°. 2 S. — N. 18 (39450) und N. 26 (39645) sind vermutlich aus demselben Blatt Papier geschnitten bzw. gerissen worden.

Januar. 1680

Una Linea

Nemo naturam lineae accurrate intelligit, nisi inde explicare possit, quae sit linea unica simplex, et quae composita. Suo quodam modo omnis linea unica est, et si per Galliam Romam tendam, inde per Germaniam revertar, continua illa quam motu meo descripsi linea unicam quandam certam habet definitionem seu proprietatem ipsi soli debitam. Idem dici potest de linea ex omnibus motibus vitae meae composita. Imo et de composita ex lineis omnibus quas punctum aliquod in mundo designabile descripsit inde ab initio rerum describetque in omne aevum. Ea nimirum exprimetur per aequationem ortam ex aequationibus singularum componentium in se ductis. Hoc tamen addendum ut ex ipsa illa definitione appareat ubi primo sensu generalis proprietatis cessante, incipiat alter. Id enim solo ductu in se invicem aequationum non efficitur. Caeterum potest una linea continua simplex a pluribus compositis hoc modo distingui. Ut linea aliqua illic desinere et cum nova angulum facere intelligatur ubi composita ex ipsis duabus plures in earum confinio tangentes habet ad idem punctum. Nam si quidem non nisi unica sit tangens communis, dicendam est lineam simplicem eandem continuari.

[*Fig. 1*]

Est tamen aliqua difficultas, nam continuata Circuli provolutione Cycloides plures componere videntur unam lineam continuam, nihilominus composita in puncto communi plures habet tangentes. Jam video remedium, opus est ut duae reperiantur extremae tangentes duarum partium angulum facientes inter se. Sed si ea sit utrobique communis seu coincidens, nempe hic perpendicularis ad basin, tunc possunt intelligi partes unius simplicis lineae, quasi esset species cycloidis secundariae.

19 (39529). DE PRIMIS GEOMETRIAE ELEMENTIS
Januar 1680

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 324–325. 1 Bog. 2°. $1\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 324. Auf Bl. 325 N. 20 (39530). — Gedr.: 1. Echeverría, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 311–316; 2. (mit frz. Übers.) Echeverría / Parmentier, *La caractéristique*, 1995, S. 276–285.

Januar. 1680

De primis Geometriae Elementis

In Geometria duo sunt consideranda in summa, extensio et situs. Est autem Extensum, continuum in quo possunt assignari partes quae sunt simul. Continuum autem est in quo partes sunt indefinitae, sive in quo partes mente tantum designantur. Partibus autem in extenso designatis, plura jam oriuntur extensa, quorun habentur termini; et situs. Est autem Situs nihil aliud quam status ille rei quo fit ut simul cum extensis certo modo existere intelligatur; sive coexistendi modus. Terminus autem est in extenso cujus idem est situs qui alterius in alio extenso, ut superficies convexa orbis interioris et concava orbis exterioris super interiore gyrati, patet enim superficies illas duas etsi differant, una enim mota quiescit altera, non tamen situ differre, sed congruere.

Spatium est in quo per se spectato nihil aliud considerari potest, quam quod extensum est. Punctum est in quo per se nihil aliud spectari potest, quam quod situm habet. Itaque Spatium est interminatum, alioqui enim praeter ipsum aliud spectandum esset, quo terminetur; seu praeter extensionem spectandi in eo essent termini. Punctum autem est indivisibile alioqui in eo spectari possent partes, ac proinde praeter situm et extensio. Est itaque Spatium simplicissimum in extensione. Punctum simplicissimus in situ.

Porro uno aliquo Puncto assumto, nihil aliud praeterea determinatur, sed assumtis duobus punctis, aut etiam pluribus, eo ipso determinatur aliquid aliud praeterea, quod

8 situs. *(1)* Situm autem habet *(2)* Est *L* 9 continuum *(1)* cuius partes sunt simul *(2)* in *L* 10 indefinitae, *(1)* qvod secus est in discreto *(2)* siue in qvo partes *(a)* non sunt *(b)* mente *L* 12 qvam *(1)* il *(2)* modus ille rei qvo fit ut aliis *(2)* status *L* 16 etsi | natura *gestr.* | differant *L* 17 est | extensum *gestr.* | in *L* 17 f. , qvam … est *erg.* *L* 20 qvo *(1)* determinetur *(2)* terminetur *L*

ex ipsis datis unicum est. Id autem quod duobus punctis assumtis determinatur, est extensum simplicissimum quod per ipsa transit, hoc autem vocamus r e c t a m. Nimirum dum animus duo puncta in Spatio designat, eo ipso rectam concipit interminatam per ipsa transeuntem, aliud enim est singula singulatim spectare, aliud ambo ut existentia simul, adeoque situm quem invicem habent. Itaque duobus ut simul existentibus spectatis, aliquid aliud praeter ipsa inde resultare necesse est. Cum unum ex his duobus punctis perinde consideramus ac si nos in eo essemus, alterius vero ad hoc situm, quicquid inde determinatur animo considerandum dicitur p l a g a ; recta nimirum ex uno versus alterum indefinite educta. Porro recta est uniformis, sive ubique sibi similis est, alioqui praeter duo puncta quorum consideratione determinatur, aliquid aliud assumendum esset, quo explicari posset species dissimilitudinis. Hinc pars parti, et pars toti similis est in recta. Et quia rectae aequales, si extrema sibi applicentur, congruunt (alioqui darentur duae rectae inter duo puncta, adeoque recta non esset ex duobus punctis determinata contra definitionem) hinc duae rectae aequales sunt similes. Jam cum una recta alteri sit aequalis vel major vel minor, saltem in una assumi poterit pars alterius parti aequalis imo alteri toti, quae cum sint similes (quia aequales), et pars rectae toti sit similis, et quae similes sint in tertio sint similes inter se, erunt duae quaevis rectae similes inter se. Similia autem voco quae singulatim percepta distingui non possunt, sed tum demum si ambo simul percipiantur, sive si percipiatur eorum ad se invicem situs. Recta etiam a puncto ad punctum minima est, quia si alia daretur minor, ea simplicius determinaretur, quod fieri non potest cum ista simplicissima determinetur ex duobus punctis solis.

Planum est quod determinatur tribus punctis quae per se invicem non determinantur sive quorum unum non determinatum jam est per duo reliqua, seu quae non sunt in eadem recta. Duo enim puncta assumta eo ipso rectam per ipsa transeuntem, ac proinde et omnia ejus puncta determinant et ab omnibus aliis Spatii totius punctis abscindunt. Quod si ergo nihil novum assumatur, nihil etiam novum in Spatio determinatur. Itaque ad habendum planum patet assumendum esse punctum novum extra hanc rectam. Potest etiam p l a n u m rectae duas alias rectas attingentis via definiri, sed simplicior est consideratio punctorum tantum. Ex his autem patet etiam planum esse ubique sibi simile; id est partes plani cujus termini sunt similes esse inter se similes, quod in gibbo non est.

4 ut existentia *erg. L* 5 f. itaqve ... est *erg. L* 9 educta. | Recta autem cuius extrema sunt puncta data, dicitur d i s t a n t i a eorum. *gestr.* | porro *L* 9 sive *(1)* pars toti *(2)* ubiqve *L* 16 imo alteri toti *erg. L* 18 qvae *(1)* di *(2)* per se *(3)* singulatim *L* 19–21 Recta ... daretur *(1)* majorem ea esse *(2)* minor, ... solis *erg. L*

Patet et planum interminatum per tria puncta non nisi unicum esse.

Solidum seu corpus vel Stereon est quod determinatur quatuor punctis assumtis in eodem plano non existentibus. Sed hoc interminatum nihil aliud est quam totum Spatium. Quia quatuor punctis assumtis determinantur eo ipso rectae omnes quae ex ipsis duci possunt invicem, et rectae omnes quae ex punctis rectarum duci possunt invicem; et puncta alia praeter ejus superficiem, adeoque puncta quae termini non sunt. Sive ad quae recta ex alio puncto extra hanc figuram ducta transire debet per ipsam solidae hujus figurae superficiem. Ergo nullum est punctum in Spatio toto extra hoc solidum, quod non jam sit determinatum, est enim in recta jam determinata, nimirum in recta per duo puncta jam determinata (sive in determinato hoc solido existentia,) transeunte. Hinc sequitur nullam aliam dari dimensionem quartam seu nullum dari Extensum interminatum, per quatuor Puncta nondum determinatum, quod per quinque puncta possit determinari, neque enim possibile est quinque puncta reperiri, quae non jam sint in eodem solido, seu in eadem figura tertiae dimensionis ideoque impossibilis est figura dimensionis quartae. Porro quae sibi aequalia majora aut minora intelligi possunt, id est quorum unius pars alteri aequalis est saltem, ea dicimus e j u s d e m d i m e n s i o n i s. Et quicquid cum recta ejusdem est dimensionis dicitur l i n e a. Et linea alia praeter rectam dicitur flexa, sive ex pluribus rectis constet, sive nulla ejus pars recta sit. Quicquid ejusdem cum plano dimensionis est dicitur s u p e r f i c i e s et superficies alia quam plana dicitur gibba, sive ex planis sit composita, sive ubique sit gibba. In solido autem non possunt ut in caeteris dimensionibus duae determinari species, una uniformis, altera disquiformis; nam ut in superficiebus planis si termini sint similes ipsae superficies sunt similes, quod in superficiebus gibbis non contingit ita in solidis quibuscunque si termini sint similes etiam solida sunt similia. Cujus rei ratio est, quod superficies non tantum ipsa terminos habet, sed et tota terminus altioris dimensionis esse potest, termini autem possunt esse dissimiles; ideo ipsa non solum per suos terminos sed et per se, quatenus terminus alterius esse potest, dissimilis esse potest alteri. Sed solidum amplius alterius terminus esse non potest.

2 f. in ... existentibus *erg.* *L* 11 dimensionem *(1)*, si nullas *(2)* altiorem *(3)* qvartam *L* 21 f. in *(1)* plano ex *(2)* superficiebus *L* 22 similes *(1)* totum planum est sim *(2)* ipsae *L* 23 similes *(1)* reliqva sunt sim *(2)* etiam *L* 24 superficies *(1)* iterum alteri t *(2)* non *L* 25 dissimiles *(1)*. At solidum *(2)*; ideo *L*

20 (39530). DE CALCULO ALGEBRAICO ET CONSTRUCTIONE LINEARI
Januar 1680

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 324–325. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 325. Auf Bl. 324 N. 19 (39529). — Gedr.: 1. ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 317–325; 2. (mit frz. Übers.) ECHEVERRÍA / PARMENTIER, *La caractéristique*, 1995, S. 286–299.

Januar. 1680

De calculo Algebraico et constructione lineari optime conciliandis

Ut calculus Algebraicus, constructionibus Geometricis quam commodissime concilietur, nullam aliam video rationem commodiorem, quam si in calculo quidem omnia reducantur ad analogias rectarum, in constructionibus autem omnia revocentur ad similitudines figurarum.

S i m i l i a voco quae sola comperceptione distingui possunt. Ex quo statim patet, quae similia sunt ea habere homologa (sive respondentia) proportionalia; et contra proportionalia esse homologa sive eodem modo sita. Nam in quibus non sunt partes homologae proportionales, ea distingui possunt per solam memoriam, etsi non ut juxta se posita spectentur.

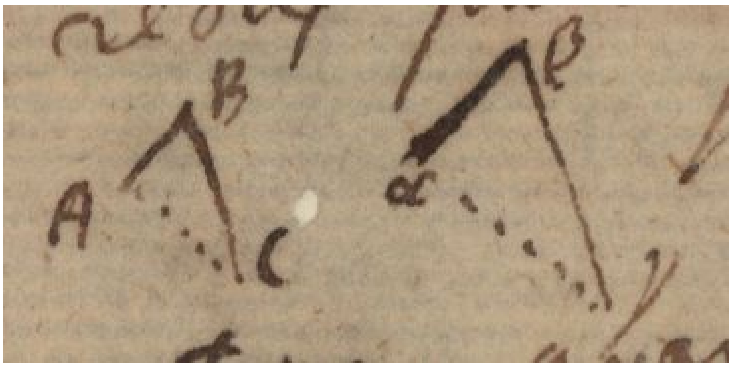
Dari potest Triangulum quod dividere possumus in duas partes aequales et similes, oblato jam alio Triangulo, si observemus id non posse ita dividi statim scimus ea Triangula esse dissimilia, nec opus est, ut ipsa simul spectemus. Sed duo circuli similes sunt, nihilque fieri potest in uno quod non hologe et proportionaliter fieri possit in altero, nec distingui possunt, nisi eos simul spectando, notemus unum altero esse majorem, vel saltem si eos non possimus simul spectare mensuram adhibeamus, quam jam priori applicuimus, et nunc isti applicamus, atque ita per hanc applicationem sive comperceptionem denique eos distinguimus. Et quaecunque sola magnitudine differunt, ea non aliter, id est

7 De ... conciliandis *erg. L* 8 f. commodissime *(1)* consideretur *(2)* concilietur *L* 11 f. figurarum. *(1)* Principio autem recta est: linea cuius pars toti est similis, adeoqve qvaevis recta alteri est similis *(2)* S i m i l i a *L* 12 possunt *(1)* , sive sola magnitudine *(2)* . Ex *L* 16 f. spectentur. *(1)* ita Triangulum dividere possumus in duas partes aeqva *(2)* dari potest *(a)* rectangulum *(b)* Triangulum *L*

non nisi collatione aut mensura seu ut ita dicam comperceptione virtuali distinguuntur.

Recta est cujus pars toti similis est. Hinc quaevis recta cuivis est similis. Partes autem circuli non sunt similes inter se. Distingui enim possunt citra compraesentiam, pone enim in uno chordam esse duplam sagittae, in altero sesquialteram, eo ipso jam distinguuntur, sive illa applicatione ad se invicem. At duae quaelibet circumferentiae sunt inter se similes.

Quae similiter determinantur similia sunt. Sufficit itaque nos deprehendere duas res esse similes secundum illas conditiones per quas determinantur, ut judicemus eas esse similes secundum alias omnes considerationes. Linea ex duabus rectis punctum commune habentibus composita dicatur Hamus.



[*Fig. 1*]

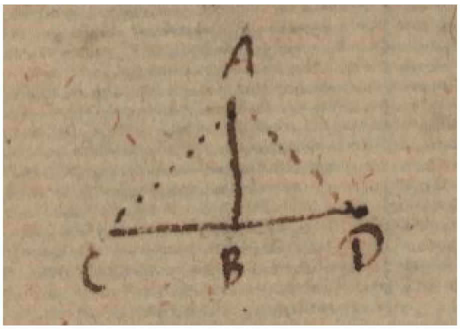
Si angulus sit idem et latera unius eandem inter se habeant rationem quam habent latera alterius; duo hami erunt similes. Nam determinatur generaturque hamus primum angulo qui ponitur utrobique idem, et eatenus nullum discrimen reperiri potest, deinde longitudine rectarum quae in certam plagam educantur. Plaga autem in quam hamus ducitur nihil facit ad similitudinem. Restat ergo sola longitudo rectarum, et quidem nec ipsa longitudo rectarum facit similitudinem hamorum (longitudo enim sola comperceptione

1 *Über* collatione: comperceptione

1 seu *(1)* collatione *(2)* ut *L* 6 f. similes. *(1)* Qvaecunqve uno determinandi modo sunt similia, ea aliis omnibus modis *(2)* qvae *L* 13 determinatur *(1)* | hamus, *nicht gestr.* | ducta rectae AB inde angulo qvo educitur ex B alia recta, qvi est idem *(2)* generaturqve *L* 15 f. in . . . ducitur *erg. L*

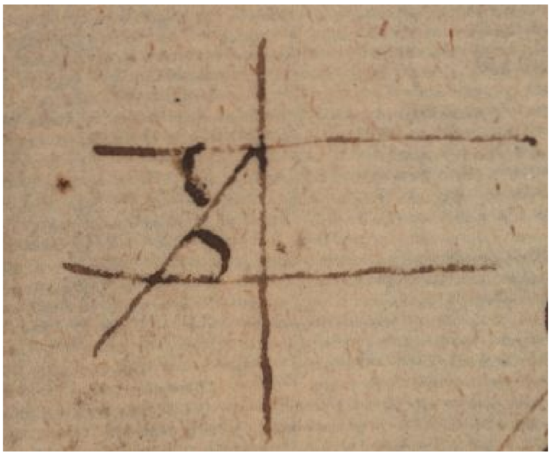
aestimatur) sed longitudinum in cruribus ratio, quae scilicet in uno hamo solo considerari potest. Itaque duo hami similiter determinantur ideoque sunt similes, et proinde si jungantur extrema crurum diversa A. C. et α. γ. per rectas AC et $\alpha\gamma$, etiam ratione rectarum AC et $\alpha\gamma$ similes erunt hami. Vicissim si similes sint hami, tum ratione crurum AB, $\alpha\beta$ et BC, $\beta\gamma$ tum ratione baseos AC. $\alpha\gamma$. eo ipso similes erunt etiam secundum ea quibus determinantur. Nam determinatis assumtis AB, BC, et apertura anguli determinata per AC basin, eo ipso determinatur totus hamus; hinc patet etiam, hamos similes quoad latera et basin habere et angulum eundem. Cumque in triangulo tres intelligi possint hami, patet triangula quae quoad latera similia sunt angulos habere eosdem. Nam patet et in hamo, uno angulo B existente eodem cum β. et latera proportionalia, etiam angulum A angulo α esse aequalem, quia crura hami BAC cum basi, cruribus cum basi alterius hami $\beta\alpha\gamma$ proportionalia, idemque est de angulis C. γ. Contra si omnes anguli sint iidem in Triangulo, erunt et latera proportionalia, quia ex angulo sumto et duobus lateribus determinatur proportio tertii, cum ergo id tribus modis hic fiat ob tres angulos omnium laterum proportio determinata erit quovis modo. Sunt enim tria determinantia et tria determinata. Imo sufficiunt hic duo determinantia et duo determinata, nam ex duobus angulis determinatus est tertius, et ex determinatione rationum AB ad BC, et AB ad AC, determinata est etiam ratio AC ad BC. Sed haec obiter. Angulus determinatur et ratione sinuum, ideo adhibitis perpendicularibus alia adhuc demonstratio. Idque est utilius si omnia velimus revocare ad rectarum similitudinem. Sed prius dicendum de perpendiculari.

4 erunt hami. *(1)* Hinc cum *(a)* Triangu *(b)* in Triangulo tres considerari possint hami *(2)* Vicissim *(a)* cum hami sint *(b)* si *L* 4 f. ratione *(1)* rectarum, qvi *(2)* crurum AB, *(a)* et BC, et *(b)* $\alpha\beta$ *L* 9 eosdem *(1)* et contra. *(2)*. Nam *L* 10 latera *(1)* similia, angulum *(2)* proportionalia *L* 11 qvia *(1)* angul *(2)* latera *(3)* crura hami BAC *(a)* cruribus hami, *(aa)* et basis, *(bb)* itemqve basis *(2)* cum *L* 13 proportionalia, *(1)* nam angulo existente eodem sumantur | in uno *erg.* | latera proportionalia in lateribus alterius, erit et subtensa proportionalis, ergo anguli iidem *(2)* qvia *L* 18 f. obiter. | Angulus ... perpendicularibus *(1)* adhuc facilior demonstratio *(2)* alia adhuc demonstratio *erg.* | *(a)* Circulus est recta *(b)*  Cum recta rectae sit similis, si duae rectae eodem angulo sint parallelae *(c)* idqve *L* 20 similitudinem *(1)* Itaqve dicemus eand *(2)* sed *L*



[*Fig. 2*]

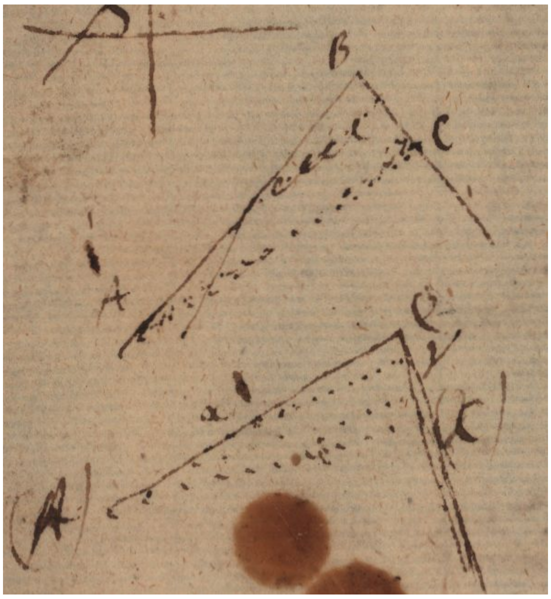
Perpendicularis est quae ad eandem rectam facit angulos deinceps aequales. Id est *AB* est perpendicularis ad *CBD*. si angulus *ABC* aequalis angulo *ABD*. id est si sumta *BC* aequali *BD* sit *AC* aequ. AD.



[*Fig. 3*]

Parallelae ad quas eadem est perpendicularis.

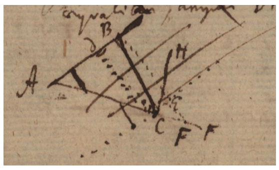
2 rectam *(1)* eundem ubiqve angulum facit *(2)* facit *L* 4–6 aeqv. AD. *(1)* P a r a l l e l a e ad qvas eadem est perpendicularis, unde demonstratur, qvod qvaevis alia ad eas eundem angulum facit ob supplementum ad rectam, qvo posito jam demonstratum qvod Trianguli tres anguli aeqvales duobus rectis et qvod *(2)* parallelae *L*



[*Fig. 4*]

Qui anguli congruunt iidem sunt, demonstrandum ergo in quibus eadem proportio sinuum eos congruere. Sumatur alius angulus in quo eadem proportio sinuum ajo congruere. Nam si eadem proportio, $AB.BC.AC$. quae $\alpha\beta.\alpha\gamma.\beta\gamma$, ducatur in uno parallela, ut fiant sinus utrobique aequales, $(A)(C)$ parallel. $\alpha\gamma$ aequal. AC. Quod fieri potest, ergo et $(A)\beta$ aequal. AB et $\beta(C)$ aequal. BC. Ergo congruunt ABC. $(A)B(C)$. Ergo anguli iidem.

3 f. congruere. *(1)* | nam *nicht gestr.* | *(a)* si ⟨u⟩no *(b)* in eo sumatur *(c)* si ducatur *(2)* nam *L*

4 AB.BC.AC. qvae $\alpha\beta.\alpha\gamma.\beta\gamma$ *erg. L* 7–53,2 iidem. *(1)*  Trianguli tres anguli 2 rectis aeqvales *(a)* sit ang. *(b)* ducatur DA sic ut *(aa)* sit *(bb)* sint ang. ECB et EAD aeqvales. Et *(aaa)* sec *(bbb)* ducatur recta FC, eodem modo secans angulum *(aaaa)* DAE *(bbbb)* BCE, ut recta BA secat angulum DAE. cumqve tota aeqvalia; anguli DAE, BCE erunt et partes aeqvales *(2)*  ob *(a)* naturam perp *(b)* definitionem parallelarum DC. BE aeqvales itemqve CE, et DB. ergo congruunt triangula CDB. BEC adeoqve anguli CBA. *(aa)* BCD. *(bb)* BCE aeqvales jam BCE et BAC anguli etiam aeqvales ob rectas parallelas AB. CE. ergo anguli BAC + ABC aeqv. ang. BCF. et anguli BAC + ABC + ACB aeqv. BCF + ACB, id est aeqv. ACH + HCF seu duobus rectis. supponatur jam demonstratum independen *(3)* jam *(4)* Meli *(5)* Parallelae *L*

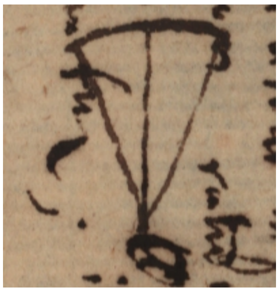
[*Fig. 5*]

Parallelae ad eandem rectam faciunt eundem angulum. Nam quia DC aequ. AE. et eodem jure et AD cum EC. Hinc congruit AEC. CDA. Hinc quia BAC aequ. ACE et ABC aequ. ECF hinc $BAC + ABC$ aeq. ACF. Ergo trianguli tres anguli 2. rectis aequales. Quae demonstratio brevior communi.

[*Fig. 6*]

Melius ita omnia demonstramus quam ex Euclidis definitione parallelarum, quae imperfecta quia non ostendit utrum sint possibiles nec ne, rectae non concurrentes. At statim patet nostra esse possibiles, describetur enim una motu puncti ad alteram semper perpendicularis.

10–54,2 perpendicularis. *(1)* Omnis *(2)* Cum *(3)* Ex his pa *(4)* Circulus est figura *(5)* Circumferentia est linea cuius portio qvaevis ad *(a)* mera pun *(b)* aliqvod punctum similiter se habet in eodem plano. Hinc rursus omnia hic absolvuntur per similitudines idem fieri potest in aliis curvis omnibus, ut cunctae semper exprimantur per similitudines seu per rectas proportionales *(6)* In *L*



[*Fig. 7*]

In circulo rectae omnes aequales ad centrum. Circuli omnes similes. Si omnes aequationes, omniaque theoremata revocemus ad rectarum aequalitates vel proportiones poterimus omnia demonstrare per linearum ductus. Et calculus perfecte quadrabit constructionibus. Sit aequatio quaecunque, ea resolvatur in analogias hoc modo:

$\dfrac{x+b, x+c}{x+f, x+g} \sqcap \dfrac{x+l, x+m}{x+p, x+q}$. Quibus in se ductis comparatur quod provenit cum aequatione data ope tot arbitrariarum, fiet:

$$\begin{array}{llllllllll}
\boxed{x^4} & +b\;x^3 & +bc\;x^2 & +bcp\;\;x & +bcpq & \sqcap & \boxed{x^4} & +\;l\;\;x^3 & +\;lm\;\;x^2 & +lmf\;x+lmfg \\
 & +c & +bp & +bcq & & & & \;\;m & \;\;\text{etc.} & \;\;\text{etc.} \\
 & +p & +bq & +bpq & & & & \;\;f & & \\
 & +q & +cp & +cpq & & & & \;\;g & & \\
 & & +cq & & & & & & & \\
 & & +pq & & & & & & & \\
\end{array}$$

$$\alpha\,x^3+\gamma\;x^2+\;\theta\;\;x+\mu \quad \overset{\infty}{\sqcap} \quad \beta\,x^3+\;\delta\;\;x^2+\;\lambda\;\;x+\;\;\xi$$

Et $\alpha+\beta \sqcap 1.$ et $\gamma+\delta \sqcap r.$ et $\theta+\lambda \sqcap s.$ et $\mu+\xi \sqcap t.$ positis $r.$ $s.$ $t.$ datis.

2–5 *Nebenbetrachtung, am Rand quer geschrieben:* Quia omnes formulae reduci possunt ad rectangula rectarum, ut $abc+ade$ etc. poterunt etiam reduci ad meros rectarum ductus et rationum compositiones, rectangula per alia rectangula una litera inferiora dividendo. Videndum quemadmodum rationes exprimuntur per similia, quomodo rectarum ductu compositae rationes exprimuntur; item quomodo [*bricht ab*]

2 ad centrum *erg.* *L*   2 si *(1)* cons *(2)* omnia reducamus *(3)* omnes *L*

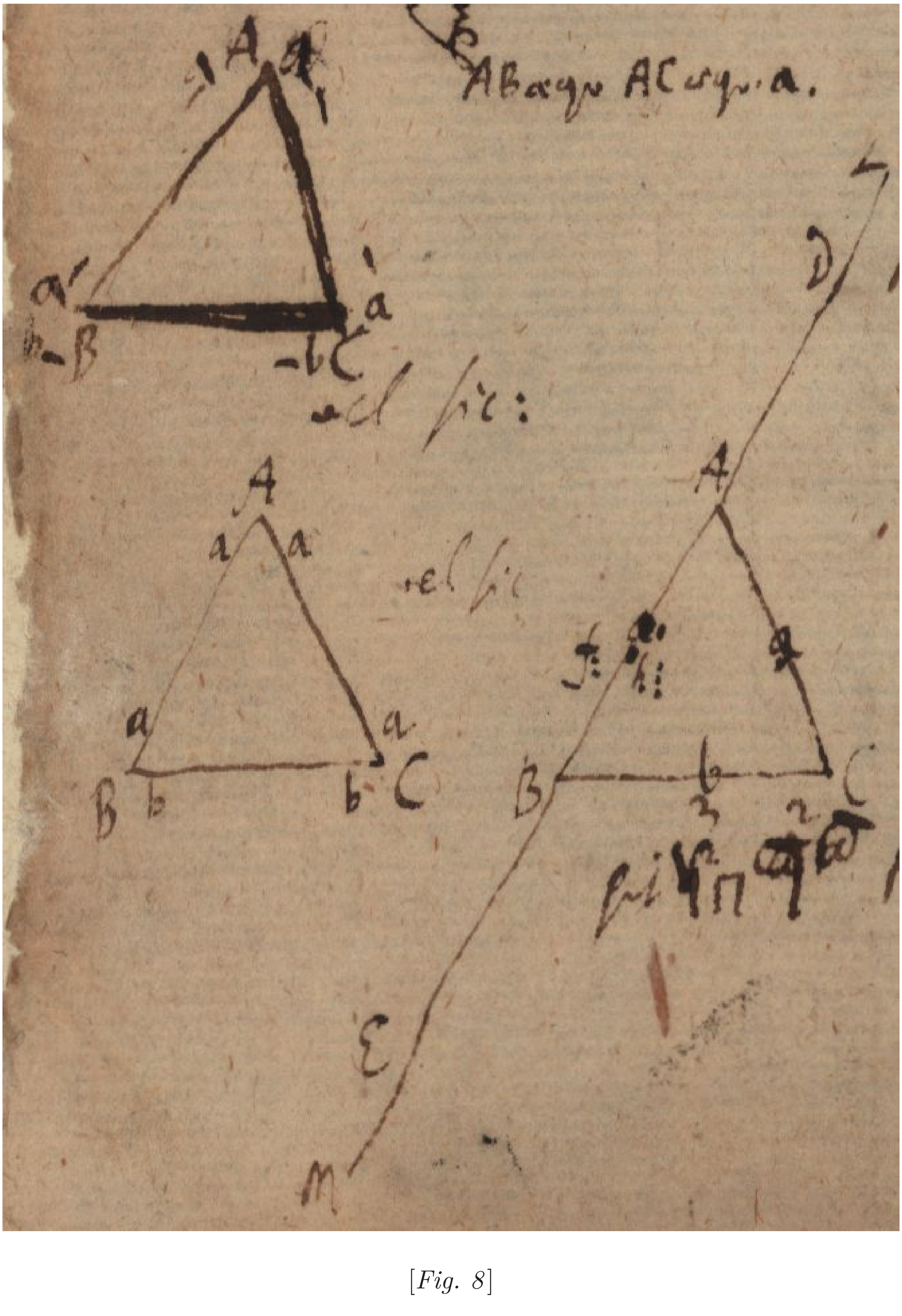
Habebimus duodecim aequationes et literas arbitrarias quaerendas numero sedecim. Est autem: $b^4 + \alpha b^3 + \gamma b^2 + \theta b + \mu \sqcap 0.$ et $l^4 + \beta l^3 + \delta l^2 + \lambda l + \xi \sqcap 0.$

Prioris radices sunt ipsae: $b.$ $c.$ $p.$ $q.$ posterioris ipsae $l.$ $m.$ $f.$ $g.$ Jam explicando dimidiam partem ipsarum $\alpha.$ $\beta.$ $\gamma.$ $\delta.$ $\theta.$ $\lambda.$ $\mu.$ $\xi.$ pro arbitrio efficiatur, ut utraque producatur ex duabus quadraticis in se invicem ductis.

$x^2 + px + q^2 \sqcap 0.$ fiet $\dfrac{q}{x} \sqcap \dfrac{x+p}{q}.$ $x^3 + px^2 + q^2x + r^3 \sqcap 0.$ $\dfrac{r}{x} \sqcap \dfrac{x^2+px+q^2}{r^2}.$ Sit $r^3 \sqcap q^2\pi$, fiet $\dfrac{x^2+px}{q^2} \sqcap \dfrac{\pi - x}{x}$ et $\dfrac{x, x+p}{q, q} \sqcap \dfrac{\pi - x}{x}$ seu $\dfrac{x^2}{q^2} \sqcap \dfrac{p+x}{\pi - x}.$

2 f. $\mathrm{l}^4 + \beta \mathrm{l}^3 + \delta \mathrm{l}^2 + \lambda \mathrm{l} + \xi \sqcap 0.$ *(1)* qvas aeqvationes *(a)* reddamus *(b)* ut in lineis *(2)* prioris *L*

6 f. fiet ... $\dfrac{p+x}{\pi - x}$: In den folgenden Rechnungen unterlaufen Leibniz mehrere Versehen, die jedoch die grundsätzliche Überlegung nicht beeinträchtigen.



[*Fig. 8*]

Ut calculus literalis lineari melius conjungatur possunt literis majusculis sinum spectantibus minusculae ascribi significantes longitudinem, ut AcB. Significat magnitudinem c lineam AB. Ex his certa ratio habetur omnia quae calculo fiunt, solo linearum ductu praestandi.

Forte satius minusculas in ipsa figura non ascribi vel ascribi lineae medio. Sed quid si idem sit plurium medium ut AB sit a, DE sit f. LM sit h. Sitque omnium punctum commune ei ascribetur: a. f: $h\vdots$

1 calculus *(1)* Algebrai *(2)* literalis *L*

21 (39571). EUCLIDES DE DIVISIONIBUS [1682 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XII 2 Bl. 23. 1 Zettel **[noch]**. 15 Z. auf Bl. 23 r°. Bl. 23 v° leer.

Datierungsgründe: Vgl. N. 40945 (40945). **[noch]**

E u c l i d e s scripsit de divisionibus, quem *nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de superficierum divisionibus qui nuper Joh. Dee Londinensis et Federici Commandini Urbinatis opera in lucem est editus*.

Clavius in prolegom. ad Euclid. cap. Euclidis et Geometria⟨e⟩ commendatio.

6 *(1)* Autor libri de sup *(2)* E u c l i d e s *L*

7 Leibniz hat in seiner Abschrift aus Clavius, *Opera* I, S. 6 zwischen *divisionibus* und *qui* die folgenden Worte weggelassen: *Machometo Bagdedino ascriptum.*

22 (39591). INFINITUM
[um 1680]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 49. 1 Zettel ca $4,7 \times 8,2$ cm. 1 S. auf Bl. 49 v°. Cc 2, Nr. 1548

Datierungsgründe: [noch]

Infinitum

Si in circulo polygona inscripta sint A. B. C. quorum sequens semper habeat duplum numerum laterum praecedentis, sitque numerus laterum z, reperietur esse: z aequ. $\dfrac{BB - CC}{16A - 8B}$. Ubi ponendo A aequ. B aequ. C fit $\dfrac{B + B \frown B - B}{16B - 8B}$ aequ. z seu z aequ. $2.0B : 8$ seu $z : B :: 0 : 4$. quod non capio.

6 f. Infinitum *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}^2}{0}$ est qvantitas infinita. Nam *(2)* Si *L*   9 f. z aeqv *(1)* 2.0 : 8 *(2)* 2.0B : 8 *L*

23 (39638). EUCLIDIS DEFINITIO PROPORTIONALIUM [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 101–102. 1 Bog. 4°. 1 S. auf Bl. 101 r°. Restlicher Bogen leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

Euclidis definitio M a g n i t u d i n u m e a n d e m r a t i o n e m h a b e n t i u m seu proportionalium lib. 5. def. 6.

$$\begin{array}{ccccccc} A & : & B & :: & C & : & D \\ \hline mA & & nB & & mC & & nD \\ E & & G & & F & & H \end{array}$$

A ad B, ut C ad D, debet esse si $mA \sqcap nB$ etiam $mC \sqcap nD$. Idem est si pro $\sqcap$ substituas $\sqcap$. Nam tunc perinde est ac si retento priore A et B sibi mutuo substituas.

Haec quidem reciproca est proprietas proportionalium eaque sane memorabilis et admodum simplex, quia nihil assumit aliud quam majus et minus. Interim quaeramus demonstrationem ejus ex notione communi similium et sane manifestum est quod et haec affectio conveniat proportionalibus; sed hoc ostendendum quod cuicunque convenit haec affectio. Id sit proportionale si sc. m sumto quocunque et n etiam quocunque semper, posito $mA \sqcap nB$ sit etiam $mC \sqcap nD$.

Ponamus n esse unitatem. Perinde enim est ac si tunc pro (m) posuissemus $\dfrac{(m)}{n}$ et pro $\dfrac{(m)}{n}$ denique m et quaeritur an possit m sumi talis ut fiat $mA \sqcap B$ et $mC \sqcap D$, licet sit $A : B = C : D$ fiat $B = mA - k$ et similiter fiet $D = mC + l$, quibus valoribus substitutis in proportionalibus fiet $A :, mA - k = C :, mC + l$ seu fiet: $mAC + Al = mAC - kC$, et sublatis mAC fiet $Al = -kC$ quod est absurdum vel oportet ut k existente affirmativa seu mA existente majore quam B, sit l, negativa; seu mC etiam major quam D. Itaque ostensum si dictae sunt proportionales dictas alias esse simul majores. Nunc videamus; an si hae simul majores, non possit assumi illas non esse proportionales. Nempe sit $mA \sqcap B$, et $mC \sqcap D$ et $A : B$ non $= C : D$ seu AD non $= BC$ seu $AD = BC \ddagger p$ fit $D = BC \ddagger p, : A$. quo substituto in prioribus fit $mC \sqcap BC : A \ddagger p : A$ seu $mAC \sqcap BC \ddagger p$.

Sed $mAC \sqcap BC$ per priores. Ergo si $\dagger$ sit $+$, fiet $0 \sqcap p$ quod est absurdum. (Sed quid si $\dagger$ sit $-$?)

$mA \sqcap B \qquad mC \sqcap D$

$mAC \sqcap BC \qquad mAC \sqcap AD$

Ergo si BC non $= AD$ effici poterit ut mAC non sit $= mAC$.

24 (39641). PRIMAE NOTIONES GEOMETRICAE
[Sommer 1696]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 107–108. 1 Bog. 2°. $1\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 107. — Auf Bl. 108 N. 25 (39642).

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Ende Juli 1696 belegt.

Euclides in definitione diametri circuli, id est rectae per centrum et in circumferentia terminatae, assumsit quod tamen demonstrandum erit[,] circulum a diametro bifariam secari. Quod tamen apud Proclum Thales Milesius demonstrare est aggressus. Et cum idem Proclus demonstrare tentans duas rectas non habere segmentum commune, et spatium non comprehendere, quae Euclides ibidem sine demonstratione assumsit, hanc circuli bisectionem adhibeat. Itaque hinc in demonstrando ordiemur recepta *Elementa* sequentes.

Quoniam autem omnia hic constitui tractare Epharmostice; itaque utar sectionibus in construendo et congruentiis in demonstrando. Tractationem autem Homoeoticam in alium locum nunc sepono, ubi non tantum congruentias, sed et similitudine utendum est.

Ut autem ad demonstrationem propositi perveniamus[,] ad calculi modum explicandae sunt et calculo exprimendae Notiones quaedam quibus est opus.

Punctum est in quo quicquid est, cum ipso coincidit. Nempe si tale sit A, ut posito B esse in A, sequatur A et B coincidere, dicetur A esse punctum.

Coincidunt quae sibi mutuo substitui possunt. A et B coincidere est A esse in B et B esse in A.

A et B coincidere est quicquid est in A esse in B, et quicquid est in B esse in A, idque eodem tempore. Nam alioqui in transformatione secus est. Ubi quicquid in uno ponitur uno tempore, in alio ponitur alio tempore. Si quicquid est in A sit in B, etiam A est in B.

Spatium est locus omnium punctorum. Sit punctum quodcunque Y; spatium erit $\overline{Y}$. Est ubique uniforme per se, ut ex hac ipsa definitione intelligitur.

---

7 assumsit: EUKLEIDES, *Elementa* I, def. 17; vgl. PROKLOS, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, S. 157 f. sowie CLAVIUS, *Opera* I, S. 18.

E x h a u r i e n t i a ipsius A sunt plura B, C, D, si nihil sit in A, quod non sit in B vel C vel D. Vicissimque nihil in ipsis quod non sit in A, et tamen sit in uno, quod non est in caeteris.

C o n t i n u u m est A, in quo utcunque sumta bina exhaurientia B et C, habent aliquid commune.

P a r s est, quod ita alicui (T o t i) inest, ut ab ipso possit detrahi, alio licet non detracto seu quod per se solum detrahi potest sed ita tamen ut aliquid remaneat. Sic punctum etsi sit in linea, tamen a linea detrahi per se non potest, nisi simul et aliud a linea detrahatur. Itaque punctum non est pars.

T e r m i n u s est ipsius A, quod ipsi commune est, cum alio B, ita tamen ut neutrius pars sit. Si duo, B et C, exhaurientia ipsius A habeant partem communem D, poterit D detrahi ipsi B, ut tamen non detrahatur ipsi A.

Exhaurientia quae non habent partem communem dicuntur c o i n t e g r a n t i a.

Si plura spatium exhauriant, id quod finitum est dicitur s o l i d u m v e l c o r p u s.

Vel si velimus ut Solidi nomine etiam infinitum comprehendamus, dici potest s o l i d u m cujus pars spatii partem occupat. Ita spatium ipsum et pars ejus et corpus mobile in spatio, et pars ejus continetur. An sic[:] s o l i d u m s e u p r o f u n d u m est, in quo aliquid terminus non est, seu cujus pars terminus non est. Itaque ostendendum has duas definitiones coincidere, seu spatii partem terminum non esse. Scilicet quia spatium ipsi, si terminus esset, non daretur cujus esset terminus, cum omnia sunt in spatio, et quia spatium per se uniforme esse ostendimus etiam profundum omne intus uniforme est.

Superficies est sectio profundi, cujus rursus sectio extensa est, seu plus quam punctum. Quod si definias esse sectionem, cujus rursus sectio est linea, ostendendum est coincidere has definitiones, seu quod profundi sectionem (superficiem) secat (linea), non nisi in puncto secari posse, seu tres tantum esse dimensiones.

P l a n u m est sectio spatii utrinque eodem se modo habens in secando.

R e c t a est talis sectio plani.

Nisi malimus abstrahendo animum a Solido et Plano, Rectam definire ut sit linea per duo puncta A et B, eodem modo se habens erga ea C et D quae ad duo puncta se eodem modo habet, ita ut C se habeat ad A et B, ut si D habet ad A et B; recta se habebit ad A, ut se habet ad B. Vel sic potius.

Si linea per duo puncta ita ducatur, ut ad diversa se habeat ad quae duo illa puncta se eodem modo habent, est recta.

Sint puncta A et B, et sint duo diversa C et D, sitque $A.B.C \infty A.B.D$. Linea autem sit $\overline{Y}$. et sequatur hinc etiam esse $\overline{Y}.C \infty \overline{Y}.D$. erit $\overline{Y}$. Recta.

Effeci ni fallor, ut ad definitionem Homogenei careri possit consideratione similitudinis. Nempe homogenea sunt, cum fieri potest per transformationem ut pars unius coincidat parti alterius. Transformatio necessaria ad collationem superficiei gibbae et planae, lineaeque curvae et rectae. Pro solido id opus non erat. Nam duorum solidorum partes congruunt. Idem est in duobus planis, et duabus rectis. P a r s quid sit jam definivimus.

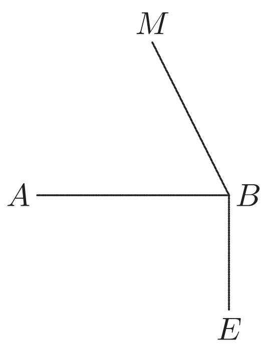
Videndum an demonstrari possit, si duo sint homogenea, unumque altero nec majus [nec] minus, esse aequalia. Aequalia autem sunt quae transformatione si opus reddi possunt congrua. Vel quorum eadem est quantitas, seu quae sibi substitui possunt salva quantitate. Majus autem est cujus pars aequalis est alteri toti. Sint jam duo A et B. sitque A nec minus quam B, nec majus quam B, videamus an possit esse nec aequale. Sit ergo non aequale A ipsi B. Per transformationem accommodetur B ad A. Quamdiu est aliquid in B cujus nihil adhuc est accommodatum ad A, et aliquid adhuc in A cujus nihil adhuc est accommodatum est ad B, continuari potest accommodatio, donec vel ambo simul sint exhausta, eritque A aequ. B, quia coincidunt; vel id quod nondum est exhaustum est majus, cum parti ejus coincidat alterum totum. Unum tantum objici potest[,] quod fieri possit ut accommodatio continuanda sit in infinitum. Ostendendum esset ergo transformationem fieri posse in duo solida ejusdem rectangula solida, vel si superficies in duo rectangula plana ejusdem baseos, vel si lineae sint, in duas rectas.

25 (39642). DEMONSTRATIO TRIUM DIMENSIONUM
[Sommer 1696]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 107–108. 1 Bog. 2°. $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 108 r°. — Auf Bl. 107 N. 24 (39641).

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Ende Juli 1696 belegt.

Clavius in Euclide suo intermisit demonstrare tres tantum esse dimensiones; credo quia hoc agressus fuerat in Com. ad Sphaeram Joh. a Sacrobosco cap. 1. ubi notat tres tantum esse dimensiones, quia tres tantum perpendiculares sese in uno puncto secare possunt, quarum una quaevis possit sumi pro longitudine, altera pro latitudine, tertia pro profunditate. Vel ut ego malim dicere: Una pro longitudine, cui conjuncta alia faciat latitudinem, et 3$^{\text{tia}}$ accedens profunditatem. Porro autem tres perpendiculares ad idem punctum consistere posse sic demonstrat.



[*Fig. 1*]

Duae invicem perpendiculares sunt in eodem plano per 2. undecimi. Ex puncto earum communi excitetur recta perpendicularis ad planum per 12. undec. Erit haec ad utrumque priorum perpendicularis ex def. 3. undec. Ostendamus jam nullam aliam posse duci ad easdem in eodem puncto perpendicularem. Ducatur si fieri potest quarta. Erit ea recta ad planum, (cum sit perpendicularis ad duas priores in plano) per 4. undec. Sed tertia etiam erat recta ad idem planum in eodem puncto, ex praecedenti demonstratione. Ergo ex eodem puncto ducentur duae rectae lineae ad idem planum perpendiculares ad easdem partes. Quod fieri non potest per 13. undec.

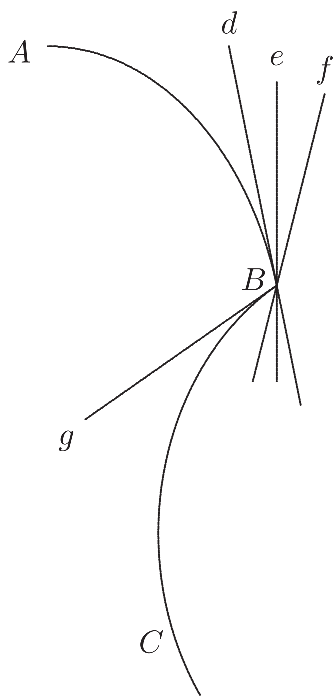
7 fuerat: Vgl. CLAVIUS, *Opera* III, S. 9.

26 (39645). UNA LINEA (II)
Januar 1680

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 112. 1 Zettel **[noch]**. 2 S. — N. 26 (39645) und N. 18 (39450) sind vermutlich aus demselben Blatt Papier gerissen bzw. geschnitten worden.

Datierungsgründe: N. 26 (39645) beruht auf Überlegungen in der auf Januar 1680 datierten Notiz N. 18 (39450) und dürfte unmittelbar danach entstanden sein.

Una linea

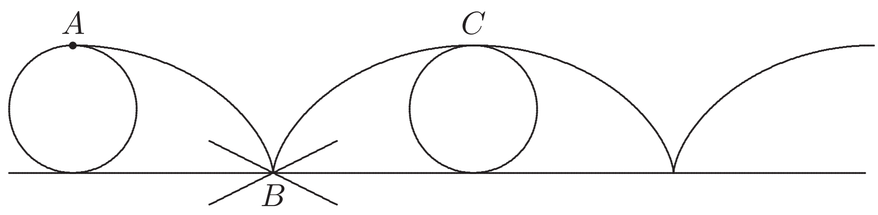


[*Fig. 1*]

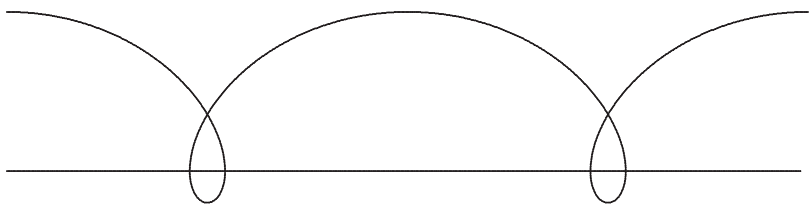
Sit linea ABC. cujus punctum B tale ut ad ipsum infinitae possint duci tangentes dB. eB. fB. gB. Ajo non esse unam lineam, sed compositam ex duabus AB. et CB sese secantibus in puncto B. ita ut duae tangentium extimae dB et gB sint verae tangentes[,] illa arcus AB haec arcus CB. Si una linea esset sequeretur punctum describens tunc nullam habere certam directionem. Cum flexus est contrarius duae quidem sunt tangentes ad unum punctum, sed puncti directio non ideo minus certa, nam una venit altera pergit. Si una eademque esset linea ABC in ea non habeant locum regulae de maximis et minimis.

Opposita sunt *inscripta* et *tangens*. Inscripta est a parte cavitatis, tangens a parte convexitatis.

An potius Unitas lineae sumenda ab unitate causae.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Ita ABC una linea cycloidalis continuata, dum globus porro procurrit, et si ipsum punctum B plures habeat tangentes. Ratio rei est quia revera haec cycloidalis prior posterioris est speciei, in qua flexus est infinite parvus.

27 (39846). GEOMETRIA OMISSIS METAPHYSICIS DE CONTINUO [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 1 Bl. 12. 1 Bl. 8°. Ca $1\frac{2}{3}$ S.

Datierungsgründe: **[Wz; noch]**

Tota Geometria tractari potest et demonstrari omissis Metaphysicis de continuo, id est sive ponamus lineas ex punctis, motum ex quietulis componi sive non. Nam pro puncto sumamus corpus satis parvum, ut millies millesies repetitum, nihilominus adhuc faciat corpus satis parvum. Pro linea motum hujus corporis, si non continuum, saltem per subsultationes ejusmodi, ut intervalla inter duo loca proxima etiam satis parva sint; et aequalia inter se iisdem temporibus. Intervalla intelligo id est ut lineae quaedam ducantur satis parvae ab uno ad aliud, nihil curando an sint recta[e]. Et satis est ut quam plurimae sumantur subsultationes, omnes sibi invicem congruae seu aequales et similes.

Recta fiet, si corpora alia *abc*, *def* primum congruant, inde *def* moveatur super *abc*, ut pro congruente haberi possit seu parum admodum ab eo recedat, ut recessus etiam sit quantum satis parvus. Jam rursus alia *ghi* ipsi *def* primum congruens, eodem modo ab ipsa moveatur, ut ipsa abiit ab *abc* et ita porro et poterit spatium vel corpus ita conflatum pro linea recta haberi, cui definitio illa accommodabitur, quod partes omnes invicem congruae sint, positis tantum duobus punctis congruis.

Hujusmodi lineae rectae motu etiam circulus describetur, caeteraque omnia in Geometria absolventur, pari certitudine nam semper demonstrabitur rigorose errorem esse tam parvum quam initio constructionis cujusque problematis volumus.

Eodem res redit, si quis corpus ex punctis tantum componat, sive contra puncta pro corporibus habeat.

---

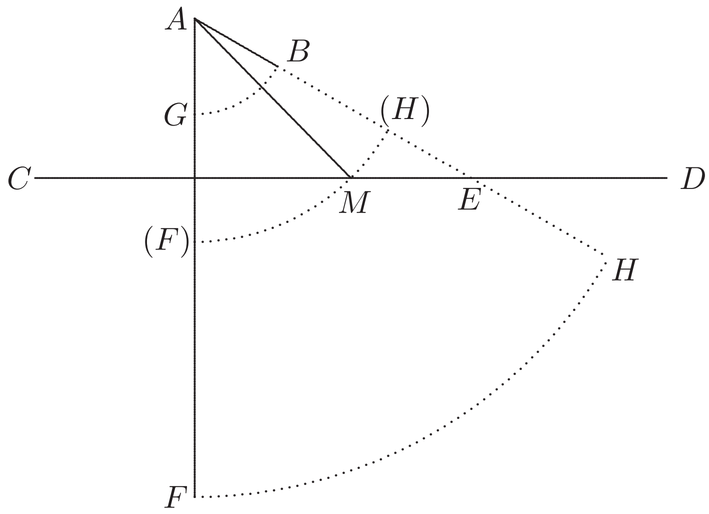
17 definitio illa: J. Jungius, *Geometria empirica*, 1630, S. 1; vgl. VII, 1 N. 1. 22 ex ... componat: z. B. Platon und Demokritos. 22 f. puncta pro corporibus: Th. Hobbes, *De corpore*, 1655, pars 2, cap. 12, S. 67 f.

28 (39847). AXIOMA 13 EUCLIDIS
[um 1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 1 Bl. 13. 1 Bl. 8°. 2 S. — Gedr. (mit engl. Übers.): De Risi, *Leibniz on the Parallel Postulate*, 2016, S. 130–133.

Datierungsgründe: **[noch]**

Axioma 13 Euclidis (uti numerat Clavius) demonstratum.



[*Fig. 1*]

Asserit Euclides rectam AB quae alteri rectae CD propior fit, tandem productam productae occurrere in E.

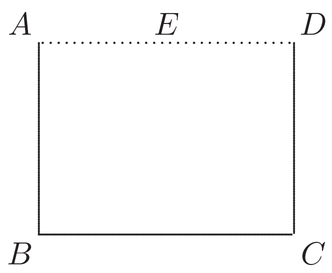
A puncto A remotiore in recta AB ducatur ad punctum trans rectam interminatam CD situm, F, recta AF, quantum satis est longa qua et punctum F a puncto A quantum satis est remotum esse potest. In recta AF sumatur AF aequalis AG. Centro A radius AGF moveatur donec G incidat in B et F in H. Pono autem H esse adhuc trans rectam CD. Quod effici posse sic ostendo. Ponamus H non esse trans rectam CD, sed citra [in (H)]. Ergo rectae $A(F)$ extremum (F) jam antequam perveniret ad (H) secavit rectam

6 numerat: Clavius, *Opera* I, S. 25; Eukleides, *Elementa*, I, post. 5.

CD in M (nam cum (F) prius esset infra CD, jamque sit supra, necesse est ut alicubi transierit per D, nempe in M). Sed hoc non fecisset, si recta AF sumta fuisset longior quam $A(F)$ vel AM. Cumque idem remedium adhiberi possit in quocunque puncto secare intelligatur antequam G pervenit in B. Sumendo scilicet AF, ab initio majorem, quam est recta ab A ad illud punctum in quo alioqui secasset ducta, hinc patet, effici posse ut non secet AF mota rectam CD, quam postquam G pervenit in B. Itaque punctum H est adhuc infra rectam interminatam CD. Ergo recta a puncto supra eam A, ad punctum infra eam H, ducta, AH, necessario secabit alicubi lineam interminatam seu quantum satis productam CD in puncto aliquo ut E.

Sed superest difficultas. Nam in demonstratione non explicatur cur requiratur ut AB accedat ad CD, et ideo demonstratio est imperfecta.

Nimirum motus fieri non potest cum recta AF necesse est infinita sit, ad impediendum ne antequam G veniat in B. secetur recta CD. Nam ut ex hoc ipso duci potest infinita non movetur, nam tota est nunc infra nec supra rectam, adeoque eam alicubi secare debet extremo, (quo caret) [quanquam haec consequentia ostendenda supersit]. Superest ergo tantum, ut ostendamus hoc contingere unico illo casu, cum recta AB non appropinquat ad CD. Quibus duobus ostensis absoluta erit demonstratio axiomatis.



[*Fig. 2*]

Arabes, Clavius, Guldinus et alii ad hoc axioma Euclidis demonstrandum utuntur hoc principio, quod recta quae uno extremo perpendicularis uni rectae est, et super ea ita movetur, altero extremo etiam rectam describit. Hoc illi assumunt velut per se notum. Ego sic demonstro: quia unum extremum in una recta movetur, alterum in altera et est perpendicularis ab una ad alteram seu minima, erit et vicissim perpendicularis ab ea cui insistit ad eam quam describit. Ergo nulla est ratio cur non insistere alteri potius

19 Arabes ... alii: Vgl. CLAVIUS, *Opera* I, S. 51; P. GULDIN, *Centrobaryca*, Bd 2, 1640, S. 349 f.

describere hanc dicatur. Et vero linea mota, ita ut omnia ejus puncta rectam describunt idem contingere nec alias. ℌ.

29 (39848). RECTA LINEA
[1678 – 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 1 Bl. 14. 1 Bl. 8°. 2 S.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678–1682 belegt.

Recta linea

Demonstratio lineae rectae seu inter duo puncta minimae, posito motu continuo

Optimam definitionem lineae rectae tum habebimus, cum poterimus demonstrare rectam lineam esse possibilem.

Ex hac definitione: R e c t a est, cujus pars quaelibet cuilibet extrema cum ea congrua habenti, congrua est demonstrari potest, rectam in infinitum produci posse. Adeoque a puncto quolibet ad quodlibet posse duci rectam, si modo certum sit vel unicam rectam dari. Dum scililcet recta una super alia ita movetur, ut semper successive congruat ejus partibus, ita enim cum primum tota congrueret, mox mota parte tantum congruit, parte est extra eam, atque ita producta est.

Si demonstrari possit esse viam a puncto ad punctum minimam; demonstratum est rectam esse possibilem. Equidem demonstrari potest nullam esse viam a puncto ad punctum maximam. Quod sic ostendo. Sumatur aliud punctum extra illam viam quae maxima supponatur nec in se redit, ita ut sit major hac via a puncto primo ad hoc novum quam a primo ad secundum, inde sit alia via a puncto hoc novo: ad secundum, non secans priorem viam a primo ad secundum patet viam ei puncto primo ad novum, et a novo ad secundum, esse viam a primo ad secundum majorem priore.

[*Fig. 1*]

Sed a puncto ad punctum viam data qualibet ad idem punctum via minorem dari, demonstrandum est, quod sic tentabimus: Sit aliqua via ACB ad aliquo puncto A dato ad aliud datum B. Sitque alia minor, ADB, et hac rursus minor AEB et sic in infinitum, in harum prima ACB, sumatur AF aequalis ipsi ADB (nam majus est quod partem habet alteri aequalem,) et AG aequalis ipsi AEB, et ita porro. Quod si jam qualibet parte ipsius AB, vel AF, vel AG minor assumi potest quae sit viae ab A ad B aequalis, ideo sumamus punctum aliquod H inter A et G. Vel potest aliqua pars viae assumi aequalis ipsi H vel non. Si potest assumi, sumatur aliud punctum inter A et H cui aequalis non possit assumi, vel si nulla talis est erit via minor qualibet assignabili, adeoque puncta A et B coincident, sit ergo punctum H tale ut inter ipsum et A nulla via ipsius B assumi possit.

Moveatur punctum a C versus A. motu uniformi tandem utique perveniet ad A. Itaque cum semper initio moveatur in punctis quibus dantur viae aequales tandemque perveniat ad puncta quibus non dantur viae aequales necesse est aliquando veniat ad punctum ubi incipit transitus, ergo datur via minima. Demonstravimus ergo dari viam minimam a puncto ad punctum posito si puncta non coincidant dari posse lineam minimam minorem qualibet via. Id enim est coincidere.

30 (39856). DEMONSTRATIO PRIMAE PRIMI ELEMENTORUM [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 2 Bl. 6–7. 1 Bog. 2°. 3 S. halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1679, S. 43–51.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678 – 1682 belegt.

E u c l i d e s summum rigorem observare voluit in demonstrando: ideo probat quod in triangulo duo latera sint tertio majora, quod, ut Epicurei ridentes ajebant, etiam asinus novit. Interea non probat alia quae magis probatione indigere videntur exempli causa in prop. 1 lib.1 ubi Triangulum aequilaterum super data basi constituere docet, assumit duos Circulos ex rectae (quae pro basi sumitur) extremis et intervallo ipsius rectae descriptos, sese secare. Quod non equidem ita manifestum est. Imo probandum est se secare extra ipsam rectam productam.

Sane si quis ponat Triangulum aequilaterum super data recta esse possibile, sequitur circulos se secare.

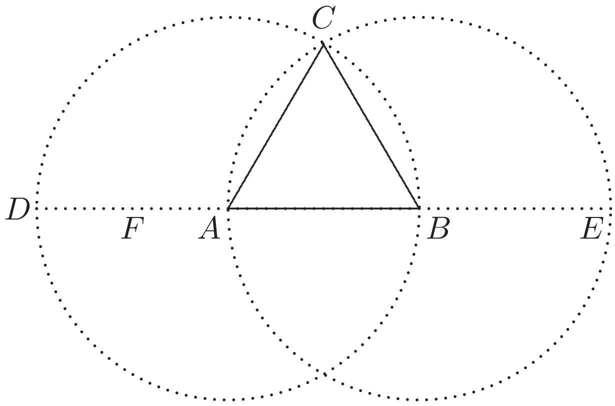
Praeterea si ponatur Triangulum aequilaterum possibile super aliqua recta erit et super qualibet recta licet majore vel minore, quia Triangula aequilatera similia omnia possibilia sunt, alioqui non essent similia. Verum ostendendum esset prius duo Triangula aequilatera similia esse.

Sed his missis videamus an quod proponitur demonstrare liceat.

Ostendendum est Circulorum circumferentias sibi occurrere extra rectam ex cujus extremis et cujus intervallo describuntur, utcunque productam. Hoc fiet si ostendantur duo:

10 assumit *(1)* Circulos duos ex baseos *(2)* duos *L* 11 f. imo ... productam *erg. L*

6 probat: EUKLEIDES, *Elementa*, I, 20. 7 ajebant: Vgl. PROKLOS, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, S. 323.



[*Fig. 1*]

P r i m u m [:] Circumferentia in unius (DB) esse partim in altero partim extra alterum, EA (hoc enim posito illa hujus ambitum s e c e t necesse est per sectionis definitionem).

D e i n d e [:] Radium productum secare circumferentiam in duobus tantum punctis. Nam ponatur intersecare se circulos in recta (AB) utcunque producta in puncto aliquo F seu dari punctum rectae et duobus circulis istis commune; sequitur circulorum alterum secare rectam in tribus punctis, quod est absurdum ut mox ostendam. Sequi autem ita probo. Recta (AB) hoc loco radius, si producatur circulum (AE) ex una radii extremitate velut centro descriptum secat adhuc in uno puncto E, (nam radius productus circulum secat in duobus punctis) et eadem recta quae radius etiam est alteri circulo, BD, secat eundem in uno adhuc puncto D. Nullum autem ex his punctis commune est duobus circulis et rectae simul. Nam duo quidem A. B sunt centra unumquodque sui circuli ergo in circuli illius cujus centra sunt circumferentia non sint, duo reliqua sunt unumquodque extra aliquem circulum, nam D est in radio BA producto a centro versus circumferentiam ergo extra circulum AE (nam radius productus a centro versus circumferentiam est extra circulum) non ergo in circumferentia circuli AE. Eodem modo nec E in circumferentia circuli DE. At datur aliquod punctum F commune rectae et duobus circulis, erit ergo

5 f. punctis | et deniqve Circulos qvorum diametri coincidunt, coincidere *gestr.* | . Nam *L* 9 probo. *(1)* Radius (AB) productus *(2)* Recta ... circulum (AE) *(a)* secat in uno adhuc puncto *(b)* centro *(c)* ex una | radii *erg.* | extremitate *L* 10 puncto | tantum *gestr.* | *E*, (nam *L* 11 secat | tantum *gestr.* | in *L* 12 puncto D *(1)* Manifestum autem est *(2)* jam postulatur ex hypothesi ut de *(3)* Nullum *L* 18 DE. *(1)* [potuisset idem aliter probari si D cadit in circumferentiam circuli AE, eodem modo cadet E in circumferentiam circuli DB. ergo vel coincidant D et E, adeoqve circuli qvorum eadem centra et punctum aliqvod circumferenti *(2)* At *L*

unum adhuc punctum praeter B et D, nempe F rectae et circulo BD commune, adeoque tria circulo et rectae puncta communia erunt.

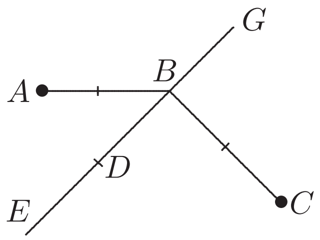
Ostendamus jam absurdum esse quod radius productus seu diameter secet circulum in tribus punctis.

Hoc ita ostendo. Ducatur aliquis radius a circumferentia ad centrum, is utique inter circumferentiam et centrum non secat circumferentiam adhuc semel, nam aequalis est a circumferentia ad centrum hoc loco pars toti porro ubi jam ad centrum pervenit producatur inde porro, et cum ponamus occurrere adhuc circumferentiae, (nam etsi hoc certum sit ponamus tamen ut hypothesin tantum) medio autem int [*bricht ab*]

Sint tria puncta DFB in quibus circumferentia radium DB secet. Ducantur ad centrum rectae DA, FA, BA aequales. Non possunt autem tres rectae consistere ad idem punctum, nisi una sit pars alicujus ex reliquis duobus. Sed hoc loco aequales esse debent: foret ergo pars aequalis toti. Ergo recta per centrum transiens circulum in tribus punctis secare non potest.

Ostendendum autem superest ad hanc absurditatem plene cognoscendam, non posse tres rectae ejusdem partes ad idem punctum terminari, nisi una aliqua sit pars alterius. Sed hoc generaliter verum est de linea quavis. Non posse plures duabus lineae ejusdem (nunquam ad prius aliquod punctum redeuntis) partibus ad idem punctum consistere. Nam punctum cujus motu linea describitur ponatur ex una lineae parte ad datum punctum consistente, per datum punctum transire in alteram. Ergo continuando motum vel redibit ad punctum hoc contra hypothesin, vel nunquam partem tertiam percurret (quoniam nisi etiam punctum quod in ea est rursus percurrat, percurrere eam non potest), nisi eam jam in prioribus percurrerit, id est nisi sit pars alterutrius reliquorum. Nam amborum quidem pars esse non potest, pro parte.

10–14 sint ... tres rectae *(1)* consistere aeqvales ad idem punctum in | partes *nicht gestr.* | *(2)* esse aeqvales *(3)* consistere ... potest *erg.* *L* 16 punctum *(1)* consistere *(2)* terminari *L* 19 Nam *(1)* linea est via puncti *(2)* Punctum *L* 24 potest, *(1)* qvia extremum eius est punctum, et reliqvorum est etiam idem punctum Jam generaliter: Si *(a)* tria *(b)* trium *(c)* duarum linearum AB. CB non sit communis extremitas B *(2)* pro parte *L*



[*Fig. 2*]

Quod sic ostendo: Si pars ejus percurritur in una priorum, pars in altera, seu si duae sunt partes ejus ad unum hoc punctum terminatae, una in una altera in altera priorum linearum, necesse est has partes non esse alteram in altera (seu ut totum et pars), alioqui et duae illae alterae lineae forent una in altera seu partem haberent communem, contra hypothesin. Ergo sunt diversae, jam si duae diversae partes ejusdem lineae habeant extremum commune, id quidem totius lineae extremum non est (per definitionem intermedii). Impossibile est ergo id punctum tertiae lineae ad ipsum consistentis extremum esse. Contra hypothesin. Ergo non dantur tres lineae quae ejusdem lineae sint partes ad idem punctum consistentes seu terminatae.

Ostendendum etiam est punctum quodlibet quod sumitur in radio a centro versus circumferentiam postquam circumferentiam attigit producto, esse extra circulum ejusque circumferentiam.

Nimirum recta illa a centro ad punctum illud utique major est radio (totum parte) at in circulo nulla duci potest recta in centro terminata quae major sit radio. Quod sic probo. Si punctum in circulo est, radius circulum generans in ipsum incidet, id est punctum coincidet cum aliquo puncto radii alicujus ergo vel erit extremum radii id est vel ipsum centrum, vel in circumferentia (unde recta ad centrum ducta non utique radio major est,) vel cadet intra extrema, ergo recta ab ipso ad extremum nempe centrum ducta, non

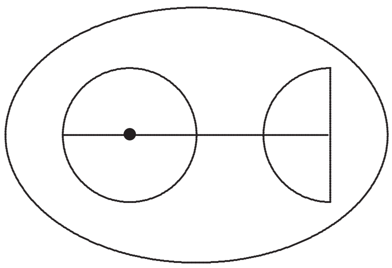
---

14 *Zu* punctum illud: Punctum quod dicitur esse in aliquo.

2 altera, *(1)* intelligenda est pars ad hoc punctum consistens ut EB vel GB vel DB, nam alia pars omitti potest, qvaeritur enim qvomodo pars ad punctum consistens in reliqvis percurratur; si ergo *(2)* seu *L* 3 f. priorum *(1)* partium sum *(2)* linearum sumatur *(a)* alterutrum *(b)* alterutra earum, satis enim est ostendere hanc non posse consistere *(3)* linearum *L* 4 (seu ... pars) *erg. L* 7 f. (per ... intermedii) *erg. L* 19 ergo *(1)* non potest esse major recta *(2)* recta *L*

potest esse major radio, pars toto.

Nunc ut ad nostros duos circulos redeamus. Hoc jam superest demonstrandum: quod circumferentia unius partim est in circulo altero partim extra ipsum. Nempe circumferentia circuli BD partim est in circulo partim est in circulo AE. partim extra ispum. Nam punctum circumferentiae illius nempe B, est in circulo hoc, quippe cujus est centrum. Sed punctum circumferentiae illius D, est extra circulum hunc quod sic ostendo: Est enim in recta BA producta ultra B ab A. Est enim in BA producta, quia non est in ipsa BA, alioqui caderet circumferentia (in qua est) intra centrum et circumferentiam quod absurdum (seu recta ducta a centro ad circumferentiam non occurrit circumferentiae alioqui foret pars aequalis toti). Est autem in producta a B versus A, quia centrum cadit inter duo extrema diametri in eadem recta, seu intermedium est, (quia partium duarum extremum commune est). Vel potius sic: recta est BAD. Nam si foret DBA, foret DA major quam BA (quippe totum parte) cum tamen sint aequales ductae a circumferentia ad centrum. Quoniam ergo D est in recta BA producta ultra A, non erit in circulo ABE, nam ut paulo ante ostendimus punctum in radio BA (circuli ABE) producto ultra A in circulo non est. Est ergo circumferentia BD partim in circulo ABE partim extra, adeoque ejus ambitum secat seu ac proinde ei occurrit.



[*Fig. 3*]

Circa Sectiones plura demonstranda, ut quod omnis recta rectam secat nisi minima distantia sit aequalis.

Secundo quod omnis recta circulo occurrit nisi minima in centro ad rectam sit major radio.

Tertio quod omnis circulus circulo occurrit nisi vel summa radiorum sit minor distantia centrorum, vel differentia radiorum sit distantia centrorum major.

9 f. occurrit | differentiae *ändert Hrsg.* | alioqvi *L* 11 recta, *(1)* nam | si *nicht gestr.* | extra caderet, foret in recta extra *(a)* di *(b)* Circulum producta itaque recta BA *(2)* seu *L* 12 est). *(1)* seu recta est AB *(2)* vel *L*

31 (39857). DE PUNCTO, LINEA, SUPERFICIE, RECTA, PLANO [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 2 Bl. 8–9. 1 Bog. 2°. 4 S. halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: 1. ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 52–60; 2. (mit frz. Übers.) ECHEVERRÍA / PARMENTIER, *La caractéristique*, 1995, S. 72–81.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1678–1682 belegt.

Punctum A.

Linea $1A2A3A$ etc.

Sint congruae $B1A2A$ etc. D. et coincidant B et F. Item coincidant D et G. et ob
et $F1E2E$ etc. G.
hoc ipsum coincidant etiam A et E respondentes respondentibus, ita ut BAD et FEG sit una eademque linea. Ea linea dicetur esse recta. Imo congruorum mentione carere possumus, sic enim brevius et generalius licebit:

Si in duabus lineis $1A2A3A$ etc. et $1E2E3E$ etc. puncta A et E ita ordine respondentia perpetuo assignari possint ut coincidentibus duobus A, cum duobus respondentibus E, necesse sit eo ipso coincidere reliqua reliquis respondentibus ita ut non nisi una eademque sit linea; ea linea appellabitur recta.

8 f. etc. *(1)* item *(a)* BCD *(b)* BCD, etc. Recta *(aa)* sint 1A2A3A et 1B2B3B. congrua, sintqve 1A1B *(bb)* sint congruae $\frac{\text{1A2A3A}}{\text{1B2B3B}}$ et sint coincidentes $\frac{\text{1A} \mid \text{3A}}{\text{1B} \mid \text{3B}}$ si jam 2A et 2B *(cc)* sint congruae $\frac{\text{1A2A3A48 etc}}{\text{1B2B}}$ *(2)* In Recta Linea *(3)* Sint *L* **12** recta. *(1)* Superficies est: 1B1A2A etc 1D | 2B12A22A etc 2D. etc etc. Planum *(2)* Si sint congruae *(3)* vel brevius: si sit *(4)* Si sint congruae 1A2A3A etc. *(5)* Imo *L* **13** f. licebit: *(1)* Si respondeant $\frac{\text{1A2A3A etc}}{\text{1E2E3E etc}}$ *(2)* Si *L* 16 respondentibus E, *(1)* coincidant reliqva rliqvis *(2)* necesse *L* 16 respondentibus *(1)* seu lineam lineae, *(2)* ita *L*

Et hoc est quod voluit Euclides puncta Rectae ex aequo jacere, id est in nullam partem declinare, alioqui variatio oriretur, nam si quod punctum declinet in sinistram dabitur aliud quod declinet similiter in dextram et ita diversae prodibunt lineae, licet coincidant extrema.

S u p e r f i c i e s est $1A2A3A$ etc. $12A22A32A$ etc. $13A23A33A$ etc. etc.

Si in duabus superficiebus $1A2A3A$ etc. $12A22A32A$ etc. $13A23A33A$ etc. etc. et $1E2E3E$ etc. $12E22E32E$ etc. $13E23E33E$ etc. etc. linea $1A2A3A$ etc. coincidat lineae $1E2E3E$ etc. et linea $13A23A33A$ coincidat lineae $13E23E33E$ etc. coincidatque ideo etiam $12A22A32A$ etc. cum $12E22E32E$ etc. non ideo superficies erit planum, nisi lineae intelligantur esse rectae, alioqui enim superficiei quoque cylindri poterit applicari. Quod quia ex ipsa definitione non apparet, non potest haberi definitio pro perfecta.

Neque etiam facile ex his patet cur sint tantum dimensiones tres.

Si punctum A moveatur a puncto B versus punctum C. simplicissimo modo, sive ab his solis duobus punctis determinato, erit motus in linea r e c t a .

Nam si alia praeterea puncta assumi necesse sit ad determinandam speciem motus, non erit ille simplicissimus.

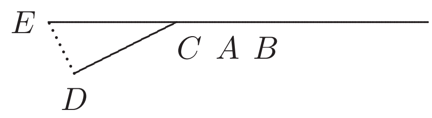
Hinc lineam rectam ita exprimemus literis: Si lineae BAC et BDC sint ejus speciei, ut eo ipso coincidant, quia extrema coincidunt, species illa lineae dicitur esse r e c t a . Unde statim sequitur duas rectas non habere duo puncta communia, nec proinde in se redire seu spatium comprehendere.

Vel sic: Si omnes lineae BC (nempe BAC, BDC, etc.) ejusdem speciei sunt linea una eademque eique speciei lineae dicentur, r e c t a e .

Ex eodem modo demonstratur non posse esse duarum rectarum segmentum commune.

1–4 Et . . . extrema *erg. L* 7 etc. etc. *(1)* puncta A et E ita ⟨ad⟩ *(2)* lineae 1A2A3Aetc coincidant *(3)* linea *L* 13 moveatur *(1)* versus punctum B *(2)* a puncto *L* 14 f. r e c t a *(1)* Simplici *(2)* Hinc si sit linea *(3)* Nam *L* 17 exprimemus *(1)* charactere *(2)* literis *L* 17 sint *(1)* congruae, et ideo *(2)* ejus *L* 18 coincidant, *(1)* erunt una eademqve linea recta *(2)* qvia *L* 21 etc) *(1)* sunt una eademqve recta *(2)* ejusdem *L*

1 voluit: Vgl. EUKLEIDES, *Elementa*, I, def. 4.



[*Fig. 1*]

Nam sit enim BC segmentum commune rectis BCD et BCE, pone punctum A moveri a B versus C et ultra, simplicissimo modo, utique per definitionem rectae eo ipso determinatus est ejus motus. Sed hoc loco non est determinatus, nam ultra C non apparet motus puncti A debeat ne tendere versus D an versus E, non sunt ergo continuatio ejusdem rectae BC.

Has duas propositiones comprehendere possumus in characteribus hac una:

etc. $DBFCG$ etc. coincidit ipsi etc. $HBKCL$ etc. id est si duarum rectarum indefinite productarum duo puncta coincidunt, omnia aliis coincident.

An melius sic:

Si situs puncti D ad puncta B. C. congruus sit situi puncti F ad eadem puncta B. C et ob speciem lineae in qua cadunt puncta D. B. C. ac lineae in quam cadunt puncta F. B. C. coincidant D et F erit una eademque recta.

Si punctum A moveatur a B ad C et sint loca ejus omnia ex hoc ipso simpliciter determinata, omnia illa loca dicentur esse in recta.

Duae rectae eadem extrema habentes coincidunt.

Sint enim extrema B et C, et moveatur punctum A a B versus C in altera harum: movebitur in recta ex hypothesi, ergo in linea determinata ex hoc ipso quod ejus extrema sunt B. C. Ergo non datur alia cujus eadem sint extrema.

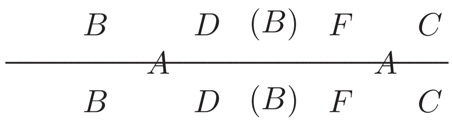
Pars rectae est recta.

3 ultra, *(1)* utiqve per defini *(2)* simplicissimo *L* 4 motus *(1)* et ultra C non est *(2)* sed *L* 10 f. sic: *(1)* Si puncta duo *(2)* Si punctum D ita situm sit ad puncta duo B et C, qvemadmodum punctum F situm est ad eadem duo puncta *(3)* Si punctum D et F congrue sita sint ad puncta B et C *(4)* Si *L* 14 ad C *(1)* simplicissime *(2)* et sint *(a)* linea *(b)* puncta omnia mo *(c)* loca *L* 15 determinata; *(1)* movebitur in recta *(2)* moveri dicitur in recta. *(3)* omnia *L* 15 f. recta. *(1)* Itaqve *(2)* Hinc duae rectae non possunt comprehende *(3)* Hinc *(4)* Duae *L* 19 sunt B. C. *(1)*, sed datur alia qvoqve cuius extrema etiam sunt B. C. ergo linea in qva moveri debet A ex hoc ipso non est determinata. Qvod est absurdum *(2)* ergo *L* 20–82,1 recta. *(1)* Sit recta ABC eiusqve pars AB. *(a)* qvod si ergo motus ipsius B *(b)* sit pars *(c)* Sit recta BCD etiam eius pars aliqva ut BC erit recta *(aa)* Nam puncti A via a B ad D est determinata *(bb)* |Nam punctum A qvod *nicht gestr.*| *(2)* Nam *L*

Nam quicquid determinatum est, ejus pars assignata etiam determinata est. Clarius: sit recta BCD. cujus pars aliqua sit BC, ajo et BC esse rectam.

Nam quae ex solis extremis determinata est per defin. haec autem determinata est ex solis extremis B. C. quod sic ostendo.

Pars rectae toti similis est.



[*Fig. 2*]

Si punctum A simpliciter moveatur a B ad C, sitque eo ipso determinatum quod percurret lineam DF, ea linea dicetur esse recta.

Si punctum A simpliciter moveatur a B ad C. sitque eo ipso determinatum quod percurret lineam DF, non tamen ideo determinatum est punctum D vel F in serie punctorum inter B et C. Ergo potest B esse idem cum D et F cum C, ergo si punctum A simpliciter moveatur a B ad C erit BC recta.

Recta est linea quae positione data est simplici duorum tantum punctorum positione.

In eadem Recta esse dicuntur omnia puncta lineae simplici in ea positione duorum

1 eius *(1)* etiam partes | datae *erg.* | sunt determinatae: *(2)* pars *L* 2 f. rectam. *(1)* Sit enim alia qvaecunqve non recta *(a)* seu eius speciei ut non possit aliud *(b)* qvae ex solis extremis B. C. determinatur. Ponatur enim A pervenire a B ad C in linea qvae ex extremis B et C non determinatur *(aa)* aut venit a *(bb)* et venisse per punctum *(cc)* alioqvi motus ipsius A a B ad D. *(aaa)* non erit determinatus *(bbb)* per lineae speciem non erit determinatus *(2)* Nam punctum A moveri debet debet a B ad D | in recta linea id est *erg.* | in linea qvadam *(a)* determinata *(b)* ex hoc ipso simpliciter determinata, *(aa)* ergo *(bb)* determinatum est etiam hoc ipso per qvae puncta perveniat a B ad C, id jam *(3)* Nam recta est *(4)* Nam *L* 7 simpliciter *erg. L* 7 sitqve *(1)* linea | ⟨DF⟩ *erg.* |, qvam percurrit eo ipso determinata *(2)* linea DF *(3)* eo *L* 12 f. recta. *(1)* Si punctum A moveatur a B ad C simplicissima directione *(2)* Si punctum A ita moveatur *(a)* loca eius omnia *(b)* via ejus *(c)* ubiqve *(d)* loca omnia qvae percurrit determinentur sola directione *(aa)* a punct *(bb)* motus a Puncto uno *(3)* Si punctum A moveatur *(a)* neqve aliam *(aa)* habeat directionem qvam ab A ad B *(bb)* qvam habeat conditionem *(b)* tra *(c)* a B *(4)* Recta est linea *(a)* cuius species sola *(b)* indefinita qvae *(c)* cuius species indefinita simplici duorum punctorum consideratione determinatur *(aa)*, magnitudo extr *(bb)* Determinatum est *(aaa)* cuius a *(bbb)* qvod a qvolibet alio discerni potest. Linea recta inter duo puncta minima est Hinc inter duo puncta non nisi unica est recta *(5)* Recta est linea *(a)* cuius *(b)* qvae | specie et *gestr.* | positione data est, *(aa)* datis duobus tantum punctis *(bb)* simplici *L* 15 puncta *(1)* qvae sunt in | linea *nicht gestr.* | *(2)* lineae *L*

punctorum determinatae.

P l a n u m est superficies indefinita quae simplici trium punctorum in ea positione determinatur.

Hinc i n t e r d u o p u n c t a n o n n i s i u n i c a e s t r e c t a. Nempe rectae ACB. ADB etc. coincidunt. Sunt enim omnes AB, et rectae.

P a r s r e c t a e e s t r e c t a . Hinc sequitur ex propositionibus his duabus junctis duas rectas se non nisi in uno puncto secare.

R e c t a est linea cujus omnia puncta ordine determinari possunt solo duorum datorum punctorum respectu. Hinc pars rectae est recta.

Una recta superficiem non claudit. Seu non redit in se. Nam si redit in se primum a puncto B ibitur per punctum aliquod ut C ad D, inde a D per F redibitur ad B. Ergo duae ejus partes BCD, DFB, habebunt communia extrema, non ergo erunt rectae, cum tamen sint rectae partes.

P l a n u m est superficies cujus omnia puncta ordine determinari possunt sola trium punctorum (non in eandem rectam cadentium) determinatione. Hinc pars plani planum. (Non est necesse adjicere in eadem rectam cadentium, si intelligantur tria puncta non jam per se invicem determinata; nam si in eandem rectam cadant tertium a reliquis duobus determinatur).

Q u a r u m r e c t a r u m e x t r e m a c o i n c i d u n t e a e i n t e r s e c o i n c i d u n t.

Nam si puncta extrema coincidunt rectarum, coincidunt ea quoque inter haec extrema, coincidunt ea per quae caetera puncta determinantur. Ergo et caetera coincidunt. Coincidunt enim vel eadem sunt quae per eadem sive per coincidentia determinantur.

Q u o r u m p l a n o r u m e x t r e m a c o i n c i d u n t e a i n t e r s e c o i n-

1 determinatur *L ändert Hrsg.* 2 indefinita *erg. L* 2 in ea *erg. L* 4 f. r e c t a *(1)* Nec proinde duae Recta *(2)* Nempe | rectae *erg.* | ACB. *L* 8 possunt *(1)* sola duorum punctorum respectu per eius determinatione *(2)* solo *L* 10–13 Una ... non *(1)* includit *(2)* claudit ... in se. *(a)* Superficies enim est *(b)* Nam *(aa)* sumantur in ea duo puncta *(bb)* si ... partes *erg. L* 15 punctorum *(1)* eius determinatione *(a)* Inter duo puncta non nisi unica est recta *(b)* Inter duo *(2)* (non *L* 19–21 c o i n c i d u n t. *(1)* nam alioqvi ex solis extremis puncta omnia unius rectae ordine non determinantur, Rectae cuiusqve extrema sunt duo puncta ea si omnia rectae unius Puncta *(2)* Nam *L* 21 rectarum, *(1)* coincidunt ea per qvae caetera determinantur, eadem *(a)* ergo *(b)* autem sunt qvae per eadem determinantur *(2)* coincidunt *L* 23 f. determinantur *(1)* Eodem modo demo *(2)* Q v o r u m *L*

cidunt.

Nam quia extrema coincidunt planorum tria minimum puncta in eandem rectam non cadentia coincident, nam una recta superficiem non includit.

Tria quaelibet puncta extremorum non in eandem rectam cadentia utique his coincidentibus coincidunt et quae per haec determinantur; inter haec extrema.

Unum planum corpus non claudit, nec tria, sed minimum quatuor.

2 f. qvia . . . includit *erg. L*

32 (39859). DE RECTIS ET TRIANGULIS
[1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 2 Bl. 12–15. 2 Bog. 2° halbbrüchig beschrieben. 5 S. auf Bl. 12–13 u. 14 r°. Auf Bl. 14 v° u. 15 r° N. 33 (39860). Bl. 15 v° leer. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 70–78.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von 1678–1682 belegt. **[noch]**

L i n e a est via puncti.

P u n c t u m est quod in dimensione simplicissimum est.

D i m e n s i o est capacitas formae quae in pluribus et simul perceptis eadem sit seu ipsa forma spatii.

M a t e r i a est quae habet formam aliam praeter hanc capacitam quae in pluribus eadem sit, eamque hanc ut diversa in quibus percipitur semper ut diversa percipiantur si simul percipiuntur, quod vulgo vocant impenetrabilitatem.

E x t e n s i o est plurium comperceptibilitas. Itaque in puncto dimensio est non extensio.

E x t e n s u m est in quo plura comperceptibilia sunt.

Omnia extensa limitata sunt in uno extenso absoluto, nam duo quaeque extensa sunt comperceptibilia.

E x t e n s a l i m i t a t a sunt, quae cum alio extenso comperceptibilia sunt, quod ejus pars non est. Sed haec nunc mittamus.

Datur extensum absolutum.

Ex absoluto extenso et limitatis oritur spatium.

Idea extensionis absolutae nulla alia est quam immensitatis divinae.

7 *(1)* Recta linea est *(a)* cuius *(b)* qvae inter extrema data duabus tantum punctis *(2)* L i n e a *L* **9** in *(1)* toto et partibus *(a)* eadem est *(b)* eodem mo *(2)* pluribus *L* **10** seu *(1)* hoc ipsum *(2)* ipsa *L* **10–14** spatii. | *(1)* At ips *(2)* M a t e r i a ... qvae in *(a)* toto et partibus eadem *(b)* sit ... hanc ut *(aa)* cum in ea *(bb)* diversa ... percipitur *(aaa)* etiam di *(bbb)* semper ... impenetrabilitatem *erg.* | E x t e n s i o est *(aaaa)* hoc ipsum *(bbbb)* plurium *L* **17** extensa *(1)* sunt ⟨minora⟩ *(2)* limitata *L* **17** extenso | absoluto *erg.* | nam *(1)* omnia *(2)* duo *L* **21 f.** absolutum | , seu spatium indefinitum *gestr.* | . Ex *L*

Recta est $\overbrace{\text{via puncti moti}}^{\text{linea}}$ ex duobus in ea si opus sit producta punctis determinata.

Pars rectae est recta. Nam viae pars est via, et determinati pars est ex iisdem determinata. Ergo viae ex duobus punctis determinatae pars est via ex duobus iisdem punctis determinata, id est recta est.

Duorum extremorum non nisi unica est recta. Via ab uno extremo ad aliud ex duobus extremis determinata est determinata ex duobus punctis (nam extrema rectae sunt puncta). Ergo est recta; eadem est determinata id est ex his datis unica. Ergo est unica recta.

Recta non redit ad idem punctum. Nam quod redit ad idem punctum redit ab aliquo intermedio puncto, per aliam viam quam qua ad intermedium venit. Ergo duae erunt partes viae ex hypothesi rectae, adeoque per ... ambae rectae, una a puncto ad intermedium, altera ab intermedio ad punctum diversa a priore. Hae duae rectae habent duo extrema puncta et primum seu ultimum et intermedium communia, quod est absurdum per ...

Duae rectae quae duo puncta habent coincidentia, coincidunt si continuentur.

Nam duo puncta illa cadunt in utramque et utraque recta est ergo ex his duobus punctis determinata, id est unica. Coincidunt ergo.

Ergo inter duo extrema non nisi unica est recta, ponan-

1 f. est *(1)* extensum cuius extr *(2)* $\overbrace{\text{via puncti moti}}^{\text{linea}}$ ex duobus | in ... producta *erg.* | punctis *(a)* ad qvae locus punctorum ex duobus punctis datis ad ipsam solam *(aa)* ips *(bb)* determinatorum vel a qvibus mo *(b)* determinata *(aa)* Recta est linea Nam recta est *(aaa)* locus punctorum ex duobus punctis datis ad ipsam solam determinatorum. *(aaaa)* At locus qvi *(bbbb)* locus autem huiusmodi non est locus linearum seu line *(bbb)* via puncti ex duobus punctis datis determinata *(bb)* Pars *L* 2 f. ex iisdem *erg. L* 4 iisdem *erg. L* 4 f. determinata | id est *(1)* est *nicht gestr.* *(2)* recta est. *erg.* | *(a)* Inter duo extrema, *(b)* duorum *L* 5 f. Via *(1)* a puncto ad punctum *(2)* ab uno extremo | ab *ändert Hrsg.* | aliud *L* 6 extremis *(1)* est recta *(2)* determinata *L* 10 f. redit *(1)* per aliqvid intermedium *(2)* ab ... puncto, | per ... venit *erg.* | ergo *L* 11 ex ... ambae rectae *erg. L* 12 f. duae *(1)* partes sunt partes rectae ex hypothesi, ergo sunt rectae, dantur ergo duae rectae habentes extrema communia nempe *(a)* punctum *(b)* duae viae | rectae *erg.* | una a puncto ad intermedium, altera diversa a priore ab intermedio ad punctum. Sed hoc *(2)* rectae *L* 13 extrema *(1)* punctum a qvo itur *(2)* puncta *L* 14 f. per ... *(1)* Duae rectae *(a)* non habent partem aliam communem, alia *(b)* qvae habent segmentum commune, coincidunt *(2)* Duae *L* 17 Nam *(1)* utraqve determinata est ex duob *(2)* duo *L*

tur enim haec duo puncta coincidentia utrobique esse extrema. Item d u a e r e c t a e q u a e p r o d u c t a e n o n c o i n c i d u n t n o n h a b e n t s e g m e n t u m c o m m u n e , aliquoi enim haberent plura puncta quae in eo segmento assignari possunt, communia.

D u a e r e c t a e s p a t i u m n o n c o m p r e h e n d u n t .

Nam spatium comprehendere est esse ambitum spatii, id est in eo ita iri posse, ut denique per aliam viam ad primum locum redeas, itaque et si unus digrediatur ab eodem puncto per viam qua primus ivit, alter per viam qua primus rediit, sibi occurrent; ergo si una via sit per unam rectam altera per alteram, occurrent sibi duae rectae, et ideo habebunt duo puncta communia digressionis, et occursus. Quod est absurdum per praeced.

S p a t i u m c o m p r e h e n d e r e est componere viam in se redeuntem. Duae autem rectae non possunt componere viam in se redeuntem, nam habebunt duo extrema communia, unum in quo ab una recta in alteram transitur, alterum in quo ab hac ad illam reditur.

P l a n u m est via rectae ex tribus in ea via si opus est producta punctis non in eandem rectam cadentibus, determinata. Unde demonstratur partem plani esse planum. Duo plana quae tria habent puncta coincidentia coincidere si continuentur, ideoque inter tria puncta quaelibet, itemque inter quatuor aut plura quaelibet in eodem plano non nisi unicum esse planum. Duo plana non habere segmentum commune. Duo plana spatium non comprehendere (imo ostendendum est ne tria quidem spatium comprehendere).

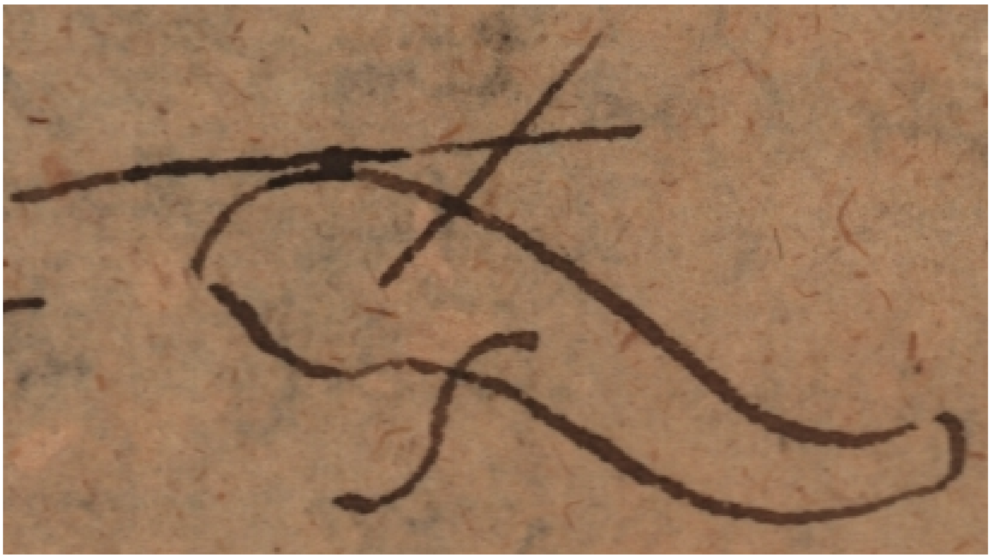
R e c t a t o t a i n e o d e m a l i q u o p l a n o e s t , nam via ejus tribus punctis determinata in eodem plano est, ipsa autem tota in sua via est.

1 f. r e c t a e | q v a e ... c o i n c i d u n t *erg.* | n o n h a b e n t *(1)* partem communem, *(2)* segmentum *L* **7** si *(1)* qvis digrediatur per unam viam alius ab uno punc *(2)* unus *L* **11–16** praeced. | S p a t i u m c o m p r e h e n d e r e est *(1)* esse *(2)* componere *(3)* componere ... redeuntem, *(a)* nam qvi ibitur in una digres *(b)* nam habebunt *(aa)* duo puncta *(bb)* duo ... reditur *erg.* | *(aaa)* Duae rectae qvae unum punctum commune habent sunt in eodem plano *(bbb)* P l a n u m *L* 16 punctis *(1)* determinata *(2)* determinata Hinc seqvitur ea puncta *(3)* non *L* 19 qvatuor | aut plura *erg.* qvaelibet *erg. u. gestr.* | qvaelibet *L* 21 f. comprehendere) *(1)* Omnia rectae ejusdem puncta sunt in eodem plano. Est enim planum huius rectae via ex tribus *(2)* Omnia rectae puncta sunt in eodem plano. | In *erg.* | Eo scilicet qvod huius rectae via esse intelligi potest *(3)* R e c t a *L* 22 a l i q v o *erg. L* 23–88,1 est. *(1)* D u a e r e c t a e p u n c t u m c o m m u n e h a b e n t e s s u n t i n e o d e m p l a n o Nam tria puncta qvaelibet sunt in eodem plano *(2)* S i *L*

S i d u o e j u s d e m r e c t a e p u n c t a s i n t i n a l i q u o p l a n o , t o t a e s t i n e o d e m p l a n o .

Nam ex duobus his punctis et tertio extra rectam determinatum est planum quod hujus rectae via est; id est in quo tota est.

D u a e r e c t a e u n u m h a b e n t e s p u n c t u m c o m m u n e s u n t i n e o d e m p l a n o . Nam ex tribus punctis, uno ipsis communi et duobus aliis cuique earum propriis determinatur aliquod planum. In quo plano cum cujusque harum rectarum duo sint puncta, in eo recta illa tota erit per praecedentem.



[*Fig. 1*]

Si duae lineae sint in eadem superficie et una sit pars ambitus cujusdam partis plani, altera sit partim intra partim extra eam plani partem postquam hanc ambitus partem attigit, dicentur hae duae lineae sese s e c a r e .

Hinc intelligi potest duae lineae se secare aut non secare, prout in aliqua superficie esse intelliguntur. Ita si sphaericam superficiem consideres, duo circuli magni se secant,

1 p l a n o , *(1)* r e l i q v a o m n i a s u n t *(2)* t o t a *L* 7 cuiusqve *(1)* rectae *(2)* | rectarum *nicht gestr.* | *(3)* harum *L* 10 in *(1)* eodem plano *(2)* eadem superficie *(3)* eodem plano *(4)* eadem ... una *(a)* extremum sit partis plani *(b)* sit pars ambitus *(c)* sit *L* 11 f. plani partem | *(1)* nec *(2)* ita ut non *(3)* nec nisi *(4)* postqvam hanc ambitus partem *(a)* attingat *(b)* attigit *erg.* |, dicentur *L* 13 potest | duo puncta intelligi *ändert Hrsg.* | se *L*

sed alia superficies fingi potest, in qua non se secent, sed tangant.

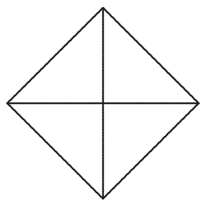
Si superficies dividatur in duas partes sive si linea ab uno ambitus puncto ad aliud per punctum aliquod intra superficiem ducatur, sitque alia linea partim in una partim postquam in lineam dividentem incidit in altera superficiei parte, dicetur linea haec illam secare. Unde sequitur quod vicissim illa hanc secabit.

Nam sumantur duo puncta in secante unum in una alterum in altera parte superficiei divisae. Jungaturque quodlibet extremem secantis cum quodlibet extremo sectae per lineas quascunque in eadem superficie ductas (quoniam duobus punctis in aliqua superficie sumtis semper duci potest linea ab uno ad aliud quae cadat in eandem superficiem). Manifestum est his quatuor lineis ductis superficiem contineri, nempe ab uno extremo secantis, ad unum sectae, ab hoc ad alterum secantis, inde ad alterum sectae, ab hoc ad primum secantis, nam patet rediri in gyrum, adeoque superficiem comprehendi (partem scilicet ejus in qua sunt lineae). Haec superficies autem secatur in duas partes tum ab una secantium tum etiam ab altera, et pars unius nunc citra nunc trans alteram cadit, postquam eam attigit. Itaque se mutuo intersecant.

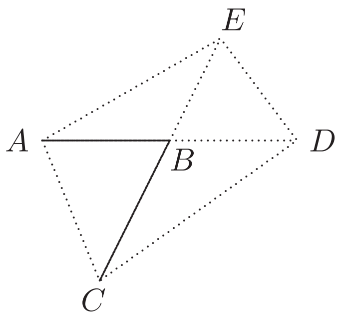
---

8 f. *Randbemerkung:* Lineam a puncto ad punctum ducere est ita ducere, ut praevideri possit concursum esse.

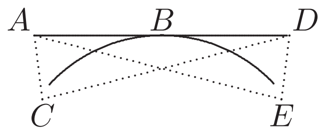
1 f. tangant *(1)* Generalius: Si duae lineae sint in eodem superficie, eaqve divisa sit in duas partes ita ut ab una ad alteram iri non possit nisi per *(a)* hanc ut *(b)* unam linearum | si opus productam *erg.* | et *(aa)* una *(bb)* altera | producta *erg.* | sit partim in una partim in altera superficiei parte *(aaa)* dicentur hae duae lineae sese intersecare *(bbb)* linea haec illam secabit *(ccc)* di *(ddd)* dicetur haec illam secare *(2)* Si li *(3)* Si *(a)* linea di *(b)* superficies *L* 2 partes *(1)* a linea ab, *(2)* sive *L* 6 secante *(1)* unum citra alterum trans *(2)* unum *L* 8 eadem superficie *(1)* sectas *(2)* ductas *L*



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]



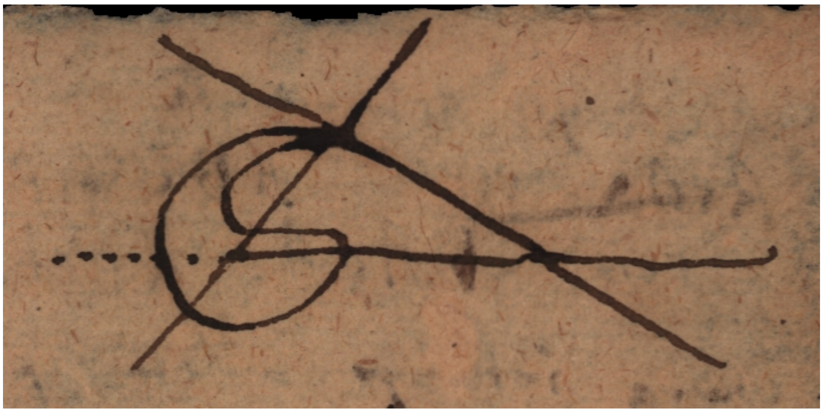
[*Fig. 4*]

Si duae rectae AB. CB unum habeant punctum commune, productae sese secabunt.

Nam quia habent unum punctum commune erunt in eodem plano per . . . . Sumantur duo puncta A. D item C. E in qualibet citra ultraque punctum B commune eaque jungantur lineis AE. ED. DC. CA. ita ut quodlibet extremum unius jungatur cuilibet extremo alterius, manifestum est haberi superficiem quatuor rectis jungentibus contentam et quatuor puncta A. E. D. C. erunt in ambitu, unum autem B duabus rectis commune non erit in ambitu (id est in nulla harum quatuor rectarum alioqui duae rectae, id est una rectarum ambientium, et una punctum hoc commune habentium haberent duo communia puncta). Recta ergo una ab initio datarum AD (vel CE) secabit totam superficiem in duas partes, nam transit per medium B ab uno ambitus puncto A ad alterum D ut ostendimus et una pars ACD continebitur recta illa AD et duabus AC. DC jungentibus ejus extrema A. D cum uno extremo C alterius, altera AED continebitur ipsis AD. AE. DE. Porro punctum aliquod F sumtum in altera rectarum datarum CBE inter B et E non cadit inter B et C, ergo cadit in partem AED, non in partem ACD quia tota BE recta cadit in AED. Alioqui pars esset extra ipsam ergo alicubi ambitu egressa esset ergo alicubi praeter in B vel E secasset vel AD vel AE, et ita secasset eandem rectam in duobus punctis. Vicissim tota CB cadit in CAD, ergo partim linea CE in hanc partim [in] illam partem cadit, adeoque rectam AD secat, rursusque proinde

7 superficiem *(1)* qvatuor li *(2)* qvatuor *(a)* lineis *(b)* rectis *L* 7 f. contentam *(1)* eiusqve duas *(2)* cumqve ab uno extremo ad alterum recta per medium aliqvod punctum *(3)* et qvatuor *(a)* puncta *(b)* puncta | A. E. D. C. B *ändert Hrsg.* | erunt *L* 10 haberent *(1)* plura qvam *nicht gestr.* *(2)* duo *L* 11 una *(1)* earum qvae pro punctum commune transit *(2)* ab *L* 11 datarum | AD (vel (E) *erg.* | secabit *(1)* spatium *(2)* totam *L* 13 pars *(1)* continebitur *(a)* par *(b)* recta *(aa)* AD *(bb)* ACD *(2)* eius ⟨—⟩ continebitur *(3)* ACD *L* 14 altera *(1)* in altero *(a)* ergo du⟨—⟩ *(b)* Et qvia *(2)* AED *L*

ab ea secatur. NB. Demonstrandum Lemma quod BE tota cadit intra AED.



[*Fig. 5*]

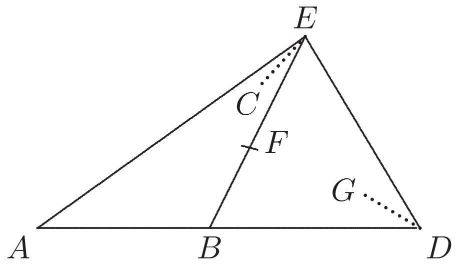
Recta ab uno trianguli angulo usque ad basin ducta, quae latus non est, tota intra triangulum cadit.

Nam quia ab angulo educitur punctum habet cum quolibet angulum facientium commune, jam et punctum habet cum basi commune, ergo cum quolibet Trianguli latere aliquod commune habet. Ergo inter angulum et basin triangulo egredi non potest, nam ambitum ejus id est aliquod laterum alicubi secaret, et ita cum aliquo laterum duo puncta communia haberet. (Unum superest, quod potest extra Triangulum tendere ad basin ita ut triangulum circumeat, et hoc fieri non posse demonstrandum.)

Linea in figuram cadere dicitur cujus omnia puncta sunt in figura.

Si duae sint rectae punctum commune habentes tertia recta cum alterutra minimum punctum commune habebit, si omnes quantum satis est producantur, et sint in eodem plano.

7 Ergo *(1)* anteqvam ad basin perveniat *(2)* inter *L* 9 f. (Unum ... demonstrandum) *erg. L* 11 Linea *(1)* intra *(2)* in ... dicitur *(a)* qvae non cadit in ambitum eius *(b)* qvae neqve ambitus eius pars est *(2)* cuius *L* 11 f. figura. *(1)* Datis duabus rectis punctum commune habentibus *(2)* Si *L*



[*Fig. 6*]

Recta BE ab uno trianguli angulo E ad basin AD ducta tota intra triangulum AED cadit. Hoc facile ostendemus, si constet vel unum ejus punctum ut F cadere intra Triangulum. Id est si ostendamus aliam rectam intra triangulum ductam punctum aliquod cum hac habere commune.

Videamus autem quomodo constet rectam aliquam cadere intra triangulum. Hoc ita fiet. Sumatur punctum G intra triangulum DEB, adeoque et intra triangulum DAE et ab hoc ducatur recta ad angulum aliquem ut D. DG recta producta egredietur triangulum quia quaelibet recta ita produci potest ut fiat major data, id est longior maxima recta quae in triangulo duci potest per unum angulum D (maxima et minima rectarum quae per angulum duci possunt sunt duo latera), quae utique finita est quia maxima recta quae in finito duci potest finita est. Sed egredietur DG ex triangulo in basi AE ne bis commune punctum habeat cum aliis lateribus. Itaque DG continuata alicubi incidet in EB, basin trianguli DBE, incidet etiam in AE basin trianguli AED, idque postquam incidit jam in BE.

7 punctum | G intra ... et *erg.* | intra triangulum | DAE *erg.* | et ab *L* 10 per *(1)* punctum *(2)* unum *L* 11 qvae per *(1)* basin in tri *(2)* angulum *L* 13 lateribus. *(1)* Porro haec recta DG necessario inc *(2)* Porro recta DG erit etiam *(3)* Itaqve *L*

33 (39860). DE RECTAE DEFINITIONE
[1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 2 Bl. 14–15. 1 Bog. 2° halbbrüchig beschrieben. Ca $1\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 14 v° u. 15 r°. Bl. 15 v° leer. Auf Bl. 14 r° Schluss von N. 32 (39859). — Gedr.: Echeverría, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 81–84.

Datierungsgründe: N. 33 (39860) dürfte kurz nach dem Schluss von N. 32 (39859) auf den Bogen geschrieben worden sein.

Si sit determinata etc. $1A2AB3A4A$ etc. erit $dAeA$ Recta.

Intelligo autem per dA. eA duo quaelibet puncta ipsorum A.

Contra: Si sit $dAeA$ recta, erit etc. $1A2AB3A4AC5A$ etc. determinata. Ergo si sit $1A3A$ recta erit $1A2A$ (quia omnium determinatorum punctorum eadem ratio est, sive $dAeA$ de quolibet determinatorum punctorum intelligi potest).

Jam si $1A3A$ est recta etiam $1A2A3A$ est recta (nam eadem linea est $1A3A$ et $1A2A3A$ vi nostrae characteristicae).

Ergo si totum est recta pars est recta. (Nam $1A2A3A$ est totum $1A2A$ est pars).

$BfAC$ est determinata, seu ex datis BC unica, (per definitionem determinati). Ergo si sit $BfAC$ et $BgEC$ rectae coincidunt, seu duae quaelibet rectae BC coincidunt, seu inter duo extrema non nisi unica est recta.

Cum dico etc. $1A2AB3A4AC5A$ etc. esse determinatam si $dAeA$ est recta, (et puncta BC, hoc enim subintelligitur vi characteristicae, sunt data) hoc dico:

$1A2AB3A4AC5A$ etc. et etc. $1E2EB3E4EC5E$ etc. coincidere.

Duae rectae non habent segementum commune: Seu quia etc. $1A2AB3A4AC5A$ etc. et etc. $1E2EB3E4EC5E$ [etc.] coincidunt, etiam $1A2ABC5A$ et $1E2EBC5E$ coincidunt, adeoque non sunt duae rectae.

Rectae definitio characteribus sic optime exprimitur.

Si sit linea etc. $1A2AB3A4C5A$ etc.

et linea etc. $1E2EB3EC5E$ etc.

8 *(1)* Recta est ABC *(2)* Si *L*

et ideo coincidant, dA et dE erit $fAgA$ Recta.

Vel omissa mentione B et C. Sic:

Sint duae lineae etc. $1A2A3A4A$ etc.
$1E2E3E4E$ etc.

et coincidant dA et fE [per d intellige 1 vel 2 vel 3] et ideo etiam coincidant fA et fE [per f intellige aliud quodvis 1 vel 2 vel 3] erit $gAhA$ r e c t a . Et contra: id est, R e c t a est linea duobus punctis in ea si opus producta datis detreminata.

Ergo sint duae rectae $1A2A3A$
$1E2E3E$

et coincidant $1A$ et $1E$, item $3A$ et $3E$ coincident etiam $2A$ et $2E$.

5 r e c t a. *(1)* An sic: Si sint duae lineae dAfA *(2)* Et *L* 8 et 2E. *(1)* id est inter duo puncta *(2)* | ex duorum extremorum non nisi *nicht gestr.* | *L*

4 f. [. . .]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

34 (39861). DE RELATIONE ET SITU [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 2 Bl. 1+16. 2 Bl. 2°, die ursprünglich einen vollständigen Bogen bildeten. Ca $\frac{2}{3}$ S. halbbrüchig beschrieben auf Bl. 16 r°. Bl. 1 u. Bl. 16 v° leer. — Gedr.: Echeverría, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 85–87.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1679 belegt.

Referuntur res ad se invicem, quatenus unum est alteri conveniens vel discrepans, quatenus unum habet situm ad alterum, quatenus unum est prius alterum posterius, quatenus unum est agens, alterum patiens, tertium productum. Alias omnes has relationes puto ex his componi. Ita convenientia per omnes has relationes duci potest. Nam plures possunt esse similes eidem, habere situm ad idem, posteriores esse eodem, agere in idem, pati ab eodem, producere idem, produci ab eodem.

Convenientia exprimitur per secundum; Discrepantia per contra. Ita factum secundum legem, factum contra legem. Est novum nomen compositum ex facto et lege, diversa quadam ratione inter se junctis, quod vulgo vocant in obliquo. Nam si ambo in recto jungantur, id est eodem modo, et quidem per particulam non fit inde unum nomen, sed manent plura, ut Petrus et Paulus. Itaque tunc locus est non praepositioni, sed conjunctioni. Sed si simpliciter jungantur in recto, seu uniformiter sibi addantur sine particula, fit inde unum nomen, ut homo doctus. Denique quando in obliquo junguntur duo nomina, sine particula, tunc praepositio subintelligitur et quidem cui nulla praepositio inesse intelligitur est in recto, cui vero inest, id in obliquo est. Possunt duo nomina sibi jungi in recto, etsi ambo sint in obliquo, quando uno in rectum mutato, etiam alterum in rectum mutabitur. Sed haec nunc obiter: alias distinctius.

7 *(1)* Relationes *(2)* Referuntur *L* 7 alteri *(1)* simile vel dissimile, qvatenus unum est totum alterum pars, *(2)* vel eidem conveniens *(3)* conveniens *L* 9 tertium *(1)* effectum *(2)* productum *L* 10 componi. *(1)* ita si *(a)* sim *(b)* sim significat similitudinem; *(2)* Si plures res ponantur similes seu dissimiles videri, *(3)* ita *(a)* similitudo *(b)* convenientia *L* 12 f. eodem. *(1)* Similitudo *(2)* Convenientia *L* 16 f. id ... particulam *erg. L* 17 f. Paulus. | itaqve ... conjunctioni *erg.* et interjectioni *erg. u. gestr.* | Sed *L* 18 f. in ... addantur *erg. L* 23 f. obiter *(1)*, ne elaberentur *(2)*: alias distinctius. | *(a)* Situs exprimitur *(b)* Relatio situs *gestr.* | *L*

35 (39869). DE PARALOGISMIS PROCLI ET CLAVII [1702]

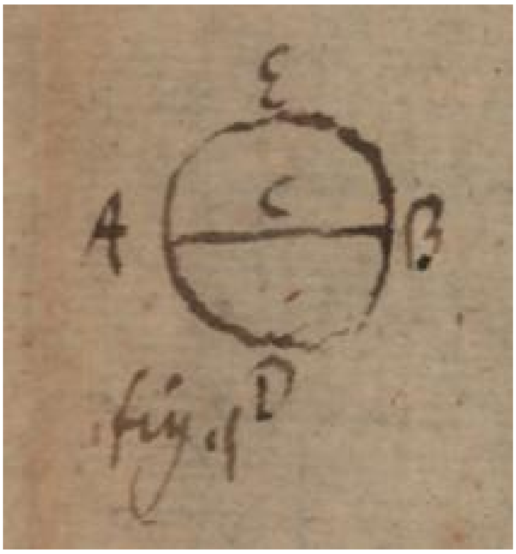
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 3 Bl. 13–14. 1 Bog. 2°. $2\frac{1}{2}$ S. Bl. 14 v° leer. — Gedr. (tlw. mit engl. Übers.): De Risi, *Leibniz on the Parallel Postulate*, 2016, S. 158–161.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1702 belegt.

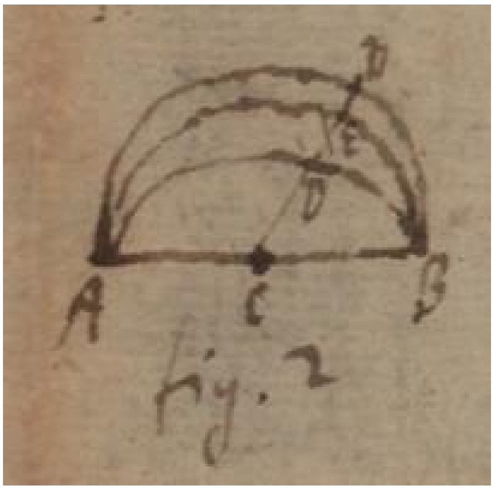
Attentius examinans quae Proclus et ex eo Clavius attulere ad demonstranda Axiomata quaedam, ab Euclide Libro primo sine demonstratione quam merebantur assumta; reperi paralogismis non carere, quod exponere operae pretium erit, quo magis caveamus in rationibus Geometricis, meliusque desiderata aliunde suppleamus; revera enim ad perfectionem Scientiae Geometricae pertinet haec Axiomata demonstrari, in quo et Apollonium elaborasse ajunt.

Praemittam autem demonstrationem Enuntiationis quam Euclides annexuit definitioni 17$^{\text{mae}}$ libri Primi, quod diameter seu recta per centrum Circulum bifariam secet, quoniam ea enuntiatio saepe cum in aliis demonstrationibus Euclideis, tum in his ipsis Procli et Clavii quae examinamus adhibetur.

Ita autem hanc demonstrationem proponit Clavius ad dictam def. 17.



Si in circulo ducatur recta linea AB, per centrum C, ita ut extrema ejus A et B terminentur in peripheria appellabitur D i a m e t e r. Addit Euclides circulum bifariam secari a diametro, [ita ut portio AEB sit congruens portioni ADB] ... Quod Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus.



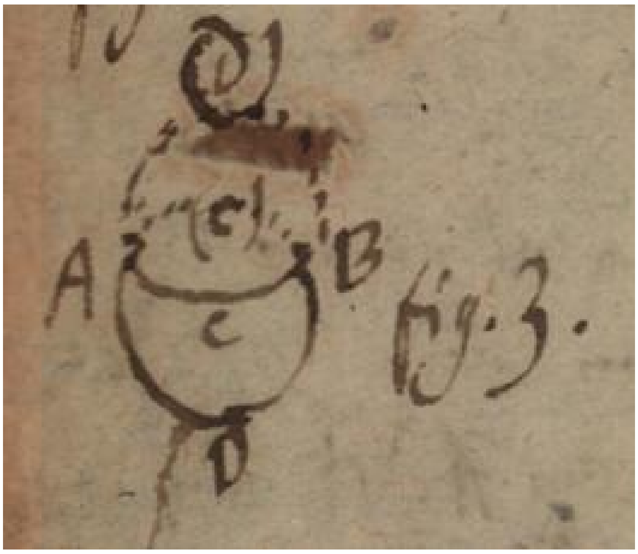
Concipiamus animo portionem ADB accommodari et adaptari portioni reliquae AEB, ita ut diameter AB communis sit utrique portioni. Si igitur circumferentia ADB congruat penitus circumferentiae AEB, manifestum est duas illas portiones a diametro factas esse inter se aequales, quandoquidem neutra alteram excedit. Si vero circumferentia ADB non omni ex parte cadere dicatur super circumferentiam AEB, sed vel extra eam vel intra, vel partim extra partim intra, tunc ducta recta a centro C secante circumferentiam ADB, in D, et circumferentiam AEB in E, erunt duae rectae CD, CE, ductae ex centro ad circumferentiam ejusdem circuli aequales, cum tamen una sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet una circumferentia extra aliam vel intra, vel partim extra partim intra, sed ambae inter se aptabuntur ideoque aequales erunt semicircumferentiae. Cum vero semicircumferentiae congruant, congruent etiam superficies ipsae inter diametrum et utramque semicircumferentiam comprehensae. Haec Clavius.

An Thaletis Milesii haec demonstratio sit valde dubito, et vix affirmanti Proclo credo. Sed defectu magno laborare mox ostendam, et primum quidem monebo, et hic et ab Euclide ubique assumi tacite Enuntiationem neque inter axiomata positam, neque inter theoremata probatam, quod recta cadat in planum in quo sunt duo puncta per quae transit. Alioqui cum dicitur: ducendum rectam ex centro C, secantem circumferentiam

2 [ita ... ADB]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

ADB in D, et AEB in E, dubitari possit an hoc fiat, seu an recta ex centro occurrens ipsi ADB in D necessario et ipsi AEB occurrat, quid enim si non sit in plano Circuli, etsi per duo ejus puncta C et D transeat. Et ipse Euclides diametrum definiens rectam per centrum terminatam utrinque in peripheriam, supponit eam rectam cadere in planum Circuli, neque enim alias si per centrum et unum aliquod punctum peripheriae transit, necesse ut transeat adhuc per aliud punctum peripheriae, nisi in plano Circuli existat. Sed et cum sub finem demonstrationis, ex eo quod semicircumferentiae AEB, et ADB congruunt, infertur et semicirculos congruere, supponitur tacite quod etiam Euclides ubique assumit, duas figuras planas, quarum ambitus congruunt, congruere inter se, quod minime verum est in non planis.

Sed nunc veniamus ad id quod potissimum demonstrationi deest, nempe tacite assumitur rectam non nisi unicam intercipi inter duo puncta, adeoque his immotis, et rectam esse immotam. Hinc dum duobus punctis A et B manentibus semicirculus ADB ex situ figurae prioris in quo circulum cum semicirculo AEB componebat, transfertur in situm ADB figurae posterioris assumitur tacite rectam ACB manere immotam: quod tamen non fieret, si ACB esset curva, nam ut patet ex fig. 3.



Si $ACBDA$. figura mixtilinea, duabus curvis ACB et ADB inclusa moveri deberet, immotis punctis A, B, et transferri in $A(C)B(D)A$, etiam ACB loco moveretur et transiret in $A(C)B$. Assumitur igitur tacite haec recte proprietas, ut unica tantum sit inter A et B, seu ut duae rectae ACB et $A(C)B$ dari non possint, quae spatium claudant secundum Axioma 14 libri 1 Euclid. cumque postea illi ipsi Axiomati demonstrando adhibeatur a

Clavio ex Proclo haec ipsa Enuntiatio, quam nunc demonstramus, nempe quod diameter circulum bifariam secet, manifeste patet circulum committi in ratiocinando.

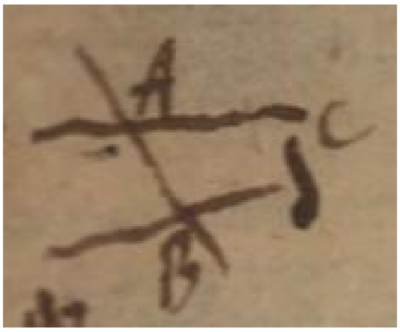
Eodem modo demonstratur a Proclo Axiom. 10 lib. 1 Euclid. quod duae rectae non habeant segmentum commune. Et axiom. undecimum libri ejusdem, quod Rectam in rectam incidens producta eam secet, et Axioma 14 ejusdem quod duae rectae spatium non comprehendant.

Notabile tamen agnosco, quod ex sola bisectione Circumferentiae vel circuli per diametrum supposita, haec tria axiomata 10, 11, 14 demonstrantur. Itaque operae pretium foret videre an non haec bisectio demonstrari possit ex ea definitione rectae qua aliquando usus sum, quod recta sit sectio plani interminati, ubicunque se habens eodem modo.

[*Fig. 4*]

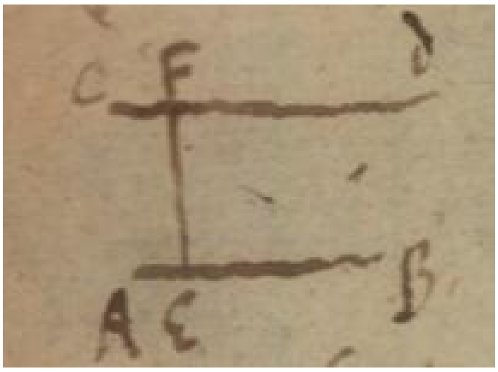
Hinc si rectae AB, quae sit portio interminatae rectae planum interminatum secantis, ab una parte insistat figura AEA talis ut lineae AEB quodvis punctum aequaliter distet a puncto ipsius medio C, patet ab altera parte congruentem et congruenter positam figuram ADB collocari posse. Sed opus est ut ostendatur eas tales sumi posse ut Circulum absolvant, quid enim si AEB esset segmentum tantum. Sed motu res ostendetur. Nam radius CA ex A incipiens et circumlatus incipit a primo situs, et in hunc desinit omnesque intermedios percurrit. Idemque fieri posse ab altera parte, assumta definitio rectae ostendit.

Atque ita suppletae sunt Euclideae demonstrationes.



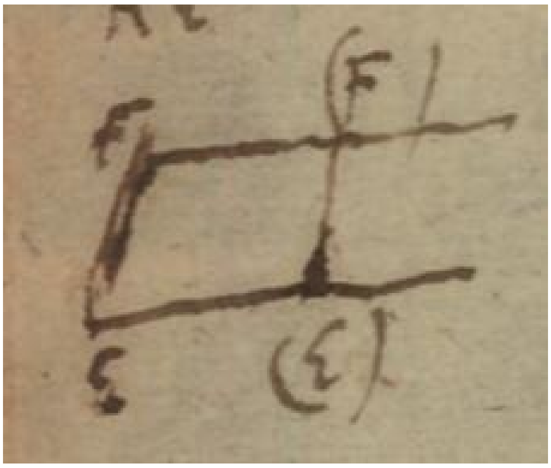
[*Fig. 5*]

Clavius demonstraturus axioma 13 lib. 1. Euclidis, quod si in duas rectas lineas AC, BD, incidens recta AB faciat internos ad easdemque partes angulos BAC, ABD, duobus rectis minores, rectae AC, BD productae ad partes CD, coeant. Assumit tanquam principium per se clarum, si linea ubique aequidistet a recta esse rectam, cum et in circulo quae linea ubique aeque distat sit circulus. Verum hoc principium in parabola et aliis non procedit.



[*Fig. 6*]

Malim ergo hoc principium, quod quae aequidistat a recta sit recta, ex eo demonstrari, quod congruat CD linea quae ab extremo F describitur, lineae AB quae describatur ab extremitate B.



[*Fig. 7*]

Axioma 13 adhibet Euclides ad demonstrandam prop. 28.1 quod quia anguli ad F et E aequales quod rectae parallelae, sed idem alias ex eo ostenditur quod omnia utrinque eodem modo $EF(F)$ et $FE(E)$, ergo congruentia, deinde situs unus alteri congruus, nunquam ergo concurrent rectae, sunt ergo parallelae.

Mea Methodo a diametro secari circulum bifariam non eget demonstratione. Cum nulla in determinatione utriusque partis sit ratio discriminandi. Itaque congruere eas necesse est. Congruere enim oportet, quae ex iisdem eodem modo determinantur.

36 (39879). DEMONSTRATIONES GEOMETRARUM IN PRIMIS ELEMENTIS [1680 – 1681 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 4 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S. Halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 302–310.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1680–1681 belegt.

Demonstrationes geometrarum in primis elementis non satis severas esse

Ad defin. XV. XV[I] Primi Euclidis.

In eis sumsit Euclides; centrum esse intra circulum. Hoc ita intelligo: Aliud est esse in figura, aliud intra figuram. In figura est punctum, etiam quod in ejus ambitu est. Sed intra figuram est punctum, quod in figura est, et in ejus ambitu non est. In figura est cujus punctum quodlibet congruit alicui loco alicujus puncti, quod in figurae generatore sumi potest. Est autem circuli generator, recta quae in eodem plano movetur uno puncto existente immoto; quod dicitur centrum. Centrum ergo congruit alicui, imo cuilibet loco cujusdam puncti (nempe immoti) rectae generatricis. Est enim illud ipsum punctum immotum. Habemus ergo demonstratum, quod Centrum est in Circulo.

Quod autem sit intra Circulum, ita conficiemus; Centrum est in Circulo per demonstrationem praecedentem, et non est in circumferentia circuli, quia quodlibet punctum in Circumferentia Circuli ab eo distat magnitudine rectae, quae generatrici aequalis est; (neque enim a puncto aliquo, ad ipsummet recta duci potest). Itaque (per definitionem τοῦ intra figuram) Centrum est intra Circulum.

In hac demonstratione assumsi rectam a puncto aliquo ad ipsummet duci non posse, seu rectam non posse eidem puncto bis occurrere.

Quod ita demonstrari potest: recta est minima a puncto ad punctum via, sive distantia puncti a puncto. Sed punctum non distat a se ipso, seu minima a puncto ad idem via, est ipsum punctum; ergo recta a puncto ad idem punctum ducta non datur.

Hic itaque pro definitione sumsi, Rectam esse minima inter duo puncta. Et pro axiomate: non posse minimam dari lineam a puncto ad se ipsum.

Si tamen velimus rectam definire, Lineam quae est distantia suorum extremorum, poterimus pro axiomate sumere, Punctum non distare a se ipso, quod axioma clarius est priore, non posse scilicet minimam duci lineam a puncto ad se ipsum. Unde agnosci potest, aliud a nobis concipi per distantiam, quam quod concipitur per minimam ab uno distantium ad alterum via. Nam si minima via esset distantiae definitio, axioma de minima via enuntiatum aeque clarum imo clarius esse deberet, quam axioma de distantia .

Quod si Distantiam vel intervallum definiamus, id ipsum quod percipitur duabus rebus simul perceptis ut in extenso existentibus, sequitur nullam esse distantiam rei a se ipsa.

Assumsi etiam Circulum esse figuram, sive Circulum habere ambitum, sive circumferentiam circuli esse lineam in se redeuntem, sive si uno rectae extremo immoto, moveatur alterum in eodem plano, totam rectam moveri, et moveri etiam in eodem plano. Item lineam descriptam a puncto extremo moto esse in se redeuntem.

Si quis Centrum intra Circulum esse, ita definiat, ut sumto puncto quod non sit in circulo, attamen in eodem plano, recta a centro ad ipsum ducta circumferentiam secet. Id est, habeat partem intra Centrum et circumferentiam in circulo, partem intra circumferentiam et punctum extra circulum; ei demonstrandum erit: hoc de Centro esse verum.

Loco definitionis Euclideae haec poni posset: Circulus est figura plana a cujus peripheriae puncto quovis ad certum quoddam punctum in eodem plano sumtum ductae sunt aequales. Ita non assumeretur in definitione, Centrum esse intra circulum.

Ad def. XVII Euclidis.

Plura in ea assumit Euclides, primo quod recta aliqua ab uno circumferentiae puncto ad alterum ducta incidit in centrum. Secundo quod recta transiens per centrum producta secat circumferentiam in duobus punctis. Tertio quod recta ducta ab uno puncto circumferentiae ad alterum, producta occurrit circumferentiae adhuc semel. Haec enuntiatio coincidit fere cum secunda. Quarto quod recta circumferentiae occurrens in duobus punctis secat circulum in duas partes. Quinto quod recta per centrum transiens producta secat Circulum in duas partes aequales.

Hanc postremam propositionem demonstravit Thales Milesius apud Proclum.

Quam demonstrationem ita formo:

---

31 demonstravit: Vgl. Proklos, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, S. 156 bis 158, u. Clavius, *Opera* I, S. 18.

[*Fig. 1*]

Centro C. sit circulus $ADBE$. Sit diameter AB. Ajo eam dividere circulum in duas partes aequales ADB. et AEB. Sint enim inaequales, sumatur in eodem plano ab altera parte rectae AB. figura $A(E)B$ ipsi AEB congrua et congruenter posita. Jam si pars circuli $A(E)B$. congruit ipsi ADB. etiam aequalis erit. Si non congruit, ergo nec extrema congruent, seu circumferentia $A(E)B$ non congruet ipsi ADB. Sit punctum aliquod in ipsa AEB, ut E. quod nulli in ipsa ADB congruit. Ducatur ex Centro recta $C(E)$. Ea autem (si opus producta[)] necessario et secabit rectam ADB. Ponatur eam secare in puncto D. Erit CD aequalis $C(E)$ vel CE, ambae enim sunt a centro ad circumferentiam circuli, pars et totum, quod est absurdum.

In hac demonstratione tamen multa assumuntur sine demonstratione. Nempe primo per centrum transeuntem dividere circulum in duas partes. Secundo planum a recta quantum satis est producta dividi in duas partes (ita ut a puncto in una ad punctum in altera non possit duci recta quin dividentem secet). Tertio in plano quovis ab una rectae parte quantum satis producto sumi posse figuram alteri figurae datae congruam et ad rectam dividentem congruenter positam. Quarto si duo plana non congruunt nec extrema eorum congruere. Quinto si ex recta AB figuram planam ut ADB. $A(E)B$ terminet et ex puncto ejus ut C. ducatur recta CD in figura ipsi AB non coincidens, eam figurae ambitum $ABDA$ secare; et alibi quam in B. A. quia sexto non possunt rectae $C(D)$ $C(A)$ habere punctum A commune quin coincidant, seu duae rectae non possunt habere duo puncta communia. Hoc necesse est supponere alioqui dici posset lineam $C(E)$

productam si opus ipsi ADB non concurrere in D. sed potius in A vel B. At etsi dicas aliud punctum praeter (E) assumi posse nulli puncto ipsius ADB congruum, sit F. recta CF alicui occurret ipsi ADB. nec rursus dici potest quod in A vel B. Respondeo quid ni? Nisi assumamus hoc axioma, quod duae rectae non possint habere duo puncta communia, quin coincidant productae.

Hinc ratiocinatio ista assumit axiomata Euclidis quale illud quod duae rectae spatium non claudant; quare circulum commisit Proclus, cum hoc ipsum Axioma demonstrare voluit assumendo a diametro dividi circulum in partes aequales.

Ex his patet Geometras in Elementis Primis non ratiocinari tam exacte quam videri volunt, et quod non falluntur, causam esse, quia talia aspectu ipso figurae et experimentis facilibus patent. Quo tamen ipsi in aliis contenti esse noluerunt, ut cum Euclides demonstrat in Triangulo duo latera esse tertio majora. Itaque si eadem exactitudine ubique uti volebant, debebant nihil eorum supponere quae poterant demonstrari: aut saltem omnes suppositiones debebant praemittere aut notare, ut scirent omnes quibus fundamentis totum opus niteretur, tentarentque suppositiones paulatim redigere in numerum theorematum. Ego sane pro certo habeo, si quis vellet Demonstrationes Euclidis accurate examinare tum plurimas suppositiones reperturum non annotatas a quoquam. Appariturae autem essent, si quis formam logicam in ratiocinando exacte servaret. In quo tamen cautior esse deberet quam fuit Clavius, qui demonstrationem primae primi in syllogismos tam infeliciter reduxerit ut non animadverterit suppositionem ab Euclide factam, quod duo circuli illic descripti se alicubi intersecare debeant. Quae profecto enuntiatio annotari debuisset, si argumentum bene fuisset resolutum.

7 circulum commisit: Vgl. PROKLOS, *a. a. O.*, S. 238–240; CLAVIUS, *a. a. O.*, S. 25 f. 20 reduxerit: Vgl. CLAVIUS, *a. a. O.*, S. 28 f.

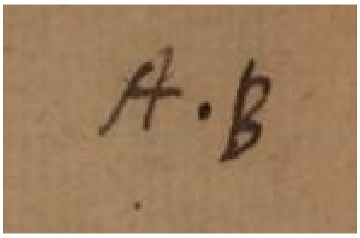
37 (39880). PRIMA GEOMETRIAE PRINCIPIA
[1682 – 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 1+11. 1 Bog. 4^{o}. 3 S. Bl. 11 v^{o} leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1682–1685 belegt.

Prima Geometriae Principia

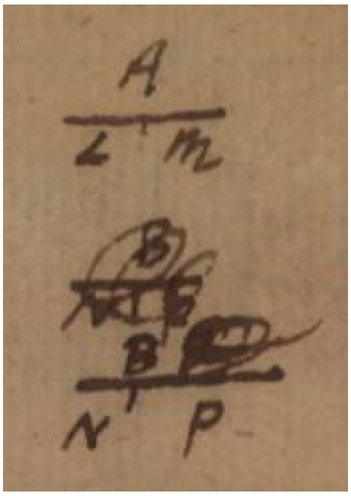
P u n c t u m est eorum quae situm habent simplicissimum; seu quod situm quidem habet ad alia externa, sed in quo nulla intelligi possunt quae situm habeant inter se.



[*Fig. 1*]

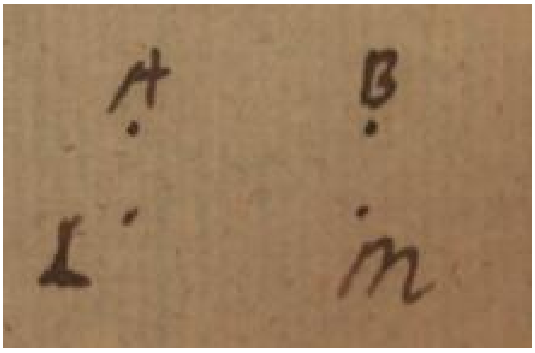
Itaque si in puncto ut A, assumatur aliquid situm habens B, coincident A et B.

Datur autem punctum, seu in situ simplicissimum, alioqui nullus esset situs accurate determinatus.



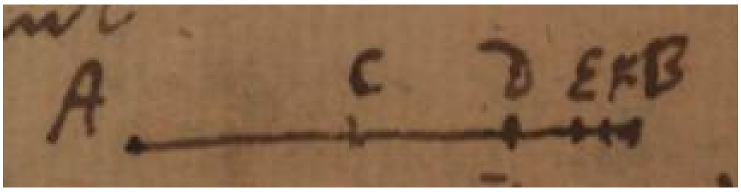
[*Fig. 2*]

Ita sit situs ipsius A ad ipsum B, et contineat A plura diversa ut L. M et B rursus plura ut N. P et ita porro in infinitum, patet alium posse prodire situm ipsius A ad B, prout comparamus A cum N vel cum B, vel B cum L vel cum M, vel L cum N vel cum P, vel L cum N vel N cum P. Itaque puncta esse necesse est, quorum ope situs rerum accurate determinari possit.



[*Fig. 3*]

Ea est natura S i t u s , ut omnia quae habent situm, habeant etiam situm inter se; ita ut posito A habere situm (verbi gratia ad L) et B habere situm (verbi gratia ad M) sequatur A et B habere situm inter se.



[*Fig. 4*]

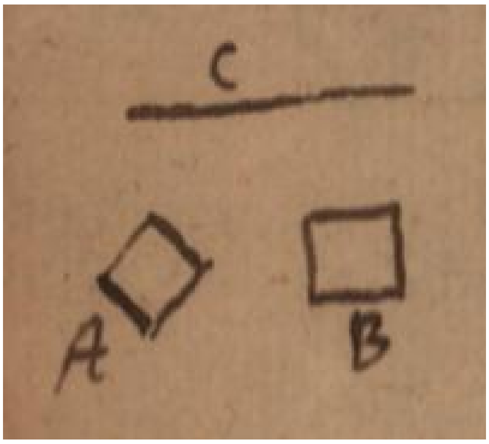
E x t e n s u m est in quo assumi possunt numero indefinita quae situm habent, ita in AB assumi potest C, sed eodem modo in CB assumetur D et in DB assumetur E et in EB assumetur F et ita in infinitum, quae omnia cadent in AB, et ut tractavimus CB, potuissemus et tractare AC et ita porro.

S p a t i u m est in quo per se spectato nihil aliud considerari potest quam quod ipsum extensum est, ut si aqua a vase removeatur vino substituto, et idem tamen locus manere intelligatur.

Spatium per se infinitum est, neque enim in ipso per se spectato ratio inveniri potest cur hos potius quam alios fines habeat; quandoquidem ubique sibi simile est, diversitas autem tantum oritur a rebus quae in ipso ponuntur, et quae praeter situm alias etiam qualitates habent, quibus fit ut partes in spatio assignari possint.

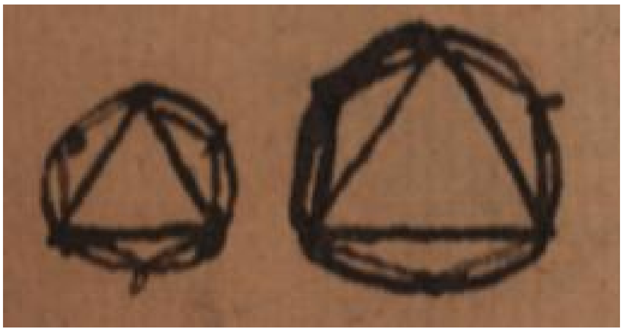
[*Fig. 5*]

Coincidentia sunt, quae revera non differunt, ut media puncta plurium diametrorum ejusdem circuli, revera enim omnia incidunt in idem centrum.



[*Fig. 6*]

Congrua sunt quae per se spectata discerni non possunt. Ita A et B, quae discernuntur ope externi C cui A angulum B latus obvertit.



[*Fig. 7*]

S i m i l i a sunt quae perceptibili discerni possunt, exempli gratia duos circulos, A et B, unumquemque examina separatim, duc in eo lineas quascunque easque inter se compara. Nullam invenies proprietatem vel observationem quam non et in alio sis repertum, exempli gratia eadem est proportio laterum trigoni et hexagoni aequiliateri in uno quae in alio, sed ut eos circulos discernas debes vel eos simul spectare, vel mensuram aliquam actualem uni applicatam, tecum deferre ad alium, ubi demum deprehendes unum differre ab aliquo, nisi forte omnino congrui sunt; quo casu eos distingues solo situ ad externa. Loco mensurae autem homines adhibemus membra nostra tanquam mensuram adnatam, et ita similia si alioqui notabiliter differeant, facile distinguimus.

H o m o g e n e a sunt quae similia sunt aut transformatione reddi possunt. Ita duae quaelibet lineae sunt homogeneae. Semper enim extendi possunt in rectam, recta autem rectae est similis, ita duo quaelibet superficies transformari possunt in planas quadratas, quaelibet corpora in cubos.

A e q u a l i a sunt quae congrua sunt aut transformatione reddi possunt.

Si B sit in A et sit homogeneum ipsi A, nec coincidant inter se, erit B p a r s , et A t o t u m.

Si pars ipsius A, sit aequalis ipsi B, erit A m a j u s , B m i n u s.

Pars est minor toto. Nam pars parti totius, nempe sibi ipsi, aequalis est, quod autem parti alicujus aequale est, id per definitionem ipso minus est.

Congrua sunt aequalia et similia, patet ex definitione.

Quae aequalia simul et similia sunt, ea congrua sunt, nam quae aequalia sunt, ea sunt congrua, aut talia transformatione reddi possunt, at quae similia sunt, transformatione opus non habent.

Si ex positis A et B, ita habetur C, ut non possit ejus loco haberi aliud tale, tunc A et B dicuntur determinantia, C determinatum. Ita datis in plano tribus punctis determinatus est circulus, nec per ea transire potest nisi unicus.

Si determinantia sint coincidentia, congrua, similia; talia etiam erunt determinata. Ita si coincidant puncta A et B cum punctis C et D, etiam recta AB, rectae DC coincidet. Si radius unius circuli sit congruus, hoc est (quia omnes rectae inter se similes) aequalis radio alterius circuli, circuli congrui ac proinde aequales erunt. Nam centrum centro semper congruit et planum plano, jam si et radius radio, determinantia congrua sunt, sufficiunt enim centrum et radius et planum ad circulum determinandum.

38 (39881). DE LINEA RECTA (I)
[1683 – 1685 (?)]

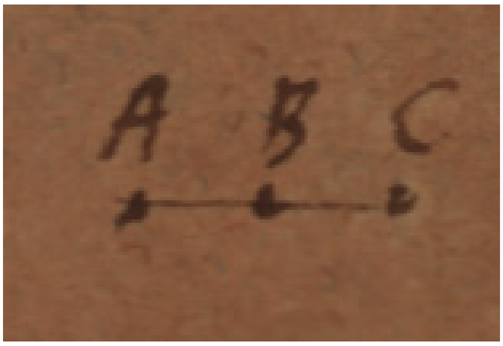
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 2+10. 1 Bog. 4°. $2\frac{1}{2}$ S.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1683–1685 belegt.

Lineam rectam definivi, quae ex duobus datis punctis determinata est, seu locum omnium punctorum Z ex dato suo ad duo data puncta A, B situ $Z \cdot A \cdot B$ determinatorum. Itaque si sit $Z \cdot A \cdot B$ unic., hoc est si nullum aliud detur punctum quod eodem modo situm sit ad duo puncta A et B quo punctum Z erit $\bar{Z}$ recta, seu *recta* erit $\bar{Z} \cdot A \cdot B$. unic.

Duo puncta determinantia cadunt in rectam quem determinant, seu si recta sit $\bar{Z}$ et $\bar{Z} \cdot A \cdot B$. unica, dico A esse Z. Nam $A \cdot \underline{A \cdot B}$ unica (hoc est, datis punctis A et B datoque situ puncti A ad puncta A et B datur punctum A seu si sit $A \cdot A \cdot B \infty E \cdot A \cdot B$ erit E ♉ A). Ergo et A est Z. Eodem modo concluditur B esse Z. Posset etiam $\underline{A}$ significare punctum A esse datum et scribendo: dato $A \cdot \underline{A \cdot B}$ dabitur A.

Duo quaelibet puncta quae in rectam cadunt sunt determinantia. Iisdem positis, ponatur praeterea C esse Z et D esse Z, dico $Z \cdot \underline{C \cdot D}$ esse unic. Nam $Z \cdot A \cdot B$ unic. Ergo $C \cdot \underline{A \cdot B}$ unic. et $D \cdot \underline{A \cdot B}$ unic. et invertendo $A \cdot \underline{B \cdot C}$ unic. (*nam quandocunque unum aliquod punctum C datur ex aliis duobus A et B, vicissim unum ex his duobus A, dabitur, dato alter B, et ipso C*.[)] Quod tamen demonstrare operae pretium videtur, scilicet quia C datur ex datis A et B, itaque si sit $C \cdot A \cdot B \infty E \cdot A \cdot B$ erit C ♉ E. Dico similiter si sit $A \cdot B \cdot C \infty F \cdot B \cdot C$ fore F ♉ A.



[*Fig. 1*]

Pendet hoc ex axiomate generaliore in Metaφysicis demonstrando, quod relatione quadam determinata existente data inter res plures similes, unumquodque ex reliquis determinetur, et $B \cdot \underline{A \cdot C}$ unic. et $A \cdot \underline{B \cdot D}$ unic. et $B \cdot \underline{A \cdot D}$ unic. Jam semper substitui possunt determinantia omnia simul pro determinato salva determinatione. Ergo in determinatione $A \cdot \underline{B \cdot D}$ pro B substitui potest $A \cdot C$. Fiet ergo $A \cdot \underline{A \cdot C \cdot D}$ seu omisso A quia duplici, fieri potest: $A \cdot \underline{C \cdot D}$ seu A determinatur ex dato situ ad $C \cdot D$. Similiter concludetur de B. Cum ergo A et B determinentur ex ipsis C et D, etiam tota linea (quae ex ipsis C, D determinatur) ex ipsis A et B determinabitur. Quod talis consequentia valeat. sed jam video hanc consequentiam non procedere seu non posse omitti A, quia duplicem, nam similiter in $A \cdot \underline{B \cdot D}$ pro B substituendo AD fieret $A \cdot \underline{A \cdot D \cdot D}$ quod falsum si rejici potest A. Cum ergo primas has consequentias demonstrare in ipsis characteribus satis difficile videatur, satius erit eas assumere.

Rectam ergo definiemus, quae duobus punctis in ea sumtis determinatur, seu cujus punctum quodlibet datum est, dato situ suo ad duo in recta data puncta.

Datum aliquid designo per lineolam subductam ita ut $Z \cdot \underline{A \cdot B}$ significet relationem ipsius Z ad data puncta A, B. Datum hic intelligo quod determinatum est.

$Z \cdot \underline{A \cdot B}$ un. significat non nisi unicum dari punctum quod hanc relationen vel hunc situm habeat ad puncta A, B quam habet Z. Adeoque cum Z sit suae relationis unicum, dato suo situ ad data puncta A, B datum erit seu determinatum. Hinc $Z \cdot \underline{A \cdot B}$ un. idem est ac si dicam posito $Z \cdot \underline{A \cdot B} \infty X \cdot \underline{A \cdot B}$ erit $Z \mathrel{\text{♉}} X$.

Si sint puncta lineae alicujus ut A, B, C, D, sitque Z punctum quodcunque illius lineae, et dici possit $Z \cdot \underline{A \cdot B}$ un. tunc linea illa erit recta.

Axioma: Si sit $A \cdot \underline{B \cdot C}$ un. erit et $B \cdot \underline{A \cdot C}$ un. seu si talis valet consequentia $A \cdot B \cdot C \infty D \cdot B \cdot C$. Ergo $A \mathrel{\text{♉}} D$. Valebit et haec consequentia $B \cdot A \cdot C \infty E \cdot A \cdot C$. Ergo $B \mathrel{\text{♉}} E$. Hinc lineola omitti potest, et sufficit scribi $A \cdot B \cdot C$ un. pro $A \cdot \underline{B \cdot C}$ un.

Axioma. In omni determinatione licebit pro termino ingrediente eam substituere ex alia determinatione quicquid ad hunc terminum determinandum sufficit. Ita ut determinantia quodammodo haberi possit pro valore determinati.

Circumferentiae circuli definitio haec est: $X \cdot A \cdot B \infty F \cdot A \cdot B$. Erit X in circumferentia circuli seu omnia puncta quae eandem habent relationem ad puncta A, B. quam ad ea habet punctum F. sunt in eadem circuli circumferentia in qua est punctum F.

Quicquid eodem modo se habet ad determinantia etiam eodem modo se habet ad determinata, itaque ponamus rectam $\bar{Z}$ determinari per puncta A, B. seu puncta A, B, in ipsa esse sita, etiam verum erit $X \cdot \bar{Z} \infty F \cdot \bar{Z}$. Unde sequitur dari rectam ad quam omnia puncta X in circulari circumferentia $\bar{X}$ eodem se habeant modo. Unde patet etiam F esse X seu in circuli circumferentia, quia $F \cdot Z \infty F \cdot Z$.

39 (39882). DE LINEA RECTA (II) [1683 – 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 3+9. 1 Bog. 4°. $1\frac{1}{6}$ S. auf Bl. 3. Bl. 9 leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1683–1685 belegt.

R e c t a est quae duobus punctis in ipsa positis determinata est. Hinc sequitur:

Rectam rectae esse similem.

Partem rectae esse rectam.

A puncto ad punctum dari rectam, eamque non nisi unicam.

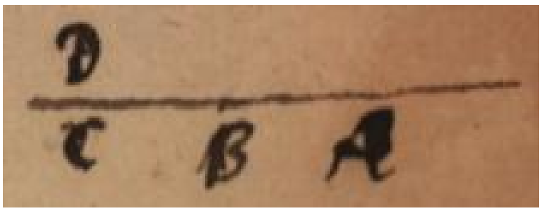
Duas rectas quae scilicet productae non coincidunt, non habere segmentum commune.

Omnem rectam in infinitum produci posse, utrinque.

In quavis recta quantum satis producta aequalem posse assumi [partem] datae rectae finitae.

Rectam non posse recurrere in se.

Rectam esse brevissimam a puncto ad punctum viam.



[*Fig. 1*]

Si punctum D eodem modo se habeat ad puncta A et B quo punctum C, et omnia ponantur esse in eadem recta, coincidere C et D.

Signum coincidentiae sit $\infty\!\!\!|$

congruitatis ∞

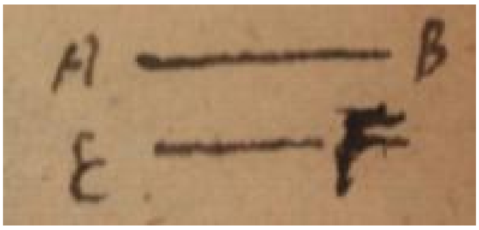
similitudinis $\sim$

aequalitatis $=$

A majus B sic scribetur $A \sqcap B$.

B minus A sic: $B \sqcap A$.

Si $C \cdot A \cdot B \infty D \cdot A \cdot B$ et ideo $C \infty D$ erunt A. B. C. in eadem recta.



[*Fig. 2*]

$AB{\sim}EF$ si ambae rectae.

Si posito $Y \cdot A \cdot B$. determinatum est Y. locus omnium Y. est recta transiens per A. B.

Si $Y \cdot A \cdot B \infty C \cdot A \cdot B$. locus omnium Y est arcus circuli. Itaque si puncta Y. A. B. rigido sint connexa, et immotis A et B. sit immobile Y locus omnium Y erit recta transiens per AB. Sin immotis A et B mobile sit Y. locus successivus ipsius Y erit circulus cujus axis erit recta transiens per AB.

Si $A \cdot Y \infty B \cdot Y \infty C \cdot Y$ locus omnium Y erit recta.

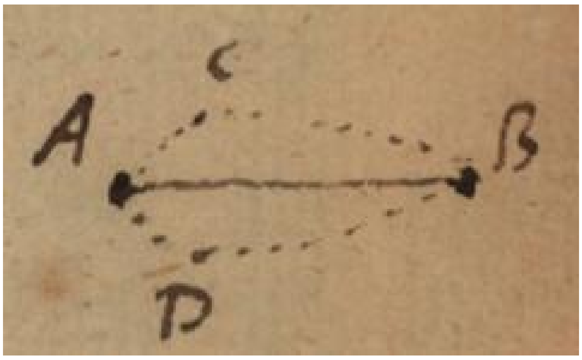
Si ABC recta et $AB \infty BC$, et $D \cdot B \cdot A \infty D \cdot B \cdot C$ erit angulus ABC. rectus seu recta DB perpendicularis sive minima ad rectam AB ex puncto D.

40 (39883). DE LINEA RECTA (III)
[1683 – 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 4. 1 Bl. 4°. $1\frac{1}{2}$ S.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1683–1685 belegt.

Recta est distantia punctorum seu determinata ab uno ad alterum via.



[*Fig. 1*]

Itaque si mobile moveatur in recta ab A ad B, nihil facit sine causa. Si vero declineat a recta et feratur per C. aliquid fit sine causa quia nulla causa est cur non potius tendat per D. Tantum enim rationis militat pro uno quantum pro altero, si ponamus D eodem modo situm esse ad A et B, quo C.

Ex hac definitione patet inter duo quaevis puncta dari rectam, quod Euclides postulaverat, inter duo puncta non dari nisi unicam rectam seu rectam ex duobus punctis determinari.

Rectam quamlibet cuilibet similem esse, quoniam in origine similes sunt omnes, quod scilicet duobus punctis datis oriuntur sive determinantur, ex qua definitione nulla potest duci diversitas. Ita recta una determinatur per AB. alia per CD. quae duae expressiones sunt similes.

Recta non potest recurrere in se, ut si recta esset $ABCD$. duae darentur viae rectae ab A ad B, una per C, altera per D contra definitionem.

12 postulaverat: Leibniz bezieht sich auf Eukleides, *Elementa*, I, post. 1.

Recta est brevissima a puncto ad punctum via. Et contra. Ea enim sola determinata est, nam in ea quae prolixior est, hoc ipso fit sine ratione, quod mobile divagatur magis quam opus est.

Pars rectae est recta, nam si pars viae non est determinata, nec tota erit.

Pars rectae similis est toti, vel partes rectae similes sunt inter se, quia rectae sunt omnes.

[*Fig. 2*]

Omnis recta produci potest in infinitum. Sit enim rectae AC pars AB. Cum AC sit similis ipsi AB, ergo ut AB produci potest in C, ita etiam AC produci potest in D, et AD in E, et ita porro in infinitum. *Et quidem in utramque partem*, nam cum DC possit produci in B, poterit etiam DB produci in A, et ita porro.

In omni recta si opus producta sumi potest pars aequalis datae rectae finitae. Produci enim potest in infinitum, ergo tandem fiet aequalis finitae. *Et quidem incipiendo a puncto dato et versus punctum datum duae rectae aequales sunt congruae*, quia et similes sunt.

41 (39884). PRIMA GEOMETRIAE PRINCIPIA (II) [1682 – 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 5–6. 1 Bog. 4°. Ca $3\frac{1}{2}$ S. Halbbrüchig beschrieben.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1682–1685 belegt.

[*Teil 1*]

P u n c t u m est quod omnium situm habentium est simplicissimum. Itaque omne punctum puncto congruit, nec plura situm inter se habentia in uno puncto assumi possunt, sed coincident inter se. Ex quo ducimus has expressiones:

$A{\sim}B$ seu A simile ipsi B vel contra.

$A = B$ seu A aequale ipsi B vel contra.

$A{\simeq}B$ seu A congruit ipsi B vel contra. Si B in A erit $A \infty B$.

E x t e n s u m est continuum cujus partes simul existunt.

C o n t i n u u m est totum cujus partes duae cointegrantes habent aliquid commune. Quod dicitur Terminus uniuscujuscunque ex ipsis. Appello autem partes cointegrantes quae simul sunt aequales toti, et nullam habent partem communem. Terminus itaque non est pars nec est homogeneus terminatis alioqui foret pars.

[*Teil 2*]

A i n t e l l i g e t u r e s s e i n *B* , si ex A crescente fieri potest B, vel contra sie ex B decrescente fieri potest A. Itaque pars inest toti; sed et punctum, quod pars non est, inest lineae; hoc tamen habent commune quod ambo insunt, et ex eodem crescendo vel decrescendo nasci intelligi possunt, possunt appellari homogenea, vel etiam dici posset esse ejusdem materiae, est enim eadem materia puncti corporei, et corporis, puncti spatii et spatii, momenti et horae, motus et nisus.

I n d i v i s i b i l e est cujus pars nulla est ex quo tamen crescente fieri aliquid potest quod partes habet, ita ex puncto crescente fieri potest linea, ex momento crescente hora. Vicissim hora decrescens, proxime antequam in nihilum abeat, desinit in momentum.

23 et *(1)* conatus *(2)* nisus *L*

C o n t i n u u m est cujus partes sunt indefinitae.

P a r s est, quod alteri inest, eique homogeneum est.

I n a l i q u o esse vel c o n s t i t u e n s alicujus esse dicitur aliud, quod est requisitum ejus immediatum. Ita punctum alicujus corporis est requisitum ejus immediatum, statim enim sine ulla ratiocinatione intelligitur punctum hoc ad corpus constituendum requiri; pars quoque rei est requisitum ejus immediatum.

M i n i m u m s i g n u m s e u i n d i v i s i b i l e dicitur, quod alterius requisitum immediatum esse potest, ipsius autem nullum aliud est requisitum immediatum. Ita punctum in extenso, momentum in tempore.

E j u s d e m g e n e r i s s i v e m a t e r i a e sunt, quorum requisita immediata simplicissima seu minima inter se indiscernibilia sunt.

T r a n s f o r m a t i o est mutatio rei in aliam iisdem minimis manentibus neque mutatis.

H o m o g e n e a sunt quae similia sunt aut transformatione reddi possunt, secundum aliquem considerandi modum.

A e q u a l i a sunt quae congrua sunt aut transformatione reddi possunt.

P a r s est requisitum immediatum homogeneum alterius quod dicitur totum.

Punctum et corpus ejusdem generis sive materiae sunt, sed non tamen homogenea sunt, neque enim punctum, sed corpus corpori simile esse potest.

Similare est, cujus [*bricht ab*]

[*Teil 3*]

Omnis superficies infinite producta vel in se rediens spatium dividit in duas partes, ita ut a puncto unius partis ad punctum alterius partis non possit duci recta quin superficiem secet. Omnis linea infinite producta vel in se rediens dividit superficiem in qua ducitur in duas partes, ita ut a puncto partis unius ad punctum alterius non possit duci linea quae lineam priorem non secet. Si linea vel superficies sit in se rediens, pars cui concavitatem obvertitur dicitur i n t r a , altera e x t r a. Imo potest fieri ut aliquando incluso convexitatem obvertat, cum novum habet flexum contrarium. Itaque in casu reditionis in se, pars minor dicitur intra, major extra. Vel quaeritur cum circumferentia circuli minoris sphaericam superficiem dividit in in 2 partes, quid dicendum sit esse extra, quid intra.

42 (39885). PRIMA GEOMETRIAE PRINCIPIA (III) [1682 – 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 7–8. 1 Bog. 4°. 1 S. auf Bl. 7 r°. Rest des Bogens leer.

Datierungsgründe: [**noch**]

A, B, C, etc. puncta determinata.

Z, Y, X, W, etc. puncta indeterminata seu generalia.

$\overline{Z}$ locus omnium punctorum Z.

A e s t Z significat A esse unum ex punctis Z.

A e s t B significat A et B coincidere. Item sic A ♉ B.

A. B , significat situm inter puncta A et B, similiter $A.\ B.\ C$ significat situm inter puncta A, B, C.

∞ significat congruitatem. Ita $A.B \infty C.D$ significat puncta A, B servato situ suo posse transferri in puncta C, D, seu situm esse eundem.

$\sim$ significat similitudinem, ut si sit $A.B.C{\sim}D.E.F$

$=$ significat aequalitatem, ut $AB = CD$.

⊓ significat majoritatem ut AB ⊓ CD hoc est AB major quam CD.

⊓ significat minoritatem, ut CD ⊓ AB seu CD minor quam AB.

Quae aequalia et similia sunt ea sunt congrua, et contra.

Determinantia sunt ex quibus datis sive positis aliquid est determinatum hoc est non nisi unicum, ita ut si aliud ex iisdem datis assumatur priori coincidat.

Si determinandi modus sit similis, et determinantia sint similia, aequalia, congrua, coincidentia, etiam determinata talia erunt.

Recta est locus omnium punctorum determinato suo ad duo data puncta situ. Sunt determinata, sive quae sui ad duo data puncta situs sunt unica. Itaque talis quoque recta ex datis duobus punctis determinata sive unica est et sic exprimetur:

$A.B.Z.$ un. seu si posito $A.B.Z \infty A.B.Y$ est Z ♉ Y erit $\overline{Z}$ recta.

16 significat |similitudinem *ändert Hrsg.*|, ut *L*

43 (39889). AD EUCLIDIS DEFINITIONES POSTULATA AXIOMATA [1680 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 18–21. 2 Bog. 2°. $7\frac{1}{4}$ S. Textfolge Bl. 18, 21, 19, 20. — Gedr.: 1. Echeverría, *La demostración*, 1992, S. 35–38 (Auszüge); 2. De Risi, *Leibniz on the Parallel Postulate*, 2016, S. 136–137 (Auszüge mit engl. Übers.).

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1680 belegt.

Definitiones

I.

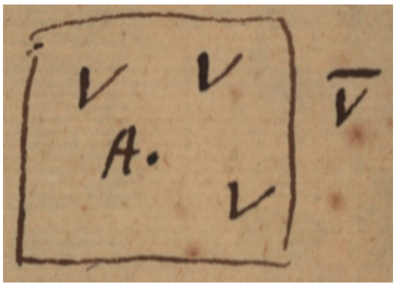
(1) *Punctum est cujus pars nulla est.*

Subintelligendum est punctum esse rem situ praeditam, de quibus scilicet solis agitur in Geometria; ne quis cavilletur, instans, instans, animam, Deum, esse puncta. Haec enim licet partibus careant, carent tamen et situ. Punctum igitur est quod situm habet, extensione autem, adeoque partibus caret; caret; et quemadmodum Punctum est, de quo nihil aliud intelligi potest quam situs, ita universum Spatium est, de quo nihil aliud intelligi potest quam extensio seu quod extensionem habet situm autem non habet. Et quemadmodum punctum est simplicissimum ex habentibus situm, ita spatium universum est absolutissimum ex habentibus extensionem. Per Notas punctum ita designare possis, sit aliquod situm habens A et in eo sumatur aliud B, si jam ex hoc ipso quod B sumtum est in A, sequitur A et B coincidere, A erit punctum. Imposterum igitur nisi aliter admoneamus, per literas intelligemus puncta.

[*Fig. 1*]

Punctum puncto simile est, seu $A \sim B$.

Punctum puncto congruit, seu $A \infty B$.



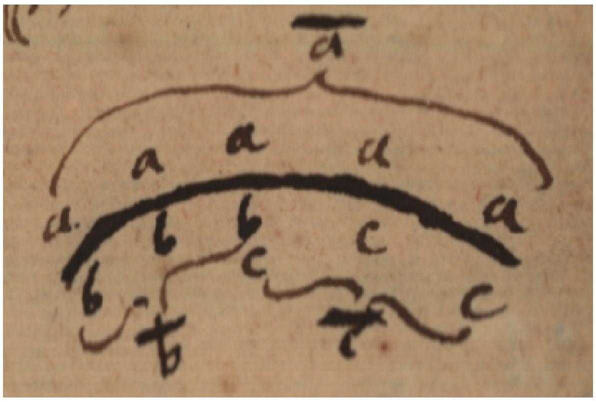
[*Fig. 2*]

Si sit $V \infty A$ erit $\widetilde{V}$ spatium universum, seu locus omnium punctorum V puncto dato A congruentium est spatium universum; eo ipso quia diximus omnia puncta congruere.

II.

(2) *L i n e a est longitudo latitudinis expers.*

Haec definitio popularis est magis quam Geometrica, neque unquam ab Euclide in Elementis ad demonstrandum adhibetur, nec satis distincte explicatum habetur, quid sit longitudo latitudo et profunditas. Alter definiri potest linea, quod sit via puncti seu locus puncti continuus succesivus.



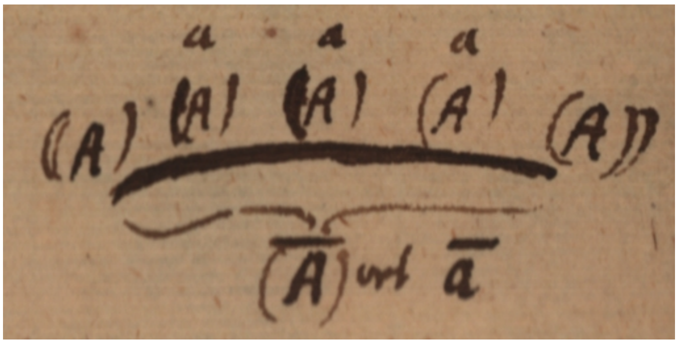
[*Fig. 3*]

Ponamus esse punctum mobile A, lineam exprimemus per $\tilde{a}$ vel etiam per LA. Ut autem appareat locum hunc communem omnium vestigiorum ipsius A, seu locum omnium a esse continuum, ponamus duas esse partes ipsius $\tilde{a}$ quascunque $\tilde{b}$ et $\tilde{c}$ ita ut $\tilde{b} + \tilde{c} \infty \tilde{a}$ seu ut $\tilde{b}$ et $\tilde{c}$, simul coincidant cum $\tilde{a}$. Debet aliquod b coincidere cum aliquo c, seu Qu. b est c. adeoque et Qu. c est b. Potest etiam linea definiri quod sit ambitus, vel pars ambitus superficiei.

III.

Lineae termini sunt puncta.

Hoc non facile derives ex ea definitione, quod linea sit longitudo sine latitudine, at manifestum est ex altera, quod linea sit via puncti, seu locus omnium puncti vestigiorum. Nam extremum lineae nihil aliud est, quam locus puncti moti, cum motus desiit, vel antequam coepit.



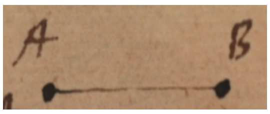
[*Fig. 4*]

Locus puncti mobilis A primus vocetur $((A)$, medius (A) (vel a), ultimus $(A))$. Interdum tamen et primum locum mobilis simpliciter voco A. Lineam autem ipsam licebit vocare $\overline{(A)}$ vel etiam $\bar{a}$ quae est locus communis omnium (A) vel a vestigiorum ipsius A.

IV.

Recta linea est quae ex aequo sua interjacet puncta.

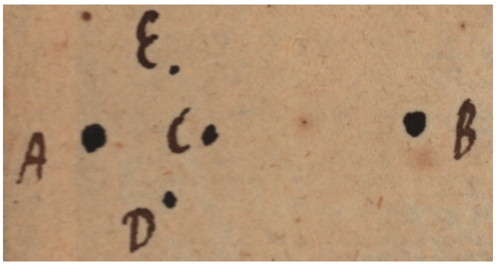
Haec definitio obscura est, neque etiam uspiam in demonstrando ea utitur Euclides, cum nullam distinctam notionem ingeneret. Multum meditatus sum de definitione lineae rectae, et puto ita definiri posse quod sit via simplicissima a puncto ad punctum.



[*Fig. 5*]

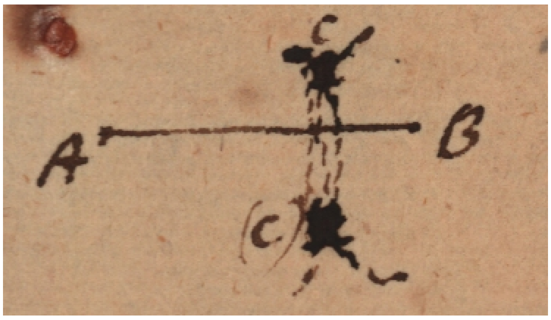
Unde sequitur et minimam esse inter duo puncta ac proinde distantiam inter puncta A et B designamus per rectam AB. Situm quoque puncti ad punctum per magnitudinem rectae interceptae designamus, sive per distantiam.

Ex eadem definitione etiam sequitur, quod recta sit via a puncto ad punctum determinata, seu talium qualium ipsa est unica, hoc est, ut locus puncti mobilis in hac via sit semper unicus sui situs ad duo puncta extrema.



[*Fig. 6*]

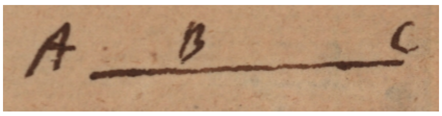
Ponamus viam instituendam esse ab A ad B, quaeritur per quae puncta sit eundum, utrum per C an vero per D, et quidem proponat mihi aliquis eundum esse per D, et dari autem aliud punctum E, eodem modo situm ad A et B, quemadmodum D ad A et B situm est, quaeram ab eo cur me velit potius ire per D quam per E, cum nulla sit ratio differentiae. Itaque ut nihil agam sine ratione, eligenda est via quaedam determinata sive unica, nempe per punctum C, ponendo nullum aliud dari punctum quod eodem modo se habeat ad A et B, quemadmodum ipsum C. Semper autem in meditando a simplicissimis et maxime determinatis sive sui generis unicis incipiendum est. Ita simplicissimum situm habentium est punctum. Assumtis deinde duobus punctis possum ipsa comparare inter se, tum vero considerare tertium aliquid ex ipsis resultans. Resultare autem ex aliquibus dico, quod ex ipsis solis determinatur; ex duobus autem punctis determinatur locus omnium aliorum punctorum quae sui ad ea duo puncta situs unica sunt, hoc est recta. Similiter ex tribus punctis non in eandem rectam cadentibus (alioqui enim nihil novum praeter resultationem duorum assumitur) resultat planum quod per ipsa transit, unumquodque enim punctum quod sui situs ad tria puncta non in directum jacentia unicum est, cadit in unum aliquod planum. Si vero assumantur quatuor puncta non in eodem plano posita, quod inde resultat est solidum sed infinitum, seu ipsum spatium universum, non enim nisi unicum dari potest punctum determinate ad quatuor data puncta non in eodem plano posita, situs. Ac proinde locus omnium punctorum sui ad data quatuor puncta situs unicorum est locus omnium punctorum in universum. Recta a puncto ad aliam rectam ducenda determinata seu sui generis unica, est minima, eademque normalis; adeoque angulus data recta indefinita et uno extra eam puncto determinatus est angulus rectus. Sed haec obiter, ut nostra rectae lineae definitio, quae magni momenti est, melius declararetur.



[*Fig. 7*]

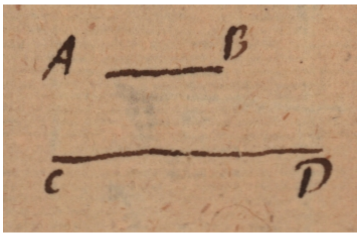
Ut ostendatur locum omnium punctorum ex duobus datis determinatorum esse lineam [rectam], adeoque omnia puncta ut C sui ad duo data puncta A, B situs unica cadere in eandem rectam, si opus productam, AB, prius natura Circuli cognoscenda est, ostendendumque duos circulos centris A, B, radiis AC, BC descriptos se secare in duobus punctis C et (C), adeoque C non esse sui situs unicum ad haec duo puncta, nisi contigat punctum occursus cadere in rectam AB, seu duos circulos se tangere in C, cumdistantia centrorum et duo radii ita se habent ut tertium sit summa quorundam ex duobus. Sed hoc nondum est hujus loci.

Caeterum ex his ducemus quasdam expressiones calculi repraesentatorii. Si sit linea $\overline{V}$ recta et aliq. V sit A, et aliq. V sit B[,] $VA \infty EA$ et $VB \infty EB$, erit V idem cum E. seu $VB \infty EB$ seu V erit E et E erit V. Vel si $\overline{V}$ recta et aliq. V sit A et aliq. V sit B, erit V đ $A.B$. vel si $\overline{V}.AB$ recta erit V. đ $A.B$.



[*Fig. 8*]

Si $AB + BC = AC$ erunt A. B. C. in eadem recta. (Ergo et si $AC - BC = AB$ erunt A, B, C in eadem recta.) Ponamus enim B non esse situm in recta AC, erit via per B major quam recta, ergo $AB + BC$ major quam AC contra hypothesin. Sed hoc ergo pendet ex nostra definitione, quod via recta sit minor aliis omnibus.



[*Fig. 9*]

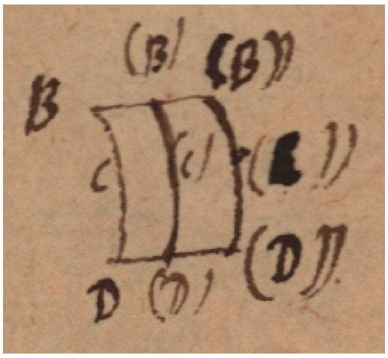
$AB \sim CD$ seu recta quaevis cuivis similis est, quia ut AB determinatur ex A et B, ita et CD ex C et D, nec ratio dari potest dissimilitudinis. Sed non potest similiter colligi ABC esse simile ipsi LMN, potest enim alia esse ratio inter AB et BC, quam LM et MN.

[*Fig. 10*]

Hinc si $AB = CD$ erit $AB \infty CD$. seu si duae rectae sint aequales erunt congruae, nam quae aequalia et similia sunt, congrua sunt.

V.

Superficies est quae longitudinem et latitudinem tantum habet, clarius dicetur superficies esse ambitum corporis aut ejus partem, vel sic potius[:] Si linea ita moveatur, ut punctum ejus unum in alterum non subeat, via lineae erit superficies.



[*Fig. 11*]

Sit linea BCD erit superficies $\overparen{(B)(C)(D)}$ nempe via seu locus vestigiorum lineae BCD.

VI.

Superficiei extrema sunt lineae, nempe loca ubi linea est ante et post motum, ut BCD et $(B))(C))(D))$. Quod si totum superficiei ambitum desideremus adjiciemus viam punctorum extremorum lineae, ut $B(B)(B))$ et $D(D)(D))$ quae tamen interdum evanescit, cum extrema illa non moventur.

VII.

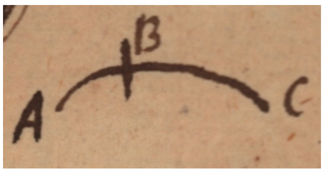
Plana superficies est quae ex aequo suas interjicit lineas.

Haec definitio obscura est, perinde ac rectae. Supra dedimus aliam definitionem, quod planum sit superficies quae ex tribus punctis (non in directum jacentibus) determinatur. Possumus etiam addere planum esse quod ex duabus rectis sibi occurrentibus resultat. Item si recta moveatur super duabus rectis sibi occurrentibus describet superficiem planam; vel si duae rectae sunt aequidistantes, minima rectae quae uni congruerat, ad alteram via est planum. Item planum est cui recta ubique congruit.

VIII.

Planus Angulus est duarum linearum in plano se mutuo attingentium et non in directum jacentium alterius ad alteram inclinatio.

Haec definitio non satis clara est, imo nec congrua.



[*Fig. 12*]

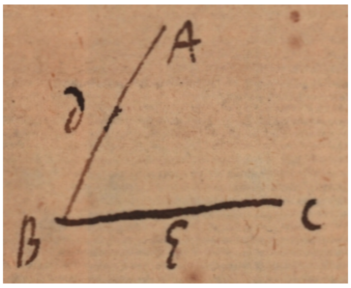
Nam si in directum jacere significat ut alias cadere in eandem rectam, sequetur duas quaslibet lineas curvas quae sese attingunt facere angulum adeoque et AB, et CB partes ejusdem circumferentiae circuli facient inter se angulum in B. Dicendum ergo potius erat duas lineas facere angulum in loco occursus, si productae non coincidant. Deinde non apparet quid sit inclinatio nec proinde quomodo inclinatio possit mensurari, ut quantitas anguli determinetur.

[*Fig. 13*]

Interim haec videtur ejus fuisse sententia, si sint tres lineae LM, NM et PM, omnes sibi occurrentes in puncto M et sumtis punctis ipsorum utcunque propinquis ipsi M, ut S in LM, R in NS, et Q in PM, reperiaturque cadere MR inter MS et MQ, erit angulus SMQ major et velut totum compositum ex angulis SMR et RMQ tanquam partibus. Sed quomodo unius ad alterum ratio aliqua per uniforme quoddam incrementum cognosci possit, non apparet.

IX.

Cum quae angulum continent lineae rectae sint, rectilineus ille angulus appellatur.



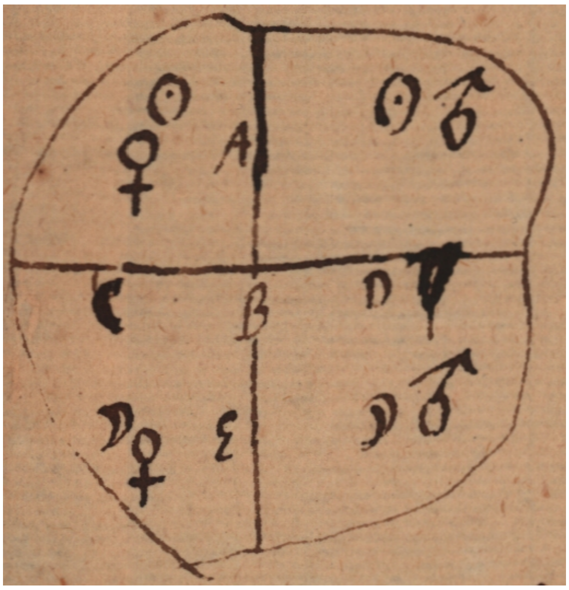
[*Fig. 14*]

Angulus autem ABC, vel CBD vel ABE aut vel DBE sunt unus idemque quia consideratur angulus in partibus utcunque vicinis ad punctum concursus.

X.

Cum recta linea super rectam consistens lineam, eos qui sunt deinceps angulos aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum, et quae insistit recta perpendicularis vocatur ei cui insistit.

Explicandum erat prius, quid sit angulum angulo aequalem esse, sunt ergo duo anguli aequales qui congruunt, seu ex congruentibus componuntur.

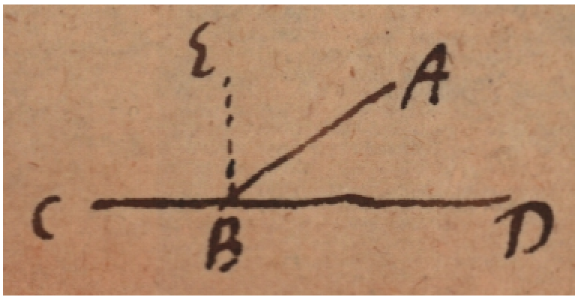


[*Fig. 15*]

Anguli deinceps sunt, qui fiunt si una quidem linea CD producatur utcunque altera vero AB tantum usque ad concursum. Considerandum est omne planum a recta indefinite producta secari in duas partes, ita ut ex puncto unius in punctum alterius non possit duci linea nisi per rectam secantem. Ita recta ducta per CD secabit planum in partes duas ☉ et ☽. Similiter recta ducta per A et E secabit planum in partes duas ♀ et ♂. Ponamus has duas rectas sibi occurrere in B, fient partes quatuor ☉♀. ☉♂. ☽☿ et ☽♂, anguli qui respiciunt eandem anguli ejusdem bisectionis, verbi gratia ☉♀ et ☉♂, dicentur sibi esse deinceps [,] cadunt enim omnes in ☉. Similiter ☽♀ et ☽♂, item ☉♀ et ☽♀, item ☉♂ et ☽♂ at qui non cadunt in unam bisectionem communem, ut ☉♀ et ☽♂, item ☉♂ et ☽♀ dicuntur oppositi. Anguli autem oppositi semper sunt aequales, et anguli deinceps si aequales sint, dicuntur esse recti.

XI. XII.

Angulus obtusus est qui recto major est, acutus vero est qui minor est recto.



[*Fig. 16*]

Sint duo anguli deinceps ABC, et ABD inaequales, ex B erigatur normalis BE. Quod si E cadit intra ABC, est ABC major recto. Nam $ABC = ABE + EBC$ rect. at ABD minor recto, nam EBD rect. $= EBA + ABD$. Sed haec declarandi tantum causa hic dicuntur; infra probanda.

XIII.

Terminus est quod alicujus extremum est.

Hanc definitionem ejusdem per se ipsum esse nemo non videt. Mihi extremum vel terminus ita definiri posse videtur: E x t r e m u m est, quod duobus commune esse potest, quae partem communem non habent. Sint duo corpora diversa, nullamque partem communem habentia, ea si sese attingant, locus attactus dicetur extremum utriusque.

XIV.

Figura est quae sub aliquibus terminis comprehenditur.

Cum lineae non soleant appellari figurae, etsi terminos habeant, et sub terminis comprehendi confusa sit expressio; et superficies quoque non ita comprehenditur suis terminis, quin tota detecta sit, ideo alia definitione opus esse, figuram igitur appellari posse puto, quod motu extensi generatur, motu scilicet quo puncta ejus quod movetur in se non subeunt.

XV.

Circulus est figura plana una linea comprehensa quae peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto (eorum quae intra figuram posita sunt) cadentes omnes rectae inter se sunt

19 XIV *L ändert Hrsg.*

aequales.

Haec definitio bona est, sed non satis perfecta; quoniam dubitari adhuc potest, utrum talis figura sit possibilis. Malo igitur circulum definire, quemadmodum Euclides infra definit sphaeram. Nempe motu, scilicet si recta moveatur in plano, uno extremo quiescente generabit circulum. Hoc enim possibile esse constat. Potest quoque Circulus definiri nullo ad planum respectu. Nam si corpus aliquod moveatur duobus in eo punctis quiescentibus punctum motum quodcunque describet circulum. Posset etiam dici circuli circumferentiam esse lineam cujus omnia puncta se eodem modo habent ad aliquam rectam.

In plano locum habebit talis expressio[:] Si $VA = BA$, $\overline{V}$ est circuli circumferentia.

Sine respectu ad planum $V.A.B \infty C.A.B$ erit $\widetilde{V}$ circuli circumferentia.

Notandum hic obiter non vero omnem lineam esse in se recurrentem, quae a puncto aliquo dato non recedit ultra datam distantiam, potest enim revolvi spiraliter, quadam asymptota ratione.

XVI.

Hoc vero punctum centrum circuli appellatur.

[XVII.]

Diameter est recta quaedam per centrum circuli ducta ex utraque parte in circuli peripheriam terminata, quae circulum bifariam secat.

Quod additur circulum a diametro bifariam secari superfluum est in demonstratione, cum ex eo ipso, quod per centrum transit consequatur. Demonstratur autem hoc modo: Si duae partes in quas diameter secat circulum collocentur ab eadem parte vel congruent, vel non. Si congruent, recta ex centro ducta occurrens uni, adhuc cadet intra alteram, et producenda est dum alteri occurrat, ergo distantia a centro major unius quam alterius, quod absurdum.

Caeterae definitiones satis clarae sunt. Tantum noto ad Definitionem 29.

15 XV.XVI *L ändert Hrsg.*

---

26 ad Definitionem 29.: Vgl. Clavius, *Opera* I, S. 20, bzw. G. Schott, *Cursus mathematicus*, 1661, S. 68.

dubitari posse an detur quadrilaterum aequilaterum quod simul sit rectangulum, sed si cogitetur rectam rectae aequali ad rectos angulos insistentem in plano moveri quod utique possibile est, manifestum est tale quoque quadratum esse possibile. Idem vitium est definitionis parallelarum, sed si cogitetur finitam rectam super recta indefinita eodem servato angulo moveri, et altero extremo describi lineam, manifestum est, eam rectam esse et priori aequidistantem. Rectas autem ambas esse, vel ex hoc patet quod ad describentem eodem modo se habent.

Postulata

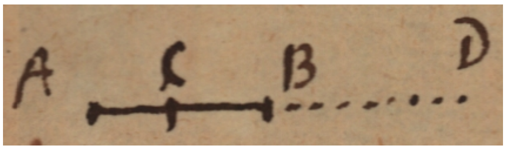
Haec nihil aliud sunt quam assumtae possibilitates, aut generationes, ita faciles, ut non censeatur opus eas demonstrare, ut rectam a puncto ad punctum duci posse. Quanquam ad perfectionem scientiae oporteret omnia ex definitionibus demonstrari.

I.

Postuletur ut a quovis puncto ad quodlibet rectam lineam ducere concedatur.
Id aequum est, neque enim aliud est recta quam distantia punctorum.

II.

Et *rectam lineam terminatam in continuum recta producere.*



[*Fig. 17*]

Sit recta AB. Sumatur in ea punctum C. Cumque AC produci possit usque in B, poterit etiam AB produci usque in D. Quia recta sibi similis est.

III.

Item *quovis centro et intervallo circulum describere.*

Hoc fiet si recta aequalis dato intervallo, uno extremo in dato centro collocetur, altero autem in eodem plano moveatur.

IV.

Quacunque Magnitudine sumi posse majorem et minorem.

Semper enim pars esse potest alterius, quae est major, et semper partem habet quae est minor.

A x i o m a t a

Puto omnia Axiomata posse demonstrari, idque majoris esse ad perfectionem scientiae, quam quis credat. Interim quia id non facile est, non sunt culpandi geometrae, quod assumere quae omnes intellecta concedant.

I

Quae eidem aequalia sunt inter, et si unum aequalium majus vel minus tertio, erit et alterum.

Patet ex eo quod a e q u a l i a sunt quae sibi substitui possunt salva quantitate.

II usque ad VII

Si aequalibus addas (auferas) aequalia (inaequalia) fiunt aequalia (inaequalia).

Aequalium aequimultipla vel aequisubmultipla sunt aequalia etc.

Generaliter: Si sint a, b, c, etc. et l, m, n, etc. Sitque $a = l$, et $b = m$, et $c = n$, etc. erit id quod determinatur per a, b, c, etc. aequale ei quod determinatur eodem modo per respective aequalia l, m, n, etc. Imo difficultas in determinationibus ambiguis.

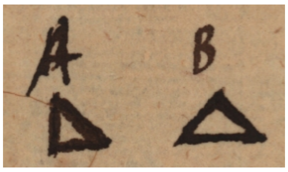
VIII

Quae sibi mutuo congruunt aequalia sunt.

14 f. fiunt | inaeqvalia *ändert Hrsg.* | aeqvalium *L*

---

2 *Quacunque ... minorem*: Vgl. Clavius, *Opera* I, S. 23, bzw. G. Schott, *Cursus mathematicus*, 1661, S. 64.



[*Fig. 18*]

Congrua voco, quae sibi possunt congruere ut A et B. Congrua autem sunt quae nullo modo possunt discerni nisi situ suo, ac proinde in se spectata cum discerni non possunt, utique aequalia et similia sunt. Vicissim quae aequalia et similia sunt, congrua sunt, quia nihil amplius in his spectari potest, quam quantitas et figura sive qualitas, quod si neutro differant, nullo modo in se poterunt discerni; et proinde erunt congrua. Quando autem congrua situ ipso congruunt a me coincidentia appellantur.

IX

Totum sua parte majus est.

Seu pars est minor toto. Quod demonstratur, quia Minus est quod parti alterius aequale est; est autem pars utique aequalis parti totius, nempe sibi ipsi.

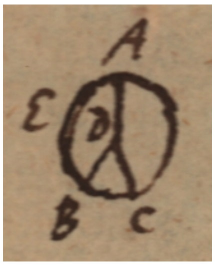
His subjecta ab Euclide Axiomata sunt a Proclo demonstrata.

[*Fig. 19*]

Demonstrat autem primum cum Thalete, rectam per centrum transeuntem secare circulum vel ejus circumferentiam in duas partes aequales quod et supra attigimus.

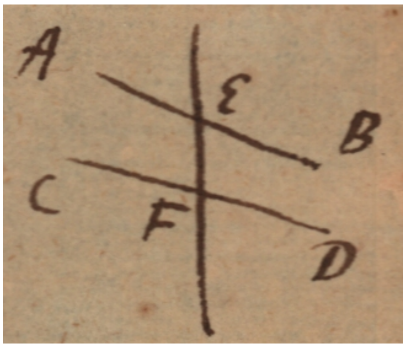
Hinc demonstrat porro duas rectas non habere segmentum commune.

14 Demonstrat: PROKLOS, *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, def. XVII. 16 demonstrat porro: *a. a. O.*, def. XX–XXIII.



[*Fig. 20*]

Habeant enim duae rectae BD, CD, segmentum commune AD, erunt duae semicircumferentiae, BEA, et CBA, aequales inter se (quippe dimidiae ejusdem,) pars et totum. Ostendendum tamen adhuc non ex figurae inspectione, sed rei natura, quod se habeant ut pars et totum. Eodem fere modo demonstratur duas rectas concurrentes se secare. Ex quo ostenso deducit Proclus peringeniose duos angulos rectos esse aequales inter se. XI. Axioma Euclidis quo Clavio est XIII. demonstrare conatus est Proclus, sed Clavio judice imperfecte, et mihi vicissim Clavii demonstratio non satisfacit. Ita autem habet:



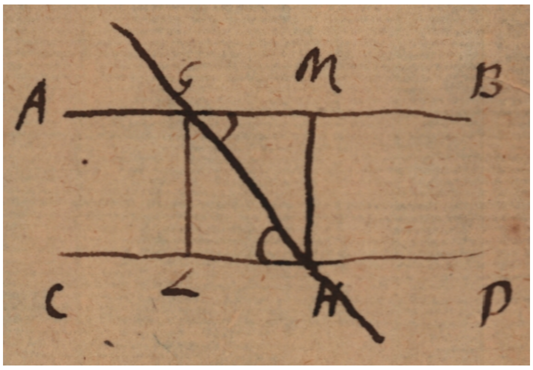
[*Fig. 21*]

Si in duas rectas lineas AB, CD altera recta EF incidens internos, ad easdemque partes angulos BEF, DFE duobus rectis minores faciat, duae illae rectae in infinitum productae sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores. Hoc pronuntiato utitur Euclides ad demonstrandum quod si recta incidat in duas parallelas

5 rectas | in *nicht gestr.* | concurrentes *L*

6 deducit: *a. a. O.*, post. IV. 7 conatus est: *a. a. O.*, post V. 8 habet: Clavius, *Opera* I, S. 25. 13 utitur: Eukleides, *Elementa*, I, 29.

angulos ad eas facit aequales. Nempe angulum AGH angulo CHF. Orta ista perplexitas ex definitione parallelarum[,] nam si Parallelas definiisset Euclides, quae sunt aequidistantes seu minimas distantias ubique habent aequales (cujus corollarium est non posse concurrere, nam in concursu nulla plane distantia est) cessabat difficultas. Ex hac ergo definitione rem ostendam.



[*Fig. 22*]

Cum GL et MH sit aequalis moveatur recta LH ubique perpendicularis seu minima, manente angulo recto, ita ut L incedat per LG, et H per HM. Utique eodem tempore percurrentur LG et HM ergo LH et GM sunt aequales. Cum ergo triangula GMH et HLG sint aequalium laterum, erunt ergo et aequalium angulorum, seu angulus GHL aequalis angulo HGM.

Mirum non est, Euclidi et ejus interpretibus aquam haesisse in demonstrandis *Elementis*, quia nullam adhibent definitionem rectae. Nam ea quam Euclides affert, quod ex aequo sua interjaceat puncta[,] non est intelligibilis nec adhibetur in demonstrando. Itaque coacti sunt axiomata quaedam assumere aeque obscura ac id quod erat demonstrandum, Euclides scilicet ad proprietates parallelarum demonstrandas hoc axiomate utitur, quod rectae duae ad quas recta incidens angulos aequales vel duobus rectis simul aequales non fecerit sibi occurrant; et alii quod recta super recta mota perpendiculariter faciat extremo suo aliam rectam. Quod pari jure assumere poterat etiam de mota oblique.

44 (39891). DE FIGURA
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 23. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 23 r°. Bl. 23 v° leer.

Datierungsgründe: [**noch**]

Lineae non appellantur, figurae, sed superficies et solida; notio igitur figurae quaerenda est, quae huic usui respondeat. Atque ita divisio dimensionum in lineam superficiem et corpus quae trichotomia est, reducetur ad dichotomiam.

Observatu dignum est duo corpora solida, itemque duas figuras planas semper intus similes esse. Nam si a cubo et sphaera cogitatione terminos removeas, atque in ipsis intus tantum verseris, quasi in profundo quodam, nullum discrimen reperies. Similiter in duabus figuris planis nullo ad extrema respectu perfecta est similitudo, ita ut tectis extremis, vel inaccessis discrimen sit inobservabile. At vero in duabus lineis curvis, aut duabus superficiebus concavis vel convexis, etiam intus discrimen esse potest. Nisi lineae vel superficies sint congruae uniformes, sive adaptabiles sibi vel quarum una super alia incedere posset. Nimirum solida semper sunt congrua, ut et plana, non vero curva et gibba. Praeterea duae quantitates homogeneae congruae, ut duae rectae, duo arcus circuli, duo arcus Helicis cylindricae, duae portiones superficiei rotatu ejusdem curvae circa unum axem, duo denique solida; (haec enim omnia saltem certo modo congrua sunt, omnimode tantum rectae, plana et solida) hoc habent, ut semper a majore abscindi possit pars minori per omnia congrua, et si hoc fiat quoties licet, a minore rursus abscindi possit pars residuo congrua. Hinc in hujusmodi extensis, si extrema sint similia, et inclusa illis sint aequalia, ipsa extensa et similia et aequalia sunt.

45 (39892). GENERATIO RECTAE ET CIRCULI [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 24. 1 Bl. 8°. 2 S. — Gedr. (mit frz. Übers.): Echeverría / Parmentier, *La caractéristique*, 1995, S. 66–71.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1686 belegt.

Generatio quidem rectae et circuli habetur nullo jam recta et circulo suppositis, nempe si corpus aliquod moveatur duobus suis punctis immotis, punctum quodcunque corporis motu suo describet circulum; omnia autem puncta quiescentia cadent in rectam.

Attamen ut res non experimento atque imaginatione, sed sola mente sive demonstratione agatur, demonstrandum est, corpus aliquod seu punctum saltem in eo moveri posse duobus punctis corporis immotis; demonstrandum quoque est innumera alia puncta quiescentia in unum continuum cadentia in eodem corpore posse dari.

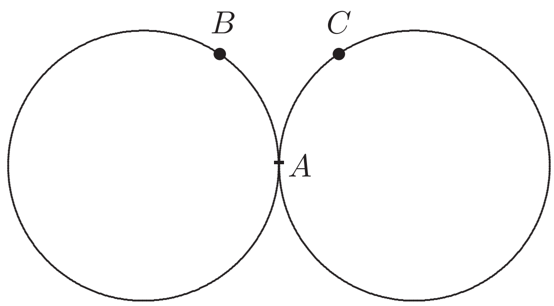
Manifestum equidem videtur a puncto ad punctum dari viam aliquam puncti simplicissimam, eamque proinde et brevissimam et quoque determinatam, ita ut omnia in ea sumta puncta sint sui semper situs unica. Ponamus enim punctum aliquod non esse ad duo proposita sui situs unicum, ergo erunt plura, heac differunt inter se, at dari possunt alia adhuc minus differentia, via ergo per haec foret simplicior contra hypothesin.

Nihilominus ut rigorose procedamus, videtur res alia adhuc ratione instituenda[,] nempe illud unum supponendo corpus aliquod moveri posse uno aliquo suo puncto manente immoto, hic est dari locum omnium punctorum, quae ad datum aliquod eundem habeant situm quem propositum aliquod punctum[,] et locus horum punctorum omnium dicitur ambitus sphaerae. Hic autem ambitus includit spatium seu punctum extra sphaeram positum non posse ad ejus centrum accedere, quin in ambitum ejus incidat quia puncti cujuscunque situs ad punctum datum nempe centrum ita continue mutari potest, ut dato tandem congruat, quo casu ex hypothesi ingruit in superficiem sphaerae.

Si duae ponantur sphaerae circa duo puncta continue crescere tandem se attingent, et

7 si *(1)* punctum qvodcunqve moveatur *(2)* corpus *L* 7 immotis, *(1)* locus puncti moti *(2)* omnia loca *(3)* punctum *L* 10 seu ... eo *erg. L* 13 dari *(1)* motum aliqvem *(2)* viam *L* 14 f. in | eo *ändert Hrsg.* | sumta *L* 22 spatium *(1)*. Ponamus enim *(a)* cor *(b)* | puncti *nicht gestr.* | alterius *(2)* qvoniam enim puncti a *(3)* seu *L*

progressu incrementi etiam secabunt. Contactus eorum erit in puncto quod cum duobus centris est in eadem recta, intersectio erit in circulo, apparet autem innumera dari hoc modo posse puncta contactuum, prout diversam servamus proportionem incrementorum; et proinde innumera et puncta in rectam cadentia. Haec autem puncta esse sui ad duo puncta data situs unica[,] hoc ipsum est quam duas sphaeras duobus talis puncti sitibus ad data duo puncta descriptas sese tangere, seu non nisi in unico puncto occurrere. Quod autem talis contactus detur, adhuc restare videtur ostendendum, seu quod duae sphaerae continue incrementes ad sese accedentes non simul in pluribus punctis sibi occurrant, vel quod eodem redit si duae sphaerae datae moveantur ad se invicem, eas se non posse tangere nisi in uno puncto.



[*Fig. 1*]

Hoc ex eo demonstratur, quod a quolibet puncto ad quodlibet in superficie sphaerae potest duci linea intra sphaeram. Quod si jam ostendi possit duci lineam quoque minimam posse intra sphaeram, sequeretur eamque unicam, ut AC et AB, eae coinciderent si B et C coincidunt, seu si contactus est in pluribus. Ergo sphaerae non se tangerent. Sed ita relabimur in hypothesin rectae.

Ostendendum locum punctorum in quo duae sphaerae sibi occurrunt esse lineam. Hoc ostenditur motu sphaerae alterius. Punctum enim motum per omnia haec loca transit. Haec linea, continue fit minor et tandem in punctum abit seu contactum.

1 secabunt. *(1)* Intersectio eorum | erit *nicht gestr.* | in *(a)* circulo *(b)* linea *(2)* Contactus *L* 4 autem *(1)* non nisi habere unicum punt *(2)* puncta *L* 5 sphaeras *(1)* sitibus earum descriptas ad *(2)* duobus *L* 6 occurrere. *(1)* Non opus est autem *(2)* Qvod *L* 8 continue incrementes *erg.* *L* 9 datae *erg.* *L*

46 (39893). VIA PUNCTI
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 25. $\frac{1}{2}$ Bl. 8°. 1 S. Unten Risskante.

Datierungsgründe: [noch]

Via puncti ad punctum simplicissima est r e c t a . Hinc recta est via a puncto ad punctum determinata seu suae naturae unica seu quod eodem redit punctum quodque in recta est sui ad duo illa puncta situs unicum; adeoque recta duobus in ea punctis existentibus immotis, moveri non potest.

Si lineae eadem manente longitudine extrema diducantur quantum fieri potest linea recta fit.

Recta est minima inter duo puncta.

Si punctum B. sit sui situs unicum ad puncta A, C, etiam punctum A. erit sui situs unicum ad puncta B, C.

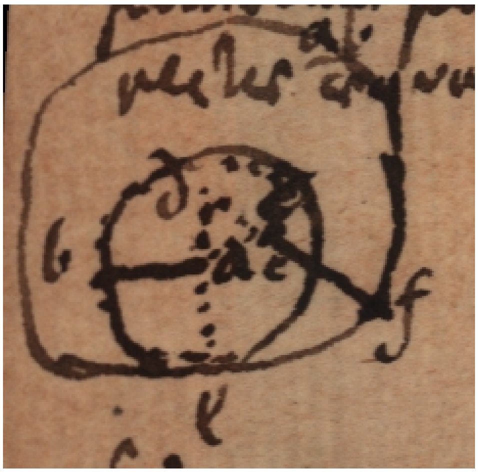
Omnia puncta sui situs unica cadunt in eandem rectam lineam, seu in viam alicujus puncti, seu locus omnium punctorum sui ad duo puncta proposita situs unicorum est linea.

5 est *(1)* deter *(2)* via *L* 6 unica | est etiam minima *gestr.* | seu *L* 8 potest. *(1)* Si distantia aeq *(2)* Si *L* 10 recta *(1)* est *(2)* fit *L* 12 puncta *(1)* A, B, *(2)* A, C, *L*

47 (39894). SECUNDUM PROBLEMA EUCLIDIS [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 26. **[noch]**. 1 S. auf Bl. 26 v°. — Auf Bl. 26 r° Textfragment in Leibniz' Hand: „⟨—⟩verii, oder cum /⟨—⟩um, oder sonst / ⟨—⟩ Edition / habe schohn." Daneben in anderem Duktus von anderer (?) Hand: „9 g."

Datierungsgründe: **[noch]**



[*Fig. 1*]

Secundum problema Euclidis est ad datum punctum ponere rectam datae rectae *ab* aequalem. Constructio talis: Junge *ac*; super ea triangulum aequilaterum *dac*. Centro *a* radio *ab* describe circulum *de* item centro *d* radio *dae* circulum *ef* et ducta *def* erit *ef* quaesita. Sed non opus est triangulo aequilatero[,] sufficit aequicrurum quodcunque. Caeterum ut naturam duarum rectarum per situm exprimamus sic procedi poterit:

8 Secundum problema: EUKLEIDES, *Elementa*, I, 2.

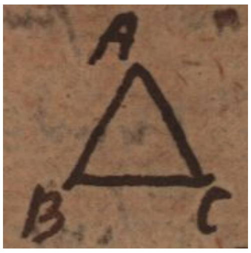
[*Fig. 2*]

Duae rectae lineae ab, et cf aequales sunt, si duo [*Text bricht ab*]

48 (39896). DE SITU ET DISTANTIA
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 27 u. 35. 2 Bl. 2°, die ursprünglich einen Bog. 2° bildeten. 4 S. halbbrüchig beschrieben. — Geringer Textverlust durch Papierverlust im Falz des ursprünglichen Bogens.

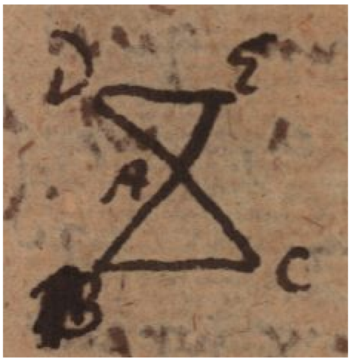
Datierungsgründe: **[noch]**



[*Fig. 1*]

⟨(1)⟩ Punctum est extremum extensi cujus aliud extremum non datur; ut A est extremum extensi ABC, et licet AB sit etiam extremum ipsius ABC, tamen AB habet aliud extremum scilicet ipsum A, quod de A dici non potest. Potest etiam definiri, id quod est in extenso simplicissimum, seu ad cujus naturam determinandam pluribus opus non est.

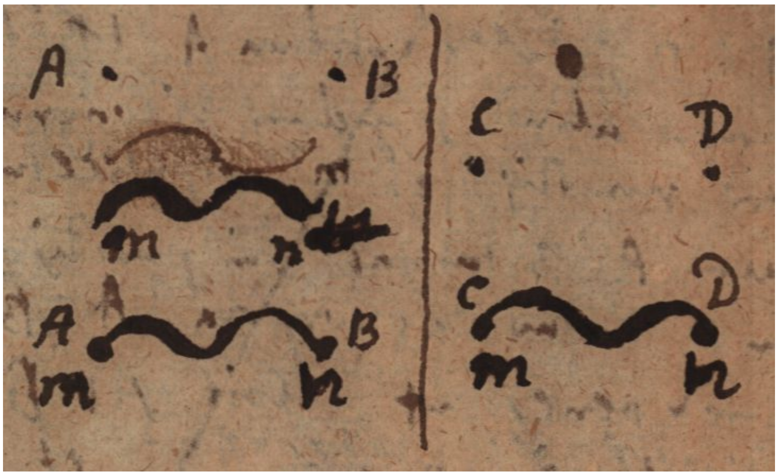
(2) Extremum autem est quod pluribus quorum unum in alio non est, commune esse potest, etsi ea nullam habeant partem communem. Seu id quod duo rigida commune habere possunt, etiamsi in diversa moveantur.



[*Fig. 2*]

Ita A commune est ipsis ABC et ADE. Et licet ABC dextrorsum tendat, ADE sinistrorsum, tamen se in A contingunt.

(3) Situs puncti ad punctum datus est, quando datum est rigidum, quod ipsa connectere potest, seu de quo constat, quomodo duobus suis extremis datis, possit ipsis applicari.



[*Fig. 3*]

Ut si sint duo puncta A et B, et datum corpus $m\,n$, quod constet ipsis interponi et applicari posse suis extremis m et n.

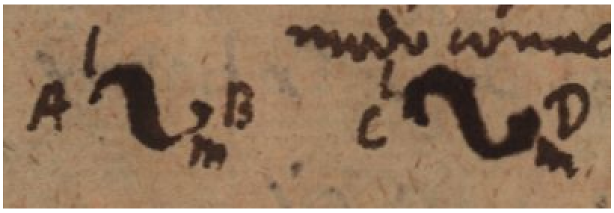
(4) Dato aliquo situ punctorum quorundam ut A et B possibile est dari alia duo puncta C et D eundem inter se situm habentia quem duo priora. Utique enim possibile est corpus quodcunque ut $m\,n$ moveri, ergo ex loco AB ubi fuit, translatum intelligatur in locum alium CD, ita ut eadem extrema ejus puncta m et n quae antea occupaverant A et B, nunc occupent C et D, necesse est C et D eundem inter se habere situm, quem

A et B per definitionem situs punctorum praecedentem.

(5) Ex hoc colligi etiam potest plura corpora posse esse congrua ut AB et CD; vel si potius assumsissemus duo corpora posse esse congrua id enim hic pro principio esse posset, hinc demonstrari potuisset propositio praecedens et ipsa corporis mobilitas.

[*Fig. 4*]

(6) Dato situ alicujus puncti B ad punctum A, dari potest aliud punctum C eundem habens situm ad idem A. Sint enim duo corpora congrua $f\,g$ et $l\,m$ per artic. 5 sitque idem situs inter f et g qui inter B et A per artic. 4, adeoque et qui inter l et m ex natua congruitatis; admoveantur sibi duo corpora fg et lm, extremis g et l et compositum ex ipsis corpus rigidum fglm transferatur ita ut puncta f et g applicentur punctis A et B, ergo hac translatione punctum m incidet in aliquod punctum C quaesitum, quod eodem modo situm erit ad l seu ad A, ut f ad g seu B ad A. Quod susceperamus. Idem autem hoc est, ac si dixissemus corpus aliquod moveri posse, uno puncto manente immoto, seu corpus Af ex loco AB transferri posse in locum AC.

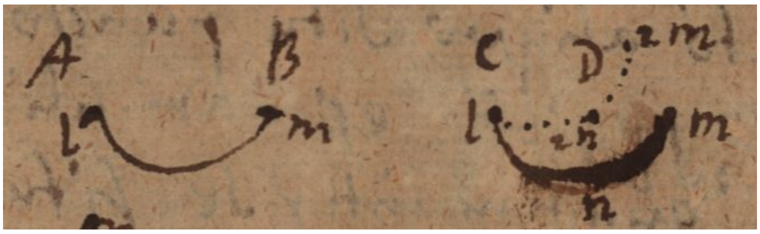


[*Fig. 5*]

Distantia punctorum A et B aequalis est quae punctorum C et D cum situs illorum

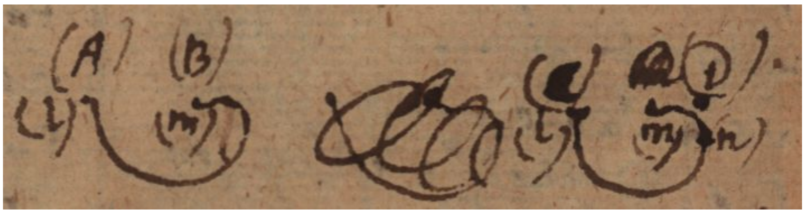
9–12 *Nebenbetrachtung*: Brevius hoc conficietur, si ponamus fg moveri versus lm, ita ut g perveniat ad l neque ideo necesse est f pervenire ad m. Ergo puncta f et m erunt eodem modo sita ad punctum gl.

duorum inter se idem qui horum duorum inter se, seu cum corpus lm connectens puncta AB extremis suis congruentia eodem modo connectere potest puncta CD.



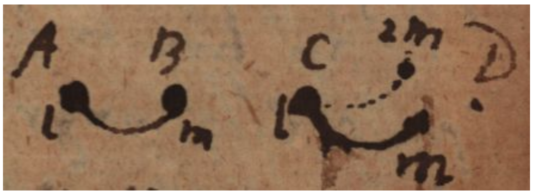
[*Fig. 6*]

Distantia major est punctorum A et B, et punctorum C et D minor quando corpus quodcunque suis extremis l et m applicabile punctis A et B, seu puncta $A.B$ connectens; deinde applicatum uno extremo l ad punctum C et ipso immoto utcunque motum necessario alio puncto quam m attingit punctum D. nempe puncto n.



[*Fig. 7*]

Fieri quidem potest ut (D) sit remotius a (C) quam (A) a (B), licet (l) ipsi C et (n) ipsi (D) applicari possit. Sed tunc res non succedit quolibet corpore lm extrema AB connectente assumto.



[*Fig. 8*]

Distantia minor est punctorum A et B et punctorum C et D major

13–147,3 *Nebenbetrachtung:* Nota ex hac definitione majoris et minoris non venitur ad continuum.

quando corpus extensum aliquod reperiri potest suis extremis l et m applicabile punctis A et B seu puncta A et B connectens quod deinde applicatum uno extremo l ad punctum C, et ipso immoto utcunque motum non potest attingere punctum D.

Haec definitio majoris et minoris simplicior est quam praecedens, neque enim assumit punctum n; ideo ipsa potius utemur.

Si punctum sumatur in corpore, et sit aliud punctum, quod a priore non minus distat, quam quodvis aliud, id erit in corporis extremitate.

Dato uno puncto in corpore, reperiri potest aliud quod ab eo nullo alio minus distat. Nam cum sit in extremitate per praecedentem, et aliud corpus, corpus datmu tangens per omnia puncta extremitatis ejus ferri possit, locus contactus vel semper eandem servabit distantiam a puncto dato et tunc omnia puncta extremitatis erunt quaesita, vel nunc accedet nunc recedet et cum non possit recedere in infinitum, alioqui tangere corpus desineret, aliquando maxime recedet.

Eodem modo probabitur, dato puncto in corpore, aliud punctum reperiri posse, in ejusdem corporis extremitate quod non magis ab eo distat quam quodvis aliud ejusdem corporis.

Item dato puncto quocunque semper reperiri posse in corporis dati extremitate punctmu quo nullum aliud magis a dato puncto distat, item quo nullum aliud minus distat ab eodem.

Item semper reperiri posse in eadem extremitate duo puncta a puncto dato aequidistantia, distantiam habentia inter se minorem datam.

Ut ipsius distantiae natura cognoscatur videtur illa nihil aliud esse, quam minima a puncto ad punctum via. Minimam intelligo, non quod quovis alio minus est sed quo nullum aliud est minus. Demonstrandum autem est talem viam dari, et quidem in superficie aliqua fieri potest, ut minimae a puncto ad punctumviae sint plures inter se aequales. Sed absolute viam a puncto ad punctum minimam talem dari, ut nulla alia detur minor, potest demonstrari. Aequalia sunt quae vel congrua sunt, vel congrua sibi reddi possunt, seu quorum unum in aliud potest transformari, nulla parte addita vel ademta.

Si A sit aequale parti ipsius B, tunc A dicitur major, B minor.

Si duo sint homogenea, et neutrum alio sit majus vel minus[,] erunt aequalia.

8–13 *Nebenbetrachtung:* Dubium est nonnullum in hac ratiocinatione, quia ex definitionibus Majoris et Minoris non sequitur continuitas, seu non sequitur a majore ad minus transiri per omnia media, seu distantiam minorem esse aequalem parti majoris.

Haec propositio est demonstranda ex definitione homogenei, sunt autem homogenea duo quadrata quorum unum continue uniformiter auctum vel alteri fit aequale, vel quorum unum adjectis pluribus inter se aequalibus alteri fieri potest aequale.

H o m o g e n e a optime definiuntur, quae transformari possunt in similia. Et a e q u a l i a quae transformari possunt in congrua.

Si duo sint homogenea semper aut unum alteri aut pars unius alteri aequalis est. Nimirum cum similia sint simili modo generata intelliguntur. Introducenda autem generatio quaedam uniformis, qua omnes partes toti similes generentur successive ante totum, et ita necesse est vel duo illa simul generari adeoque esse congrua ac proinde aequalia vel unum generari ante aliud, et tunc generabitur simul cum aliqua alterius parte, quia quolibet momento ante generationem totius generatur aliqua ejus pars; et ita ejus parti erit aequale. Habemus ergo tandem veram demonstrationem hujus theorematis: In homogeneis, quod nec majus nec minus est, id est aequale. Et quia in angulo contactus et rectilineo non procedit generatio uniformis, hinc mirum non est, eos non posse comparari, et tollitur dubitatio Vietae, et Clavii ac Peletarii de angulo contactus.

7 f. *Am Rand:* NB.

15 dubitatio: Vgl. J. Peletier, *In Euclidis Elementa Geometrica*, 1557, S. 74–78; Chr. Clavius, *Euclidis elementorum libri XV*, 1574, S. 110–116; J. Peletier, *In Christophorum Clavium*, 1579; Chr. Clavius, *Theodosii Tripolitae sphaericorum libri III*, 1586, S. 341–356; Chr. Clavius, *Euclidis elementorum libri XV*, 1589, S. 354–386; Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593, Bl. 22 v°–23 r° (*VO* S. 386 f.).

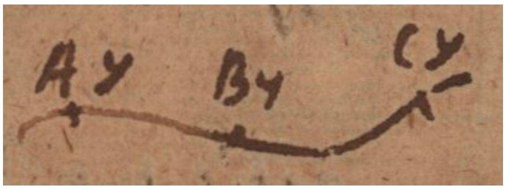
49 (39897). DE EODEM SITU INTER PUNCTA [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 28+34. 1 Bog. 2°, von dem die untere Hälfte von Bl. 34 abgeschnitten wurde. 2 S. auf Bl. 28, Bl. 34 leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

[*Fig. 1*]

L i n e a est via puncti, seu $1y2y$ si punctum dicatur y.

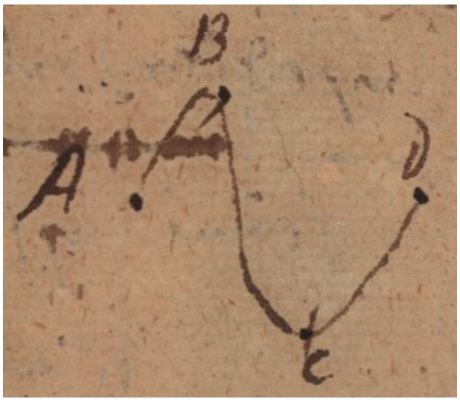


[*Fig. 2*]

Si punctum y moveatur a puncto A ad punctum B, et deinde a puncto B ad punctum C ita ut via prior et posterior nullam habeant partem communem erit linea $AyByCy$ composita ex lineis $AyBy$ et $ByCy$ tanquam totum ex partibus cointegrantibus.

[*Fig. 3*]

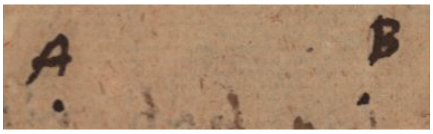
A quolibet puncto dato ad quodlibet punctum datum duci potest linea aliqua ut a puncto A ad punctum B, linea AB.



[*Fig. 4*]

Per quotlibet puncta data potest duci linea, et quolibet ordine. Sint enim puncta quotcunque A. B. C. D. dico unam lineam duci posse per omnia puncta, et quolibet ordine. Assumto enim ex his punctis quolibet, A, et rursus alio quolibet B duci potest linea AB per praecedentem, eodem modo ex B porro linea duci poterit ad quodlibet aliud praeter duo A. B. nempe ad C et denique a C ad D, et habebitur linea $ABCD$.

Rigidum voco extensum in quo nulla quoad extensionem fit mutatio, utcunque ipsum moveatur.

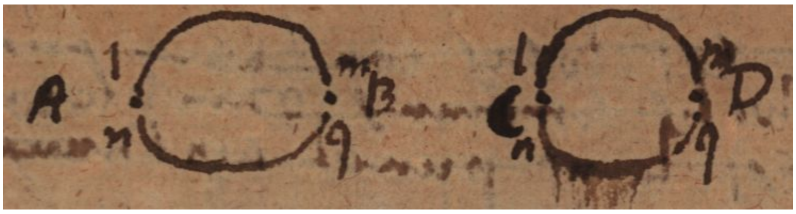


[Fig. 5]

Si duo puncta A et B in spatio assumantur, quicquid de puncto A intelligi potest respectu puncti B, item de puncto B intelligi potest respectu puncti A. Nihil enim suppositum est, unde possit ostendi ratio diversitatis.

[*Fig. 6*]

Si linea $l\,m$ extremo l possit applicari puncto A, et extremo m puncto B, poterit eadem extremo l applicari puncto B, et extremo m, puncto A. Nam ex praecedenti si qua via perveniri potest ab A ad B necesse est via per omnia conveniente perveniri etiam possit a B ad A.



[*Fig. 7*]

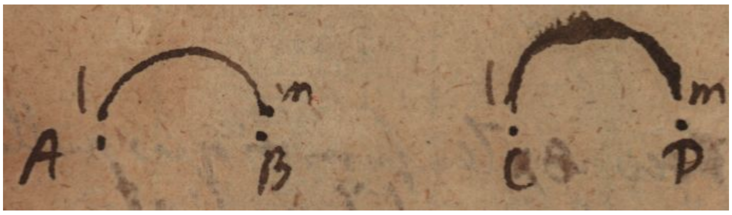
Si sint puncta duo A et B, itemque alia duo C et D et linea rigida eadem lm suis extremis l et m applicari possit punctis A et B, quam punctis C et D, et sit nova linea rigida nq applicabilis ipsis A et B suis extremis n et q poterit etiam iisdem applicari punctis C et D.

Hoc ita demonstratur, dum lineae rigidae lm et nq applicantur punctis A et B, congruant eorum puncta l et m, jam quod semel fit, id permanere possibile est, si nihil suppositum sit impediens, itaque ponantur simul manere, et unum ex iis fieri rigidum. Itaque translato applicatis punctis l et m ad C et D. simul applicabuntur puncta n et q, ipsis l et m coincidentia.

[*Fig. 8*]

Hinc idem esse dicetur situs inter puncta A et B, qui inter puncta C et D. si eadem extensi rigidi puncta applicari possint ipsis A et B, quae ipsis

C et D.



[Fig. 9]

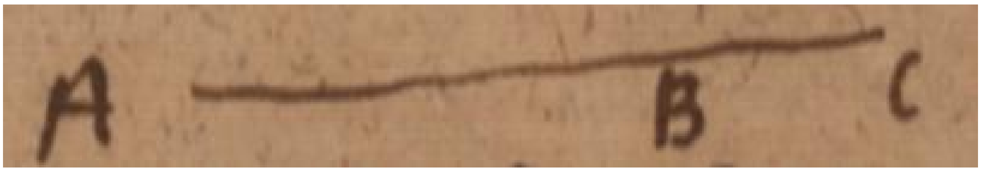
Datis duobus punctis A et B possibile est inveniri alia duo C et D, eundem quem illa inter se habentia situm. Nempe linea rigida lm, cujus puncta l et m applicata sunt punctis A et B, ad punctum C applicari potest puncto l, ac proinde punctum m applicabitur ad aliud punctum D quaesitum. Idem etiam sine motu ostendi potest, ex natura spatii infiniti, quae talis est, ut si quid fieri ponitur in quadam ejus parte finita, potest assumi alia ejus pars in qua possunt eadem intelligi. Ex quo ipsa probatur mobilitas.

50 (39898). DE LINEA RECTA ET PLANO ET CIRCUMFERENTIA [um 1683 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 31. 1 Bl. ca 8°, unregelmäßig ausgerissen. 2 S.

Datierungsgründe: **[noch]**

Linea recta est cujus omnia puncta ad unum in ea sumtum eodem modo se habent, seu cujus puncta ex uno sunt indiscernibilia nisi per compraesentiam.



[*Fig. 1*]

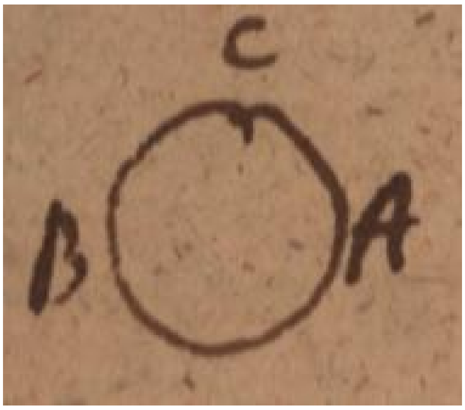
Ita puncta B et C eodem modo se habent ad punctum A. neque discerni possunt, nisi simul ambo considerentur.

Hinc tanquam corollarium sequitur unumquodque rectae punctum pro uno illi assumi posse ad quod caetera omnia eodem modo se habent, alioqui si quaedam possent, quaedam non possent, eo ipso possent discerni.

Planum est superficies quae si indefinite continuata, intelligatur, omnia ejus puncta ad unumquodque in ea assumtum, eodem modo se habent. Unde sequitur rectam lineam ubique plano applicari posse.

Circumferentia est linea cujus omnia puncta ad unum extra ipsam sumtum, eodem modo se habent. Ubi notandum est integram lineam rectam dari, ad quam omnia circumferentiae puncta eodem modo se habent.

Sane in circumferentia manifestum est puncta varia respectu unius puncti in ipsa sumti utique discerni posse.



[*Fig. 2*]

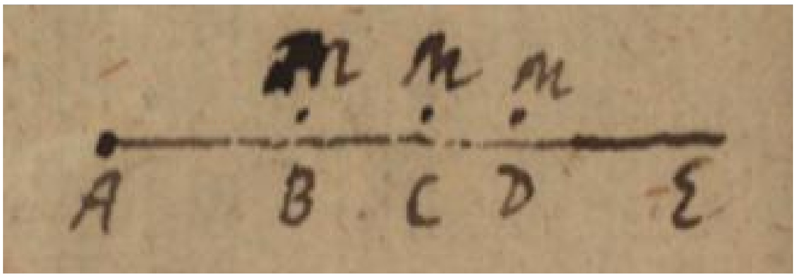
Ita punctum B quod e regione est ad assumtum A longe aliter se habet ad A. quam punctum C. At, inquies, si linea Rhombica in sphaera describatur omnia ejus puncta etiam aequaliter distant a centro sphaerae. Respondeo ipsa puncta Rhombicae diverso modo se habent inter se, seu linea rhombica non est uniformis, ut sunt recta et circularis.

Haec tamen accuratius constituenda.

51 (39899). DE LINEAE RECTAE DEFINITIONE [1682 – 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 29. Ca 1 Bl. 8°. 1 S. auf Bl. 29 v°. Bl. 29 r° leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1682–1685 belegt.



[*Fig. 1*]

Si punctum M ita moveatur, ut similiter sese habeat ad punctum aliquod in linea motus AC sumtum A, ea linea erit r e c t a. Potest enim haec definitio ita enuntiari, ut punctum mobile ad punctum fixum, a quo discedit similiter semper se habere intelligatur. Similiter autem se habere, idem est quod indiscernibiliter, (nisi per compraesentiam). Ita ex solo A non potest discerni utrum punctum aliquod mobile sit in B, an in C, usque adeo ut motus ejus ne apparere quidem possit si ex solo A consideretur. Atque hoc est quod voluit Plato dicere, in recta punctum B obumbrare punctum C, et Euclides, rectam ex aequo sua interjacere puncta, licet distincte exprimere rectae notionem non potuerint.

Ex hac definitione patet statim lineam rectam esse possibilem, possibile est enim aliquid se semper habere similiter si nihil asseritur, ex quo sequatur dissimilitudo.

12 dicere: PLATON, *Parmenides*, 137e. 12 rectam: EUKLEIDES, *Elementa*, I, def. 4.

52 (39900). DE MOTU PUNCTI
[um 1683 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 30. 1 Zettel **[noch]**. 14 Z. auf Bl. 30 r°. Bl. 30 v° leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

Punctum moveri non potest, quin simul moveatur aliquod extensum, in quo est, at punctum quiescere potest, licet extensum quodcunque in quo esse intelligitur moveatur.

53 (39903). NOTAE CHARACTERISTICAE SITUS (I) [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 36–37. 1 Bog. 2°. $1\frac{1}{4}$ S. halbbrüchig beschrieben auf Bl. 36. Bl. 37 leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1685 belegt.

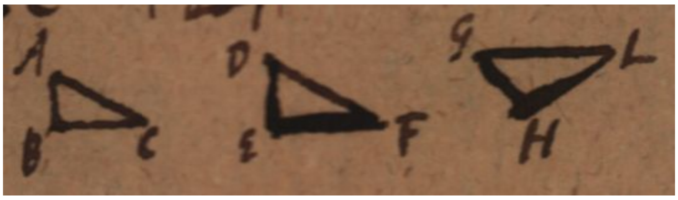
Propositum mihi est modum explicare, quo figurae per notas exprimi possint. Algebrae imperfectionem pro usu Geometriae periti non ignorant, magnitudinem enim solam directe exprimit, situm non nisi per ambages, mihi itaque peculiari quadam Characteristica situs videtur opus esse, quae mirifici ad juvandam imaginationem usus erit, tantundem enim imo amplius aliquid praestat quam delineationes ipsique Moduli et tanto labore non indiget.

Notae

A, B, X, Y significare solent puncta. Per A, B, aliasque literas Alphabeti anteriores soleo designare puncta fixa seu certa; at per X, Y, Z aliasque posteriores Alphabeti literas designo puncta indefinita seu generalia, sub quibus infinita comprehenduntur. Exempli causa si sit linea AXB, 

, literae A et B significant initiale et finale punctum, at litera X significabit punctum quodcunque interjectum.

Similitudinem designo per signum $\sim$. Ita si duo triangula sint similia, ABC et DEF designare potero hoc modo: $ABC \sim DEF$.



[*Fig. 1*]

$=$ significat aequalitatem ut $AC = EF$.
$\sqcap$ majoritatem ut $AC \sqcap AB$.
$\sqcap$ minoritatem ut $AB \sqcap AC$.

$\backsim\!\!\!\varrho$ significat congruentiam. Ut si scribam $GHL \backsim\!\!\!\varrho\ DEF$. Hoc significat triangula GHL et DEF congrua esse, seu unum exacte implere posse alterius locum.

Ubi notandum omnia congrua etiam esse similia, item aequalia, et quaecunque simul et similia et aequalia sunt ea esse congrua. Hinc valet talis consequentia[:] $\odot \backsim\!\!\!\varrho$ ☽. Ergo $\odot \sim$ ☽, item Ergo $\odot =$ ☽. posito $\odot$ et ☽ esse res magnitudinis capaces.

Contra si simul sit $\odot \sim$ ☽ et $\odot =$ ☽ concludi poterit $\odot \backsim\!\!\!\varrho$ ☽.

∞ significat coincidentiam, exempli gratia si duo dicantur esse puncta A et B, quorum unum dicatur esse centrum circuli, alterum vero dicatur esse intersectio duorum ejus diametrorum, scimus haec duo coincidere et revera non nisi unum idemque punctum esse; ac proinde scribetur $A \infty B$.

D e t e r m i n a t u m est quod eorum quae conditiones propositas habent unicum est. Exempli causa datis tribus punctis determinatus est circulus per ipsa transiens, non enim datur nisi unicus.

Quorum determinantia similia, aequalia, congrua, coincidentia sunt (posito eodem determinandi modo) ea ipsemet talia sunt.

Aequalium, similium, congruorum, coincidentium unum in alterius locum substitui potest, salva aequalitate, similitudine, congruentia, coincidentia, dummodo idem sit adhibendi modus.

Omnia determinantia simul substitui possunt in locum determinati salva determinatione.

Si sint plura relationem determinationis inter se habentia, hoc est ut reliquis positis unum aliquod eorum sit determinatum; tun etiam quodlibet aliud eorum ex reliquis erit determinatum. Hoc intellige, si unum ex illis non revera in se contineat plura. Ita si sint tria puncta, A, B, C, et ex dato situ ad puncta A et B detur punctum C, tunc vicissim ex dato situ ad puncta A, C dabitur punctum B. Pendet ex eo quod nulla ratio diversitatis intelligi potest.

---

10 *Dazu am Rand:* $\not\infty$ diversitatem

54 (39904). NOTAE CHARACTERISTICAE SITUS (II)
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 38–39. 1 Bog. 2°. $\frac{1}{4}$ S. halbbrüchig beschrieben auf Bl. 38 r°. Rest des Bogens leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1685 belegt.

$\odot \sim$ ☽ id est $\odot$ et ☽ similia sunt.

$\odot =$ ☽ id est $\odot$ et ☽ aequalia sunt.

$\odot \infty$ ☽ id est $\odot$ et ☽ congrua sunt.

$\odot \;\; \infty\!\!\!\!\!\mid\;$ ☽ id est $\odot$ et ☽ coincidentia sunt

A, B, Y vel similis litera regulariter significat punctum.

$\overline{Y}$ est id in quo sunt omnia puncta Y. seu omn. Y est in $\overline{Y}$. Si omn. Z est Y erit $\overline{Z}$ in $\overline{Y}$. Et si $\overline{Z}$ est in $\overline{Y}$. omn. Z est Y. et proinde per conversionem particularem ex logica etiam al. Y est Z.

Omnes regulae logicae syllogismorum absolutorum huc transferri possunt.

Si $\odot$ est in ☽ et ideo $\odot \;\; \infty\!\!\!\!\!\mid\;$ ☽ tunc ☽ est p u n c t u m , et si ☽ est p u n c t u m tunc posito $\odot$ esse in ☽, erit $\odot \;\; \infty\!\!\!\!\!\mid\;$ ☽.

(Z) est vestigium puncti Z moti, et $\overline{(Z)}$ est locus omnium (Z) seu l i n e a. Si omne Z est Y et omne Y est Z, et coexistunt $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ erit $\overline{Y} \; \infty\!\!\!\!\!\mid\; \overline{Z}$. Iisdem positis si $\overline{Y}$ sit prius tempore, $\overline{Z}$ posterius transformatio est ex $\overline{Y}$ in $\overline{Z}$. Si sit $\overline{X} + \overline{Y} \; \infty\!\!\!\!\!\mid\; \overline{Z}$ tunc omn. X erit Z.

55 (39940). DE PUNCTO ET LINEA
[1682 – 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 45–46. 1 Bog. 4°. 1 S. auf Bl. 45 r°, halbbrüchig beschrieben. Bl. 45 v° u. Bl. 46 leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1682–1685 belegt.

Si posito B in A eo ipso intelligatur coincidere A et B, vocabitur A *punctum*.

Itaque si sit B in A et ideo sit $A \mathrel{\infty\!\!\!\!|\;} B$ erit A punctum.

Et si sit B in A et sit A punctum erit $A \mathrel{\infty\!\!\!\!|\;} B$.

Scholion. Punctum intelligimus quod in situm habentibus simplicissimum est, ac proinde nihil in ipso assumi potest, quod non cum ipso coincidat.

A, B, et aliae literae imposterum vocabunt puncta, nisi aliud admoneatur.

$A \sim B$, seu punctum puncto simile est.

$A \infty B$, seu punctum puncto congruum est.

$A.B$ est $\sim C.D$. Hoc per se patet ex definitione similitudinis, nihil enim in uno sigillatim spectato enuntiari potest, quod non est in altero.

Hinc non pari jure dici potest $A.B.C. \sim C.D.E.$ nisi constet $A.B$, $B.C$ et $A.C$ invicem se habere ut $C.D$ et $D.E$ et $C.E$.

Via puncti seu *Linea* sic designetur $\overline{(A)}$ mobili scilicet puncto existente A, cujus vestigium aliquod vocatur (A). Quod si viae initium et finis designetur, initium esto $((A)$ finis $(A))$. Simpliciter etiam si additum sit ad $\overline{Y}$. quod sit linea. Sufficit $\overline{Y}$ ad lineam designandam ut si dicatur lin. $\overline{Y}$.

56 (39941). NOTIONES IN GEOMETRIA [1682 – 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 47–48. 1 Bog. 4°. 3 S. halbbrüchig beschrieben. Auf Bl. 48 v° 1 Z.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1682–1685 belegt.

$\sim$ significat s i m i l i t u d i n e m , et $\odot \sim$ ☽ significat $\odot$ esse simile ipsi ☽ et contra. Similia autem intelligo quae nullo modo discerni possunt sigillatim, sed comparatione. Unde extrema, partes, aliaque assignabilia unius eandem habent relationem inter se invicem, quam habent extrema vel partes respondentes alterius. Itaque ut discernantur duo similia necesse est non sigillatim examinari ambo, sed vel ambo simul spectari vel unumquodque eorum simul spectari cum tertio aliquo, quod nunc uni nunc alteri comparetur. Ut si duas figuras similes consideremus singulatim, nullum discrimen reperietur. Consideretur ratio lateris ad latus anguli ad angulum, assumantur puncta aliqua horumque spectentur relationes, idem prorsus quid de una harum figurarum enuntiari potest, poterit enuntiari de alia. Sed si aliquid enunties de ambabus simul, notabis discrimen, efficereque poteris ut heterogenea quadam ratione in enuntiationem ingrediantur, nam si unam harum figurarum alteri admoveas vel si tertium aliquid modo uni modo alteri admoveas, discrimen sese ostendet.

$=$ significat a e q u a l i t a t e m , et $\odot =$ ☽ significat $\odot$ esse aequale ipsi ☽ et contra. Aequalia autem intelligimus quae eandem habent quantitatem; seu sibi substitui possunt salva quantitate; ut similia quae eandem habent formam sive qualitatem. Nimirum id discrimen quod in duobus similibus (seu sigillatim indiscernibilibus) spectari potest, etiamsi nihil extra ipsa assumeretur, est discrimen quantitatis.

∞ significat c o n g r u i t a t e m et $\odot \infty$ ☽ significat $\odot$ et ☽ congrua esse, seu salvis omnibus ad positionem in ipsis pertinentibus. Itaque non per se sed solo respectu externorum discernuntur. Ut duo circuli quorum radii sunt aequales (a quorum materia abstrahitur, quoniam ea ad positionem non pertinet), erunt congrui, seu sibi possent substitui et nunc neque sigillatim spectando discernuntur, cum sint similes, neque etiam comparando sed sola diversa ad extrema positione, quibus cognoscitur quod non coincidant.

Hinc axiomata:

Quae congrua sunt similia sunt, seu si sit ⊙ ∞ ☽ erit ⊙ ∼ ☽.

Quae congrua sunt aequalia sunt seu si sit ⊙ ∞ ☽ erit ⊙ = ☽.

Quae aequalia et similia sunt congrua sunt, seu si ⊙ ∼ ☽ et ⊙ ∞ ☽ erit ⊙ ∞ ☽.

⧞ significat c o i n c i d e n t i a m , sive omnimodam positionis respectu, identitatem. Seu ⊙ ⧞ ☽ significat ⊙ et ☽ coincidere, et proinde quoad positionem ⊙ esse ☽ et ☽ esse ⊙. Et ita coincidere intelligo extrema duorum se tangentium quatenus se tangunt, considerando scilicet positionem in aliquo instanti. Nam aliud est si ea in motu spectemus, cum ubi unum punctum ab alio sibi coincidente alterius discedere intelligitur. Sumatur semota igitur hac consideratione: Si ⊙ ⧞ ☽ tunc ⊙ est ☽ et ☽ est ⊙. Si ⊙ est ☽ et ☽ est ⊙ tunc ⊙ ⧞ ☽. Coincidentia sunt congrua, itaque si ⊙ ⧞ ☽ erit ⊙ ∞ ☽.

Si detur quaedam relatio ipsius ⊙ et eadem relatio ad eadem ipsius ☽, et hinc sequatur ⊙ ⧞ ☽, relationem voco d e t e r m i n a t i o n e m , et ea ad quae datur relatio voco d e t e r m i n a n t i a , ipsum ⊙ vel ☽ voco d e t e r m i n a t u m . Verbi gratia sit relatio ♀.♂.⊙ et ♀.♂. ☽ et ideo sit ⊙ ⧞ ☽. tunc relatio ♀.♂.⊙ vocatur determinatio.

Si relatio aliqua sit determinatio unumquodque inter ea omnia quorum est relatio potest assumi pro determinato, reliqua omnia pro determinantibus, verbi gratia si relatio ♀.♂.⊙ sit determinatio, (ita ut posito eandem esse relationem ♀.♂. ☽ sequatur ⊙ ⧞ ☽) tunc etiam posito eandem esse relationem ♀.♄.⊙ sequetur ♂ et ♄ coincidere.

Si duae determinationes sint similes et unus ex terminis unius relationis sit termino respondenti alterius relationis similis, aequalis, congruus, coincidens, etiam omnes termini inter se respondentes tales erunt, verbi gratia sit ⊙.♄.♂ ∼ ☽.♃.♀ et sit ⊙ ∼ ☽ vel ⊙ = ☽ vel ⊙ ∞ ☽ vel ⊙ ⧞ ☽ erit et ♄ ∼ ♃ vel ♄ = ♃ vel ♄ ∞ ♃ vel ♄ ⧞ ♃.

Similia sibi substitui possunt salva similitudine, modo respondenter substituantur.

Aequalia sibi substitui possunt salva magnitudine.

Determinantia omnia simul, substitui possunt pro determinato in alia determinatione.

Locum omnium puncorum Y voco $\overline{Y}$. et adeo dico esse Y in $\overline{Y}$.

Si omne Z sit Y dico esse $\overline{Z}$ in $\overline{Y}$. Ac proinde si $\overline{Z}$ sit in $\overline{Y}$ etiam omne Z erit Y.

Si omne Z sit Y et omne Y sit Z eodem scilicet tempore tunc erit $\overline{Z}$ ⧞ $\overline{Y}$ vel si $\overline{Z}$ sit in $\overline{Y}$ et $\overline{Y}$ in $\overline{Z}$ coincident $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$.

Si omne Z sit Y et omne Y sit Z nec tamen Z ∞ Y, (adeoque diversum sit tempus) tunc $\overline{Z}$ et $\overline{Y}$ erunt u n u m e x a l i o t r a n s f o r m a t i o n e f a c t u m .

H o m o g e n e a sunt quae transformatione fieri possunt similia.

A e q u a l i a transformatione fieri possunt congrua.

Si quid continue mutetur uniformiter transit per omnes gradus quantitatis seu si sit $\overline{(\odot)}$ indefinitum comprehendens continue successive omnia $\odot$, erit aliq. $\odot =$ ☽ si $\odot$ et ☽ homog.

$\odot$ mihi significat quodlibet $\odot$ et $\overline{\odot}$ omnia $\odot$ continue et $(\odot)$ quodlibet $\odot$ successive et $((\odot)$ primum, et $(\odot))$ ultimum et $\overline{(\odot)}$ omnia $(\odot)$ continue successive.

Si $\overline{Z}$ sit ∞ $\overline{V} + \overline{X}$. tunc Z erit vel V vel X.

57 (39942). NOTIONES IN GEOMETRIA EXPLICANDA
[Erste Hälfte 1687 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 49. 1 Bl. 2°. $\frac{1}{2}$ S. auf der oberen Hälfte von Bl. 49 r°. Obere Hälfte von Bl. 49 v° leer. Auf der unteren Hälfte des Blattes N. 58 (39943).

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Anfang April 1687 belegt.

S i m i l i a sunt quae singulatim discerni non possunt. C o n g r u a sunt quae non nisi tertio assumto discerni possunt. C o n g e n i a sunt inter se quae una continua operatione producuntur, aut his similia sunt, ut punctum et linea. Et quidem priora dicere possis congenia intrinseca, vel etiam congenia simpliciter, et in Geometria sunt ea quae dicuntur i n e s s e.

Unum ex alio fieri dicitur seu t r a n s f o r m a r i , cum nihil in uno capi potest, cui non sit aliquid, quod etiam alteri inest. Ita si ex quadrato fiat triangulum aequilaterum, nulla potest assumi pars in quadrato, in qua non pars aliqua reperiatur quae sit etiam in triangulo. Si vero mutetur linea recta in curvam, licet nulla utriusque pars communis, tamen puncta utrobique mansere, et proinde nullus sumi potest arcus, cui non insit aliquod punctum, quod rectae inest, quae ex arcu facta est.

In Geometria explicanda assumamus has notiones: Simile, congruum, inesse (scilicet tanquam in loco). Determinatum. Quae congrua sunt ea similia sunt. Hinc nascitur T r a n s f o r m a t i o , Unum scilicet ex alio per transformationem factum dicitur, cum nihil sumi potest in uno, cui non insit aliquid, quod etiam alteri inest.

H o m o g e n e a sunt quae similia sunt vel transformatione reddi possunt.

A e q u a l i a sunt quae congrua sunt, vel transformatione reddi possunt.

Si quid alteri homogeneo insit, tunc id quod inest dicitur p a r s ; cui inest, t o t u m.

P u n c t u m est quod alteri inesse potest, ipsi autem nihil potest inesse. Hinc puncta omnia (quoad loci considerationem, seu ipsum inesse) sunt similia et congrua.

S i t u m i n t e r s e habere dicuntur, quae eidem insunt, isque determinatus habetur, ex dato eo cui insunt, nec immutato.

58 (39943). DE SPATIO ET PUNCTO
[Erste Hälfte 1687 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 49. 1 Bl. 2°. Ca $\frac{3}{4}$ S. auf der unteren Hälfte von Bl. 49 r°/v°. Obere Hälfte von Bl. 49 v° leer. Auf der oberen Hälfte von Bl. 49 r° N. 58 (39943). — Gedr. (tlw. = Z. 7–15): De Risi, *Geometry and Monadology*, 2007, S. 624.

Datierungsgründe: Vgl. N. 57 (39942).

Ordine meditanti de rebus Geometricis ante omnia occurrent duo, S p a t i u m scilicet ipsum absolutum, in quo per se nihil aliud considerari potest quam extensio; et p u n c t u m in quo nihil aliud considerari potest, quam situs. Spatium non habet situm, et punctum non habet extensionem. Spatium est infinitum, et punctum est indivisibile. Spatium est locus omnium punctorum.

Medium inter punctum et spatium infinitum est extensum finitum. Id extensionem habet et situm. Assignari potest aliquod punctum extra ipsum. Ipsum inest spatio infinito, ad aliud quodlibet habet situm. Puncta quotcunque numero finita intelligi possunt esse in uno spatio finito.

Omne continuum extra quod aliquid assumi potest, habet terminum, seu aliquid quod tam ipsi quam alteri inest.

Intus similia sunt, in quibus nullum discrimen deprehenditur, nisi ad ejus terminos perveniatur, et talia sunt corpora seu spatia quaecunque quippe in quibus aliquid poni potest, ita ut terminum ejus non attingat, neque enim inter res homogeneas dissimilitudo observari potest, nisi ex terminis. Et si quid moveatur in talibus rebus, antequam terminum earum attingat discerni non poterit, in quonam sit motum.

Si duo puncta considerentur primum conferri possunt, deinde conjungi. Si conferantur, apparet ea esse similia, et congrua. Si conjungantur spectari potest eorum situs inter se; et quidem si sit punctum A, et aliud punctum sumatur ut B semper poterit sumi aliud punctum ut Y, quod eundem situm obtineat ad punctum A, quem punctum B. Itaque nullum poterit reperiri punctum B quod ex dato suo ad punctum A situ determinetur, seu quod sui situs sit monadicum, nisi id quod cum ipso A coincidit. Locus autem omnium punctorum quae eandem habent situm ad punctum A. dicatur Ambitus, est autem revera superficies sphaerae.

Datis duobus punctis tanquam fixis, A et B, et tertio assumto, cujus situs ad ipsa A

et B sit datus, rursus quaeri potest utrum punctum illud assumtitium sit sui situs unicum seu ex dato suo situ determinatum, an vero situm illum cum aliis habeat communem, et quidem si sui ad data puncta A, B situs unicum est cadet in rectam; (et in hanc rectam etiam cadet tam A quam B, nam utraumque sui ad A, B situs unicum est) quae est locus omnium punctorum quae sui ad data puncta situs unica sunt. Sin plura eundem habeant situm ad puncta data A et B, omnia quae eundem habent situm ad duo data puncta cadent in circulum. Et omnium talium circulorum axis erit recta illa ex datis illis duobus punctis determinata; nam ad quaevis axis illius puncta quodlibet alicujus talis circuli punctum eandem situm habet.

Recta est determinata resultatio duorum punctorum. Sphaerica superficies est determinata resultatio unius puncti et dati ad id situs.

Si tria assumantur puncta rursus quartum ad ipsa referri poterit et quidem locus omnium punctorum quae situs sui ad data tria puncta (in unam rectam non cadentia) sunt unica, seu quae ex situ suo determinantur est planum. Seu planum est determinata resultatio trium punctorum. Caeterum duo tantum dari possunt puncta quae eundem situm habent ad tria puncta data. Quod quidem demonstrari debet.

Denique si sumantur quatuor puncta, quae non in unum circulum cadant, non nisi unicum dari poterit punctum quod ad ea situm datum habet. Hoc etiam demonstrandum est.

Locus cujus quodlibet punctum ad tria puncta data eodem modo se habet est recta. Locus cujus quodlibet punctum ad duo puncta data eodem modo se habet est planum. Demonstrandum est duas diversas rectae, item plani definitiones coincidere. Forte id fieri poterit ope circuli intervenientis, cujus non nisi unica hactenus (nullum planum praesupponentibus) definitio.

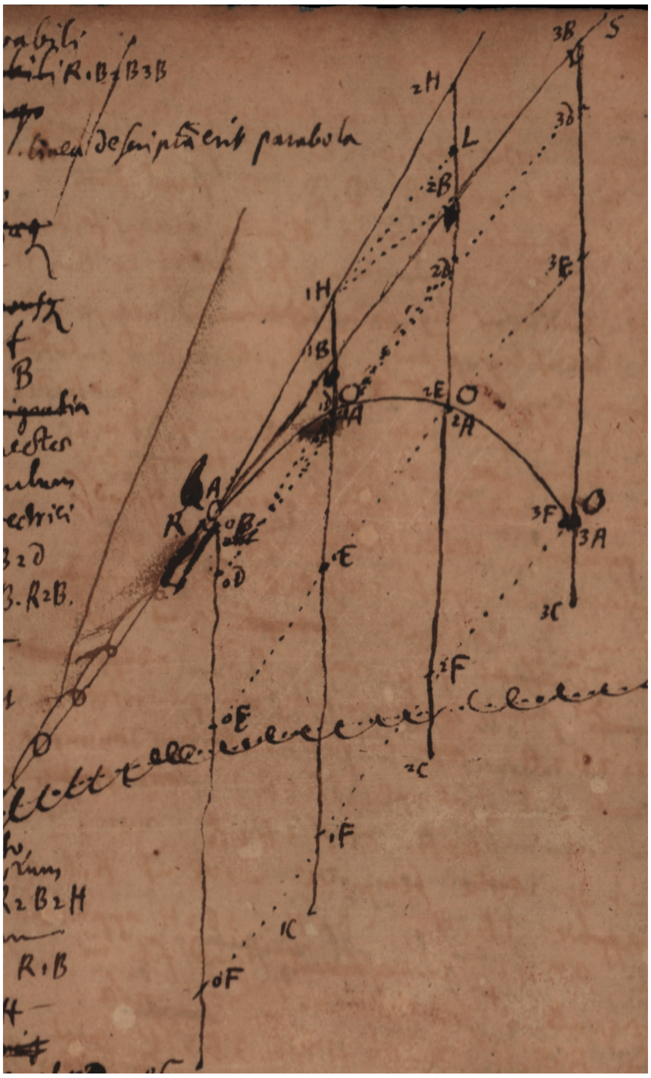
59 (39950). DETERMINATIO PER NUMEROS [1679 – 1680 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 6 Bl. 1–4. 2 Bog. 2°. 5 S. Bl. 3 v° u. Bl. 4 leer. Geringer Textverlust durch Papierabbruch am unteren Rand von Bl. 2 v°. — Gedr. (tlw.): De Risi, *Geometry and Monadology*, 2007, S. 622 (= Z. 7–27 unseres Textes).

Datierungsgründe: Die Wasserzeichen der Papiere sind für 1679 und für 1678–1684 belegt.

Quoniam jam constat non nisi magnitudinem situmque et ordinem in mathematicis quaeri, et quidem quoad licet certum minimeque vagum ac generalem: Ostendendum nunc est haec omnia determinari per solam magnitudinem et magnitudinem denique per numeros aestimari posse. Unde sequitur ad omnia problemata solvenda non nisi numerorum quorundam investigatione opus esse. Ac primum o r d o sive prius sive posterius non nisi ratione mutationum quae in rebus contingunt, considerari potest. M u t a t i o n e s autem omnes mutationem loci habent adjunctam per quam cognosci et aestimari possunt. Exempli gratia motus localis liquoris in thermometro indicat mutari gradum caloris aut frigoris. Motus autem localis, sive loci mutatio simul et locum involvit et mutationem sive tempus; t e m p u s enim non nisi per multitudinem mutationum cognoscimus, inprimis si eae mutationes sint aequales; tunc enim magnitudo temporis exacte determinatur per numerum mutationum, exempli gratia per numerum vibrationum funependuli, vel per numerum dierum naturalium ab uno meridie ad alterum vel reditum stellae fixae ad priorem locum. Cognoscitur autem haec aequabilitas mutationum, tum a priori ex causa, ita isochronismus pendulorum demonstrari potest[,] tum a posteriori ex effectu comparando diversi generis mutationes inter se, exempli gratia dierum aequalitas per horologium funependulo animatum aestimatur.

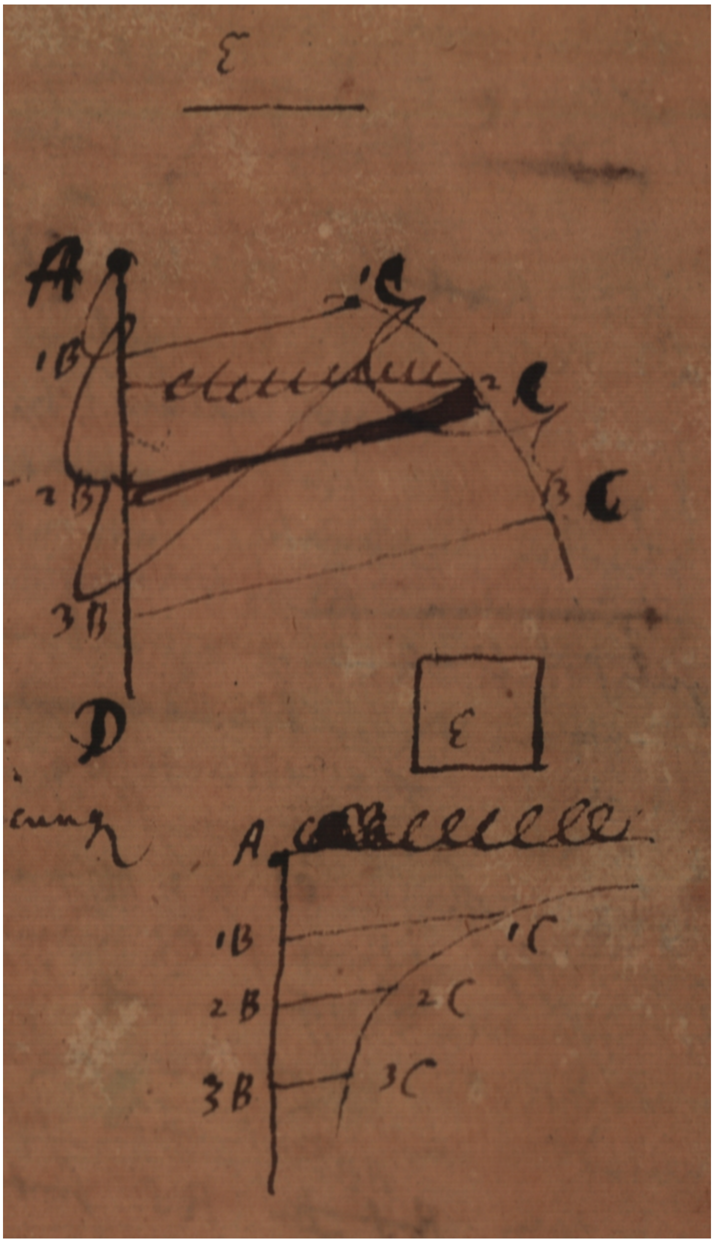
Si jam aliquod Mobile intelligamus ferri, et in eo punctum quoddam assignemus[,] ejus puncti locus successivus seu v e s t i g i u m erit linea quaedam, et quidem alia atque alia prout puncti motus componitur ex diversis motibus celeritate ac directione variantibus.



[*Fig. 1*]

Sit enim linea quaecunque $0A1A2A3A$ exhibens loca successiva seu vestigia mobilis A. Hujus lineae naturam poterimus intelligere, dum puncti mobilis A motum aliquo modo compositum concipimus ex aliis motibus uno aequabili, altero certa quadam ratione crescente, Exempli causa sit recta immobilis directrix RS. secundum quam incedat regula mobilis BC transiens ex loco $1B1C$ in $2B2C$ et $3B3C$ etc. servato semper parallelismo locorum successivorum sive vestigiorum ipsius BC. scilicet $1B1C$. $2B2C$ etc. seu servatoeodem angulo eademve inclinatione ipsius BC ad ipsam RS. ponatur hujus regulae BC motus esse aequabilis, ita, ut si uno minuto horario absolvat portionem directricis $R1B$ duobus absolverit portionem directricis $R2B$ duplam, et ita porro quaecunque portio directricis aut temporis assumatur, ac proinde portiones directricis repraesentabunt tempora insumta. Interea vero dum regula BC movetur in directrice, punctum mobile A in ipsa regula movebitur et dum regula BC incedit per $1B.2B.3B$. punctum A incedet per $B.D.E$. et dum punctum D in regula cum ipsa regula transfertur ex $1D$ in $2D$. interea punctum A ex B in D ac proinde cum locus ejus secundus $2A$ erit $2D$. eodemque modo dum regula $BDEC$ transit ex $2B2D2E2C$ in $3B3D3E3C$ punctum A transibit ex D in E, et perveniet cum E in $3E$ adeoque tertius ejus locus $3A$ erit $3E$. et ita porro. Quodsi jam ponamus celeritatem ipsius A qua regulam percurrit crescere certa quadam ratione, ut si primo minuto percurrat BD, (nempe $1B1A$) aut primis duobus minutis percurrat BE (nempe $2B2A$), et primis tribus minutis percurrat BF (nempe $3B3A$) et spatia percursa a mobili A in regula BC seu ipsae $1B1A$. $2B2A$. $3B3A$ non crescant ut tempora, sive ut $R1B$. $R2B$. $R3B$. vel ut $1B1H$. $2B2H$. $3B3H$ applicatae trianguli ABH. Quod fit in motu aequabili (si punctum mobile esset H rectamque describeret). Sed crescant ut ipsa triangula $R1B1H$. $R2B2H$. $R3B3H$ quod fit in motu uniformiter accelerato; tunc BA ordinatim applicatae seu spatia percursa a mobili A in regula BC crescent ut quadrata ipsarum RB. abscissarum seu altitudinum seu ut quadrata temporum. Triangula enim RBH sunt inter se ut ipsarum RB quadrata, nam si recta $R2B$. ($R3B$) sit dupla (tripla) rectae $R1B$. triangulum $R2B2H$. ($R3B3H$) erit quadruplum (noncuplum) trianguli $R1B1H$ ut figuram et lineas in ea punctis designatas intuenti patet, et satis alias notum est suoque loco intelligetur magis. Ac proinde cum o r d i n a t i m a p p l i c a t a e AB a curva ad directricem RS. sint inter se ut quadrata altitudinum sive abscissarum portionum directricis, linea $1A2A3A$ erit parabola ex ejus definitione vel primaria proprietate alias nota quam suo loco satis explicabimus. Utilis autem est haec linea in re militari, nam ponatur globus A tormento erecto excussus sursumque tendens secundum RS, et ei parallelas BBB. DDD. EEE. FFF motu aequabili, vis impressa nondum notabiliter labascit dum globus interea ob gravitatem suam motu naturali continue accelerato descendit in BC, id est per parallelas $1B1C$, $2B2C$, $3B3C$. Manifestum est lineam in aere describi a globo eam ipsam quam tractavimus. Dum enim primo minutulo temporis impetu tormenti transfertur ex R in $1B$ interea propria gravitate descendit per BD, et ita cum D pervenit ex $0D$ in $1D$, ipse ex B pervenit in D seu in $1D$. Ergo primus locus $1A$ coincidit cum $1D$. Rursus tum vi tormenti adhuc aequali nisu continuato transfertur secundo minutulo ex in $1D$ versus in $2D$ interea celeriore quam antea motu descendit ex D in E, et ita $2A$ incidit in $2E$. Celeritas autem gravium descendentium aequabiliter crescit, id est ut temporum quadrata, quemadmodum a Galilaeo explicatum est. Quaecunque jam sit linea curva ea similiter intelligi potest describi motu aequabili regulae BC et motu utcunque accelerato vel decrescente vel partim accelerato partim decrescente puncti mobilis A in regula BC. et vicissim quaecunque lex motus vel quodcunque celeritatis incrementum proponatur semper poterit intelligi punctum aliquod A moveri motu composito ex m o t u p r o p o s i t o in regula BC, et m o t u a e q u a b i l i ipsius regulae, unde orietur linea $1A2A3A$ cujus ordinatim applicatae BA eandem servabunt proportionem quam motus propositus, id est repraesentabunt spatia eo percursa, dum abscissae RB repraesentant tempora. Ergo intelligimus quomodo Motus semper per situm sive per lineam quandam explicari queat.

Explicandum nunc restat quomodo omnis situs per Magnitudinem et numeros explicari queat. Sit linea superficies vel corpus quodcunque. Ostendemus ipsius naturam explicari posse per magnitudines quarundam rectarum linearum.

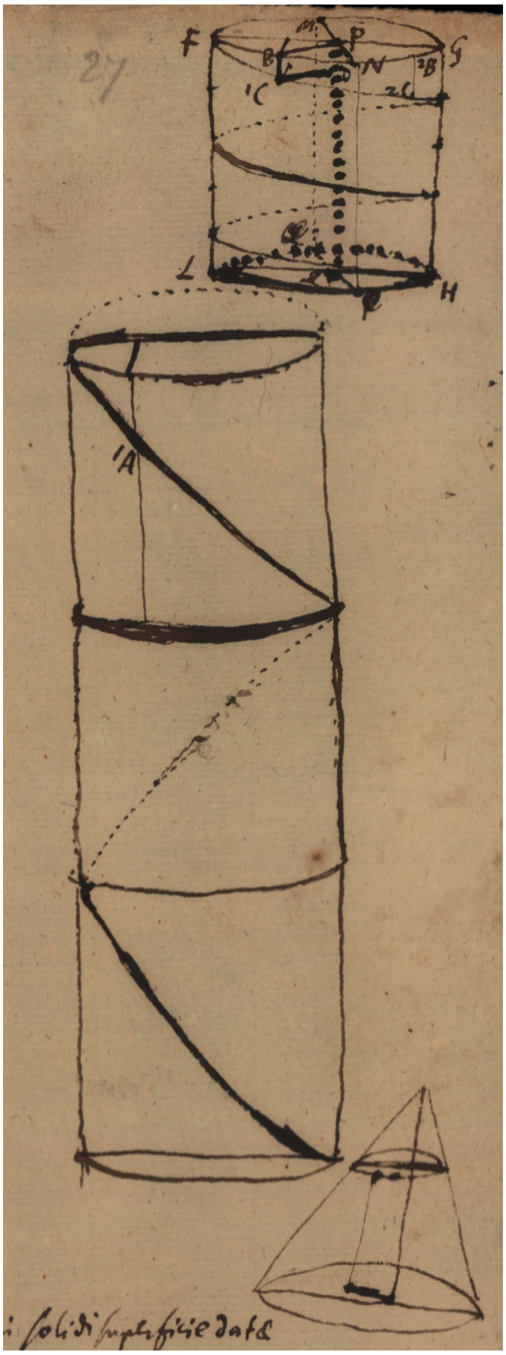


[*Fig. 2*]

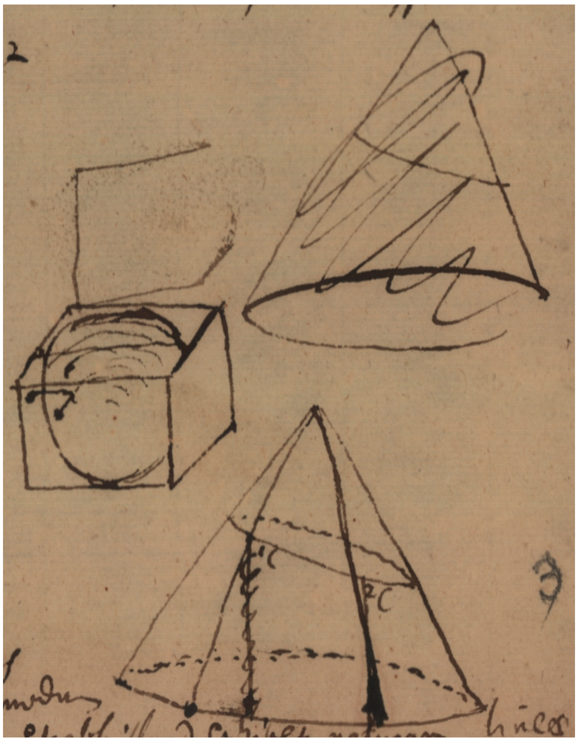
Sit primum linea quaecunque in plano aliquo descripta $1C2C3C$. Ducatur in eodem plano recta indefinita quaecunque AD. quam appello directricem, et designetur in ea punctum quoddam certum A. Jam ex quolibet puncto curvae C, applicatae BC. omnes inter se parallelae angulo quocunque. Necesse est, quoniam curva secundum certam quandam legem descripta est, constare vel inveniri posse quaenam sit relatio constans inter AB abscissam portionem directricis, et BC ordinatam applicatam ei respondentem, nimirum eadem erit relatio inter $A1B$ et $1B1C$ quae inter $A2B$ et $2B2C$. id est eodem modo quo invenitur $1B1C$ ex data $A1B$ etiam invenitur $2B2C$ ex data $A2B$. Exempli causa sit praetera data recta constans E (quam parametrum vocare solent;) et sit natura curvae CCC talis ut rectangulum sub AB et BC, seu sub $A1B$ et $1B1C$ sit aequale quadrato ipsius E, vel quod idem est ut quadrato ipsius E in numeris exhibito, ac diviso per longitudinem ipsius $A1B$ etiam in numeris datam, prodeat longitudo ipsius $1B1C$ eodemque modo si quadratum ab E dividatur per $A2B$ prodibit $2B2C$. Ideo patet ad lineae hujus (quae H y p e r b o l a dicitur) naturam cognoscendam sola magnitudine rectarum quarundam cognita esse opus. Idemque in aliis lineis omnibus propositis inveniri potest, etsi nonnunquam artificio opus sit ad relationem inter ordinatas et abscissas inveniendam; et ⟨ad⟩ ⟨s⟩im⟨p⟩licitatem multum intersit quaenam directrix. Et quis ad eam ordinatarum ⟨— — assuma⟩tur. Imo interdum utilis est directricem vel ordinatas non esse lineas rectas, sed curvas, aut ordinatas non esse inter se parallelas sed ad idem punctum tendentes, vel aliam inclinationis regulam servantes. Verum hoc loco sufficit modum explicare generalem, etsi non semper commodissimum.

Si linea aliqua in superficie solidi sit descripta, exempli gratia in superficie sphaerica vel cylindrica vel conica, tunc eodem modo explicari potest. Si modo planum aliquid assumatur et in eo designentur puncta punctis lineae in solido ducta respondentia, quod fiet si verbi gratia ex quolibet lineae in solidi superficie datae puncto ducatur ordinata ad illud planum. Haec puncta cadent in lineam quandam in ipso plano descriptam, cujus natura si per praecedentem modum cognoscatur, et quaeratur, quamnam ordinatae a punctis lineae in superficie solidi datae ad planum ductae ad ordinatas vel abscissas curvae in plano respondentes relationem habeant tunc habebitur modus inveniendi quodlibet lineae hujus curvae in solidi superficie ductae punctum.

Eodem modo ipsius superficiei corporis solidi natura cognosci potest; si inde ducantur ordinatae ad duo plana diversa et ex punctis ubi ordinatae planis occurrunt ducantur ordinatae ad rectam planis communem, quae sumetur pro directrice, quod si cognoscatur quam portiones a directrice abscissae relationem habeant ad ordinatas ex punctis in utroque plano sumtis ad directricem ductas, habebitur relatio inter tres rectas variantes[,] abscissam et duas ex singulis planis ordinatas[,] exhibens naturam superficiei, quemadmodum relatio inter duas variantes (ordinatam et abscissam) exhibet naturam lineae.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

60 (39951). DE ARTE IN MATHEMATICIS [1679 – 1681]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 6 Bl. 5–6. 1 Bog. 2°. 4 S. halbbrüchig beschrieben mit zahlreichen Änderungen und Ergänzungen. Teil 1 auf Bl. 6, Teil 2 auf Bl. 5.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1679–1681 belegt.

[*Teil 1*]

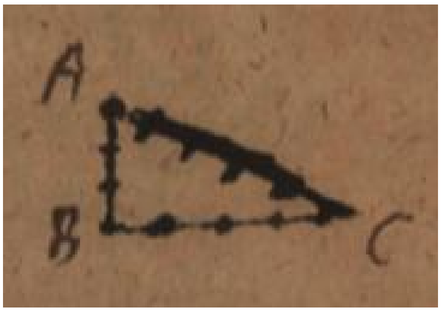
Promisi artem docere in Mathematicis tum quae ab aliis tradita sunt facile intelligendi tum si nemo quae desideramus tradiderit, et quae passim inter arcana aut etiam insuperabilia habentur ea per nosmet ipsos inveniendi. Ut imposterum necesse non sit onerari memoriam praeceptis (quanquam elegantia theoremata atque compendia utilia retineri subinde consultum est) neque opus sit, varia tentamenta anxie quaeri; possumus enim semper ad propositum pervenire insistendo viae cuidam certae atque determinatae, quam vocant Analysin licet fatear eam non semper esse brevissimam. Optimas enim vias invenire hactenus in potestate non est: Contenti interea simus nos semper habere methodum aliquam certam quam sequi tutius et plerumque etiam brevis est, quam vias compendiosas quaerendo temere et moleste vagari. Sed haec Analysis quemadmodum a me concipitur fortasse nondum publice nota est. Certe res est longe diversa ab Algebra, et regulae ipsius Algebrae per analysin quandam superiorem sunt inventae. Imo major pars problematum Mathematicorum potissimorum non pendet ab Algebra neque dici potest an ad aequationes primi secundi tertii aut alterius gradus revocari queant; sunt enim saepe gradus nullius aut omnium, vel etiam gradus incerti vel infiniti, unde a me vocantur T r a n s c e n d e n t i a , qualia sunt problemata pleraque ejus Geometriae quam excoluit Archimedes, exempli causa inventio lineae ex data tangentium proprietate[,] quadratura Circuli et Hyperbolae[,] sectio anguli in data ratione, inventio logarithmi, solutio problematum trigonometricorum sine tabulis; numeraque alia quae passim in applicatione Geometriae ad Mechanicen aliasque artes occurrunt. Quare quicunque Algebram quidvis praestare posse putant, vel inconsiderate loquuntur, vel problemata majoris momenti tractare non sunt experti. Qui vero de ea re dubitant convincentur fortasse, ubi exempla in hoc libello allata attentabunt.

Ausim enim dicere, artibus hic traditis scientias mathematicas in immensum provehi et longe majus discrimen esse inter Analysin nostram et Algebram hodie publice notam, quam inter Algebram veterum et speciosam quam vocant recentiorum. Imo ajo nunc tandem praestari posse illud problema generale diu jactatum: Nullum non problema solvere: Habeo enim certam methodum qua cognosci potest utrum et quo sensu quadratura circuli sit possibilis vel non, aliaque id genus ad quae nulla hactenus analysis pervenit.

Aditum autem ad haec aperio boni publici amore, nam gloriae fortasse magis velificarer si specimina darem methodo suppressa: Ita enim nonnullis qui sese haec dudum potuisse fingent jactandi materiam eriperem; sed illi fortasse alicubi adhuc haerebunt; ego vero non illos moror sed utilitatem generis humani cogito, spero enim tempus venturum imo non longe abesse et forte per hunc libellum accelerari ejus adventum posse, quo Analysis mathematica tam erit vulgata inter eruditos, quam arithmetica communis inter plebejos: Tunc homines non amplius his studiis incumbent, nisi exercendi tironum ingenii causa; habebunt enim omnia in potestate: Et jam Geometria ad detegenda naturae arcana utentur. Neque enim dubito quin multa jam inveniri possent circa interiora corporum, si ex datis experimentis severe satis et mathematice ratiocinaremur; uteremurque apparatu quem habemus; nunc avaris similes sumus qui semper congerunt nunquam fruuntur, aut malis administratoribus, qui ingentem rerum farraginem habent, inventarium nullum. Si sic pergimus posteritati laborabimus, ipsi laborum nostrorum fructum non percipiemus; neque maximis sumtis studiis magnopere proficiemus. Sed ad inventionem Mathematicam redeo, ubi fateor profecisse me ex scriptis inprimis Archimedis[,] Vietae et Cartesii et inventis praestantissimorum Geometrarum, Gregorii utriusque, Hugenii et Huddenii, Mercatoris, Neutoni, Pascalii[,] Riccii[,] Slusii[,] Wallisii, Wrenni. His viris tribuo, ut putem ipsos per se potuisse etiam ad haec eniti quae a me exhibentur, si animum applicuissent. Itaque non cum his aut cum horum similibus sed cum jactatoribus quibusdam mihi sermo fuit qui Algebra [*bricht ab*]

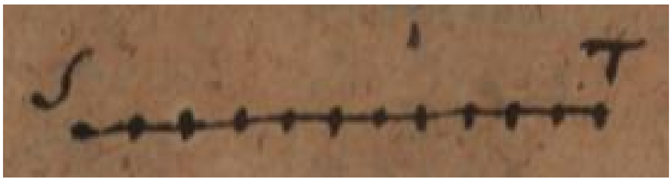
[*Teil 2*]

Quoniam jam constat omnem doctrinam mathematicam consistere in cognitione magnitudinis situs et motus localis[;] M o t u s autem localis nihil aliud est quam situs mutatio; et situs ipse sive f i g u r a (quae nihil aliud est quam situs partium rei) cognoscitur cognitis punctorum extremorum distantiis a datis quibusdam punctis vel lineis rectis vel superficiebus planis, d i s t a n t i a autem puncti ab alio puncto vel recta vel plano est lineae rectae minimae interceptae longitudo, consequens est id agi in Geometria et scientiis aliis mathematicis quae Geometria utuntur, ut rectarum quarundam magnitudo inveniatur. Ipsam autem magnitudinem sciendum est nihil aliud esse quam numerum partium.



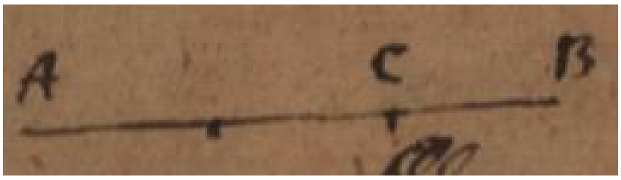
[*Fig. 1*]

Sint enim rectae quaecunque ut AB. BC ex quibus datis alia quaedam recta AC etiam determinatur, sciri semper potest quis sit hujus valor modo priorum valorum cognoscatur.



[*Fig. 2*]

Sit enim scala quaedam accuratissime divisa in partes aequales quoad licet parvas exempli gratia in millenas finganturque rectae omnes jam haberi in charta designatae, utique poterit uniuscujusque magnitudo in scala sumi circino, ponatur AB esse 3. et BC 4. et AC 5. posito angulo B recto et ita valor ejus in numeris poterit cognosci: tanto tamen exactus quanto scala in minores partes subdivisa est. Error enim contingit cum pes circini non in ipsa puncta divisionis, sed inter ea cadit, sed eo minor est quo minus distant puncta divisionis proxima.



[*Fig. 3*]

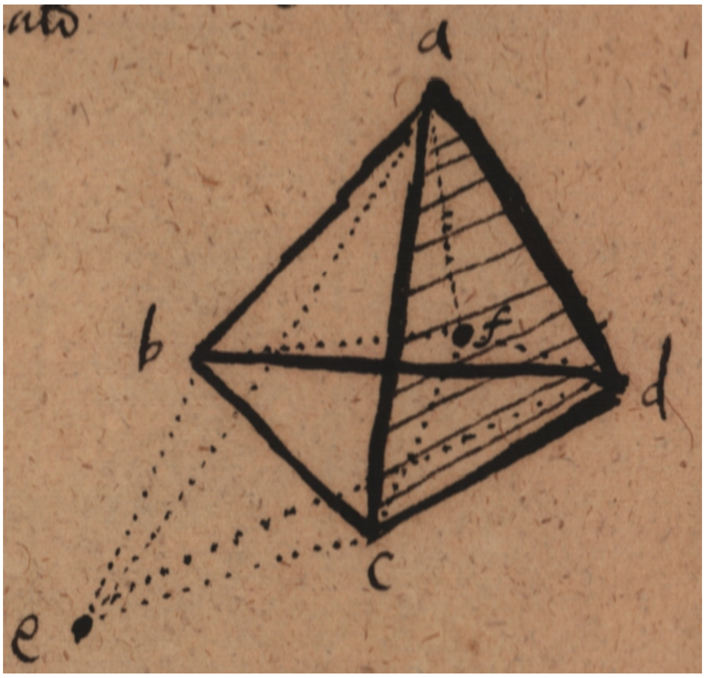
Hac tamen methodo nunquam certi sumus veros valores a nobis esse repertos, exempli causa sit in 1000 partes divisa, et linea AB horum partium contineat 100, linea autem BC sit fortasse tertia pars lineae AB quod tamen ad huc ignoramus nunquam exacte poterit valor ipsius BC. in hac scala inveniri, tametsi tam prope accedatur ut error non sit una millesima pars scalae. Itaque non a posteriori per experimenta quaerendae sunt linearum magnitudines (praesertim cum id ne fieri quidem possit, quando nondum descriptae habentur), sed a priori per modum quo una linea ex aliis datis determinatur, inde enim r e l a t i o n e s oriri necesse est quasdam, id est modos calculo inveniendi quaesitam ex caeteris datis nullis licet instrumentis atque experimentis adhibitis. Omnis ergo tractatio Geometrica eo redit, tum ut inveniamus puncta quaesita per motum atque instrumenta, tum ut inveniamus rectarum quaesitarum valores; et quidem si semper valores inveniamus in numeris nullo alio opus habebimus instrumento, quam scala accurate divisa; quia tamen saepe magni laboris est omnia revocare ad numeros; hinc utiliter excogitantur instrumenta quorum motu puncta quaedam aut lineae aliaeve figurae designantur. Praeterea per motum figurae quaesitae uno tractu continuo describi possunt; cum numeris ex scala adhibitis puncta tantum subsultim inveniantur. Habet praeterea consideratio Constructionum hujusmodi per motum elegantes saepe atque utiles contemplationes. Quare primum numeros et calculum trademus, deinde figuras et motus quibus describuntur, denique modum et figuas revocandi ad Calculum, et contra calculum construendi per figuras. Cumque in his omnis Scientia Mathematica consistat, supererit tantum, ut postea usum inventorum in Scientiis Arithmeticae ac Geometriae subordinatis explicemus; modumque tractamus, quomodo quaestiones mechanicae et similes cum materia concreta, inde abstrahi, et ad problemata purae Geometriae revocari possint.

61 (39955). SITUS PUNCTI (II)
[1679 – 1681]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 8 Bl. 3. 1 Bl. 2°. 1 S. halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: 1. (tlw.) Couturat, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 543 (= Z. 7 f. u. Z. 13 f. unseres Textes); 2. Echeverría, *La Caracteristique*, Teil 2, Paris 1979, S. 337–339.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1679-1681 belegt.

S i t u s p u n c t i est modus determinandi distantiam ejus ab aliis quibuslibet, quorum distantia inter se determinata est.



[*Fig. 1*]

Exempli gratia sit pyramis *abcd*, et punctum *e*. Utique situs hujus puncti (respectu corporis *abcd*[)] habebitur, si modus habeatur inveniendi distantiam ejus a quolibet determinato corporis *abcd* puncto, ut *f*.

Unicum tantum punctum est, quod datas distantias a quatuor datis punctis solidum comprehendentibus habere possit.

Sint data quatuor puncta *a.b.c.d.* solidum comprehendentia nempe pyramidem *abcd*, sitque aliud punctum *e*, et constet quot pedibus ipsum *e* absit ab *a*, quot item pedibus a quolibet reliquorum *b.c.d.* ajo punctum aliud quod eodem modo ab ipsis absit non posse reperiri, quod constat ex Geometria. Ubi notandum tamen est, si dentur distantiae puncti *e* a tribus, ut *a.b.c.* non posse eam quae a quarto sit, pro arbitrio assumi, sed esse duarum determinatarum alterutram.

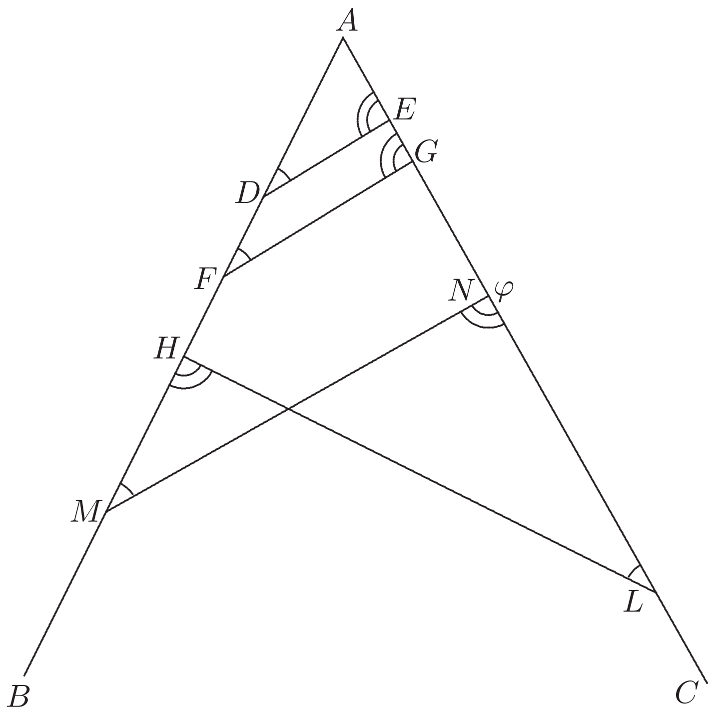
Hinc etiam cum puncti *f* distantia determinata sit a punctis *a.b.c.d.* itemque puncti *e*, erit etiam distantia ipsorum *e* et *f* determinata inter se.

62 (39974). ANTIPARALLELAE
[nach 1683]

Überlieferung: *L* Notizen: LH 35 I 9 Bl. 27–28. [noch]

Datierungsgründe: [noch]

Noueaux Elements de Geometrie ed. 2.



[*Fig. 1*]

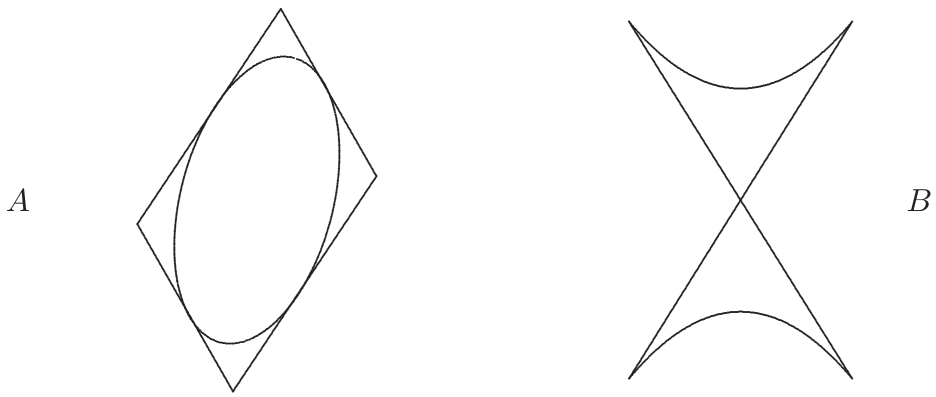
Si angulo ABC. subtendantur duae bases, ad idem latus facientes angulos aequales, (ut DE., FG. ubi anguli D. et F., item E. et G. aequales) dicuntur p a r a l l e l a e .

---

5 ed. 2.: Vgl. A. Arnauld, P. Nicole, *Nouveaux Elemens de Geometrie*, 1683, S. 258–260 bzw. den Nachdruck von 1690, S. 308–310.

Sin ad diversa latera faciant angulos aequales (ut $HL.$, $MN.$, ubi angulus ad $H.$ aequalis angulo ad $N.$, adeoque angulus ad $M.$ angulo ad $L.$) dicentur antiparallelae.

Parallelogramma circumscripta ellipsi in omnia aequalia[,] an et Antiparallelogramma circumscripta hyperbolae?



[*Fig. 2*]

Videndum an ut omnia parallelogramma $A.$, ellipsi circumscripta sunt aequalia inter se, ita et antiparallelogramma $B.$, hyperbolae circumscripta.

63 (40799). LA LOGISTIQUE
[1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 10. 1 Bl. 2°. 1 S.

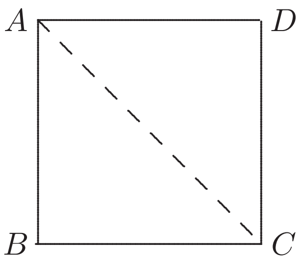
Datierungsgründe: [noch]

La Logistique, ou l'Algebre, est la doctrine de la grandeur en general.

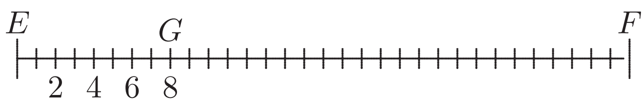
La Grandeur n'est autre chose que le nombre des parties d'une échelle ou mesure connue, par exemple sçachant qu'une toise est de six pieds, j'en sçay la grandeur; mais pour sçavoir ce que c'est que six pieds, il faut qu'on me donne reellement la mesure qui sert de fondement, c'est à dire un pied materiel, par la repetition ou nombre du quel, j'apprends la grandeur de la toise.

L'Algebre et l'Arithmetique different seulement, en ce que l'Arithmetique traite des nombres determinés, mais l'Algebre traite des nombres indeterminés, et des proprietés generales des grandeurs, qui auront lieu de quelque mesure ou nombre qu'on se veuille servir, pour les expliquer. Par exemple t signifiant une toise, pourra estre expliqué par 6 si l'unité ou mesure dont on se sert, est un pied; mais le même t (grandeur de la toise) pourra estre expliqué par 72 si l'unité est un pouce, car la toise en a 72. Mais quelque signification que cette grandeur t puisse avoir, il sera (par exemple) tousjours veritable, que le quarré de deux toises est quadruple du quarré d'une toise, out $4tt$ est le quarré de $2t$; car le quarré de deux fois six pieds est quadruple du quarré de six pieds, et le quarré de deux fois 72 pouces, est aussi quadruple du quarré de 72 pouces, et le meme se trouve veritable quelque nombre qu'on prenne pour t.

Il s'ensuit de là qu'on peut calculer en Geometrie comme en Arithmetique.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Par exemple j'ay un quarré regulier $ABCD$, dont je sçay un costé AB, et par consequent les autres aussi, car ils sont tous egaux. Mais je seray bien aise de sçavoir aussi la longueur de la diagonale AC qui traverse ce quarré de biais. Je me sers donc d'EF qui est une echelle de pouces ou autres petites parties; et sçachant que AB est egal à EG dans mon échelle, c'est à dire à 8 pouces, je prends AC avec mon compas, et le transfere sur la même echelle.

64 (40816). EVITARI POSSUNT SIGNA AMBIGUA
[September 1690 – April 1691]

Überlieferung: *L* Notizen: LH 35 I 9 Bl. 62. Papierstreifen, 7 cm × ca 1,5 cm. 2 S.
Cc 2, Nr. 863 L

Datierungsgründe: Beide Seiten des Papierstreifens enthalten Notizen, die sich inhaltlich wohl auf das Stück *Compendium quadraturae arithmeticae* (LH 35 II 1, Bl. 39–42; teilw. gedruckt in Gerhardt, *Math. Schr.* 5, 1858, S. 99–113) beziehen. Das *Compendium* ist auf einem Papierbogen niedergeschrieben, der ein für die Zeit von September 1690 bis April 1691 belegtes Wasserzeichen besitzt, und es liefert Vorarbeiten zu Leibniz' Aufsatz *Quadratura arithmetica communis* (veröffentlicht in den *Acta eruditorum*, April 1691, S. 178–182). Es ist also wahrscheinlich nicht vor September 1690 und sicher nicht nach April 1691 verfasst worden, was somit auch für unser Stück angenommen werden kann. Die in den Notizen verwendeten mathematischen Symbole wie die Doppelvorzeichen $\mp$ und $\pm$ (die Leibniz ab 1675 einsetzt) oder das moderne Gleichheitszeichen = (das er bis Mitte 1674 und dann erst wieder in der Hannoverschen Zeit benutzt — als Standardsymbol wohl ungefähr ab Mitte der 1680er Jahre) stehen dieser Datierung nicht entgegen.

[*Bl. 62 v°*]

Evitari possunt signa ambigua in communi calculo adhibendo literam ambiguae molis. Sed accedente calculo transcendente id non licet, quia per summas et differentias

---

17 signa ambigua: Zum Einsatz von Doppelvorzeichen vgl. die grundsätzlichen Überlegungen in der *Methode de l'universalité* I u. II (VII, 7 N. 10 u. 11) von Mitte 1674.

transitur ad potentias diversas, sic si $b \overline{+} n, : n$ sit numerus, sit $\frac{n}{1} \underline{+} \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2} \underline{+} \frac{n^4}{4b^3}$, etc Logarithmus: Nempe transit negatio a terminis imparibus ad pares.

[*Bl. 62 r°*]

Zona $1E\,1B\,2B\,2E\,1E =$ dupl. sect. $1C\,A\,2C\,1C$ posito CT tang. in C et $AT = BE$.

---

1 $b \overline{+} n, : n$: Mit der Reihenentwicklung des Logarithmus beschäftigt sich Leibniz bereits in seiner Zeit in Paris. In der Abhandlung *De quadratura arithmetica circuli ellipsos et hyperbolae* aus dem Sommer 1676 entwickelt er den Logarithmus von $(b+n) : b$ in die Reihe $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2b} + \frac{n^3}{3b^2} - \frac{n^4}{4b^3} \cdots$ (VII, 6 N. 51 S. 631). Diese Reihenentwicklung betrachtet im Anschluß an Ideen von Grégoire de Saint-Vincent den Logarithmus als Fläche unter einem Hyperbelstück (s. VII, 6 N. 34 S. 381 f.; vgl. die Ausarbeitung von Saint-Vincents Schüler A. A. de Sarasa, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*, 1649, S. 15–17). Die Reihe liefert konkret den Wert der Fläche zwischen der Hyperbel $y = \frac{b}{x}$ und der Abszisse in den Grenzen b und $b+n$. Für $b = 1$ ist dieser Wert zugleich der natürliche Logarithmus von $1+n$, im allgemeinen handelt es sich um den Logarithmus von $\frac{b+n}{b}$ zur Basis $\sqrt[b]{e}$ (wobei allerdings die Basis in Leibniz' Betrachtungen aus jener Zeit noch keine Rolle spielt). Jahre später greift Leibniz im *Compendium quadraturae arithmeticae* diese Reihenentwicklung wieder auf. Hier formuliert er in *prop. 44* (S. 110) dieselbe Reihe, gibt aber irrtümlich an, es handele sich um die Entwicklung des Logarithmus von $(b+n) : n$. In der vorliegenden Notiz geht er offensichtlich von *prop. 44* aus, er übernimmt nämlich diesen Fehler. Er ersetzt in der Reihe sodann nicht nur n durch $\overline{+}n$, sondern zudem auch die Vorzeichen $+$ bzw. $-$ vor den einzelnen Termen durch $\overline{+}$ bzw. $\underline{+}$ und gelangt so zur obigen Reihe. Damit ist ihm allerdings ein weiterer Fehler unterlaufen, denn diese Vorzeichen sind unabhängig von jenem der Größe n und müssen erhalten bleiben. Eine korrekte Reihenentwicklung des Logarithmus von $(b \overline{+} n) : b$ zeigt, dass die Ambiguität keineswegs von den Termen, in welchen n einen ungeraden Exponenten aufweist, zu jenen mit geradzahligen Exponenten übergeht. Sie löst sich also nicht von der Größe n ab, womit die Begründung, warum eine mit einem Doppelvorzeichen versehene Größe nicht generell durch einen einfachen Buchstaben ausgedrückt werden könne, nicht stichhaltig ist. 4 Zona: Auch in dieser Notiz knüpft Leibniz wohl an Überlegungen im *Compendium quadraturae arithmeticae* an; vgl. *prop. 12* (S. 102) oder *prop. 17* (S. 104). Eine Streichung des Textes der Notiz ist angedeutet. Links und unterhalb des Textes finden sich gründlich ausgestrichene und kaum wiederherstellbare Figuren, die aber Ähnlichkeiten mit verschiedenen Figuren im *Compendium* zeigen (etwa mit Fig. 4 oder Fig. 9).

65 (40817). AD VITALI LEXICON MATHEMATICUM
[Sommer 1691 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 9 Bl. 63. 5 Z. auf Bl. 63 v°. [noch]

Datierungsgründe: Magliabecchi sandte Leibniz G. VITALI, *Lexicon mathematicum*, 1690, als Geschenk des Autors zu (30. Juni 1691; I,6 N. 314 S. 535).

Lucae Brugensis liber divinae proportionis.

In Vitali lexico Math. parte 2. voce Algebra $10 = 6 + 4 \mathrel{\underline{\frown}}$ insuper $8 + 2$.

Aetheris immensi partem si presseris unam, sentiet axis onus. Lucanus.

Vitalis $\sim$ brevissima videtur innuere rectum non posse esse commensurabile curvo, sed habemus inde.

---

6 liber: L. PACIOLI, *Divina proportione*, 1509; erwähnt in G. VITALI, *Lexicon mathematicum*, 1690, S. 6. 7 lexico Math: *a. a. O.*, S. 28. 8 Lucanus: LUCANUS, *Pharsalia* I, 56–57; zitiert bei G. VITALI, *a. a. O.*, S. 92. 9 brevissima: *a. a. O.*, S. 120.

66 (40826). DE COMBINATIONE DUARUM OPERATIONUM MATHEMATICARUM
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 9 Bl. 70. 1 trapezförmiger Streifen 8,1 × 3,7 cm. 1 S. auf Bl. 70 v°. — Auf Bl. 70 r°, quer geschrieben, 3 Zeilen: Anno mundi 5648. vel 5572.
Cc 2, Nr. 770

Datierungsgründe: [noch]

Signa $+$, $-$, $\frown$ praeposita vinculo quodvis membrum afficiunt, non signa $\smile$ et $\surd$, nam $+(a+b) = +a+b$, sed $-(a+b) = -a-b$, $c \frown (a+b) = c \frown a + c \frown b$ seu $ca+cb$. Quin et $(a+b) \smile c$ dat $a:c+b:c$, sed $c:(a+b)$ non licet sic procedere nec facere $c:a+c:b$. $\sqrt{}(a+b)$ non dat $\sqrt{}a + \sqrt{}b$.

Si a addatur ad $b+c$, non additur ad b et ad c singulatim sed si a ducatur in $b+c$, ducetur in b et in c singulatim.

11 f. $+\sqrt{}$b. *(1)* Nota $\sqrt{}$a + (bc) non *(2)* Si *L*

67 (40827). ANECDOTAE DE STUDIO ELEMENTORUM [1689 – 1696]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 9 Bl. 71. 1 Bl. 12°. 2 S.

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung ist möglicherweise während der Italienreise von Leibniz entstanden. Der im Text erwähnte B. Rangoni († 1696) wird als lebende Person eingeführt.

Comes Bonifacius Rangonus qui nunc est Supremus Rei Equariae apud ducem Mutinae praefectus (*Cavallerizzo Maggiore*) utcunque animum intenderet Euclideorum *Elementorum* demonstrationes capere non potuit; donec Boccabadatus, quo Magistro utebatur ipsi Euclidem Barrovii dedit ubi interventu Symbolorum demonstrationes uno velut obtutu menti exhibentur.

Florentinus amicus Dn. Baronis Bodenhausen ingeniosissimus alioqui, nunquam res Geometricas capere potuit. Inprimis ipsi negotium facessebat angulus rectus. *Questo angolo retto*, dicebat, identidem quasi mirabundus quid hoc monstri esset.

9 Barrovii: Eukleides, *Elementorum libri XV*. Hrsg. v. I. Barrow. Cambridge 1655; London 1659; 2. Aufl. Osnabrück 1676 [Marg.].

68 (40834). GEOMETRIA IMPERFECTE TRADITA
19. August 1679

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 17+20. 1 Bog. 2°. 4 S. halbbrüchig beschrieben mit Zusätzen. — Gedr.: Echeverría, *La caractéristique*, Teil 2, 1679, S. 128–135.

9. Aug. 1679

G e o m e t r i a m s a t i s a d h u c i m p e r f e c t e t r a d i t a m e s s e v e l i n d e j u d i c a r i potest, quod meliores constructiones fortunae potius sunt opus quam artis.

Et ipsa quidem problemata Elementaria, quale est invenire rectam quae tantum possit quantum duae rectae datae, sive quadratum construere datis duobus quadratis aequale. Item mediam proportione inter duas rectas invenire, ea non per analysin quandam inventa sunt; id est ita, ut qui ea problemate sibi quaerenda proponeret, ad solutionem eorum certae methodi filum sequendo perveniret: Sed potius per Synthesin, hoc est ita ut Geometrae dum a primis orti alias ex aliis consequentias necterent, tandem inciderint in theoremata quaedam ex quibus horum problematum solutiones consequi videbant.

Problemata autem magis composita si quidem plana sunt possunt quidem calculo

6 *Randbemerkung:* Geometria imperfecte tradita est.

9–15 *Randbemerkung:* Problemata Elementaria habentur per Synthesis potius quam per Analysin.

16–190,13 *Randbemerkung:* Usus Algebrae est in problematis compositis rectilineis ad valorem incognitarum certo ac simplicissime in numeris inveniendum, et ad constructiones per circinum, regulam et scalam efficiendas.

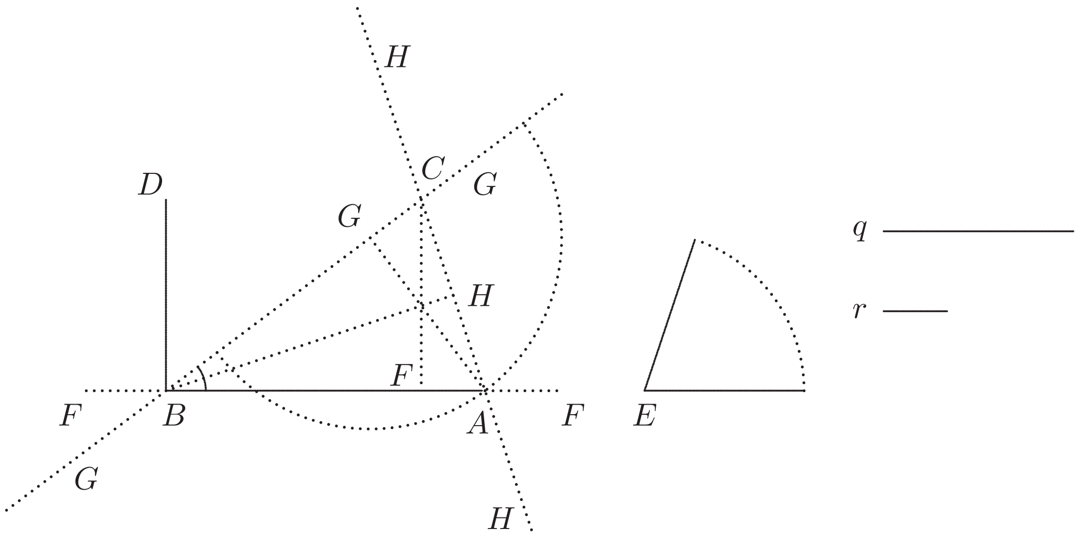
5 *(1)* Scheda 4^{ta} 1679 *(2)* 9 Aug. 1679 *L*   16 si ... sunt *erg. L*   **1,18** Elementaria *(1)* inventa per Sy *(2)* habentur *L*   **1,22** f. inveniendum | , et *(1)* per *(2)* ad *(a)* constructionem *(b)* constructiones per *(aa)* scalam qvandam *(bb)* sol⟨u⟩m, *(cc)* circinum ... efficiendas *erg.* | *L*

Algebraico reduci ad elementaria sed tunc quidem, saepe incidimus in constructiones implicatas, ut taceam ipsum per algebram ratiocinandi modum a naturali detortum esse. Hoc itaque praeclarum habet, quod in omnibus problematis utcunque difficilibus saltem quae ad aequationes reduci possunt, sive in quibus rectilineorum tantum magnitudo datur et quaeritur (nam ad curvilineorum magnitudines opus est Algebra quadam hactenus incognita) certam offert rationem non in casu sed arte positam, inveniendi quaesitum sive per numeros sive per linearum ductus, et ita quidem ut si valores incognitorum in numeris veris aut vero quantum satis est propinquis quaeremus, nihil amplius optari possit. Nam ubi scalam quandam partium aequalium expositam intelligemus, datisque rectis suos valores in numeris ascripserimus, poterimus et quaesitas numeris exprimere, ejusque magnitudinem circino in eadem sumere scala, atque ita sola regula absolvere problematis constructionem sine ullis organis aut linearum in campo ductibus, quod sane magnum est.

Sed quando incognitam secundum valorem ejus algebraice inventum linearum ductibus exhibere volumus plerumque in constructiones inepte longas et fastidiose implicatas incidimus; quia operationes arithmeticae sive algebraicae, nempe addere subtrahere multiplicare dividere et radices extrahere, plane differunt a geometricis, per duo data puncta rectam ducere, per tria data puncta circulum describere, angulum in duas partes secare. Circulum recta ex puncto dato ducta tangere; tres circulos datos uno circulo tangere; aliaque id genus innumera quae per miras ambages algebra exprimit. Unum exemplum dabo, sit problema[:]

14–20 *Randbemerkung:* Sed Constructiones lineares per algebram inventae solent esse parum commodae.

2 ipsum | per algebram *erg.* | ratiocinandi modum *(1)* coactum esse pler *(2)* plane detortum esse *(3)* tametsi magnos habeat usus, *(a)* plane *(b)* ad eruenda plerumqve *(4)* a naturali *L* 5 f. (nam ... incognita) *erg. L* 6 positam, | omnem difficultatem transferendi ad operationes arithmeticas *erg. u. gestr.* | inveniendi *L* 9–13 Nam ... magnum est *erg. L* 15 plerumqve *(1)* opus aggredimur *(2)* in *L* 17 per duo data puncta *erg. L* 18 per tria data puncta *erg. L* 18 f. describere, *(1)* circulum tangere, secare *(2)* angulum ... secare. *(a)* tametsi *(b)* circulum recta | ex ... ducta *erg.* | *(aa)* tangere vel circulo, aut secare *(bb)* tangere *L* 20 innumera *erg. L*



[*Fig. 1*]

Data basi AB altitudine BD et angulo verticis (qui scilicet aequalis esse debet angulo dato E) invenire triangulum ABC.

[*Erster Ansatz, gestrichen*]

Hoc per Algebram ita quaeremus. Ex puncto C. quaesito demissa intelligatur perpendicularis CF. cujus datur longitudo. Occurret autem basi (si opus productae) alicubi in F.

Sit BA aequ. b. BD vel CF aequ. d. Sit BF aequ. x. FA aequ. z. CB aequ. m. CA aequ. n.

Erit $\mp x \mp z \overset{(1)}{\text{aequ.}}\ b$. Ergo $x^2 + z^2 \pm 2xz \overset{(2)}{\text{aequ.}}\ b^2$. $m^2 - x^2 \overset{(3)}{\text{aequ.}}\ d^2$. $n^2 - z^2 \overset{(4)}{\text{aequ.}}\ d^2$. Ergo $m^2 - n^2 \overset{(5)}{\text{aequ.}}\ x^2 - z^2$ per 3. 4.

6 (si opus productae) *erg. L* 8 Sit BA ... aequ. d. *erg. L* 10 f. $\overset{(4)}{\text{aequ}}$ d^2 *(1)* Ergo per 3 et 4 erit $\text{m}^2 + \text{n}^2$ aequ. *(2)* Ergo *L*

2 f. Data ... ABC: Eine konstruktive Lösung des Problems gibt Fr. Viète, *Apollonius Gallus*, 1600, Bl. 10 r° (*VO* S. 341). — Ausgehend von der vorliegenden Bearbeitung behandelt Leibniz das Problem weiter in N. 40835 (40835).

Jam $\mp x \mp z$ in $\mp x \mp z$

$$\overset{(6)}{\text{aequ.}}\ \ x^2 - z^2.$$

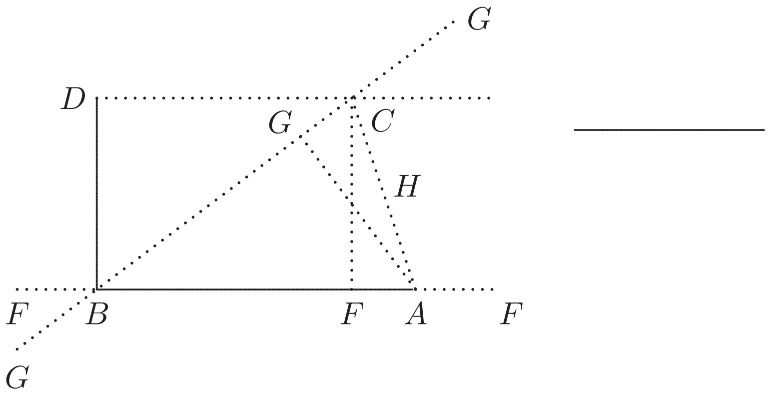
seu $\mp bx \mp bz$

Ergo $\mp x \mp z \overset{(7)}{\text{aequ.}} \dfrac{m^2-n^2}{b}$ sive $\mp 2x \overset{(8)}{\text{aequ.}} \dfrac{m^2-n^2}{b} + b$ et $\mp 2z \overset{(9)}{\text{aequ.}} + \dfrac{m^2-n^2}{b} - b$.

Habemus ergo x et z. Restat inveniamus m et n. Quod ut fiat ex A in CB (si opus productam) demittatur perpendicularis AG in CB, (seu vm) aequ. DB in BA, (seu bd). Ergo v. $\overset{(10)}{\text{aequ.}} \dfrac{bd}{m}$. ponendoque BG esse q et CG esse r et $(\mp)\ q\ (\pm)\ r \overset{(11)}{\text{aequ.}}\ m$.

Patet eodem modo inveniri debere, q. r ex m. b. n. $\dfrac{bd}{m}$ quo inventa sunt x. z ex b. m. n. d. Ergo $(\mp)$ $2q$ aequ. $b^2 - n^2$.

[*Zweiter Ansatz*]



[*Fig. 2*]

Hoc per algebram ita quaeremus. Ex puncto C quaesito demissa intelligantur perpendicularis CF (aequalis ipsi DB) occurrens basi AB si opus productae in F. Similiter ex aliquo baseos extremo A in oppositum latus BC (si opus productum) ducatur perpendicularis AG. Patet data[s] esse longitudine rectas AB. CF. et quia angulus ACB vel

8 debere, *(1)* q et r ex b. n. $\frac{\text{bd}}{\text{m}}$. m, quo inventa sunt *(2)* q. r. *L* 14 f. perpendicularis AG. *(1)* itemqve ex B in AC perpendicularis BH *(a)* sit *(b)* AB sit *(c)* sint $\underset{\text{b}}{\text{AB}}$ CF seu $\underset{\text{d}}{\text{DB}}$ *(2)* Patet *L*

ACG datus est, datas etiam esse rationes rectarum CA. CG inter se quae sint ut datae q, r.

Ipsas	AB	CF vel DB	CB	CA	BG	CG	AG
vocemus	b	d	m	n	x	z	v

erit $v \overset{(1)}{\text{aequ.}} \dfrac{bd}{m}$, $\mp x \mp z \overset{(2)}{\text{aequ.}}\ m$. $\dfrac{b^2d^2}{m^2} \overset{(3)}{\text{aequ.}}\ b^2 - x^2$. $\dfrac{b^2d^2}{m^2} \overset{(4)}{\text{aequ.}}\ n^2 - z^2$. Ergo per aequ. 3. et 4. erit $x^2 - z^2 \overset{(5)}{\text{aequ.}}\ b^2 - n^2$ adeoque per 2 et 5 erit $\mp x \mp z \overset{(6)}{\text{aequ.}} \dfrac{b^2 - n^2}{m}$. Ergo per 2 et 6 erit $\mp 2x \overset{(7)}{\text{aequ.}} \dfrac{b^2 - n^2}{m} + m$ et $\mp 2z \overset{(8)}{\text{aequ.}} \dfrac{b^2 - n^2}{m} - m$.

Jam ob Triangula similia ABG. CBF. erit $\underset{b}{AB}$ ad $\underset{x}{BG}$ ut $\underset{m}{CB}$ ad $\underset{\sqrt{m^2 - d^2}}{BF}$ fiet $x \overset{(9)}{\text{aequ.}} \dfrac{b\sqrt{m^2 - d^2}}{m}$. At supra per 7. erat $x \overset{(10)}{\text{aequ.}} \mp \dfrac{b^2 - n^2 + m^2}{2m}$.

Ergo aequando hos duos valores feliciter destruitur incognita m in nominatore, et fit $\mp 2b\sqrt{m^2 - d^2} \overset{(11)}{\text{aequ.}}\ b^2 - n^2 + m^2$. Rursus quia $\underset{n}{CA}$ $\underset{z}{CG}$ habent inter se rationem datam, ut q ad r, erit nr aequ. zq seu $z \overset{(12)}{\text{aequ.}} \dfrac{nr}{q}$.

Jam ex aequ. 8 est $z \overset{(13)}{\text{aequ.}} \mp \dfrac{b^2 - n^2 - m^2}{2m}$ quem valorem aequando valori ex aequ. 12 fiet $b^2 \overset{(14)}{\text{aequ.}}\ m^2 + n^2 \mp 2\dfrac{r}{q}mn$.

Ex aequ. 11. habemus $m^2 - n^2 \overset{(15)}{\text{aequ.}}\ f \overset{(16)}{\text{aequ.}} -b^2 \mp 2b\sqrt{m^2 - d^2}$.

Ex aequ. 14. habemus $m^2 + n^2 \overset{(17)}{\text{aequ.}}\ e \overset{(18)}{\text{aequ.}}\ b^2 \mp 2\dfrac{r}{q}mn$ fiet:

7 f. $-$m *(1)* Jam ob Triangula similia BAG BCF. erit BA ad AG, ut BC ad CF *(a)* seu erit b *(b)* erit *(2)* Jam *L* 9 f. $\mp \dfrac{\mathrm{b}^2 - \mathrm{n}^2 + \mathrm{m}^2}{2\mathrm{m}}$. *(1)* Ergo aeqvando valores ex 9 et 10. fiet: $4\mathrm{b}^2\mathrm{m}^2 - 4\mathrm{d}^2$ aequ. b^4 Qvos duos valores anteqvam aeqventur *(2)* Erg *(3)* Ergo *L* 13 f. aeqv. 12 *(1)* fiet *(2)* | fiet: *nicht gestr.* | $\mathrm{b}^2 \overset{(14)}{\text{aeqv}}$ *(a)* n^2+ *(b)* $\mathrm{n}^2 + \mathrm{m}^2 \mp 2\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{q}}\mathrm{mn}$ *(aa)* et ex 11. fiet *(bb)* Huic aeqvationi addatur $\mp 2\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{m}^2 - \mathrm{d}^2} - \mathrm{b}^2 \overset{(15)}{\text{aeqv}} -\mathrm{n}^2 + \mathrm{m}^2$ ex aeqv 11 *(3)* fiet *L*

$m^2 \overset{(19)}{\text{aequ.}} \dfrac{e+f}{2}$ et $n^2 \overset{(20)}{\text{aequ.}} +\dfrac{e-f}{2}$ sive per 16. 18. 19. fiet

$m^2 \overset{(21)}{\text{aequ.}} \mp \dfrac{r}{q}mn \mp b\sqrt{m^2-d^2}$ et per 16. 18. 20. fiet

$n^2 \overset{(22)}{\text{aequ.}}\ b^2 \mp \dfrac{r}{q}mn \mp b\sqrt{m^2-d^2}$. Et multiplicando inter se aequationes 21. 22. fiet

$m^2n^2 \overset{(23)}{\text{aequ.}} \dfrac{r^2}{q^2}m^2n^2 + b^2d^2 \mp \dfrac{b^2r}{q}mn \mp b^3\sqrt{m^2-d^2}$ sive per aequ. 11

$\overset{(24)}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\ \dfrac{b^2}{2}\ \overline{b^2-n^2+m^2}$ et ordinando fiet:

$$\frac{r^2-q^2}{q^2}m^2n^2 \mp \frac{b^2r}{q}mn \underbrace{-\frac{1}{2}b^2m^2-\frac{1}{2}b^2n^2}_{-\frac{1}{2}b^2\ \underbrace{\overline{m^2+n^2}}_{b^2\mp 2\frac{r}{q}mn}\ \text{per 14}} + b^2d^2+\frac{1}{2}b^4 \overset{(25)}{\text{aequ.}}\ 0 \text{ sive}$$

$$\frac{r^2-q^2}{q^2}m^2n^2 \boxed{\mp\frac{b^2r}{q}mn}\ \boxed{-\frac{1}{2}b^4}\ \boxed{\mp\frac{b^2r}{q}mn} + b^2d^2 + \boxed{\frac{1}{2}b^4} \overset{(26)}{\text{aequ.}}\ 0.$$

Unde per felicissimas destructiones fit:

3 $\mp b\sqrt{m^2-d^2}$ *(1)* Quos valores substituendo in aequ. 14. fiet b^2 aeqv *(2)* Et *L* 6 ... *(1)* $\underbrace{\frac{b^2}{2}\ \overline{b^2 \underbrace{-n^2+m^2}_{-b^2\mp\frac{r}{q}\ mn}}}_{\frac{b^2r}{q}}$ per 14 *(2)* $\frac{b^2}{2}\ \overline{b^2-n^2+m^2}$ *L* 6 f. fiet: *(1)* m^2n^2 aeqv $\frac{r^2}{q^2}m^2n^2 - \frac{1}{2}b^2m^2 - \frac{1}{2}$ *(2)* $\frac{r^2-q^2}{q^2}m^2n^2 \mp \frac{b^2r}{q}mn\ \overset{-\frac{1}{2}}{\boxed{\begin{array}{l}-\ b^2\ m^2\\ +\frac{1}{2}b^2\ldots\end{array}}} - \frac{1}{2}b^2n^2 + b^2d^2 + \frac{1}{2}b^4 \overset{(25)}{\text{aequ.}}\ 0$ *(3)* $\frac{r^2-q^2}{q^2}\ m^2n^2$ *L*

$mn \overset{(27)}{\text{aequ.}} \dfrac{bd}{q}\sqrt{q^2-r^2}$. Quo valore inserto in aequ. 21 fiet

$m^2 \mp \dfrac{bdr}{q^2}\sqrt{q^2-r^2} \overset{(28)}{\text{aequ.}} \mp b\sqrt{m^2-d^2}$ sive

$m^4 \mp \dfrac{bdr}{q^2}\sqrt{q^2-r^2}m^2 \overset{(29)}{\text{aequ.}} b^2m^2-b^2d^2$.

Unde patet problema esse planum et quidem in numeris facile resolvetur, sed constructio linearis quae inde ducetur satis prolixa erit, quam ut contrahamus.

Ita novas aequationes instituemus

3 f. $\mathrm{b^2m^2-b^2d^2}$ *(1)* Unde patet *(2)* Unde patet problema esse planum, fietqve: $\mathrm{m^4 \mp \dfrac{bdr}{q^2}\sqrt{q^2-r^2}m^2 + \dfrac{q^2b^2d^2r^2-b^2d^2r^4 \mp 2b^3drq\sqrt{q^2r^2}+b^4q^4}{4q^4}} \overset{(30)}{\text{aequ}}$ $\mathrm{\dfrac{q^2b^2d^2r^2-b^2d^2r^4 \mp 2b^3drq^2\sqrt{q^2-r^2}+b^4q^4-4q^4b^2d^2}{4q^4}}$ Ergo fiet: $\mathrm{m^2\dfrac{\mp bdr\sqrt{q^2-r^2}-b^2q^2}{4q^2}}$ $\overset{(31)}{\text{aeqv}}$ $\mathrm{\dfrac{\sqrt{}q^2b^2d^2r^2-b^2d^2r^4 \mp 2b^3drq^2\sqrt{q^2-r^2}+b^4q^4-4q^4b^2d^2}{2q^2}}$ *(a)* et compendii causa ponendo q $\overset{(32)}{\text{aequ.}}$ $\sqrt{}$bd *(b)* Unde ut constructionem brevem nanciscamur *(aa)* id enim in nostro arbitrio est, fiet: *(bb)* ex *(cc)* cum possimus *(aaa)* q sumere pro arbitrio, m aeqv $\mathrm{bdr^2-r^4 \mp 2b^2r\sqrt{bd-r^2}+b^4-4}$ *(bbb)* q vel r assumere pro arbitrio *(aaaa)* faciemus in *(bbbb)* ideo in aeq. 29 *(aaaaa)* faciemus: bd aeqv $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{\mathrm{b^3}}{}$ *(bbbbb)* scribemus: $\mathrm{m^4 \mp \dfrac{bdr}{q^2}\sqrt{q^2-r^2}m^2+\dfrac{h^4}{4}}$ aeqv $\mathrm{\dfrac{h^4}{4}-b^2d^2}$ et faciendo $\mathrm{h^2}$ aeqv $\mathrm{\mp\dfrac{\cancel{b}dr\sqrt{q^2-r^2}}{q^2}-b\cancel{^2}}$ $\mathrm{-\ b^2}$ aeqv $\mathrm{2\cancel{b}d}$ fiet m aeqv $\mathrm{\dfrac{h}{\sqrt{2}}}$ sed h aeqv $\sqrt{}$2d. ergo m aeqv. $\sqrt{}$d. male debet enim ingredi r vel q in valorem ipsius m *(3)* Unde *L* 4 planum *(1)* sed con *(2)* et ... resolvetur, *(a)* sed in *(b)* sed ut constructio ei reddatur *(aa)* lin *(bb)* facilior, cum possimus q. vel pro arbitrio assumere *(aaa)* aeqva *(bbb)* alterutram nempe datae qvantitati aeqvalem, ideo faciamus: 2bd aeqv $\mathrm{\mp\dfrac{bdr}{q^2}\sqrt{q^2-r^2}-b^2}$ seu 2d aeqv *(3)* sed *L* 5 erit, *(1)* qva *(2)* qvam nonnihil saltem *(3)* qvam *L* 6 Ita *(1)* novam *(2)* novas | duas *gestr.* | aeqvationes *L*

$$
\begin{array}{llll}
 & +b^2 & \overset{(14)}{\text{aequ.}} & m^2+n^2 \text{ ǂ } \dfrac{2r}{q}mn \\[2ex]
 & \text{ǂ}\,\dfrac{2rbd}{q^2}\sqrt{q^2-r^2} & \text{aequ.} & \text{ǂ}\,\dfrac{2r}{q}mn \qquad \text{per aequ. 27.} \\[2ex]
 & \text{†}2\dfrac{bd}{q}\sqrt{q^2-r^2} & \text{aequ.} & \text{†}2mn \\
\hline
\text{summa} & +b^2 \text{ ǂ } \dfrac{2rbd}{q^2}\sqrt{q^2-r^2} & \overset{(30)}{\text{aequ.}} & m^2+n^2 \text{ † } 2mn \\[2ex]
 & \qquad \text{† } 2\dfrac{bd}{q} \ \ldots & &
\end{array}
$$

$$\text{Ergo } m+n \overset{(31)}{\text{aequ.}} \sqrt{b^2 \text{ ǂ } \frac{2rbd}{q^2}\sqrt{q^2-r^2}+\frac{bd}{q}\sqrt{q^2-r^2}} \text{ et}$$

$$m-n \overset{(32)}{\text{aequ.}} \sqrt{b^2 \text{ ǂ } \frac{2rbd}{q^2}\sqrt{q^2-r^2}-\frac{bd}{q}\sqrt{q^2-r^2}}.$$

Fiat $\sqrt{bd} \overset{(33)}{\text{aequ.}}\ q$ seu inter b et d quaeratur media proportionalis q. et ducta recta $\text{ǂ}2r+2q$ aequ. s. Itemque recta $\text{ǂ}2r-2q$ aequ. t. Quaeratur media proportionalis inter q et s. Itemque inter q. et t. Illa sit α haec sit β. Si alterutrius quadratum ipsius m quadrato addatur aut ab eo adimatur, habebitur quadratum cujus latus $m+n$ aut $m-n$. Habebuntur ergo m et n quaesita. Quae constructio est tolerabilis nec sine artificio ex calculo deducta, quemadmodum et calculus ipse longe altius assurrexisset nisi eum singulari industria cohibuissemus.

Idem statim ab initio obtinere potuissemus, quia datur ratio AC ad AG ex data ratione AC ad GC. Priorem autem calculum ⟨—⟩ ut appareat quam sit facile ab optima via abire et quam postea difficile fit in eam reverti, quod non contigisset mihi nisi inquisissem in valorem ipsius mn.

5 f. $\text{†}\ 2\frac{\mathrm{bd}}{\mathrm{q}}\ldots$ *(1)* b^2 aeqv $\mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2 \quad \text{ǂ}\ \frac{2\mathrm{rbd}}{\mathrm{q}^2}\sqrt{\mathrm{q}^2-\mathrm{r}^2}$ *(2)* Ergo *L*

$$
\begin{array}{lll}
+\,\mathrm{b}^2 \text{ aeqv. } \mathrm{m}^2+\mathrm{n}^2 & & \text{ǂ}\ \dfrac{2\mathrm{r}}{\mathrm{q}}\mathrm{mn} \\[2ex]
\text{†}\ \dfrac{2\mathrm{rbd}}{\mathrm{q}^2}\sqrt{\mathrm{q}^2-\mathrm{r}^2} & & \text{ǂ}\ \dfrac{2\mathrm{r}}{\mathrm{q}}\ \ldots \\[2ex]
\text{†}\ \dfrac{2\mathrm{bd}}{\mathrm{q}}\sqrt{\mathrm{q}^2-\mathrm{r}^2} & & \text{†}\ 2\mathrm{mn}
\end{array}
$$

8 et *(1)* sumtis rectis *(2)* ducta *L* 11 habebitur *(1)* $\mathrm{m}+\mathrm{n}$, vel $\mathrm{m}-\mathrm{n}$ ad *(2)* qvadratum *L* 12 qvaesita. *(1)* Qvae constructio | est *nicht gestr.* | *(2)* Qvae *L*

69 (40839). CHARACTERISTICA GEOMETRICA
Januar 1677

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 25. 1 Bl. 2°. Linker Rand unregelmäßig. 2 S. — Gedr. (mit frz. Übers.): 1. Echeverría / Parmentier, *La caractéristique géométrique*, 1995, S. 50–65; 2. (span. Übers. nach 1.) Mora Charles, *Obras filosóficas y científicas*, Vol. 7B: *Escritos matemáticos*, 2015, S. 425–432.

Januar. 1677

Characteristica Geometrica

Analysis Geometrica nondum habetur absoluta. Etsi enim methodo Vietae et Cartesii calculo fieri possint pleraque suppositis *Elementis*. Ipsa tamen *Elementa* magnam partem calculo nondum sunt subjecta. Et demonstratio propositionis pythagoricae potius multa animi agitatione quam certa via deprehensa est. Facile demonstrari potest calculo theorema illud Euclidaeum, quod quadratum totius aequatur quadratis partium, plus duplo rectangulo sub ipsis. Nam $a+b$ aequ. ergo $a^2+2ab+b^2$ sed non pari ratione possumus demonstrare in circulo angulum ad circumferentiam dimidium esse anguli ad centrum. Nec dubito hac ratione fieri, ut quoniam elementa omnia ad analysin revocata sunt, etiam in altioribus non habeantur viae commodissimae construendi et demonstrandi. Cogitavi dudum mederi huic imperfectioni, et efficere, ut in calculo tota figurae ratio situsque appareat, quod alioqui fieri non solet. Contenti enim sunt Analytici magnitudines ad

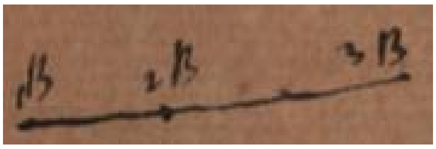
19–198,2 *Nebenbetrachtung, quer geschrieben:* Sola linearum et punctorum designatio ad Calculum perutilis videtur, non inspecta figura.

Erit $AB \sqcap AC+CD-DB$. Vides utramque aequationis partem incipere per A, terminari per B. Item literis additis sibi esse tali lege, ut ubi finit una incipiat altera, hanc ergo aequationem veram esse judicari potest ex solis characteribus sine figura.

11 propositionis pythagoricae: Eukleides, *Elementa*, I, 47. 13 theorema: *a. a. O.*, II, 4. 15 demonstrare: *a. a. O.*, III, 20.

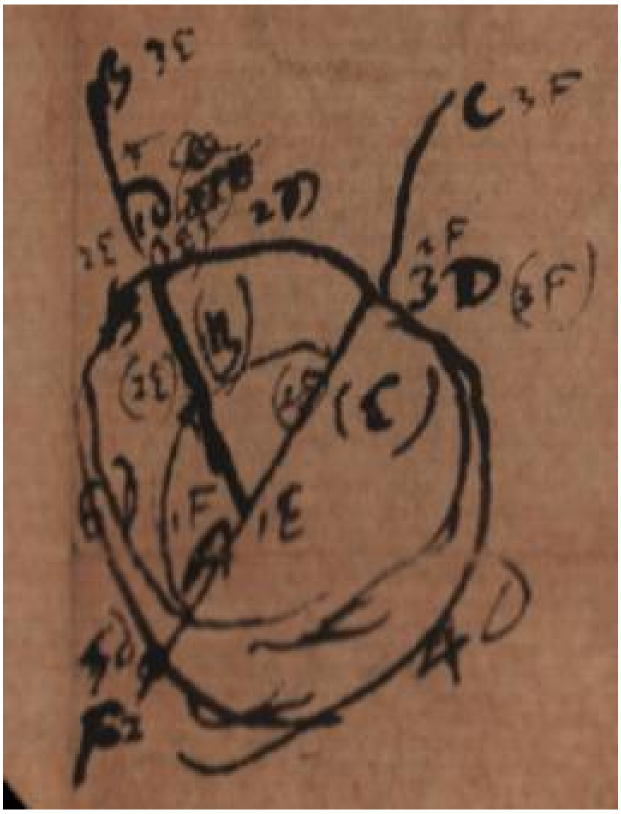
calculum revocare situs vero in figura supponere, unde figuris et linearum ductu atque imaginationis opera carere non possunt. Sed age rem aggrediamur.

Punctum exprimemus litera majuscula, ut A. B. magnitudinem exprimamus litera minuscula, ut hactenus quoque factum est. Linea est multorum punctorum locus, ideo eam exprimemus aliquot punctorum nominatione, et omnia illa puncta una litera sed numeris variata designemus, ita $1B2B3B$. significare debet haec tria puncta esse in eadem linea, cujus natura peculiari quadam conditione determinanda est. Si sit linea recta, tunc ita exprimetur: $1B2B + 2B3B$ aequ. $1B3B$.



[*Fig. 1*]

Si sit circulus tunc aliud punctum assumendum ut A. quod est variationis expers, et dicemus $A1B$ aequ. $A2B$ aequ. $A3B$. eritque linea $1B2B3B$ arcus circuli. Idem de caeteris fieri debet. Utile autem puncta definita ab indefinitis sive locum aliquem designantibus distingui.



[*Fig. 2*]

Angulus sic exprimetur[:] Sit $\begin{array}{cccc}\text{recta} & \text{recta} & \text{recta} & \text{arcus}\\ \text{BA.} & \text{AC.} & \text{A3D} & \text{1D2D3D}\end{array}$. $A1D \ddagger 1DB$ aequ. AB. $A3D \ddagger 3DC$ aequ. AC. $1DA$ aequ. $2DA$ aequ. $3DA$. eritque angulus aequ. $\dfrac{1D2D3D}{1D2D3D1D}$ seu ratio arcus $1D2D3D$ ad circumferentiam $1D2D3D1D$. Tantum ut exprimatur ipsam $1D$ ubilibet sumi in recta AB si opus est producta, faciemus: $1E2E3E$ et $1E2E + 2E3E$ aequ. $1E3E$. Eodem modo $1F2F3F$. et $1F2F + 2F3F$ aequ. $1F3F$ et denique

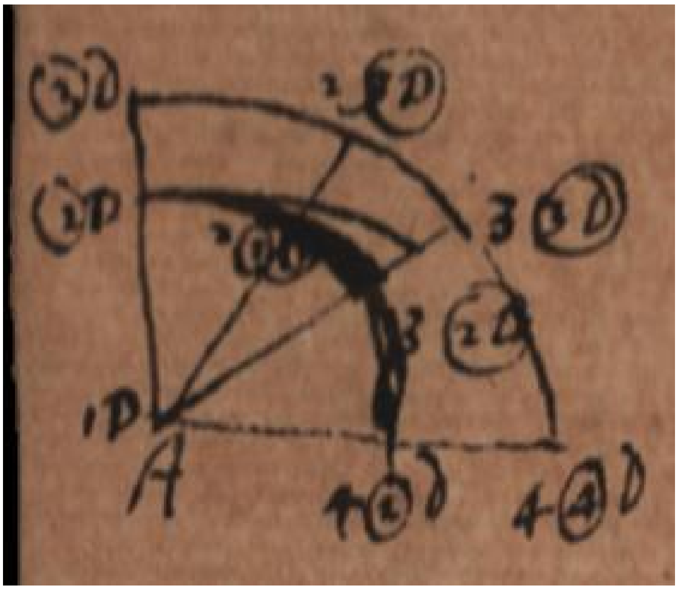
$$1E \sim A \qquad 2E \sim \propto \begin{cases} 1D \\ B \end{cases} \qquad 3E \sim \propto \begin{array}{c} 1D \\ B \end{array}$$

7–200,2 *Dazu am Rand:* $\sim$ idem
$\propto$ aut
$1F$ antrorsum
$F2$ retrorsum

$$1F \sim A \qquad 2F \sim \propto \begin{cases} 3D \\ C \end{cases} \qquad 3F \sim \propto \begin{matrix} 3D \\ C \end{matrix}$$

atque his quidem expressionibus figura perfecte continetur. Angulus rectus est: Sie caeteris ut ante positis tantum fiat $F2 \sim 5D$. Patet $F2$ vel $5D$ punctum esse in recta FFF et in circumferentia DDD. et $1D6D9D$ aequ. $1D2D3D$.

Ut ostendamus aequalem esse angulum rectum quemlibet angulo recto cuilibet tantum considerandum est hoc unum angulum quemlibet cuilibet posse esse deinceps. Sint ergo duo anguli recti, Unus $1DA5D$, alius $1DA3D$, qui sunt sibi aequales, qui sibi deinceps sunt recti inter se aequales sunt, sunt ergo sibi deinceps et recti ex hypothesi, ostendendum est tantum, cuilibet angulo alium aequalem intelligi posse, qui sit deinceps dato. Item ut sciatur angulum esse quantitatem, demonstrandum est, Circulorum arcus eadem recta abscissus esse inter se proportionales vel circumferentiae suae.



[*Fig. 3*]

Optime autem omnia per motum ita explicabimus. Puncti D motu fit recta $1D2D3D$. ita ut sit $1D2D + 2D3D \sqcap 1D3D$. Rectae $1D2D3D$ motu fit superficies $1D2D3D$, $2\,1D\,2\,2D\,2\,3D$ vel $1\overline{1D2D3D} \quad 2\overline{1D2D3D}$. $A2D$ aequ. $A2\,2D$. et $A3D$ aequ. $A2\,3D$. Ostendendum est esse $\dfrac{2\,D2\,2\,D3\,2\,D}{3\,D2\,3\,D3\,3\,D} \sqcap \dfrac{2\,2\,D3\,2\,D4\,2\,D}{2\,3\,D3\,3\,D4\,3\,D}$.

[*Fig. 4*]

Cujus rei demonstratio oritur ex natura similitudinis. Quae similia sunt eorum partes similiter positae sunt proportionales. Nam similia sunt indiscernibilia separatim at disproportionalia sunt discernibilia[,] nam in uno diversa proportio quam in alio, ex. g. in uno tripla in alio quadrupla. Ergo similia habent partes respondentes proportionales. Ostendendum ergo tantum esse similia

$$\underbrace{A\,2\,D3DA2\,2\,D2\,3\,DA3\,2\,D3\,3\,D}_{\text{superficies seu sector analytice expressus}} \text{ et } \underbrace{A2\,2\,D2\,3\,DA3\,2\,D3\,3\,DA4\,2\,D4\,3\,D}_{\text{ibidem sector analytice expressus}}$$

Sunt autem quia ex hac ipsa expressione nihil apparet in quo possint discerni accedentibus scilicet aequationibus naturam rei determinantibus $A1\,2\,D \sqcap A2\,2\,D$ etc. et $A1\,3\,D$ aequ. $A2\,3\,D$. Unde patet non nisi literis seu characteribus assumtis differre, non characterum relatione, non ergo aliter nisi ipso sensu discerni posse non ratione. Ex hoc jam patet angulos diversae licet longitudinis linearum esse posse inter se aequales, eodem enim modo sunt ad circumferentiam suam arcus magno ac parvo radio descripti, ut ostendimus. Quod ex dictis patet quia ut anguli sibi sint deinceps tantum opus est, ut habeant rectam communem, manifestum autem est ad datam rectam datum angulum constitui posse. Sed nondum hinc satis ostendi videtur angulos rectos omnes esse aequales.

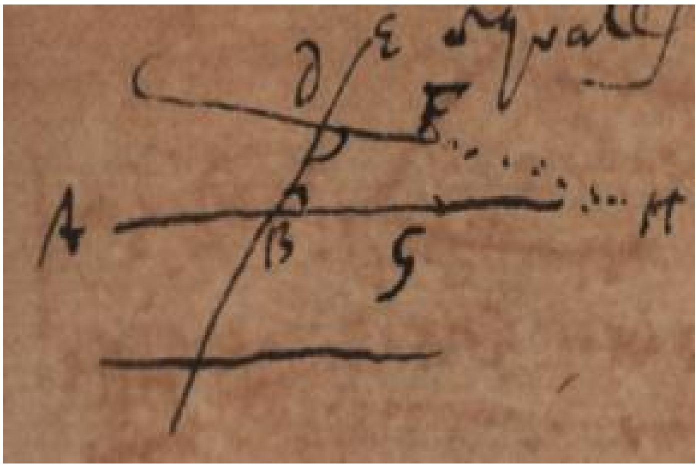
Nam angulus rectus est, cum recta ad eandem rectam angulum facit utrinque aequalem, ergo recta ad quam fit angulus producta utrinque est diameter. Jam diameter circulum bisecat nam recta per centrum transiens utrinque se eodem habet modo. Ergo

---

7 f. *Dazu am Rand:* Ecce modum pulcherrimum exprimendi superficiem.

5 similia *(1)* sunt proportionalia *(2)* | habentes *ändert Hrsg.* | partes *L*

duo recti simul continent semicirculum, et unus rectus circuli quadrantem, ergo omnes recti sunt aequales. Habemus ergo demonstrationem Axiomatis Euclidei 10.



[*Fig. 5*]

Axioma ejus 11 est si in duas rectas CDF. ABG incidat tertia EDB sitque angulus $FDB + GBD$ minor duobus rectis, erit H punctum concursus ad partes F. G. Hoc pro axiomate sumtum miror, quis enim non videt quam parum sit notum, et quam multa difficilia supponat.

Axioma Euclidis 12. *Duae rectae spatium non comprehendunt.*

His Axiomatis Euclideis alia adjecta sunt a Clavio et interpretibus, sequentia nempe

13. *Duae lineae rectae non habent unum et idem segmentum commune.*

14. *Duae rectae* in puncto aliquo convenientes *si producantur ambae necessario se mutuo in eo puncto secabunt* (scilicet nisi conveniunt ubique).

15. *Si punctum sit in duobus rectis erit aut in earum intersectione, aut in contactu* (non satis intelligo).

16. *Si duo puncta sint in eodem plano* (+ imo bina puncta duo quaelibet sint in eodem plano +) *etiam recta ipsa connectens est in eodem plano.*

25. Circuli aequalibus intervallis descripti aequales sunt.

26. *Circuli ex diversis ejusdem intervalli extremis tanquam centris descripti intersecant se mutuo* (nam peripheria unius transit per centrum alterius ergo est intra alterum,

---

2 Axiomatis Euclidei 10: Leibniz verwendet im Folgenden die Zählung der Axiome bei C. Schott, *Cursus mathematicus*, 1661, S. 64 f., und zitiert bzw. paraphrasiert sie. 9 His ... sequentia: Vgl. *a. a. O.*: „Hic finit Euclides Axiomata sua. Quae sequuntur, adjecit Clavius, et alii".

est vero et extra, ergo secuit alicubi).

Satis certam me et universalem nunc rationem aperuisse videor, etiam situm referendi in quoddam calculi genus, cujus ope puto constructiones commodissimas directe posse inveniri. Tantum ne inutili prolixitate inter repetendum fatigemur, saepe communibus literis utemur, donec necesse sit eas explicare. Unum restare mihi videtur ad perfectionem analyseos geometricae, methodus scilicet non tantum sine figuris, sed et sine literis omnia demonstrandi per solas definitiones: Idque utile erit ad ratiocinandum ex tempore sine calamo et figura. Et ut fecit Desarguesius nova aptaque nomina excogitare utile erit, quo facilius sit accurate sine figuris ratiocinari. Et hic verus est quoque technicorum nominum usus.

Linea recta est cujus magnitudo eadem est cum distantia extremorum seu si punctum ita feratur, ut tantum spatii percurrat, quantum ejus est a puncto ex quo discessit distantia (seu est via a puncto ad punctum talis ut quaeri non possit cur in illas potius quam has partes feratur).

Arcus circuli est linea cujus omnia puncta aequidistant ab uno aliquo.

Angulus rectilineus est apertura rectarum ad punctum commune consistentium. Apertura est motus necessarius ad rectam a recta alia uno extremo excepto removendam. Angulum ergo mirum non est esse proprie subjectum quantita[ti]s, cum sit motus saltem possibilis. Hinc jam patet cur non alia re quam arcu aestimentur anguli.

Angulus rectus est qui angulo deinceps aequalis est.

Anguli deinceps sibi sunt qui sunt ad duo latera unius rectae, et ad unum latus alterius rectae in eodem plano.

Recta rectae occurrit, tum cum habent punctum commune.

Recta occurrens aliam tangit, cum producta eam non secaret. Recta rectam secat cum utraque ab utroque alterius latere reperitur.

[*Fig. 6*]

Recta est linea in qua omnia similiter se habent. Non enim potest dici $4B$ ad $3B$ aliter se habere quam $3B$ ad $2B$ vel $4B$ ad $[2B]$.

Recta linea est cujus partes quaelibet similiter sitae sunt.

70 (40842). DEFINITIONES GEOMETRICAE [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 36–38 + 42. 2 Bog. 2°. 6$\frac{1}{2}$ S. Bl. 38 v° leer. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 212–222, 225–230.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von 1678–1682 belegt.

Linea est via puncti.

Via est locus continuus successivus.

Punctum est quod in loco est, et cujus pars nulla est.

Superficies est via lineae in latum, id est ita ut pars lineae quaeque novum locum ingrediatur, non in alterius partis locum succedat.

Corpus est via superficiei in profundum, id est ut pars superficiei quaevis novum in motu locum acquirat.

Punctum est quod in loco simplicissimum est.

Movetur quod locum continue mutat.

Via est locus continuus successivus.

Linea est via puncti.

Recta est via puncti specie simplicissima.

Punctum est quod in loco existentium minimum est.

Punctum a puncto discerni non potest nisi simul percipiantur, imo etsi simul percipiantur, nihil tamen de illis notari potest diversum.

Recta est a puncto ad punctum minima.

Duae rectae sola magnitudine discernuntur, seu si compraesentia discernantur, notari potest aliquid diversum.

9 lineae *(1)* ta *(2)* tra *(3)* sem *(4)* in eam pl *(5)* qva pars una *(6)* talis ut una superficiei pars non ingre *(7)* in *L* 13 est *(1)* qvod in loco est, et qvod *(2)* qvod in loco |existentium *gestr.*| simplicissimum *L* 17 f. puncti *(1)* ad punctum *(2)* specie simplicissima. *(a)* Hinc recta a puncto ad punctum unica est. *(aa)* Recta a puncto ad punctum minima est *(bb)* Nam si essent plures utiqve different, differentia autem posset adhuc minor esse, id est non sunt simplicissimae *(b)* punctum *L* 20 illis |imposterum *gestr.*| notari *L* 23 potest *(1)* qvae major aut mino *(2)* aliqvid *L*

Hinc recta datis duobus punctis determinata est, id est non est in arbitrio nostro duobus assumtis punctis adhuc tertium assumere, ut cadant omnia in eandem rectam. Simplicior enim est, quae duobus tantum punctis assumtis determinatur.

Recta inter data duo puncta unica est alioqui ex duobus punctis non esset determinata; item recta inter data duo puncta minima est.

Rectae partes sunt uniformes sive congruunt.

Recta rectae similis est.

Planum est locus rectarum quae a puncto ad rectam duci possunt.

Punctum est quod in loco existentium simplicissimum est. Itaque punctum est in loco existentium minimum. Duo puncta inter se aequalia sunt, similia sunt, congrua sunt. Punctum non habet partes.

Linea est via puncti.

Recta est per duo puncta via simplicissima. Itaque recta est via inter duo puncta minima. Per duo puncta unica tantum est recta indefinita. Duae rectae sunt similes inter se. Duae quaevis rectae sibi successive congruunt. Duae rectae aequales congruae sunt. Duae rectae (indefinitae) non habent partem communem, alioqui per duo puncta essent duae. Duae rectae spatium non comprehendunt, alioqui inter duo puncta essent duae rectae.

Planum est locus rectarum omnium a puncto ad rectam, id est locus viarum

---

15–20 *Nebenbetrachtung:* Hinc sequitur partem rectae parti congruere, sed hoc et commune circumferentiae, sed non diversis circumferentiarum partibus. Duae circumferentiae similes non tamen congruae, ne successive quidem.

1 est, *(1)* nihil enim simplicius assumi potest *(2)* id *L* 10 f. possunt. *(1)* Cum aliqvid in loco esse concipimus, et caetera omnia ab eo removemus, concipimus punctum Cum intelligimus *(a)* aliqvid ⟨incipi⟩ *(b)* punctum motum *(c)* viam a puncto ad punctum *(aa)* nec *(bb)* caeteraqve omnia removemus, intelligimus rectam Vi *(2)* Punctum *L* 15 est *(1)* via a puncto ad punctum *(2)* per *L* 15 est via *(1)* a puncto ad punctum *(2)* inter *L* 16 indefinita *erg. L* 18 rectae | (indefinitae) *erg.* | non habent *(1)* segmentum commune, (alioqvi via a puncto ad punctum simplicissima non est, si indeterminata est viae continuatio) sive unica non est *(2)* partem *L* 21 rectam, *(1)* est etiam via recta simplicissima ad punctum *(2)* id *L*

simplicissimarum a puncto ad rectam, vel etiam est via simplicissima rectae ad punctum. Per tria puncta unicum est planum indefinitum. Duo plana successive sibi congruunt. Si duorum planorum peripheriae sint similes, ipsa plana similia sunt; si duorum planorum peripheriae congruant ipsa plana congruent. Duo plana (indefinita) non habent partem communem. Duo plana spatium non comprehendunt; imo nec tria.

Circulus est periodus rectae in plano circa extremum immotum. *Periodus* est via ab aliquo ad eundem.

Linea recta est possibilis.

Est demonstratio aequitatis postulati primi Euclidaei. Sit $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{quaecunque figura in qua}}{\text{quodcunque corpus in quo}}$ sumantur duo puncta immota, quibus quiescentibus moveatur $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{figura}}{\text{corpus}}$; erunt omnia puncta quiescentia in eadem recta quae dicetur axis. Ubi demonstrandum est, corpus moveri posse etsi duo in eo sint puncta immota. Demonstrandum etiam quod plura sint puncta immota. Prius ita demonstratur, quia si unum tantum sit immotum corpus variis modis moveri potest, ergo si duo sint puncta immota poterit moveri, licet uno solum modo. Demonstrandum etiam quod omnia puncta immota cadant in rectam, et quod omnia in illam rectam cadentia sint immota, nam duo puncta assumta sola esse non possunt, cum nulla sit ratio cur ipsa potius quam etiam alia, erunt ergo quaecunque per haec duo solum determinata. Habetur ergo linea ex datis duobus tantum punctis determinata, id est recta, cum sit necessario simplicissima, omnium quae determinari possunt; quippe cum ab his duobus punctis tantum determinetur.

Circulus est possibilis, hoc patet demonstrata possibilitate rectae quanquam etiam ex motu corporis circa axem immotum eadem opera pateat possibilitate rectae et circuli. Habemus ergo et *planum possibile*.

Possumus a dato puncto ad datum ducere rectam quia possumus efficere, ut per duo data puncta immota transeat corpus mobile. Imo nec refert corpus sit an figura quaecunque.

Possumus datam rectam producere figuram continuando utcunque. Demonstrandum

1 f. simplicissima *(1)* lineae *(2)* rectae ad punctum. *(a)* Datis tribus punctis *(b)* per *L*
2 congruunt. *(1)* Planum plano simile et aeqvale. *(2)* Si *L* 4 (indefinita) *erg. L* 6 est *(1)* via *(2)* periodus *L* 27 producere *(1)* corpus continuando *(2)* figuram continuando *(a)* ⟨—⟩ *(b)* utcunqve. *(aa)* possumus *(bb)* demonstrandum *L*

etiam videtur dari superficies lineas puncta. Id enim erunt qui negent.

Datur corpus. Hoc assumo velut primum.

Extremum corporis est superficies vere exacta, carens profunditate. Nam si in profunditatem patet seu corpus est, salvo extremo aliquid ab eo adimi potest, itaque non sumsimus solum extremum.

Extremum superficiei linea est.

Extremum lineae punctum est.

Duorum corporum sectio est necessario superficies. Contactus etiam linea et punctum esse potest. Duarum superficierum sectio est necessario linea, contactus etiam linea et punctum esse potest.

Demonstrandum rigorose, quod tres tantum dimensiones.

Si qua linea et figura sint in eadem superficie, sitque lineae punctum aliquod extra figuram, aliquod intra figuram, linea figurae ipsius peripheriam secabit.

Secare est post occursum in alteram partem transire. Quid est in alteram partem? Hoc ita concipio: Si quid sit extremum cujusdam figurae, et aliud quam proxime indefinite ante occursum sit in figura post extra, vel contra dicetur hunc ambitum secare, seu esse ab utraque ejus parte.

Ex his habemus etiam demonstratum veros circulos necessario in Natura dari, verasque rectas.

Anguli quos faciunt tangentes iidem sunt cum angulis linearum in puncto contactus.

Duae lineae parallelae sunt quae sunt aequidistantes seu inter quas minimae aequales. Haec definitio locum habere potest in rectis, circulis, parabolis, imo aliis

---

18 f. *Dazu am Rand:* dubito

1 dari *(1)* lineam, superficiem, corpus, *(2)* superficies *L* 2 velut *(1)* indemonstrabile Si duo corpora sese *(2)* primum *L* 3 exacta, *(1)* carens latitudine *(2)* carens *L* 8 corporum *(1)* contactus vel sectio est superficies *(2)* sectio est *(a)* superficies, contactus etiam | est *nicht gestr.* | *(b)* necessario *L* 8 f. et | corpus *ändert Hrsg.* | esse *L* 11 f. tantum *(1)* rectae *(2)* dimensiones *(a)* si lineae duae *(b)* si linea habeat punctum in figura *(c)* si qva linea *(aa)* in eadem *(bb)* et *L* 12 punctum *(1)* unum *(2)* aliqvod *L* 14 transire *(1)* et si linea *(2)* Qvid *L* 15 aliud *(1)* indefinite ante concursum sit ex *(2)* qvam *L* 16 ante *(1)* concursum *(2)* occursum *L* 19 f. rectas *(1)* parallelae sunt duae lineae, si recta uni *(2)* angulus *(3)* anguli | qvem *ändert Hrsg.* | faciunt *L* 21 sunt *(1)* qvarum minimae sunt aeqvidistantes: locum habet *(2)* qvae *L*

lineis omnibus.

M e m o r a b i l e   t h e o r e m a

Si duarum parallelarum (secundum definitionem praecedentem) una rectae cuidam ad angulos rectos occurrit, tunc altera eidem etiam ad angulos rectos occurret.

Mirabile paradoxum linea parabolae parallela vel Ellipsi non est parabola vel Ellipsis, sed alterius generis.

E a d e m sunt quae sibi invicem substitui possunt salva veritate. Itaque quae eidem eadem inter se eadem. Nam si A substitui potest in locum B poterit et substitui in locum C, sumto C pro B. Ex hac definitione omnia demonstrantur axiomata Euclidis.

M i n u s est quod alterius parti aequale est. Hinc pars minor toto. Nam pars aequalis parti (sibi ipsi) alterius (totius). Ergo minor.

R e c t a   l i n e a est quae duobus punctis per quae producta si opus transit, determintatur.

L o c u s est discrimen generale eorum quae simul percipi possunt, etsi in aliis omnibus conveniant.

Hinc duo non possunt simul esse in eodem loco. C o n g r u a sunt quae [sine ulla alia mutatione] locum permutare possunt.

P a r t e s sunt plura quae requiruntur ad unum nempe t o t u m et cum eo conve-

1–3 omnibus *(1)* Qvandocunqve minimae sunt aeqvidistantes, tunc lineae e *(2)* duae qvaecunqve lineae parallelae *(3)* | M e m o r a b i l e   t h e o r e m a *erg.* | si *L* 8 f. potest in locum *(1)* C poterit et substitui in locum B, qvia B substitui *(2)* B poterit . . . locum C, *(a)* substituto *(b)* sumto *(c)* sumto *L* 10 f. pars *(1)* minor se ipsa *(2)* aeqvalis *(a)* sibi ipsi *(b)* parti *L* 12 qvae *(1)* duobus punctis *(2)* per duo puncta *(3)* | duobus *nicht gestr.* | punctis determinatur *(a)* ad qvae *(b)* per qvae transit producta si opus *(4)* duobus *L* 12 per qvae *(1)* transit *nicht gestr.* *(2)* producta *L* 14 *(1)* L o c u s est *(2)* L o c u s *(3)* Locum habere *(4)* Locus *L* 14–16 possunt | , etsi in aliis omnibus conveniant *erg.* | *(1)* M a g n i t u d o est discrimen ge *(2)* Congrua sunt qvae possint esse in eodem loco *(a)* nullo mutato *(b)* sine ulla in *(3)* M a g n i t u d o est discrimen generale eorum qvae simul percipi possint secundum numeros et partes. *(4)* Hinc *L* 16 sunt *(1)* qvae sine ulla | alia *erg.* | mutatione facta possunt *(a)* esse in eodem loco *(b)* permutare locum *(2)* qvae *L* 17 f. possunt. *(1)* A e q v a l i a sunt qvae *(a)* salvis parti *(b)* nulla parte ademta vel addita reddi possunt congrua. *(aa)* M a g n i t u d o est id qvod parte aliqva *(bb)* M a g n i t u d o est discrimen *(aaa)* eorum *(bbb)* generale eorum qvae simul percipi possunt, et partes habent *(2)* Ae *(3)* Locus est existentium *(4)* Locus *(5)* Totum est qvod *(6)* P a r t e s sunt | plura *erg.* | qvae *L*

16 f. [. . .]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

niunt.

Extensum est continuum cujus partes sunt simul.

Continuum est totum cujus partes sunt per se indeterminatae.

Congrua sunt quae possunt esse in eodem loco.

In eodem loco sunt, quae per ea cum quibus percipiuntur discerni non possunt.

Aequalia sunt quae nullis partibus separatis [*bricht ab*]

Quia congruere intelligo et horam horae, ideo congrua definio, quae iisdem comperceptis conveniunt quatenus.

Seu congrua sunt quae illa quibus coexistunt permutare possunt sine ulla alia mutatione. Ita tempus, recta.

Coexistentia intelligo non quae existunt eodem momento, sed quae existere percipimus si id quo agitur existere percipiamus.

Si A sit aequale ipsi C, et si B sit aequale ipsi C, erit A aequale ipsi B.

Nam si A aequale ipsi C. erit eadem magnitudo ipsius A et C. Si B aequale ipsi C erit eadem magnitudo ipsius C et B. Jam si eadem magnitudo A et C, et C et B, erit eadem A et B. Nam si idem A et C ac C et B, erit idem A et B.

Quae eidem aequalia inter se aequalia, nam aequalia sunt eadem magnitudine. Jam quae eidem eadem inter se eadem. Quia eadem quae sibi invicem substitui possunt salva veritate.

Partes sunt, plura quae requiruntur ad unum quatenus cum eo conveniunt, hoc unum dicitur Totum.

Congrua sunt, quae discerni nequeunt quatenus in partibus nihil aliud spectatur, quam in quo eas cum toto convenire necesse est.

Corollar. Unumquodque sibi congruit. Totum omnibus partibus congruit.

3 f. indeterminatae *(1)* Locus est extensum *(2)* Congr *(3)* Duo *(4)* Congrua *L* 7 qvae *(1)* manentibus iisdem partibus *(2)* nullis *L* 8 definio *(1)* | qvae *nicht gestr.* | permutare possunt ea cum qvibus *(2)* qvae *L* 10 qvae *(1)* iisdem coexistere possunt *(2)* illa *L* 11 ita | hora ita *gestr.* | tempus, *(1)* lin *(2)* pars rect *(3)* recta *L* 13 f. percipiamus. *(1)* Qvae sunt eidem aeqvalia inter se sunt aeqvalia. Nam qvae eidem eadem sunt magnitu *(2)* nam *(3)* Si *L* 21 *(1)* Si plura reqviruntur ad unum suppositione *(2)* Si pluribus suppositis ⟨conven—⟩ eo ips *(3)* plura cum *(4)* Partes *L* 22 f. Totum *(1)* Totum continuum est cuius partes secundum ali *(2)* Homogenea sunt *(3)* Congrua sunt, *(a)* qvae secundum partes in qvi *(b)* qvae secundum id qvod discerni *(c)* qvae discerni neqveunt *(aa)* secundum partes *(bb)* qvatenus habent partes ei *(cc)* qvatenus *L* 25 Corollar. ... congruit *erg. L*

A e q u a l i a sunt quae congrua esse possunt nullo addito vel detracto.

Corollar. Totum est aequale omnibus partibus.

Coroll. Unumquodque sibi aequale.

Coroll. Congrua sunt aequalia.

M a j u s est cujus pars alteri toti, quod M i n u s vocatur, aequalis est.

Totum est majus sua parte vel pars est minor toto. Nam pars est alterius (totius) parti (nempe sibi) aequalis, ergo altero illo (toto) minor.

M e n s u r a est quod repetitum omnibus alterius partibus aequale est.

R e s i d u u m [minimum] est quod restata mensura a toto repetitis [quoties fieri potest] vicibus detracta.

H o m o g e n a sunt quorum si minus a majore detrahatur quoties fieri potest, et residuum a proxime detracto; perpetuo si fiat residuum aliquod minus dato.

Quorum unum altero nec majus est nec minus eorum unum alteri aequale est si homogena sunt.

S i m i l i a sunt quae discerni nequeunt nisi diversorum comperceptione.

Congrua sunt similia si nihil aliud spectetur, quam quo totum et partes convenire necesse est.

Nam congrua hoc modo ne quidem si simul percipiantur, (ergo multo minus si non simul,) discerni possunt.

1 congrua *(1)* sunt simi *(2)* esse possunt manentibus iisdem partibus *(3)* esse possunt *(a)* nullo ademt *(b)* unum *(c)* nullo *(aa)* sepa *(bb)* addito *L* 2–4 Corollar. . . . partibus. *(1)* Nam qvod congruit congruere potest *(2)* Coroll. . . . aeqvalia *erg. L* 7 f. minor *(1)* H o m o g e n e a sunt *(2)* M e n s u r a *L* 8 f. aeqvale est *(1)* R e s i d u u m est pars qva neglecta aliqvid totius mensura est. [distinguo inter Minimum Residuum, et qvodcunqve] *(2)* R e s i d u u m *L* 11 sunt *(1)* qvorum communis mensura talis assumi potest, ut residuum sit *(a)* data qvantitate minus *(b)* dato *(2)* ea *(3)* qvorum si *(a)* alterum ab altero *(b)* minus *L* 12 residuum *(1)* ab utroqve *(2)* a *(a)* minore, *(b)* proxime *L* 13 f. qvorum . . . sunt *erg. L* 15 nisi *(1)* simul percipiantur, sive qvae hoc uno discernuntur, qvod non congruunt *(2)* duorum collatione *(3)* diversorum *L* 16 Congrua *(1)* secundum *(2)* sunt similia *(a)* secundum id *(b)* si *L* 19–212,1 possunt. | Aeqvalia et secundum id saltem qvo totum et pars conveniunt) similia, congrua sunt. *(1)* nam aeqvalia vel congrua sunt *(a)* vel *(aa)* reddi possunt, *(bb)* si congrua reddi possunt *(cc)* no *(dd)* si reddi *(b)* vel si non sint reddi possunt. *(aa)* sed similia *(bb)* Ergo mutari possunt, ut minus qvam *(cc)* nam aeqvalia si *(dd)* nam similia discerni neqveunt si non simul percipiantur, si *(ee)* Ergo similia inaeqvalia discerni possunt *(aaa)* si simu *(bbb)* non nisi simul percipiantur. *gestr.* | [qvorum *L*

9–212,1 [. . .]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

[Quorum unum in aliud mutatur manentibus iisdem partibus ea similia non sunt].

Quaecunque magnitudine differunt ea possunt discerni etsi similia sint, potest discerni si simul percipiantur an unum alteri congruat.

M a g n i t u d o est numerus partium congruarum. Hoc locum habet etiam in commensurabilibus. Nam ubi tamen pluribus opus est numeris secundum diversas partes.

Duobus modis res discerni possunt, cogitatione et perceptione.

Si res non possit ab alia distingui, nisi vel ambae percipiuntur, vel ea quibus ambae determinantur eae res dicuntur s i m i l e s .

Id quo res similes discerni possunt, dicitur m a g n i t u d o .

A e q u a l i a sunt quae magnitudine discerni non possunt.

P a r t e s sunt plura quae requiruntur ad unum quatenus cum eo conveniunt. Quod dicitur T o t u m.

E x t e n s u m est continuum cujus partes existunt simul.

C o n t i n u u m est cujus partes indeterminatae sunt.

2 qvaecunqve | sola *gestr.* | magnitudine differunt *(1)* | ea *nicht gestr.* | non nisi simul *(2)* ea ... discerni *(a)* nisi simul percipiantur, qvia similia sunt, alioqvi enim aliter qvam magnitudine *(b)* etsi *L* 5 Nam *(1)* sume *(2)* etsi *(3)* ubi *(a)* tantum *(b)* cum partes congruentes diversa⟨rum⟩ cert⟨o⟩ *(c)* tamen *L* 5 f. partes *(1)* C o n g r u a sunt qvae discerni non possunt secundum ea qvae sola comperceptione discernuntur. A e q v a l i a sunt congrua potestate. S i m i l i a sunt qvae discerni non possunt secundum ea, qvae sola comperceptione *(a)* dis *(b)* intelligibili *(2)* Duobus *L* 6 possunt, *(1)* intelligibili ratione | sive forma *erg.* | , et *(a)* nuda perce *(b)* nuda comperceptione, sive qvantitate. sive qvalitate, et *(2)* cogitatione et praesentia unius *(3)* cogitatione *(a)* alterutrius et perceptione utriusqve *(b)* et *L* 6 f. perceptione *(1)* Si res sola sui perceptione ab alia distingui possit duae illae res d i s s i m i l e s dicuntur *(a)* Itaqve si agrum habeam ante oculum, scireqve velim an alio agro sit major, *(b)* itaqve si mihi offeratur figura, in qva percipiam extrema non *(2)* Si *L* 7 distingui | secund *erg. u. gestr.* | , nisi *L* 9 similes | diversimodo *gestr.* | discerni *L* 10 f. possunt *(1)* C o n g r u a sunt similia et aeqvalia. Plu *(2)* P a r t e s *L* 11 qvatenus *(1)* cum *(2)* ei conveniunt. Similia sunt *(2)* cum *L* 12 f. T o t u m. *(1)* Si qvid spectentur in rebus *(2)* Si qvid *(a)* attributum *(b)* praedicatum spectetur *(3)* M a g n i t u d o est modus determinandi *(4)* C o n g r u a sunt *(a)* qvae secundum situm partium *(b)* qvarum partes *(c)* qvae *(aa)* situ *(bb)* partium ad se invicem *(d)* qvae sunt in eodem loco. *(aa)* S i m i l i a sunt qvae situ partium ad se invicem *(bb)* L o c u s est *(5)* Extensum est *(a)* totum *(b)* continuum cuius partes *(aa)* sunt *(bb)* existunt *L* 14 sunt. | *(1)* Spatium *(2)* Locus *(3)* Spatium est extensum simpliciter spectatum uniforme tantum, L o c u s est Spatium determinatum. C o r p u s est extensum *(a)* in qvo aliqvid praeterea percipi potest *(b)* qvod percipi potest *(c)* in qvo aliqvid praeterea percipitur *(d)* perceptibile *(e)* perceptibile per se *(f)* qvod ab alio *gestr.* | *L*

71 (40843). DEFINITIONES GEOMETRICAE NONNULLAE [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 39. [**noch**] Bl. 39 wurde aus dem Bogen LH 35 I 11 Bl. 48–49 (= N. 40848 (40848)) ausgeschnitten. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 223–224.

Datierungsgründe: N. 71 (40843) wurde wohl vor N. 40848 (40848) geschrieben.

C o n t i n u u m est cujus partes assignabiles sunt indefinitae.

E x t e n s u m est continuum cujus partes assignabiles sunt coexistentes.

S p a t i u m est in quo per se sumto nihil aliud considerari potest, quam quod extensum est.

C o n g r u i t , quod per solam considerationem rerum diversarum quatenus extensae sunt, ab alio discerni non potest.

M o v e t u r quod successive continue congruit diversis, quae successive diversis praeterea non congruunt.

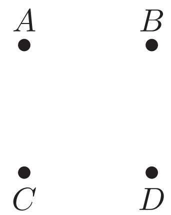
7 est | Totum *gestr.* | cuius partes | *(1)* possibiles *(2)* assignabiles *erg.* | sunt *L* 8 est | continuum *erg.* | cuius partes *(1)* sunt s⟨—⟩ | possibiles *erg.* | *(2)* assignabiles *L* 9 qvam *(1)* extensio *(2)* qvod *L* 10 f. est *(1)* Continui, extensi, *(a)* spatii, *(b)* spatii pars est continua corpus est extensum *(2)* C o n g r u i t *L* 11 f. considerationem *(1)* extens *(2)* rerum | diversarum *erg.* | qvatenus extensa sunt, *(a)* ab alio discerni potest ⟨—⟩ *(b)* ab *L* 13 f. diversis *(1)* Corpus est extensum mob *(2)*, qvae successive *(a)* contin *(b)* diversis *(aa)* ali *(bb)* non congruunt *(cc)* praeterea *L*

72 (40844). DE SIMILITUDINE, CONGRUENTIA, COINCIDENTIA [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept, verworfen: LH 35 I 11 Bl. 40–41. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 40 r°, gestrichen. Auf Bl. 40 v° gestr. Ansatz: „P u n c t u m ita designabimus *A*. *Y*. Continuum“; auf Bl. 41 v°, quer: „maxima debetur“. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 231–233.

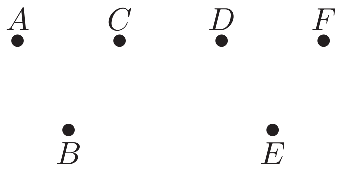
Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678–1682 belegt.

P u n c t u m ita designabimus: A. vel b.



[*Fig. 1*]

Si is est situs inter A et B, item inter C et D, ut servato situ utroque simul coincidere vel succedere possint A ipsi C, et B ipsi D, dicemus $A.B.$ congruere ipsi $C.D.$ sive $A.\ B.$ ♉ $C.\ D.$



[*Fig. 2*]

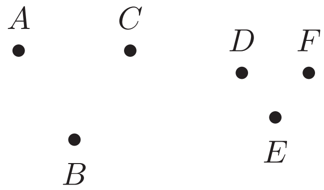
Eodem modo si servato situ inter puncta $A.B.C.$ et inter puncta $D.E.F.$ simul coin-

8+10 P u n c t u m | ita designabimus: *erg.* | A. *(1)* b. C. *(2)* b. *(3)* vel b. *(a)* Duorum punctorum relatio ex | sola *erg.* | ipsorum consideratione determinata A.B. Eodem modo Trium punctorum relatio ex sola ipsorum consideratione determinata; A.B.C et ita porro. Si puncta A.B et C et D eum habent situm inter se *(b)* Si *L* 10 f. coincidere | *(1)* vel *(2)* vel succedere possint *erg.* | *(a)* possint *nicht gestr.* *(b)* A ipsi *L* cidere possint A ipsi D, B ipsi E, C ipsi F, dicemus $A.B.C.$ congruere ipsi $D.E.F.$ seu $A.\ B.\ C.$ ♉ $D.\ E.\ F.$ Et ita porro etiam in pluribus punctis.

[*Fig. 3*]

Si duo puncta plane coincidant inter se, ac nomine tantum distinguantur, hoc ita designabimus: $A \infty B$. Eodem modo $A.\ B.\ \infty\ C.\ D.$ id est $A \infty C$ et $B \infty D$. Idemque est in pluribus.

Si duo quaedam discerni non possint, nisi per comperceptionem, ea dicemus similia.



[*Fig. 4*]

Exempli causa $A.B.C.$ et $D.E.F.$

Nam si quis separatim consideret $A.B.C.$ item $D.E.F.$ ea discernere non potest ratione sine memoria, nullam enim proprietatem vel observationem in uno facere potest, quam non et facere possit in altero, sed si vel ea inter se conferat, simulque percipiat, vel etiam aliquam mensuram habeat communem, id est rem quam primum, cum uno, deinde et cum altero percipit, et in ea re discrimen notat, tum demum eas discernere potest. Unde oculis facile res etiam similes discernit, tum quia ipse certam magnitudinem fundi sui habet, quae pro mensura esse possit, tum quia res alias simul percipit. S i m i l i a itaque sunt, quorum unum per se consideratum ab alio etiam per se considerato discerni non potest, exprimemus autem hoc modo: $A.\ B.\ C.\ \sim\ D.\ E.\ F.$

Hinc manifestum est omnia quae in pura extensione consistunt, si sint congrua esse similia (exempli gratia duos circulos aequalium diametrorum). Nam per se discerni non

15 Unde *(1)* oculi facile res etiam similes discernunt, qvia semper *(2)* oculus *L* 15 qvia *(1)* ipsi certam magnitudinem fundi sui distantiamqve habent, qvae pro mensura esse possint *(2)* ipse *L* 16 simul *(1)* percipiunt *(2)* percipit *L* 19 qvae . . . sint *erg.* *L* 20 nam *(1)* etiam per comperceptionem discerni non *(2)* nec qvidem per comperceptionem discerni *(3)* per *L*

possunt, sed loco tantum discriminantur, id est relatione ad rem externam tametsi enim congruere possent, sive in eodem loco poni, nondum tamen in eodem sunt loco alioqui coinciderent, quare ponemus hanc consequentiam: a ♉ b. ergo $a \sim b$.

Quae vero coincidunt, ea multo magis congrua sunt seu coincidere possunt adeoque et similia sunt. Itaque ita ratiocinabimur: $a \infty b$. Ergo a ♉ b. Item ergo $a \sim b$.

1–3 discriminantur, | id ... enim *(1)* coincider *(2)* congruere ... coinciderent, *erg.* (ut duo diversi circuli aeqvalium diametrorum *erg. u. gestr.* | qvare *L*

73 (40845). PROPOSITIONES DE RECTIS [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 43–44. 1 Bog. 2°. $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 43 r°. Rest des Bogens leer. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 234–236.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678–1682 belegt. **[noch]**

(1): R e c t a est via per duo puncta ex ipsis datis determinata.

fig. 1

AB. $AB9Y$. $3YAB9Y$. fig. 1.
Loco AB scribi etiam potest $A6YB$ et loco $3Y6Y9Y$ scribere soleo $\overline{Y}$.

fig. 2

(2): $A \infty C$, $B \infty D$. Ergo $AB \infty CD$. fig. 2. id est inter duo puncta non nisi unica est recta alioqui enim via haec non est ex datis determinata.

6 est *(1)* via per duobus *(2)* via ... puncta *(a)* data *(b)* ex *L* 9 Loco ... soleo $\overline{\mathrm{Y}}$ *erg. L*

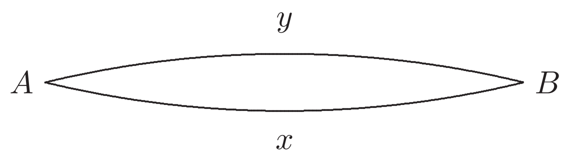


fig. 3

Hinc duae rectae spatium non claudunt. Adeoque duas AyB. AxB. coincidere necesse in fig. 3.

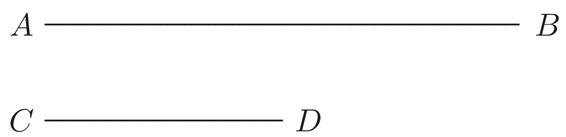


fig. 4

(3): $AB \sim CD$. fig. 4. Seu recta rectae similis est. Nam eodem modo ambae determinantur, ex duobus scilicet punctis, ubi discrimen notari non potest, nisi collatione.

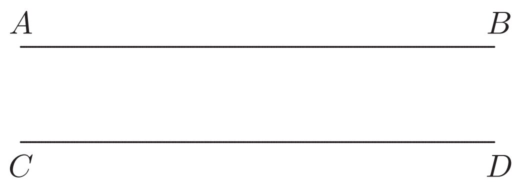


fig. 5

(4): Si $AB \sqcap CD$. erit AB ɤ CD. fig. 5. Nam $AB \sim CD$. (per praeced.). Jam $\sqcap$ et $\sim$ est ɤ.

2 f. Hinc ... fig. 3. *erg. L*

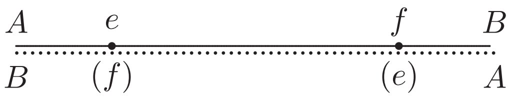
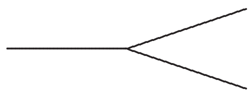


fig. 6

(5): AB ♉ BA. fig. 6.

Nam duo puncta A. B. eodem modo se habent in determinando rectam inter ipsa. Itaque puncto cuicunque e quod refertur ad A. respondet punctum f quod eodem modo refertur ad B. Quae puncta omnia inter se permutari possunt, id est recta inverti potest.



[*Fig. 7*]

(6): D u a e r e c t a e non possunt habere duo puncta communia, nisi produci possint donec coincidant.

2 AB ♉ BA. *(1)* Nam eodem modo ab *(2)* fig. 6. *L*   3 determinando *(1)*, nec discrimen *(2)* rectam *L*   7 nisi *(1)* productae qvantum s *(2)* produci *L*

74 (40846). DE VARIIS RECTAE DEFINITIONIBUS [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 45–46. 1 Bog. 2°. 4 S. halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 237–245.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678–1682 belegt.

[*Fig. 1*]

Si $A.B.Y.$ ♉ $A.B.X$ et ideo $Y \infty X$ erit $\overline{Y} \infty \overline{X}$ Recta id est si ponamus esse Lineam, cujus punctum quodlibet Y. eodem se modo habeat ad duo puncta A. B. quemadmodum se habet punctum aliquod alterius lineae X ad eadem puncta A. B. et hinc sequatur, X et Y. respondentia adeoque et locum omnium Y. seu lineam per Y. cum locis omnium X. seu linea per X. coincidere. Tunc locus omnium punctorum Y. (vel X) dicetur Recta.

Sed adhuc simplicius et generalius enuntiari potest natura rectae hoc modo: Recta

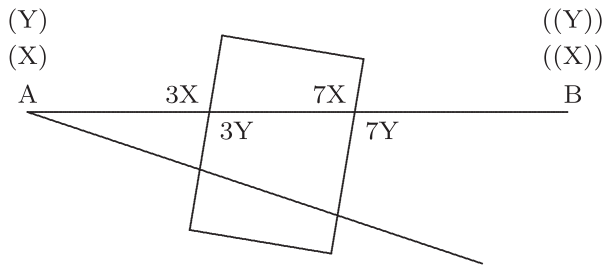
7 *(1)* Punctum est *(a)* cuius *(b)* in extenso, cuius pars nulla est. A. B. *(aa)* Recta est *(bb)* Recta est, qvae per duo puncta (qvantum satis est producta) unica est *(aaa)* seu *(bbb)* Hoc literis ita exprimemus characteristice: *(2)* Si *L* 7 Recta *(1)* Planum est via rectae. Hinc seqvitur duas rectas non habere segmentum *(2)* id est *(3)* id *L* 7 ponamus *(1)* puncta qvotcunqve *(2)* esse *L*

est quae per duo puncta si quantum satis producatur, unica est. Quod ita literis efferemus. Si sit $A \infty (X)$, $B \infty ((X))$, $A \infty (Y)$, $B \infty ((Y))$ sitque ideo $\overline{X} \infty \overline{Y}$. Dicetur $\overline{X} \infty \overline{Y}$ Recta.

Haec rectae expressio eodem reddit cum priore, tantum prior distinctivi est. Posterior enim tantum notat lineas quantum satis productas coincidere; prior vero etiamsi non producantur, duae rectae duo puncta communia habentes, ostendit tamen quaenam pars unius cui parti alterius congruere debeat. Nam duae rectae terminatae possunt habere duo puncta communia, et tamen non coincident, si quidem possunt et partem communem habere. Est tamen posterior expressio generalior, nam, et si puncta X et Y. non eodem modo se habeant ad $A.B.$ modo dicantur in eadem esse recta, cum $A.$ et $B.$ erunt et inter se in eadem recta. Requirit autem haec posterior expressio ut $A.$ $B.$ cum X vel $Y.$ dicantur esse in eadem linea, quod prior non requirit. Sequitur tamen ex priore nam nulla alia reperitur quae eodem modo se habeat ad $A.B.$ quam ipsa $A.$ Idem est de $B.$ Unde sequitur etiam ex priori duo quaelibet puncta esse in eadem recta. Nempe si $A.B.A.$ ♉ $A.B.(Y).$ erit $(Y) \infty A.$ Eodem modo si $A.B.B.$ ♉ $A.B.((Y)).$ erit $B \infty ((Y)).$

Prior tamen definitio demonstrari potest e posteriore. Ponamus enim X esse in eadem recta cum $A.B.$ darique aliud punctum $Y.$ ita ut sit $A.B.Y$ ♉ $A.B.X$ erunt et $A.B.X.$ in una recta. Per puncta enim quae simul congrua sunt prioribus linea duci potest priori congrua, adeoque specie eadem. Itaque et $X.$ et $Y.$ erunt in una recta, alioqui duae rectae $A.B.Y.$ et $A.B.X.$ haberent duo puncta communia.

1 puncta *(1)* unica est *(2)* si *L*   1 f. efferemus. *(1)*



Si sit A ∞ 3Y. B ∞ 7Y. rursus si *(2)* si *L*   3 Recta. *(1)* Si Recta moveatur *(a)* ita ut *(b)* per duas rectas punctum commune *(aa)* communes *(bb)* habentes, via eius dicetur planum. *(aaa)* sint rectae *(bbb)* Sit A ∞ (X) B ∞ ((X)) A ∞ (Y) B ∞ ((Y)) et ideo X *(2)* Haec *L*   10 modo *(1)* sunt in eadem linea, *(2)* dicantur *L*   10 recta, *(1)* coincidere dicentur inter se *(2)* coincident *(3)* cum *L*   13 reperitur *(1)* praeter ipsam A.B. *(2)* qvae *L*   18 ♉ A.B.X. *(1)* erit et A.B.X. recta nam *(2)* erunt *L*

Sed non aeque facile ex priori definitione demonstrari potest posterior. Haec itaque praeferenda est. Accedit quod posterior statim involvit rei definitae possibilitatem. Hoc enim continet, Rectam esse extensum ex duobus punctis datis determinatum, vel viam per duo puncta data ex ipsis datis determinatam. Patet enim datis duobus punctis in spatio, eo ipso determinari ipsorum situm, ad se invicem, sive distantiam quae ab alia distantia aliorum duorum non nisi magnitudine differre potest. Ideoque dari extensum cujus est illa magnitudo. Illud extensum autem sive illa via, utique per duo puncta transit, alioqui nihil ad ipsa pertineret. Est etiam linea tantum, quia per punctum non nisi punctum transire potest, est ergo via puncti. Ex eadem definitione etiam demonstratur Rectam esse simplicissimam, quae a puncto ad punctum duci possit, quia ex simplicissimis datis, nempe duobus punctis solis determinatur. Itaque necesse est partes esse similes toti, atque inter se. Necesse est etiam latera esse similia, sive nullum dari in ipsa concavum vel convexum; neque enim ex his duobus datis determinari potest, quod latus sit concavum quod convexum. Hinc si sumantur duo puncta alia, ad quae eodem modo se habeant duo puncta rectam determinantia, ad ea quodlibet rectae punctum eodem se modo habebit. Imo si talia dentur tria, imo quotcunque. Hinc etiam demonstrari potest Rectam eodem modo se habere ad quodlibet punctum circuli, descriptum a puncto quod durante motu eodem modo ad duo rectae puncta se habet. Et cum per tria quaelibet puncta duci possit circulus. Hinc sequitur Recta q u a l i b e t data inveniri posse tria puncta ad quorum unumquodque eodem modo se habet tota recta.

Tentandum autem, an ista omnia possint et in characteribus demonstrari.

Sint puncta data A. B. Extensum $\overline{Y}$. Extensum hoc ex duobus punctis datum esse,

22–223,6 *Nebenbetrachtung:* A. B. C. significat tria ista puncta. ABC significat id omne quod ex ipsis determinatur, nempe Triangulum. $AB+BC+AC$ significat ambitum hujus trianguli; $AB+BC$ significat summam harum duarum rectarum. $A\underset{\vee}{B}C$ significat angulum rectis AB. BC comprehensum. $C\underset{\vee}{D}E$ $C\underset{\vee}{D}E$. Possis et sic $C\underset{\vee}{D}E$ est angulus planus. Et $\underset{\vee}{D}ABC$ est angulus solidus.

16 imo | qvodcunqve *ändert Hrsg.* |. Hinc *L* 22 data A. B. *(1)* Lineam per ipsa datam, ita poterimus designare *(a)* $\overline{\mathrm{A.B.}\overline{\mathrm{Y}}}$ *(b)* $\overline{\mathrm{A.B.Y}}$ *(2)* linea $\overline{\mathrm{Y}}$ *(3)* extensum *L* **3,21** $\underset{\vee}{\mathrm{C}}\mathrm{DE}$ *(1)* eodem modo $\mathrm{AB}\underset{\vee}{\mathrm{C}}$ $\mathrm{DE}\underset{\vee}{\mathrm{C}}\,\mathrm{FG}$ significat angulum solidum *(2)* possis *L* **3,22** solidus. | possis et sic: $\mathrm{C}\underset{\vee}{\mathrm{D}}\mathrm{E}$ ang. planus $\mathrm{ABC}\underset{\vee}{\mathrm{D}}$ $\mathrm{BC}\underset{\vee}{\mathrm{D}}\mathrm{EF}$ angulus solidus *gestr.* | *L*

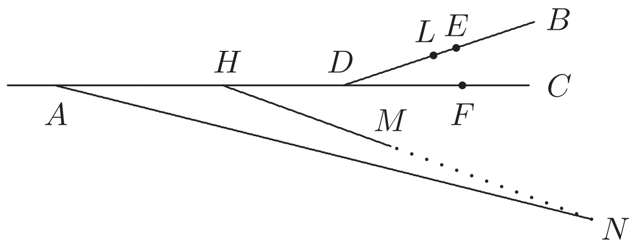
ita poterit designari: $(A.B.\overline{Y}) \infty (A.B.\overline{X})$ vel sic $A.B.$ dat. $\overline{Y}$. Seu existentibus A. B. necessario existit $\overline{Y}$ vel potius; cogitationi oblatis A. B. inde deveniri potest in cogitationem illius Y. nullo alio assumto. Seu potius (quanquam hoc ex praecedenti sequitur), perceptis A. B. simul percipi $\overline{Y}$. Vel naturam ipsius $\overline{Y}$ ex hoc solo explicari: $A.B.\overline{Y}$. Quomodo exprimemus rectae extrema. An sic. $\overline{AYB}$ intelligimus rectam cujus extrema A. B. An ita tantum $A\overline{Y}B$. Hoc sufficere videtur.

An sufficiet scribere AB. quia determinatur ex his duobus A. B. Itaque si scribamus $AB \infty \overline{Y}$ significabimus $\overline{Y}$ esse extensum ex solis A. B. determinatum. Sit $AB \infty CD$. erit $A \infty B$ et $C \infty D$.

$AB \sim CD$. id est CD. est simile ipsi AB. Neque enim determinantium seu datorum habitudine ullum discrimen intelligi potest sigillatim, sed opus est collatione.

Si $AB \sqcap CD$ erit $AB \between CD$. Nam si $AB \sqcap CD$ et $AB \sim CD$ erit $AB \between CD$. Sed ABC non semper $\sim CDE$ etsi enim $AB \sim CD$ et $BC \sim DE$ et et $AC \sim CE$ tamen $AB : BC : AC$. non semper $:: CD : DE : CE$.

Si sit $A \infty C$ et $B \infty D$ erit $AB \infty CD$. Eodem modo in punctis pluribus. Hinc statim patet ex datis duobus punctis determinatam esse inter ea rectam, et non opus est ut postulet Euclides, a puncto ad punctum duci posse rectam, patet enim ex rectae definitione.

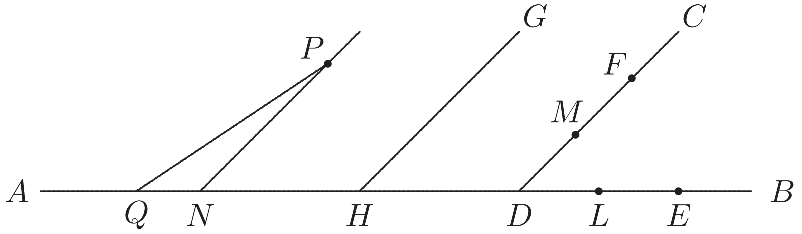


[*Fig. 2*]

6 f. videtur. *(1)* $\overline{\text{Y}}$ autem determinare ex *(2)* An *L* 7 duobus A. B. *(1)* Hinc seqvitur: AB. *(2)* itaqve *L* 8 esse *(1)* lineam *(2)* extensum *L* 8 sit *(1)* AB ∞ Y. *(2)* AB ∞ BC. *(3)* AB ∞ CD. *L* 14 f. :: CD : DE : CE *(1)* sit AB ∞ $\overline{\text{Y}}$ et CD ∞ $\overline{\text{X}}$. sitqve: F ∞ C *(2)* si *L*

17 postulet: EUKLEIDES, *Elementa*, I, post. 1.

Duae rectae AB. AC. non possunt habere partem communem AD. Sumantur ipsius DB pars DE. et ipsius DC pars $DF \sqcap DE$. Erit $ADE \sim ADF$ (est enim $ADE \propto AE$ et $ADF \propto AF$. Jam $AE \sim AF$. Ergo $ADE \sim ADF$). Imo ADE ♉ ADF. Sumatur $DH : HA :: ED : DA$. Erit $ADH \sim ADE$ itemque $ADH \sim ADF$. At AH producta in D dedit unicam HD. Ergo et producta ultra D. debet dare unicam DE.



[*Fig. 3*]

Est tamen difficultas nam fingi potest et ipsam AH in H findi in duas HG. HD. et ita porro ubique. Sumatur $DL.DM. \sqcap HD.HG$. erit LDM ♉ DHG. Itaque si ducatur PN ita ut ang. PNG sit $\sqcap$ ang. FDE. occurrens in H ipsi AN erit ANP una recta. Cumque angulorum omnium par sit ratio, erit omnis recta alteri occurrens cum ipsa una recta. Jam a puncto quodam P. duci potest ad rectam AD ad huc alia PQ. ut sit Q inter A et N. Erit ergo QP recta, et QNP alia recta, quae duae rectae habebunt duo puncta extrema communia, quod posuimus fieri non posse.

Sed demonstrationem hanc confusam ita proponemus distinctius:

[*Fig. 4*]

5+7 unicam DE. *(1)* Continetur in hoc demonstratio sed distinctius evolvenda est: AHD∼ADE ergo DE *(2)* Est *L* 11 f. ut ... et N *erg. L*

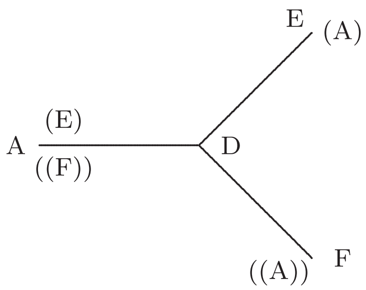
Recta *AD*. producta versus *D* continuari potest duobus modis versus *E* et versus *F*. Ergo *EDF* faciet angulum, et nihilominus *FD*. *ED* continuatae facient unam rectam, ex puncto ad punctum in recta *AD* sumtum *H*. ducatur recta *EH*. *EHD* etiam erit angulus. Et nihilominus, etiam *EHA* et *DHA* facient unam rectam, cum nihil referre possit, quae sit anguli quantitas et nihil intelligi possit, quod determinet cur recta secundum unum potius quam secundum alium se findere possit. Ergo *AHE* et *ADE* erunt duae rectae. Quod est contra priora, habent enim duo extrema communia.

Probatio autem haec etsi firma sit tamen magis Metaphysica est, in eo nixa quod nulla sit ratio pro uno angulo potius quam pro altero. Videamus aliam magis geometricam.

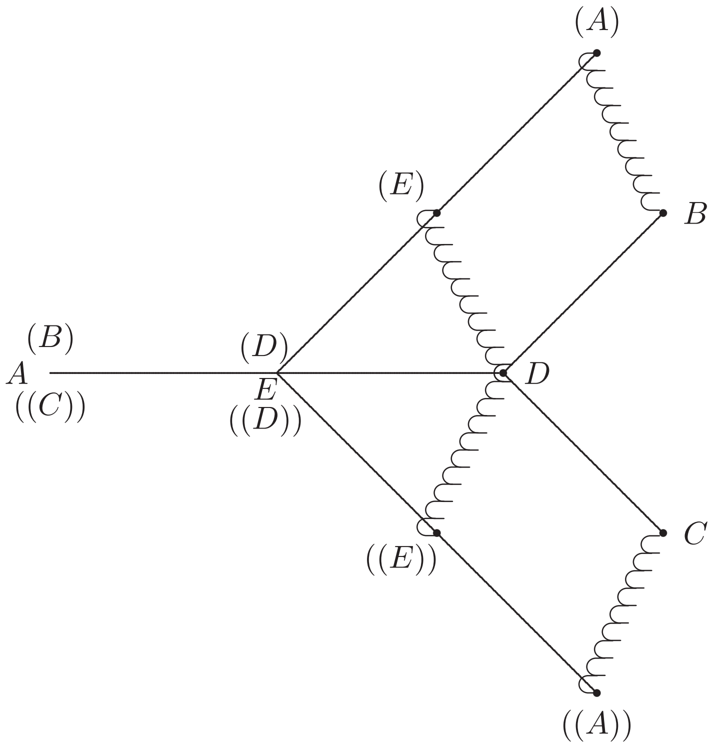
1–3 *Dazu am Rand: ADB*
ADC

2 angulum, *(1)* seu ED faciet angulum ad ADF *(a)* cumqve angulus possit esse *(aa)* qvis sit *(bb)* nihil *(cc)* et nihilomi *(dd)* et *(b)* seu *(c)* cumqve recta ubiqve sit similis findetur *(2)* et *L* 7 f. communia.

(1)



(a) Alia ratione rem probabimus adhuc simplicius: Recta est via determinata ab A ad D. Sumatur in ea punctum H. ergo *(aa)* et AH. *(bb)* etiam hoc determinatum est ut H sit in ea. Ergo et via ab A ad H determinata est. Ergo et AH est recta. Jam recta rectae similis est. Itaqve ut AH producitur unico modo, nimirum versus D. ita et AD producitur unico modo versus E nec *(aaa)* possunt di *(bbb)* potest etiam pro *(b)* Alio modo probabimus, qvod AB ∞ BA AE ∞ EA itemqve FD ♉ FA ♉ AF applicentur simul *(2)* Probatio *L*



[*Fig. 5*]

Sit recta AD. quae produci potest ex D. tum versus B. tum versus C. seu habeant rectae ADB. ADC segmentum commune AD. Ponantur aequales AE. ED. DB. DC. Cum recta quaevis AB vel AC secum ipsa congruat extremis permutatis. Invertatur recta $AEDB$. ita, ut inversa sit, recta $(C)(D)(E)(A)$ itemque invertatur recta $AEDC$ ita ut inversa sit recta $((C))((D))((E))((A))$. Congruent $A.(B).((C))$ item $B.(A)$ item $C.((A))$ item $D.(E)((E))$ item $E.(D)((D))$.

Nam $(B)(D)$ ♉ AE. $(D)(E)$ ♉ ED. $(E)(A)$ ♉ DB
$((C))((D))$ ♉ AE, $((D))((E))$ ... $(E)((A))$ DC.

Ergo BDE congruit AD, et CDE congruit AD. Ergo EDB et EDC congrua sunt. Quod et jam aliunde ex eo constabat quia duae quaelibet rectae aequales congruae sunt.

Ergo BDE ♉ AD ♉ CDE quod aliunde patet.

5 f. recta | ((B)) *ändert Hrsg.* | ((D))((E))((A)) *L* 10 Ergo *(1)* EDB *(2)* EDB congruit rectae BDE (BDE) congruit rectae AD *(3)* BDE *L* 11 f. sunt. *(1)* Jam AE(E)((E)) ♉ E *(2)* Ergo *L* 12 qvod aliunde patet *erg. L*

$AE \begin{cases}(E)\\((E))\end{cases} \between ED \begin{cases}B\\C\end{cases}$ et $(E) \propto ((E))$. Ergo $B \propto C$.

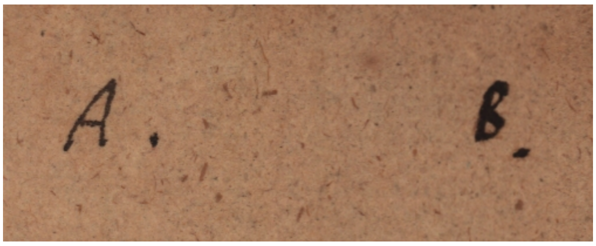
Ostendendum solum esse $AE \begin{cases}(E)\\((E))\end{cases} \between ED \begin{cases}B\\C\end{cases}$.

$$\begin{array}{ll} BDE\cancel{A} \between AE(E)(\cancel{A}) & CDE\cancel{A} \between AE((E))((\cancel{A})) \\ EDB \quad \between AE(E) & EDC \quad \between AE((E)). \end{array}$$

75 (40847). ELEMENTA NOVAE CHARACTERISTICAE
[1678 – Mitte September 1679]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 47+50. 1 Bog. 2°. $3\frac{1}{2}$ S. — Gedr.: 1. ECHEVERRÍA, *La Caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 255–263; 2. (mit frz. Übers.) ECHEVERRÍA/PARMENTIER, *La Caractéristique géométrique*, 1995, S. 234–245.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678–1682 belegt. N. 75 (40847) gehört zu den Vorarbeiten für die Beilage (III, 2 N. 347) zum Brief an Chr. Huygens vom 8.(18.) September 1679 (III, 2 N. 346).



[*Fig. 1*]

A designat punctum *A*. et *B* designat punctum *B*.

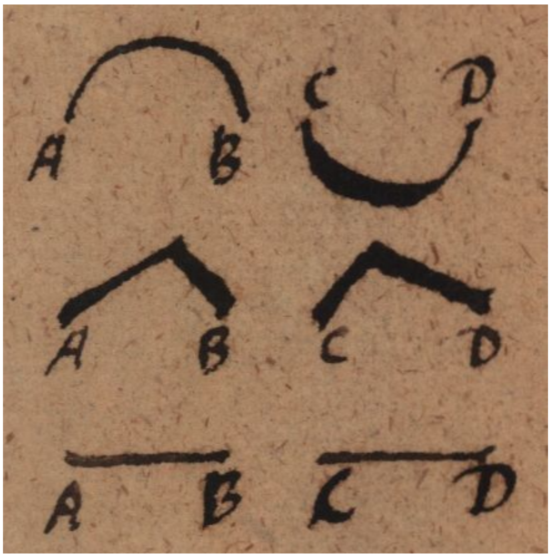
[*Fig. 2*]

A.B significat situm punctorum *A* et *B* inter se seu extensum aliquod ipsa connectens (rectilineum aut curvilineum nil refert); quod quamdiu non mutatur etiam situs duorum punctorum inter se, manet idem.

A.B.C. significat eodem modo situm trium punctorum *A* et *B* et *C* inter se, seu extensum rigidum ipsa connectens. Atque ita porro de pluribus punctis intelligi potest idem.

[*Fig. 3*]

Signum ♉ significat congruentiam. Ita A ♉ B significat punctum A congruere puncto B. sive pro ipso ita substitui posse, ut nullum discrimen appareat. Est autem vera semper haec propositio A ♉ B nam quodlibet punctum congruit cuilibet.



[*Fig. 4*]

$A.B$ ♉ $C.D.$ significat situm inter puncta A et B eundem esse, qui est situs inter puncta C et D sive extensum quod ipsa A et B connectit, connectere etiam posse ipsa C et D, vel aliud extensum congruum extenso connectenti puncta A et B etiam connectere posse puncta C et D. Vel ut aliter enuntiem puncta A et B servato situ vel extenso rigido connectente transferri posse in locum punctorum C et D.

[*Fig. 5*]

Hic notari debet haec Propositio semper vera: $A.B$ ♉ $B.A$ seu idem est situs ipsius A ad B, qui ipsius B ad A; quoniam situs eorum inter se est relatio, in qua nullum involvitur inter ipsa puncta discrimen, et ipsa puncta jam per se nullum discrimen habebant, quoniam semper congrua sunt. Hinc etiam reciproce unum in alterius locum transferri potest servato situ, ut $A.B$ in $(A).(B)$.

[*Fig. 6*]

$A.B.C.$ ♉ $D.E.F.$ significat $A.B.$ ♉ $D.E.$ et $A.C.$ ♉ $D.F.$ et $B.C.$ ♉ $E.F.$ sive situs punctorum $A.B.C.$ dicitur esse idem qui punctorum $D.E.F.$ si situs punctorum $A.$ et $B.$ sit idem qui punctorum D et $E.$ et punctorum A et C idem qui punctorum D et F; et denique punctorum B et C idem qui punctorum E et F. Nimirum, si puncta $A.B.C.$ servato quem inter se habent situ transferri possunt in locum punctorum $D.E.F.$ eo quem posui ordine, sic ut A succedat ipsi D, et B ipsi E, et C ipsi F utique et $A.B.$ successit ipsi $D.E.$ et $A.C.$ ipsi $D.F.$ et $B.C.$ ipsi $E.F.$ vel si $A.B.C.$ congruunt ipsis $D.E.F.$ servato situ, congruent $A.B$ ipsis $D.E.$ et $A.C.$ ipsis $D.F.$, et $B.C$ ipsis $E.F$; servato semper situ. Idem est etsi plura assumantur puncta ut si dicatur esse $A.B.C.D.$ ♉ $E.F.G.H.$ Nam punctis respondentibus ut lubet assumtis verbi gratia illinc B et D hinc F et H, erit $B.D$ ♉ $F.H$ et eodem modo duo quaecunque (inter quatuor priora) assumta puncta, duobus ordine respondentibus, in alio latere (inter quatuor posteriora) sumtis punctis, congruum habebunt situm.

Hinc si sit $A.B.C.D$ ♉ $E.F.G.H$ erit etiam $A.B.C$ ♉ $E.F.G$ et $A.B.D.$ ♉ $E.F.H$ et $A.C.D.$ ♉ $E.G.H.$ et denique $B.C.D$ ♉ $F.G.H.$ Nam quia $A.B$ ♉ $E.F$ et $A.C$ ♉ $E.G$ et

$B.C$ ♉ $F.G$ sequitur et $A.B.C$ ♉ $E.F.G$ per praecedententem. Eodem modo et quaevis alia ternio demonstratur.

Caeterum ex Quaternione quidem una demonstrantur omnes terniones, et omnes biniones. Et ex una ternione demonstrantur omnes biniones; sed quaternio ipsa non potest concludi nisi ex omnibus suis binionibus aut ex omnibus suis ternionibus. Similiter ternio non demonstratur nisi ex omnibus suis binionibus. Ita cum trium rerum tres sint biniones, opus est tribus congruentiis binionum, antequam concludi possit congruentia in ternione. Nempe si sit $A.B$ ♉ $E.F$ et $A.C$ ♉ $E.G$ et $B.C$ ♉ $F.G$ concludi potest esse $A.B.C$ ♉ $E.F.G$; similiter quia quatuor rerum sex sunt biniones, ideo sex opus congruentiis in binionibus antequam concludatur congruentia in quaternione; nempe si sit $A.B$ ♉ $E.F.$ et $A.C$ ♉ $E.G$ et $A.D$ ♉ $E.H$ et $B.C$ ♉ $F.G$ et $C.D$ ♉ $G.H$ concludi potest esse $A.B.C.D$ ♉ $E.F.G.H$ quod si vel una binio defuisset, vi formae non processisset. Conclusio similiter ex ternionibus omnibus supra enumeratis concluditur quaternio. Sive si sit $A.B.C$ ♉ $E.F.G$ et $A.B.D$ ♉ $E.F.H$ et $A.C.D$ ♉ $E.G.H$ et $B.C.D$ ♉ $F.G.H$ erit $A.B.C.D$ ♉ $E.F.G.H$. Idem est in combinationibus altioribus.

Ex his congruentiis determinari possunt variae extensorum species, seu Loca punctorum, ubi puncta quidem constantia exprimam literis alphabeti prioribus, ut A aut B aut C. Sed puncta variantia posterioribus, ut X aut Y aut Z.

Simplicissimus idemque maxime illimitatus locus est locus omnium punctorum in universum, sive ipsum spatium infinitum quia quodlibet totius universi punctum dato puncto congruit. Itaque si sit congruentia: A ♉ Y locus omnium Y erit Spatium Infinitum.

Possunt etiam diversa ejusdem loci puncta variantia inter se conferri, unum appellando Y. alterum (Y). Ita si sit Y ♉ (Y) locus ipsorum Y vel (Y) erit etiam spatium infinitum, ejus enim duo quaelibet puncta congruunt inter se, et quaecunque duo puncta congruunt inter se (id est quaelibet) ea etiam sunt in hoc spatio.

Proximus post locum omnium punctorum locus est locus omnium plagarum; quae est locus omnium punctorum eundem situm habentium ad punctum datum. Itaque si sit congruentia $A.Y$ ♉ $A.(Y)$. locus omnium Y erit sphaerica. Et sumto in eadem sphaerica superficie puncto quodam constante B, locus idem etiam sic exprimi potest: $A.B$ ♉ $A.Y$. Item sumtis aliis duobus punctis etiam extra sphaeram, eundem inter se situm

---

15 *Randbemerkung:* Haec diligentius excutienda, forte enim in altioribus non opus tot congruentiis, quia puncta quae eodem modo ad quatuor data sunt sita coincidunt inter se.

habentibus, quem A. et B. inter se habent, nempe C et D. prodibit haec congruentia: $C.D$ ♉ $A.Y$. Ex quibus tribus expressionibus media $A.B$ ♉ $A.Y$ optima est, nam postrema opus habet tribus punctis datis, $A.C.D$. cum tamen sufficiant duo in media, nempe A et B. Prima autem quae uno tantum puncto A utitur, exprimit quidem naturam sphaerae in universum, quae circa datum centrum A describi potest, sed non exprimit sphaeram datam.

P l a n u m est locus omnium punctorum ex quibus unumquodque unum eundemque habet situm ad duo puncta data. Sit congruentia $A.X$ ♉ $B.X$ et locus omnium X erit planum. Nulla hic se offert proprietas, qua possint duo quaelibet plani puncta ut X et (X) conferri inter se. Nec jam possibile est plures excogitari combinationes duorum punctorum constantium A. et B, et unius variabilis seu indeterminati X, ad congruentiam constituendam aptae quam hae duae: $A.B.$ ♉ $A.X$ quae est ad sphaericam, et $A.X$ ♉ $B.X$ quae est ad planum. Si vero duo adhibeas indeterminata: X et (X). possunt plures excogitari, ut: $A.X$ ♉ $A.(X)$ ad sphaericam. $A.X$ ♉ $B.(X)$ quae est impossibilis, nisi A et B coincidant, alioqui eadem sphaera diversa haberet centra A et B; aut erit ad puncta definita.

$A.B.X$ ♉ $A.B.(X)$ est ad lineam circularem, ejus enim puncta quaelibet ad duo quaedam constantia, eodem modo se habent. Verum non exprimitur magnitudo circuli sive circulus aliquis datus, sed tantum natura circuli in genere, et ita hic exprimendi modus (qui est anticipans, nam alioqui ad circularem exprimendam tribus opus punctis constantibus) eidem subjacet imperfectioni, qua expressio sphaericae supra posita $A.Y$ ♉ $A.(Y)$ quae erit etiam anticipans, quod unum tantum punctum datum A. adhiberet cum alioqui ad sphaeram datam in specie duobus saltem sit opus. Itaque malo semper adhibere expressiones, in quibus est unum tantum punctum indefinitum, quoties eas habere possum. Possunt adhuc aliae excogitari expressiones, ut si circularis referatur ad rectam quae per centrum ejus transit, et ad planum ejus ad perpendicularis; nam recta ad duo quaelibet ejus puncta a plano circuli vel centro ejus aeque remota, eodem modo se habet et dici posset: $X.Y$ ♉ $X.Z$ ponendo X esse puncta circuli, Y esse puncta rectae unius partis, et Z alterius partis; posito esse $A.Z.$ ♉ $A.Y.$ et YZ aequ. $ZA + AY$. Sed haec non sunt hujus loci, supponunt enim jam de rectae proprietatibus actum esse.

Locus omnium punctorum Y quae sese eodem modo habent ad duo puncta data A et B ut tertium punctum datum C, est c i r c u l u s ; expressio congruentiae est: $A.B.C$ ♉ $A.B.Y$. Si scripsissemus: $A.B.Y$ ♉ $A.B.(Y)$ locus quidem fuisset circulus, qui est locus punctorum eodem modo se habentium ad duo puncta data, sed non fuisset circulus datus, sed aliquis tantum (etsi A. et B essent data) ut paulo ante dixi.

Locus omnium punctorum Y. ad quorum quodque tria puncta data $A.B.C.$ sese habent eodem modo est *recta*, ut: $A.Y$ ♉ $B.Y$ ♉ $C.Y$. Cum *de Determinationibus* agemus alia utemur definitione rectae, ex qua iste locus demonstratur, est enim recta, nihil aliud quam linea ex duobus punctis L et M determinata, seu LM. Ponamus jam punctum L eodem modo se habere ad tria puncta A et B et C. Itemque punctum M tunc etiam quodlibet punctum in recta LM contentum eodem modo se habebit ad A et B et C. Ratiocinatio in characteribus erit: $L.A$ ♉ $L.B$ ♉ $L.C$ et $M.A$ ♉ $M.B$ ♉ $M.C$ ergo et $LM.A$ ♉ $LM.B$ ♉ $LM.C$.

76 (40850). AD PRIMAM PRIMI ELEMENTORUM (I) [1678 – 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 53–54. 1 Bog. 2°. 4 S. halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: 1. Echeverría, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 287–294; 2. (mit frz. Übers.) Echeverría / Parmentier, *La caractéristique géométrique*, 1995. S. 266–275.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678–1682 belegt.

Linea est via puncti.

Punctum est quod in spatio situm habet partes non habet. Punctum requiritur ad intelligendum spatium et in eo diversitatem.

Super data recta Triangulum aequilaterum constituere. Constituere figuram super recta dicimus cum recta est figurae latus; itaque ita quoque enuntiari potest. Describere triangulum aequilaterum cujus unum latus sit positione datum. Hoc ita fieri jubetur. Extremis velut centris, radiis inter se et datae rectae aequalibus in eodem cum data recta plano describantur circuli duo, qui sese secabunt in aliquo puncto, ducantur rectae ab hoc puncto ad duo puncta extrema rectae datae habebiturque Triangulum aequilaterum quaesitum. Ostendendum primum hos duos Circulos se secare.

Duo circuli in eodem plano centra mutuo in circumferentiis habentes sese secant.

Si duae figurae sint partes ejusdem superficiei, habeatque una punctum aliquod intra alteram, habebunt duae figurae partem communem. Quod ne opus sit nos de una figura, unaque superficie multis ratiocinari, sic potius concipiemus. Si duae figurae in eadem superficie partem habeant communem, earum extrema sese secabunt. Imo male, ut duo circuli communes.

Si duae figurae partem habeant communem partem propriam earum extrema sese secabunt. [Nam ambitus partis communis et ambitus partis propriae habent partem communem[,] nam semper duae partes ejusdem figurae habent partem ambitus communem.]

Si duae lineae sint in eodem plano, sitque una earum in se rediens seu figuram claudens, altera autem aliquod punctum habeat intra figuram ejus, alquod extra, necesse

10 Super ... constituere: Eukleides, *Elementa*, I, 1. 25 f. [...]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

est haec illam secet. Sed nos non opus habemus sectione, satis est unam alteri occurrere. Itaque sic dicemus: Si duae lineae sint in eodem plano unaque earum spatium claudat, et puncta dua in altera sumi possint, unum extra alterum intra spatium illud; duae lineae sibi alicubi occurrent, seu habebunt punctum commune.

Nam si punctum alicujus lineae planae sit intra figuram planam, erit pars ejus lineae intra figuram planam. Similiter si punctum alicujus lineae planae sit extra figuram planam erit pars ejus extra figuram eandem.

Intra autem esse intelligo punctum quod est commune, nec tamen in ambitu, extra quod non est commune, neque extra ambitum, neque in ambitu. Quod si ergo pars est intra pars extra, mediumque non datur, hae partes se contingent. Adeoque erit punctum quod erit neque intra neque extra, sed in ambitu, id est erit tam ambitus, figurae, quam unius lineae commune seu in eo sibi duae lineae occurrent. Imo etsi daretur medium, id tamen certum est, partem quae est intra, et partem quae non est intra intra, sibi conjungi nam medium non datur. Initium autem quo linea desinit esse, intra figuram intra figuram est in figurae ambitu; ergo linea quae extra figuram egreditur ei occurrit. Sic ergo rem omnem complectemur.

Omnis linea quae figura egreditur manetque in eadem semper superficie, illic egreditur, ubi ambitui ejus occurrit. Imo haec est definitio unitatis superficiei. Sed non est opus ut generaliter loquamur, sufficit in plano.

Omnis linea quae figura plana egreditur, in eodemque semper plano manet, ejus circumferentiae occurrit.

Si punctum aliquod in superficie feratur, donec ad locum priorem redeat, describet lineam *periodicam*, sive in se redeuntem.

Figura terminata est, cum duci potest recta major distantia duorum quorumcunque punctorum in figura.

Punctum in figura esse dicitur quod incidit in viam describentis.

Punctum extra figuram est quod non incidit in viam describentis.

Si duo puncta sunt in figura poterit duci linea ab uno ad alterum intra figura. Quia ducta est superficies ab uno ad alterum intra figuram; nempe ipsa figura, vel aliqua ejus pars, inter quae autem ducta est superficies inter ea ea duci potest linea, quia in omni superficie linea duci potest, ut si secetur ab alia superficie. Eodem modo si duo puncta in eodem solido duci potest linea ab uno ad alterum[,] imo et superficies. Eodem modo duae lineae in eodem solido.

Si duo puncta sint extra figuram manifestum est lineam non posse duci ab uno ad alium intra figuram, nam si linea sit in figura extrema ejus erunt in fgura aut saltem in ejus ambitu. Est enim linea in figura cujus omnia puncta in figura.

Ergo linea a puncto ad punctum ducta, quorum unum est intra figura alterum extra figuram, est partim intra partim extra figuram, medium non datur, ergo partes quae intra quaeque ectra sibi continuae sunt, seu habent punctum commune quod erit neque intra neque extra sed in ipso ambitu figurae. Si qua linea tota jacet intra duas figuras habebunt eae figurae partem communem.

Linea: $1a2a3a$.

Superficies: $11a12a13a$ etc. $21a22a23a$ etc., $31a32a33a$ etc., etc.

Corpus : $111a112a113a$ etc., $121a122a123a$ etc., $131a132a133a$ etc., etc.,,
$211a212a213a$ etc., $221a222a223a$ etc., $231a232a233a$ etc., etc.,,
$311a312a313a$ etc., $321a322a323a$ etc., $331a332a333a$ etc., etc.,, etc.,,,

Continuum est cujus partes habent terminum communem.

Extensum est continuum cujus partes simul existunt.

Punctum est quod terminus extensi est, partes autem non habet.

Linea est quod partes habet quarum termini communes sunt puncta.

Superficies est quod partes habet, quarum termini communes sunt lineae.

Corpus est quod habet partes quarum termni communes sunt superficies.

Corpus non potest esse duarum ejusdem rei partium terminus communis. Nam Terminus communis nullum habet punctum quod non in extremum sit secundum aliquem

---

1 f. Linea minima quae duci possit in sphaerica superficie circularis est, quaeritur qualis sit linea minima quae in Cylindrica vel Conica superficie a puncto ad punctum duci possit.

modum; atque ita quodlibet punctum in linea superficieve simul duorum extremum esse potest. At in corpore dantur puncta quae extrema non sunt seu quae moveri non possunt ita ut corpus statim egrediantur.

P u n c t u m est extensi terminus qui extensus non est.

S o l i d u m est extensum in quo punctum aliquod ita moveri non potest ut statim egrediatur.

77 (40851). AD PRIMAM PRIMI ELEMENTORUM (II)
[1678 – 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 55–56. 1 Bog. 2°. 4 S. halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 295–301.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678-1682 belegt.

S u p e r d a t a r e c t a T r i a n g u l u m a e q u i l a t e r u m c o n s t i t u e r e. Seu describere Triangulum aequilaterum cujus unum latus sit recta data.

Constructio. Duobus rectae datae extremis velut centris, radiisque ipsi rectae datae aequalibus in eodem plano describantur circuli duo; quorum peripheriae occurrunt sibi alicubi, a puncto occursus ducantur rectae ad extrema data, quae erunt duo reliqua latera Trianguli quaesiti. Demostrandum est autem p r i m o quod duae peripheriae sibi occurrent; d e i n d e , quod hae duae rectae a puncto occursus sint aequales.

Prius ita demonstratur: Peripheria dextra habet punctum in centro sinistrae, nam ex centro dextrae radio cujus extremum est centrum sinistrae, describitur dextra; extremum autem radii est in peripheria, ergo centrum sinistrae est in peripheria dextrae. Vel peripheria dextra habet punctum in centro sinistrae. Rursus peripheria dextra habet punctum quod distat a centro sinistrae distantia diametri nempe punctum in peripheria dextra centro sinistrae in eandem peripheriam cadenti oppositum. Jam quod a centro abest diametro est extra peripheriam, ergo peripheria sinistra habet punctum extra dextram. Omnis autem linea quae in eadem superficie habet punctum intra peripheriam seu lineam periodicam, et extra eam[,] ei occurrit illic ubi ex ea egreditur, ergo peripheria dextra sinistrae occurrit.

Generalius: Super recta positione data triangulum isosceles construere, cujus crurum longitudo sit magnitudine data radiis rectae magnitudine datae aequalibus. In plano eodem cum recta positione data circa hujus extrema velut centra circumactis describantur circuli, qui si possibile est problema, sese secabunt: Ex aliquo intersectionis puncto ducantur rectae ad duo centra, habebiturque Triangulum Isosceles quaesitum.

Quaeritur analysis: Proponitur construendum triangulum isosceles, cujus data est basis, dataque est longitudo crurum, quorum dantur extrema positione. Jam data rectae

6 f. S u p e r ... c o n s t i t u e r e : EUKLEIDES, *Elementa*, I, 1.

longitudine, et extremo ejus positione, datoque plano, datur circulus, in quod cadet alterum rectae extremum. Datur ergo punctum in Circulis duobus positione datis, ergo ipsum positione datur. Sed necesse est circulos se secare, id est cum in Triangulo duo latera sint tertio majora, necesse est ut crus sit majus dimidia basi.

Eodem modo res demonstratur generaliter si construendum sit Triangulum ex tribus datis rectis, quarum una si placet sit positione data, id fieri posse, modo duae quaelibet simul sint tertia majores. Quod ex eo patet, quia recta est minima inter duo puncta. Semper autem generalis erit demonstratio, quod peripheriae sibi occurrent, peripheria unius partim erit intra peripheriam alterius, partim extra.

Duobus ejusdem corporis continui punctis quiescentibus totum corpus moveri potest. Nam uno tantum corporis puncto quiescente, corpus moveri potest variis modis; itaque spatium quod motu illo designatur non est determinatum; itaque adhuc aliud quicquam poni potest, nihil atem est simplicius quam unum adhuc punctum quiescens, itque duobus corporis alicujus punctis immotis, corpus ipsum moveri potest.

Lineae rectae generatio, circularis item

Si corpus quodcunque moveatur duobus punctis immotis, puncta immota incident in rectam, puncta mota describent circulum.

Ita habeamus postulata Euclidis omnia eadem opera effecta.

Si linea flexilis diducatur; quantum fieri potest, salva longitudine, generabitur linea recta.

Cum ejusdem rei sint variae generationes, definitio accurata non continebit generationem aliquam specialem.

Linea recta est, quae datis duobus punctis determinata est, nam in corpore aliquo moto datis duobus punctis immotis, quod fieri posse ostendimus[,] necesse est aliquam lineam esse immotam, quia nulla est causa cur haec duo tantum puncta existente motu praesenti sint immota. Haec autem linea ex his duobus punctis assumtis est determinata; nam his duabus assumtis qualecunque sit corpus determinatus est motus totius et puncta immota, tam haec duo quam alia quotcunque. [Praeter lineam autem nihil determinari potest per duo tantum puncta.] Habemus ergo lineam ex datis duobus punctis

3 f. cum ... majora: Vgl. *a. a. O.*, I, 20. 5–7 construendum ... majores: Vgl. *a. a. O.*, I, 22. 7 recta ... puncta: Vgl. Archimedes, *De Sphaera et cylindro*, I, post. 1. 18 postulata: Eukleides, *Elementa*, I, post. 1 u. 3. 19 f. Si ... recta: Vgl. Heron, *Definitiones*, 4. 28 f. [...]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

determinatam, id est rectam.

L i n e a r e c t a e s t m i n i m a i n t e r d u o p u n c t a seu est determinata magnitudine, nam maxima nulla datur, et minima sola est determinata.

Linea recta sibi congruit iisdem existentibus terminis, seu duobus extremis coincidentibus reliqua coincidunt; seu linea recta est determinata positione ex datis duobus punctis.

Planum ex datis tribus punctis determinatum est, seu non est in arbitrio, tribus assumtis adhuc aliud assumere, quod sit cum illis in eodem plano.

2 L i n e a ... p u n c t a : Vgl. ARCHIMEDES, *a. a. O.*

78 (40854). DE TOTO ET PARTE
[1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 12 Bl. 4–5. 1 Bog. 2°. 4 S. halbbrüchig beschrieben mit Ergänzungen. Textfolge 4 r°, 4 v°, 5 r° linke Spalte, 5 v°, 5 r° rechte Spalte. — Gedr.: Echeverría, *La Caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 328–336.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678–1682 belegt. [**noch**]

C o n t i n u u m est [totum], cujus partes habent terminum communem sive, est habens partes terminum communem habentes.

P a r s est homogeneum immediate requisitum.

T o t u m est homogeneum immediate requirens.

H o m o g e n e u m est, quod secundum aliquod a t t r i b u t u m p o s i t i v u m a b s o l u t u m simile est sive discerni non potest. Sive H o m o g e n e u m est, quod eandem habet F o r m a m.

F o r m a est attributum positivum absolutum, ut extensio, duratio, albedo.

H o m o g e n e a sunt quae nisi compraesentia discerni non possunt, vel quorum partes nisi compraesentia discerni non possunt.

P a r s est requisitum immediatum.

H o m o g e n e a sunt, quae possunt esse requisitum immediatum ejusdem.

R e q u i s i t u m i m m e d i a t u m est, A ipsius B, si propositio haec: S i A n o n e s t B n o n e s t; demonstrari non potest; nisi per aliam, quae simili ratione demonstrari poterat per aliam, et ita in infinitum; ita tamen ut ab initio statim aeque potuissemus assumere conclusionem, quam principia.

---

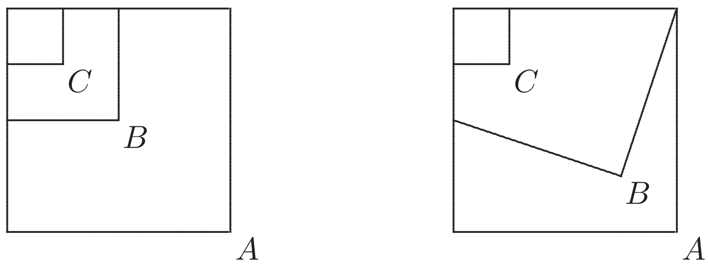
11 f. *Über* a t t r i b u t u m p o s i t i v u m a b s o l u t u m: f o r m a m.

7 sive, *(1)* si qvid habet partes *(2)* est *L* 11 secundum *(1)* aliqvam considerationem positivam *(2)* aliqvod *L* 20 potest; *(1)* seu per se nota est. Hoc autem intelligo ita *(2)* nisi *L*

---

7 [. . .]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

Exempli causa:



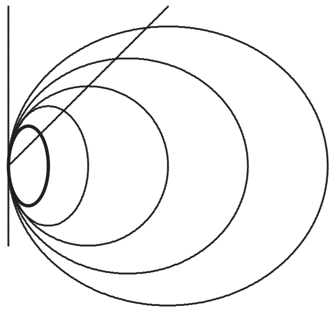
[*Fig. 1*]

C est requisitum ipsius *A*. Hoc demonstrari potest, quia *C* est requisitum ipsius *B* et *B* ipsius *A*. Sed quia infinitis modis fieri potest haec assumtio, et unum sua natura aeque manifestum est ac alterum, Hinc requisitum ejusmodi pro indemonstrabili habetur: Habemus ergo tandem ubi pridem fingamus. Nimirum Pars est requisitum natura simul. Totum est requirens natura simul. Nam si dicas totum productum esse ex partium compositione, pari jure dicemus partem ex toto factam separatione. Id ergo per accidens fit, ut alterum altero prius sit, per se simul sunt.

Cum quaeritur an angulus contactus sit magnitudo, apparet adhuc aliquid ad magnitudinis atque adeo etiam totius et partis rationem desiderari. Nam quaeritur mensura quaedam communis anguli rectilinei angulique contactus, itemque angulorum contactus inter se; tametsi non quaeratur mensura quaedam exacta, hujusmodi tamen aliquid desideratur, ut a residuo perpetuo aliquid abscindi possit, quod metiatur reliquum totum.

Requiri etiam videtur modus quidam producendi communis, et per accidens limitatus; ut in angulo rectilineo producendo, est motus rectae super alia immota cui in uno puncto conjuncta manet, in eodem plano. Equidem in angulis contactus apparet infinitos assumi posse, qui sese continent, et quorum unus haberi potest pro toto, alter pro parte, sed nulla origo communis intelligi potest, nec ulla mensura. Itaque si totius partis, magnitudinisque naturam ita concipere volumus, ut excluduntur hujusmodi quae generationem habent diversam, adhuc amplius meditandum est.

20 ut *(1)* ad *(a)* contempla *(b)* theo *(2)* excluduntur huiusmodi *(a)* heterogenea *(b)* qvae *L*



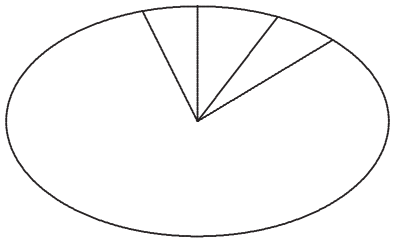
[*Fig. 2*]

Si quis esset modus continua quadam uniformique operatione curvandi circulum majorem in minorem, usque dum evanesceret in punctum, haberetur quidam modus aestimandi angulos contactus inter se non tamen eos comparandi cum rectis, videndum tamen an assumi posset mensura communis, et non posset, ut in arcubus Ellipticis.

Hinc patet posse quodammodo considerationem subire, eodem modo ut arcus cujusdam curvae, sed possemusne curvam exhibere eadem aliqua regula descriptam, quae repraesentaret relationes horum angulorum inter se; idque ita ut si alio quodam modo curvaturam continuam efficeremus, conferendo hos duos modos, novamque ita efficiendo curvam, ea arcus habitura esset prioribus proportionales.

Hoc non puto. Itaque nec ideo efficietur angulos contactus esse quantitates; quemadmodum aliud est comitari, aliud proportionale esse, ut sinus arcubus sunt comites, at non proportionales. Itaque patet distingui quidem hoc modo posse a se invicem, non vero posse repraesentari, nisi reperiamus aliquam mensuram communem, in ipsis angulis contactus; prorsus ac angulos Ellipticos non possumus exhibere, vel considerare ut quantitates arcubus proportionales.

2 operatione *(1)* affici *(2)* curvandi *L* 6 f. arcus *(1)* Ellipseos *(2)* cuiusdam curvae, *(a)* possemus enim curvam exact *(b)* sed *L* 10 f. prioribus | proportionalis *ändert Hrsg.* | *(1)*, aut necesse esset eff *(2)* Hoc *L*



[*Fig. 3*]

Concludo ergo; opus esse semper mensura quadam, mensura autem est, quod congruere potest, repetitum; et a residuo rursus abscindi potest quod congruit; itaque Requisitum immediatum sive contentum, et Requirens immediatum, sive continens, considerabimus ut genus, partem autem et totum, ut species. Itaque angulus quidem contactus continet angulum alium contactus, continetur etiam in angulo rectilineo; estque unus alterius requisitum immediatum, et dubitari potest initio, an non sint ut pars et totum; seu an non inveniri possit communis mensura seu an non inveniri possit in uno, quod congruum sit in altero infinitis modis illimitatis, sed ubi apparet, id fieri non posse, non dicemus unum alterius ratione esse totum aut partem.

Est enim Totum, continens homogeneum, Pars, contentum homogeneum. Homogenea sunt quorum contenta infinitis modis congrua sunt. Seu quorum contenta congrua sunt indefinite. Si quis tamen velit, ubi continens et contentum, ibi esse, majus, minus, differentiam regulasque excessus et defectus, per me licebit, sed ratio vel proportio ibi nulla erit. Atque ita certe faciemus, habet enim et in angulis contactus locum majus minus, excessus defectus, differentia, imo et aequalitas, sed non locum habet ratio seu proportio, nec habet locum aequalitas inter dissimilia. Imo videtur et illa locum habere posse certis compositionibus. Sufficit ergo, rationem habere locum non posse. Itaque majus minus, totum pars mensuram non includunt sua natura;

15–17 *Daneben:* NB.

3 congruit *(1)*; ita u *(2)* Pars est requisitum immediatum homogeneum Totum est requirens immediatum homogeneum Homogeneum est s *(3)* itaqve *L* 16 defectus, *(1)* continens, conte *(2)* differentia *L*

congruitate tamen quadam opus est ad definiendam aequalitatem.

T o t u m est requirens immediatum. Imo videtur in toto discreto assignari modus quidam atque ordo totorum et partium.

P a r s est requisitum non existentiae sed essentiae. Toto intellecto eo ipso jam intelligitur id omne quod in parte intelligi potest in quo totum et pars conveniunt.

Totum et pars conveniunt in aliquo, pars est requisitum totius.

Pars rursus intelligi potest totum secundum alia quaedam quae rursus tam ipsi quam primo toti conveniunt. Videndum an hoc necesse. Non videtur. Aliquando non tamen semper Totum rursus secundum idem similitudinis fundamentum intelligi potest pars.

Ejusdem totius plures sunt partes. Si pluribus intellectis eo ipso intelligatur unum, id erit totum.

P a r s est requisitum immediatum seu quod requisitum esse demonstrari nequit, vel potius Pars est requisitum quod tale intelligi potest immediate. Etsi enim forte et immediate intelligi seu tale demonstrari possit, si aliud fuisset assumtum; potuit tamen et hoc assumi.

Partes sunt quae fieri possunt requisita cum aliis ad unum concipiendum ut jam existens.

Si A sit pars et B totum, tunc necessaria erit haec propositio, Si A non est, B non est. Non tamen necessaria erit haec propositio: Si A est, B est. Haec tamen propositio Si A non est B non est, vel non poterit demonstrari, vel si poterit demonstrari non poterit nisi ob certam factam positionem pro arbitrio, secundum nos.

Si pars non existit, totum non existit.

Si pars existit, non ideo totum existit.

Si quid dicitur pars alicuius totius, dicetur ob rationem, ob quam et aliud quippiam

3 f. partium. *(1)* An ergo: Totum est reqvisitum *(2)* Totum *(3)* P a r s *L* 6 aliqvo, *(1)* secundum qvod totum et p *(2)* pars *L* 10 f. pars. *(1)* Si ad *(a)* idem *(b)* unum | percipiendum *erg. u. gestr.* | reqvirantur plura qvae conveniant in aliqvo et inter se, et illi uni *(2)* Si pluribus perceptis aliqvod aliud necessario perceptum sit *(3)* Pars omnis *(4)* Ejusdem *L* 13 f. neqvit, *(1)* sed ex *(2)* nisi per aliud, qvod reqvi *(3)* vel *L* 16 f. assumi. *(1)* pars est, qvod intelligi | esse *erg.* | potest reqvisitum concipiendi *(2)* partes sunt *(a)* reqvisita plura ad concipiendum unum *(b)* qvae *L* 19 tunc *(1)* vera *(2)* necessari *(3)* vera *(4)* necessaria *L* 19 f. B non est. *(1)* item vera erit haec propositio: *(2)* non *L* 21 non poterit *erg. L* 23 f. existit, | necessario *erg. u. gestr.* | totum non existit. *(a)* est necessaria *(b)* Si *L* 24 non *(1)* necessario *(2)* ideo *L* 25 pars | alicuius totius *erg.* | , dicetur ob *(1)* causam *(2)* rationem *L*

dicitur pars ejusdem totius.

Si quid requiritur ad aliud ut pars nihil aliud requiritur quam ejus existentia.

Si in pluribus nihil aliud requiratur quam ut existant, ad hoc ut unum aliquod existat, illa plura dicuntur partes, et unum illud dicitur Totum seu si pluribus existentibus eo ipso existat unum, illud unum erit totum, plura erunt partes. At quomodo id applicabimus ad partes horae quae non coexistunt. Potest, quia non requisivimus, ut coexistant.

Secundum hanc definitionem etiam Deus, angelus, corpus, conficient unum totum, velut ex his tribus aggregatum.

Hinc patet in Toto requiri, ut ejus existentia demonstretur ex sola existentia partium; non vero ex eorum mutatione. Addendum aliquid: Si pluribus rebus existentibus existat totum, unaque ex ipsis non existente non existat; aliqua tamen ex illis sine una illa existere possit.

Si quid sit requisitum immediatum alterius, dicetur Pars, requirens vero dicetur Totum.

Requisitum immediatum voco, quod assumi potest sine demonstratione. Intelligo autem ut sint diversa. Nam si unum sint tunc non se habebunt ut totum et pars, sed ut subjectum et praedicatum.

Intelligo autem ut requisitum et requirens non se habeant ut res et modus.

An sic potius; Requisitum intrinsecum diversum; seu quorum alterum de altero praedicari non potest; imo etsi se haberent, ut res et modus tamen possent constituere unum aggregatum, ut Deus, sapientia, punctum constituun aggregatum ex his tribus. Quod vocabitur *A*. Hujus *A* poterimus intelligere praedicata quaedam, nullas tamen operationes.

Pars est requisitum intrinsecum diversum.

Quomodo explicabimus intrinsecum ut excludatur calor in igne.

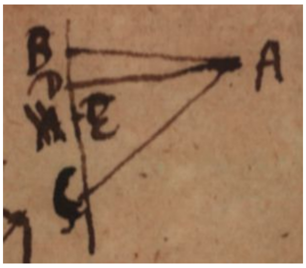
Pars est requisitum diversum.

11 pluribus |rebus *erg.*| existentibus *(1)* eo ipso existat unum *(2)* existat *L* 12 existat *(1)* idqve p *(2)* et assumi possit velut aliqvid per se patens *(3)* et hae propositiones assumi posint, velut primae *(4)* Una tamen sine alia existere possit; *(5)* aliqva *L* 14 *(1)* Si plura existant *(a)* et ex illis aliqvod *(aa)* sine aliqvo *(bb)* existere possit, altero non existente *(b)* et sine ratiocinatione hinc dicatur existere unum aliqvod *(2)* Si plura sint reqvisita |sufficientia *erg.*| unius, et omnia sint *(3)* Si *L*
27 reqvisitum *(1)* constituens *(2)* diversum *L*

79 (40860). DE SEGMENTIS RATIONALIBUS IN TRIANGULO [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 12 Bl. 10. 1 Bl. 8°. 1 S. auf Bl. 10 r°. Auf Bl. 10 v° Fragment einer Figur.

Datierungsgründe: **[noch]**



[*Fig. 1*]

Si BC sit rationalis, et AB, AC sint potentia rationales et ex A agatur normalis in BC, quae sit $[A]D$, erunt ipsae BD, CD, omnino rationales.

Nam si ponatur E punctum medium inter B et C, et erit ED differentia quadratorum ab AB et ab AC applicata ad duplam BC, seu erit $ED = \dfrac{\text{diff. (qu. } AB \text{ et qu. } AC)}{2.BC}$.

80 (40869). ELEMENTA SCIENTIAE GENERALIS DE SIMILITUDINE [1680 – 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 12 Bl. 20–21. 1 Bog. 2°. $3\frac{1}{2}$ S. — Gedr. (tlw.): De Risi, *Geometry and Monadology*, 2007, S. 623 (= S. 252 Z. 1–6 unsres Textes).

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1680–1682 belegt.

Geometrae hactenus de Magnitudine sive de aequali atque inaequali satis diligenter egere, de simili vero et dissimili tantum obiter; cum tamen scientia generalis de rerum formis, sive de similitudine aeque late pateat ac scientia de magnitudine, et Geometria (quae non solum de magnitudine sed et de figura agit) aeque utrique sit subordinata. Elementa igitur scientiae hujus condi posse arbitror, non sine fructu insigni; cujus hic specimen ut opinor non inelegans dabo.

Similia hic definio, quae ejusdem sunt formae. Id est quae aut non omnino, aut saltem sola magnitudine differunt; vel ut rem disctinctius explicem, quae per se sigillatim distingui non possunt.

[*Fig. 1*]

Exempli gratia sint duae figurae $ABCD$, et $EFGH$. Unaquaeque earum attente examinetur per se, exempli gratia comparetur latus BC, minimum prioris figurae cum reliquis tribus lateribus ejusdem figurae, et notetur quae sit ratio

BC	ad	AD.	BC	ad	AB.	BC	ad	CD.
minimi		maximum	minimi		maximo proximum	minimi		minimo proximum

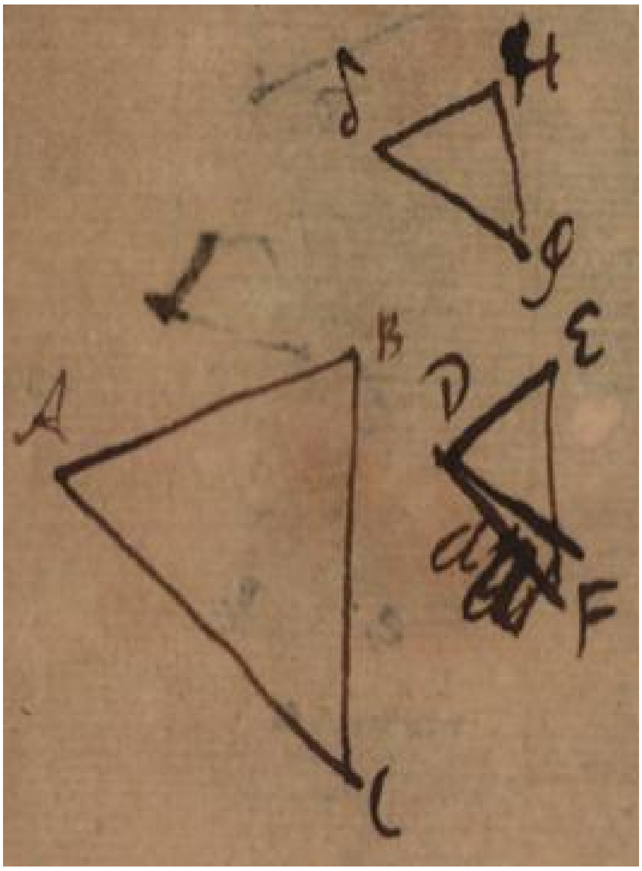
An scilicet ratio sit subdupla, subtripla, sesquialtera, vel alia quaecunque. Eodem modo et anguli ejusdem figurae inter se conferantur; imo et novae ducantur lineae ut AC, quae similiter comparetur caeteris, quemadmodum et anguli inde orti. Et hoc est figuram aliquam considerare per se. Adhibitis illis tantum, quae ex ipsa data, etiam sunt data.

Quod si jam posterior figura similiter examinetur, et eodem plane rationes notentur, tunc nihil est cujus ope figura una ab alia distingui possit, si scilicet unaquaeque sigillatim spectetur, secus est, si comparentur cum loco in quo sunt sita, vel etiam inter se, vel cum tertio quodam. Nam si ambas figuras simul spectare detur, facile apparet unam esse alia majorem, vel saltem si mensuram quandam nunc uni nunc alteri applicem (qualis mensura est etiam ipsum corpus nostrum) tunc etiam distinguentur, etiam si similes sint, modo sint inaequales. Itaque si duas domus ingrediar, sit per omnia similes ita ut eadem materia, eademque servetur symmetria, discernere non potero, nisi forte per fenestram prospiciens viciniam intuear, aut mensurando partes quasdam inaequalitatem cum alterius domus [partibus] similiter antea a me mensuratis deprehendam. Sed hoc discrimen similitudini non obest. Adhibendum est enim ad mensurandum collatio rei cum aliquo extrinseco, ut mensura, ulna, palmo, vel etiam partibus corporis mei. Unde intelligi potest etiam quid sit duas res sola magnitudine distingui; adeoque quae sit ipsius magnitudinis natura. Magnitudinis enim differentia illud est quod duarum rerum inter se, vel tertii cum utraque compraesentia, (ut ita dicam) cognoscitur. Formae vero discrimen unaquaeque re sigillatim ac per se spectata cognosci potest.

Intellecta jam similitudinis natura, videamus an Triangulorum similium proprietatem melius demonstrare possimus, quam ab Euclide factum est. Constat autem inter potissima Geometriae Theoremata hoc esse, quod omnia triangula aequiangula sunt similia, et omnia triangula similia sunt aequiangula. Hoc Euclides post multos circuitus vix demum sexto libro demonstravit postquam jam parallelogrammorum proprietates

32 demonstravit: EUKLEIDES, *Elementa*, VI, 4–5.

tradidisset, quia scilicet omnia ad aequalitatem revocare voluit. Sed quivis facile videt necessarium esse ut idem demonstrari possit methodo quadam magis naturali: Quia haec veritas cuilibet primo statim obtutu patet. Demonstrationem autem ex nostra definitione similitudinis ita conficiemus.



[*Fig. 2*]

Quia triangula ABC, et DEF similia sunt, sive per se sigillatim discerni non possunt necesse est esse Angulos $A : B : C :: D : E : F$ sive esse ut angulus A ad angulum B, ita in altera figura duos respondentes D ad E. Idemque est de caeteris C, F. Nam alioqui discerni possent ex hoc ipso duae figurae sigillatim spectatae, quod in una esset verbi gratia ratio anguli A ad angulum B ut 3 ad 2. in altera vero figura talis ratio non reperietur, quod est contra similitudinis definitionem. Jam quia $A : B : C :: D : E : F$ erit A (vel B vel C) : D (vel E vel F) :: $A + B + C : D + E + F$. Est autem $A + B + C$ aequ. $D + E + F$ quia trianguli tres anguli sunt alterius tribus angulis aequales (ambae enim summae aequantur tribus rectis). Ergo A aequ. D (B aequ. E et C aequ. F) componendo nimirum ac dividendo. Nam quae singula proportionalia sunt, eorum et summae eodem modo proportionales sunt, itaque si summae habeant rationem aequalitatis etiam singula habebunt. Si igitur A aequ. D et B aequ. E et C aequ. F utique Triangula similia aequiangula sunt. In hac demonstratione usi sumus primum definitione similitudinis, ac deinde compositione ac divisione proportionum. Nam scientia similitudinum pariter ac scientia rationum generalis est, et Geometriae praemittenda, quoniam tam lineis quam numeris aliisque rebus communis est. Adhibetur praeterea hic theorema illud facile ab Euclide libro primo demonstratum, quod Trianguli tres anguli sint duobus rectis aequales. Sufficeret autem scire, quod omnium angulorum summa unius Trianguli sit semper aequalis summae angulorum alterius Trianguli.

Proportionis hujus conversa, quod nimirum omnia Triangula aequiangula sint similia ita demonstrabitur. Sint duo triangula aequiangula ABC, DEF ajo esse similia, id est (cum angulos proportionales jam habeant, quia aequales singulos singulis respondentibus) habere etiam latera respondentia proportionalia. Sit aliud triangulum $\delta H\varphi$, et habens latus δH aequale lateri DE Trianguli DEF et simile ipsi $\delta H\varphi$, hoc est ut sit $\delta H : H\varphi : \delta\varphi :: AB : BC : AC$. et sit $A : B : C :: \delta : H : \varphi$. Quale triangulum simile utique haberi potest, possunt enim haberi $H\varphi$ et $\delta\varphi$ quae sint ad δH ut BC et AC ad AB. Quibus junctis fit triangulum latera habens proportionalia. Triangulum autem quod secundum latera consideratum simile est, per omnia simile est, quia ex datis tribus lateribus Triangulum determinatur, jam quod secundum ea per quae determinatur simile est, per omnia simile est, quod axioma est potissimumin hoc argumento. Itaque et secundum angulos simile erit, seu erit $A : B : C :: \delta : H : \varphi$. Habemus ergo triangulum $\delta H\varphi$ simile triangulo ABC. Ergo per praecedentem erit ei aequiangulum, seu erit $A : B : C$ aequ. $\delta : H : \varphi$. Jam ex hypothesi $A : B : C$ aequ. $D : E : F$. Ergo $\delta : H : \varphi$ aequ. $D : E : F$. Jam duo triangula $\delta H\varphi$ et DEF habent angulos respondentes aequales, et unum latus lateri respondenti aequale, δH ipsi DE. Quod scilicet angulis aequalibus F et φ opponitur, ergo Triangula duo $\delta H\varphi$, DEF plane congruunt, quia datis angulis et uno latere datur Triangulum, ut constet ex ipsa Trianguli generatione, describi enim potest his datis. Itaque Triangulum DEF triangulo $\delta H\varphi$ congruum, quod Triangulo ABC simile est, etiam triangulo ABC simile erit.

Haec omnia breviter magisque astricte ita complectemur:

---

1 aequantur: *a. a. O.*, I, 32. 3 proportionales sunt: *a. a. O.*, V, 12. 9 theorema: *a. a. O.*, I, 32. 28 congruunt: *a. a. O.*, I, 26.

Geometria tractat de rerum magnitudine et figura. Itaque duabus scientiis subordinata est, uni de magnitudine in genere ac magnitudinum comparatione sive aequalitate et ratione; alteri de rerum formis in genere sive de rerum similitudine et dissimilitudine. Prior scientia de magnitudine et aequalitate egregie culta est; posterior de formis et simili non aeque. Cujus tamen usus est insignis, quem nunc facili nec ineleganti specimine ostendemus:

D e f i n i t i o : Similia sunt quae si per se sigillatim spectentur eadem exhibent.

A x i o m a 1. Quae secundum ea quibus determinantur similia sunt, ea per omnia similia sunt.

A x. 2. Datis tribus rectis existet quarta proportionalis.

P r o p o s i t i o n e s p r a e d e m o n s t r a t a e

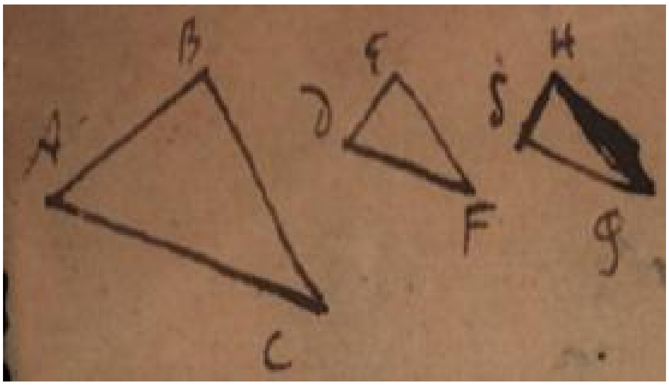
1. Trianguli tres anguli sunt duobus rectis aequales adeoque et duorum triangulorum tres anguli aequales inter se. Hoc facile demonstratur ut factum est ab Euclide.

2. Si singula proportionalia sint summae eodem modo proportionales erunt, sive si sit, $A : B : C :: D : E : F$. erit $A : B : C : A + B + C :: D : E : F : D + E + F$. Hoc pendet ex scientia generali rationum.

3. Dato uno latere et tribus angulis Triangulum magnitudine et specie determinatum est, vel si duo hujusmodi Triangula dentur solo loco differunt sive congrua sunt inter se. Hoc ex eo facile demonstratur quia his datis triangulum certum describi potest, nec ulla nisi loci in quo latus datum ponere velimus electio superest.

4. Datis tribus lateribus triangulum determinatum est patet eodem modo.

T h e o r e m a I. T r i a n g u l a s i m i l i a s u n t a e q u i a n g u l a



[*Fig. 3*]

Sint triangula similia ABC. DEF erunt per defin. anguli $A : B : C :: D : E : F$. Ergo per prop. 2. $A : D :: A+B+C : D+E+F$. Jam $A+B+C$ aequ. $D+E+F$ per prop. 1. Ergo A aequ. D eodemque modo B aequ. E et C aequ. F. Triangula itaque aequiangula sunt. Q. E. D.

Theorema II. Triangula aequiangula sunt similia

Sint triangula aequiangula ABC et DEF. Sit recta δH aequ. DE. et sint aliae, $H\varphi$ (et $\varphi\delta$) ad δH, ut BC, (et CA) ad AB. Per ax. 2 datur triangulum $\delta H\varphi$ per prop. 4 latera habens lateribus ipsius ABC. proportionalia ex construct. Ergo per ax. 1. simile est Triangulo ABC. Ergo per theor. I. ei aequiangulum, jam ABC et DEF aequiangula ex hypothesi. Ergo $\delta H\varphi$. DEF aequiangula; et latus respondens habent aequale DE. ipsi δH. ex hypoth. Ergo triangula DEF. $\delta H\varphi$ congrua sunt per prop. 3. Jam $\delta H\varphi$ et ABC similia sunt, ut ostendimus. Ergo triangula aequiangula ABC. DEF similia sunt. Q. E. D.

Vel (quanquam eodem redeat) sint duo Triangula aequiangula ABC. DEF, ajo esse similia. Nam ipsi ABC simile fieri potest $\delta H\varphi$ super latere $\delta\varphi$ aequali DF. Ergo aequiangula sunt ABC et $\delta H\varphi$ per praecedentem. Ergo DEF et $\delta H\varphi$ atiam aequiangula sunt, sed habent latus aequale DF et $\delta\varphi$. ex constructione. Ergo congrua sunt per prop. 3. Si autem unum congruorum tertio simile est, etiam alterum ei simile erit. Ergo ABC et DEF similia sunt.

81 (40882). DE CALCULO SITUS
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 9+16 u. LH 35 I 5 Bl. 40+44. 2 Bog. 4°. 5 S. Bl. 40 v° u. Bl. 44 leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1685 belegt.

(1) Via determinata a puncto A ad punctum $B_{[,]}$ AB. vocatur r e c t a. AB. via scilicet quae transit per puncta determinate se ad A et B habentia, minusque distantia ab A, quam A distat a B.

(2) Itaque recta est via minima, seu si C non sit in recta AB, erit via ab A ad B per C minor quam recta AC seu $AC + CB \sqcap AB$. Quoniam via minima ex positis extremis determinata est. Nam utique manifestum est viam maximam non esse determinatam, quia via ire potest per punctum datum quodcunque adeoque quacunque assumta sumi potest major at viam non posse minorem assumi in infinitum, sunt enim puncta quae propiora sunt, itaque datur quaedam via minima.

(3) Duae quoque rectae inter A et B coincident seu si sit ACB via recta, et ADB via recta, erit $ACB \mathrel{\infty\!\!\!\!|}\ ADB$. Alioqui utique ex punctis datis, via non esset determinata, cum incertum sit quae debeat eligi.

(4) Punctum quoque in recta sumtum est sui situs unicum ad duo puncta extrema seu ex datis punctis illis suoque ad ea situ determinatur. Itaque si sit in recta AB punctum Y dico situm $Y.A.B$ esse determinatum. Itaque si daretur aliud punctum E sitque situs $E.A.B \infty$ (congruus) situi $Y.A.B$ sintque E et Y in recta AB. erit $E \mathrel{\infty\!\!\!\!|}\ Y$ seu coincident E et Y.

(5) S i t u m autem puncti ad punctum determinare possumus per rectas inter ea interceptas, eo ipso quia determinata est recta, ita situs E ad A dici potest EA.

(6) Recta rectae est similis seu $AB \sim CD$ et contra quae rectae similis est recta est quia similia sunt quae eodem modo determinantur. At ABC non statim simile est LMN, nisi constat prius eodem modo determinari seu in determinantibus nullum esse discrimen seu $AB \sim LM$ et $BC \sim MN$ et $AC \sim LN$.

(7) Si duae rectae sint aequales, erunt congruae, seu si sit $AB = CD$ erit $AB \infty CD$. Nam $AB = CD$ ex hypothesi et $AB \sim CD$ per artic. praecedentem. Ergo per axioma articuli sequentis $AB \infty CD$.

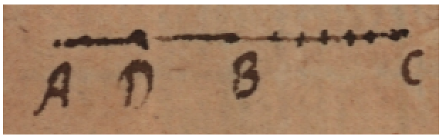
(8) Axioma: Si duo sint similia et aequalia erunt congrua seu si $\odot = ☽$ et $\odot \sim ☽$ erit $\odot \infty ☽$.

(9) Si situs $E.A.B \infty$ situi $Y.A.B.$ erit $E.A. \infty Y.A.$

(10) Si $E.A. \infty Y.A.$ erit $EA = YA$ per artic. 5. et contra si $EA = YA$ erit $E.A. \infty Y.A.$ Hoc intellige si E, A, Y sint puncta.

(11) Si $A.B \infty L.M$ et $A.C \infty L.N$ et $B.C \infty M.N$ erit $A.B.C. \infty L.M.N.$

(12) Hinc si $AB = LM$ et $AC = LN$ et $BC = MN$ erit $A.B.C \infty L.M.N$ per 10 et 11.



[*Fig. 1*]

(13) Pars rectae est recta, nam cum recta sit via determinata, erit per determinata. Itaque si $AD + DB \mathbin{\infty\!\!\!\!\mid} AB$ erit AD recta et DB recta. Seu si $ADC.$ recta erit AD recta.

(14) Omnis recta produci potest. Sit recta AD dico eam produci posse in C. Sumatur in AB punctum D utique recta AD produci potest; (producta est enim reapse in B) ergo et recta AB, quae similis est rectae AD per artic. 6. produci poterit aliquousque ut in C.

In notis: Datur AB recta. Ergo datur ABC recta. Probatur. Nam datur AB recta. Ergo datur ADB recta. Ergo (per artic. 13) AD recta. Ergo per (artic. 6) $AD \sim AB$.

(15) Jam similia similiter tractari possunt et similiter tractata dant similia, quod est axioma a nobis saepius adhibendum.

Ergo quia datur ADB dari etiam poterit $ABC \sim ADB$. Et quia ADB recta est ex hypothesi erit (per 6) etiam ABC recta. Itaque producta est recta AB. Quod fieri posse erat demonstrandum.

(16) Punctum in recta sumtum ad duo alia puncta in eadem recta sita determinate se habet, seu sui situs unicum est.

Sit recta $ALMNB$ dico aliquod ex punctis mediis ut N esse sui situs unicum ad puncta L et M. Nam $N.A.B.$ est situs determinatus ex natura rectae, (seu N est situs sui ad A et B unicum) per artic. 4. Et eodem modo $M.A.B.$ est determ. Et $L.A.B.$ est determ.

(17) Jam Axioma esto in situ aliquo pro puncto determinato substitui possunt puncta determinantia.

Itaque in situ determinato $N.A.B$ pro A substitui potest $M.B$ (quia A. determinatur ex $M.B$. seu situs $M.A.B$ est determinatus) et fiet $N.M.B.B$, vel omissa inutili reduplicatione ipsius B. fit $N.M.B$. qui etiam est determinatus. Similiter demonstrari potest situm $N.L.B$. esse determinatum, itaque in situ $N.M.B$ pro B substituendo $N.L$. fiet denique $N.L.M$. situs determinatus, Q. E. D.

(18) Omne punctum sui situs unicum ad duo puncta, minusque distans ab utroque quam ea distant inter se cadit in rectam inter ea interceptam. Si sit $AC \sqcap AB$ et $BC \sqcap AB$ et $A.B.C$. determ. erit ACB recta, patet ex defin. rectae artic. 1. Forte tamen et aliter demonstrari poterit; ex intersectionibus circulorum, ita ut definitionem rectae liceat assumere adhuc strictiorem in speciem, quae tamen idem efficiat.

(19) Omne punctum sui situs unicum ad duo puncta cadit in rectam per ea duo puncta transeuntem, si opus productam.

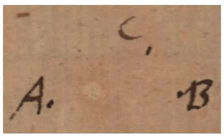
Sint tria puncta $A.B.C$, quorum situs inter se sit determinatus, dico ea cadere in eandem rectam. Est enim aliquod ex ipsis medium, quod minus vel certe non majus distet a reliquis quam ipsa inter se. Quod sic ostendo, jungantur AB, BC, AC rectae et sit ex his maxima vel certe non minor ulla reliquarum AB, proxima vel certe non minor ultima sit AC, tertia seu nulla alia major sit BC. Patet C fore medium, seu non magis distare ab A et B, quam ea inter se. Ergo per praecedentem ACB erit recta. Itaque pro recta talem possumus habere propositionem localem. Sit $Y.A.B$ determ. et $\overline{Y}$ (seu locus omnium Y) erit recta. Hinc si duae rectae habere ponantur plus quam duo puncta communia coincident si opus productae et proinde duae rectae non habent segmentum commune, nec spatium claudunt.

(20) Sequitur et locum omnium punctorum ad duo puncta unicorum esse lineam, seu in viam puncti determinatam per duo puncta transeuntem incidere.

(21) Nam linea est via puncti.

(22) Planum est extensum ex tribus punctis determinatum, seu locus omnium punctorum sui ad tria puncta situs unicorum. Seu si $Y.A.B.C$ determinatum est erit $\overline{Y}$ planum. Datis autem tribus quibusvis punctis non in eandem rectam cadentibus determinatur ali-

---

17 *BC (1)* jam si non cadunt in eandem rectam erit *dazu Figur, nicht gestr.:* 

(2) dico fore *(a)* AC *(b)* C istud *(3)* patet L

quid quod planum voco. Et generaliter assumtis quibuslibet aliquid determinatum est, seu ad ea determinate se habens.

(23) Tria puncta determinantia planum cadunt in ipsum planum. Nam situs ipsius A ad A est determinatus, ergo et situs ipsius A ad $A.B.C.$

(24) Si duo puncta rectae sint in plano, ipsa recta est in plano. Sit recta $\overline{Z}.L.M$ et planum $\overline{Y}.A.B.C.$ et L sit Y, itemque M sit Y. dico omne Z esse Y. Nam primo $L.A.B.C.$ est determinatum, item secundo $M.A.B.C.$ et tertio $Z.L.M$. Ergo in determinatione tertia pro $L.$ et M ex determ. 1. et 2. substituendo determinantia, fiet $Z.A.B.C$ determinatum. Ergo omne Z est Y.

Hinc manifestum est omnem rectam omni plano applicari posse; itemque rectam in plano posse moveri.

(25) Tria quaevis puncta in plano sumta idem planum determinant, seu punctum quodvis in plano sui ad tria plani puncta (non in eadem rectam cadentia) situs unicum est. Hoc potest demonstrari ad modum articuli 16 in recta. Item sic: Sint illa tria puncta $L.M.N.$ dico ea determinare planum in quo sunt, nam determinare utique possunt aliquod planum si non cadant in rectam, et id planum est unicum, per artic. 22 et sunt in plano quod determinant per artic. 23. Ergo planum in quo sunt determinant.

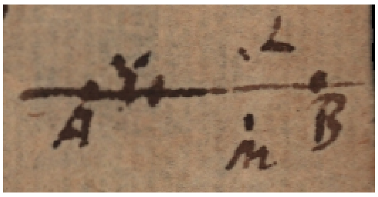
(26) Circumferentia circuli est locus in plano omnium punctorum quorum situs ad unum aliquod punctum sit idem seu describitur ab extremo rectae in plano motae (quod fieri potest per artic. 24) uno puncto immoto. Et notis ita designabitur: Si $YA = BA$ in plano, $\overline{Y}$ est circumferentia circuli.

(27) Omne planum plano simile est si indefinite sumantur, (seu si duorum planorum ambitus sint congrui ipsa plana congrua sunt) nam si planum determinatur per $A.B.C$ sumantur in alio plano puncta $L.M.N$ sic ut sit $L.M.N. \sim A.B.C$, erit et determinatum per $L.M.N.$ simile determinato per $A.B.C.$ eo scilicet sensu quo determinationem explicuimus.

(28) Si planum a plano secetur, sectio communis est recta. Si duo plana se secant, saltem plus quam unum punctum commune habent, sumamus ergo duo puncta communia A et B. Et in uno plano $\overline{Y}$ sumamus tertium C, in altero plano $\overline{Z}$ tertium $L.$ et pro plano $\overline{Y}$ erit $Y.A.B.C.$ det. pro plano $\overline{Z}$ erit $Z.A.B.L$ determ. Sit jam recta $\overline{V}$ ita ut sit $V.A.B$ determ. dico omnes V fore Z et omne V fore Y. Nam si $V.A.B$ determ. Ergo et $V.A.B.C.$ determ. et $V.A.B.L$ determ. Ergo V est Y et V est Z. seu V cadit et in $\overline{Y}$ et in $\overline{Z}$. Verum nullum praeterea aliud punctum his duobus planis commune dari potest, quod non in hanc rectam cadit. Nam si tria puncta in eandem rectam non cadentia communia forent,

coinciderent duo plana, talia enim tria puncta planum determinant.

(29) In plano locus omnium punctorum eodem modo se ad duo puncta habentium est recta seu sit $YL = YM$ erit $\overline{Y}$ recta.



[*Fig. 2*]

Sint duo puncta in loco proposito, nempe A et B quorum unumquodque se eodem modo habeat ad L quo ad M, etiam quod ipsis determinatur eodem modo se habebit ad L quo ad M. nempe recta $\overline{Y}.A.B$. Nullum aliud tale punctum datur, quod non sit in hac recta, esto enim tale punctum H quod non cadat in rectam AB. Cumque ex punctis A, B, H, quippe non in eandem rectam cadentibus determinetur totum planum, sequeretur totum planum eodem modo se habere ad L quo ad M, quod est absurdum, vel ideo quia sequeretur ipsum M eodem modo se habens ad L quo ad M, id est coincidere cum L, quia coincidit cum M, contra Hypothesin. Dantur autem plura quam duo puncta eodem modo se habentia ad L et ad M. Nam si circuli centris L et M, radiis LM describa[n]tur, se secabunt et quidem in duobus punctis, quia unus est partim intra alium partim extra. Sed de his mox.

(30) Eodem modo demonstrabitur locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad duo data puncta esse planum.

(31) Hinc ex artic. 31 sequitur planum indefinite protensum a recta indefinite protensa secari in duas partes indifferentes. Et ex 31 similiter spatium secari a plano. Sed haec distinctius ostendenda.

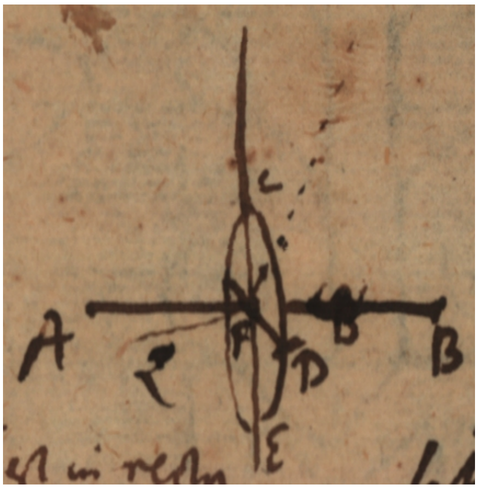
(32) Recta rectam indefinita indefinitam secat in duas partes, quarum qualibet eodem modo se habet ad secantem.

Sit recta $\overline{Y}$ et recta $\overline{Z}$ et B sit Y item B sit Z. Rursusque sit $\overline{Z} \infty \overline{V} + \overline{X}$ (vel omne Z sit V vel X) et aliq. V sit B et aliq. X sit B dico fore $\overline{Y}.\overline{V} \infty \overline{Y}.\overline{X}$.

82 (40885). DE DETERMINATIONE SITUS [1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 12+15. 1 Bog. 4^{o}. 3 S. Textfolge Bl. 12 v^{o}, 15 r^{o}, 15 v^{o}. Bl. 12 r^{o} leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1682 belegt.



[*Fig. 1*]

Punctum C extra rectam AB eodem modo se habet ad puncta A et B. Moveatur ergo servato situ, describet circumferentiam CDE cujus etiam quodlibet punctum eodem modo se habebit ad A quo ad B. Sumatur in ipsa recta punctum F quod etiam eodem [modo] se habeat ad A quo ad B. Cumque F. sit determinatum ex A et B positis quia est in recta necesse est C quod eodem modo se habet ad B, quo ad A, et semper eodem modo ad A, semperque eodem modo ad B, etiam semper eodem modo se habere ad F. seu recta per $C.F.$ transeuntis portionem CF, congruere ipsi FD vel FE (nam recta rectae congruit, si punctorum extremorum idem situs). Sit planum determinatum ex punctis $F.C.D.$ quorum cum quodlibet eodem modo se habent ad A quo ad B, etiam quodlibet plani determinati punctum eodem modo se habet ad A quo ad B, unde cum in AB recta non nisi unum possit esse punctum eodem modo situm ad A quo ad B, nempe F, sequitur planum hoc non posse occurrere rectae per AB, nisi in F.

Ex punctis $C.D.E$, si juncta recta CE, sumtoque in ea medio sit CF vel EF, ∞

DF; determinata est circumferentia circuli per $C.D.E$ transeuntis. Quod ita ostendo. Cum datis tribus punctis $C.D.E$. determinatus sit locus omnium punctorum quorum unumquodque eodem modo situm est ad $C.D.E$, ideo ex his punctis assumatur unum aliquod A. et ducatur recta per A et F. Cumque punctum tam A quam F eodem modo se habeant ad $C.D.E$, tota recta ab ipsis determinata eodem modo se habebit ad $C.D.E$. Cumque punctum C non sit in hac recta, (neque enim eodem modo se habet ad D et E quo se habet ad C, quia non cum ipsis sed cum C congruit). Hinc si C servato ad A et F situ moveatur describet circumferentiam, transeuntem per $C.D.E$. Quod si ostendi posset sumto alio puncto praeter A, etiam eodem modo se habente ad $C.D.E$, ut Q[,] rectam per $Q.F$ coincidere cum recta per $A.F$, ostensum esset circumferentiam circuli ex punctis $C.D.E$ esse determinatam. Ponamus rectam QF a recta AF differre. Ergo planum transiens per puncta $A.F.Q$. seu ex ipsis determinatum eodem modo se habebit ad puncta $C.D.E$ (ex situ ad invicem non determinata) quia tribus punctis $A.F.Q$ ita se habentibus determinatur. At datis duobus punctis determinatum est planum eundem ad ambae situm habens. Ergo ex solis $C.D$. punctis determinatum est planum. Et ex punctis $D.E$. etiam determinatum est planum. Ergo ex punctis $C.D$, et $D.E$ debet determinari idem planum. Ergo debet punctum E determinatum esse ex punctis C et D. seu deberent esse in eadem recta quod est contra Hypothesin. Habemus ergo demonstratum ope axiomatis: Quicquid ex aliquibus est determinatum, id non potest ex aliis esse determinatum, nisi quae ex prioribus etiam sunt determinata.

Determinatum est, quod solum satisfacere potest conditionibus propositis. Hinc si problema solvi possit, et ex datis inveniamus quaesitum, idque unicum, nihil assumendo pro arbitrio, id est determinatum.

Ex datis duobus punctis determinata est recta quae per ipsa transit. Punctum rectae est determinatum, si determinatus sit ejus situs ad duo puncta rectam determinantia. Punctum plani est determinatum si determinatus sit ejus situs ad tria puncta planum determinantia. Hoc tamen non semper peocedit, ita duo puncta determinant planum eodem modo ad ipsa situm, non tamen sequitur ideo punctum plani esse determinatum, determinato ejus situ ad haec duo puncta; (quia situs ejus determinatus, est ad duo modo determinatus sit ad unum, nam uterque idem.). Non nisi duo dari possunt puncta $A.B$, quorum unum A situm sit ad tria $C.D.E$ quemadmodum aliud B situm ad eadem. (Licet A diverso modo situm sit ad C, quam ad D vel E.) Nam non nisi duo dari possunt puncta quarum unum eodem modo se habet ad planum, quo alterum, quia id ex duobus datis est determinatum. Nam uno dato puncto, et plano, reperiri potest aliud punctum eodem modo se habens ad planum, ut prius. Nam a puncto ad planum duci potest recta eodem modo se habens ad tria quaedam plani puncta, et plano occurrens in puncto F etiam congrue se habente ad tria plani puncta; Ergo si aliud punctum in hac recta sumatur, eodem modo se habens ad F ut prius, id etiam eodem modo situm erit ad planum quo prius. Quia ergo non nisi duo dari possunt puncta congrue se habentia ad planum, etiam non nisi duo dari poterunt congrue se habentia ad tria puncta planum determinantia.

Hinc sequitur determinato situ puncti, ad quatuor alia non in eodem plano ejus locum esse determinatum. Nam ex tribus determinata sunt duo, ex aliis tribus ex his quatuor etiam duo, non tamen eadem sed unum tamen commune. Hinc patet duas hic terniones pariter idem exhibere punctum commune quod duae aliae terniones. Punctorum determinantium, cumque unumquodque exhibent binionem punctorum determinatorum, necesse est idem punctum reperiri in qualibet Binione.

Ex his videmur tandem nacti quae ad Elementa Geometriae demonstranda sufficiant.

7–12 *Nebenbetrachtung: abcd abc abd acd. bcd.*

13 *Darunter:* NB. repetendum hoc, videtur res absoluta.

83 (40887). DE EXTREMITATE LINEAE SUPERFICIEI CORPORIS [1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 14. 1 Zettel [**noch**]. 2 S.

Datierungsgründe: [**noch**]

$\tilde{z}$ locus omnium punctorum z. $\widetilde{\text{Ex. } z}$ locus omnium punctorum extra z. Si $\tilde{y}$ sit extremitas ipsius z, tunc erit $\tilde{y}$ in $\tilde{z}$, et in $\widetilde{\text{ex. } z}$.

Omnis superficies considerari potest ut extremitas corporis, omnis linea ut superficiei extremitas; hinc omne punctum lineae vel superficiei simul potest considerari ut in ea et extra eam. Sed non in copore. Quod si tamen duas superficies vel duas lineas inter se conferamus, quae non congruant, tunc non omne sed quiddam tantum eorum erit consideratum ut extra ipsa.

Sit $\tilde{v}$ et $\tilde{z}$ in v, itemque $\widetilde{\text{ex. } z}$ in v. seu $\widetilde{v\text{. ex. } z}$. Sitque y in $\tilde{z}$. et in $\widetilde{\text{ex. } z}$ erit $\tilde{y}$ extremitas ipsius z. Si sit ω in z vel in $\widetilde{\text{ex. } z}$ seu si aliquid ω sit z, et aliquod ω sit x. et omne ω sit x vel z. et sit $\tilde{x}$ al. $\tilde{z}$. seu nullam habeant partem congruentem sitque $\tilde{y}$ in $\tilde{z}$, et $\tilde{y}$ in $\tilde{x}$ (hoc est y extremitas communis) fiet aliquod ω coincidens alicui y seu continuum ductum ex uno in alio priori partem coincidentem non habens, transit per extremum commune. Jungenda his notionibus notio continui. Et al. exprimatur duo continua non habere partem communem.

84 (40888). PRIMAE PROPOSITIONES
[1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 17–18. 1 Bog. 2°, von dem der größte Teil von Bl. 18 abgeschnitten ist. Halbbrüchig beschrieben. 2 S. auf Bl. 17, 10 Z. auf Bl. 18 r°, Bl. 18 v° leer.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1686 belegt.

$\widehat{1}$ Rectam definiamus (defin. 1) lineam a puncto ad punctum aliis omnibus breviorem, seu AB recta $\sqcap$ AYB.

$\widehat{2}$ Et postulemus (postul. 1) a quovis puncto ad quodvis punctum posse duci rectam.

$\widehat{3}$ Recta a puncto ad punctum unica est.

Sit enim ACB et alia ADB. (1) Si ACB est recta erit $ACB \sqcap ADB$ per def. (2) Rursus si ADB recta est erit $ADB \sqcap ACB$ per eandem def. (3) Jam per 1. Axioma minus minore est minus majore, seu si $\odot \sqcap$ ☽ et ☽ $\sqcap$ ☿ erit $\odot \sqcap$ ☿. (4) Ergo (per 1 et 3) et $ADB \sqcap ADB$ quod est absurdum nam (per ax. 2) idem enim non est minus se ipso. (5) Itaque si ACB et ADB ambae sunt rectae, coincidunt, seu si ACB recta et ADB recta erit $ACB \infty ADB$.

$\widehat{4}$ Pars rectae recta est.

(1) Sit $AC+CB \infty AB$ (ex definitione partis def. 2) (2) et sit AB recta. Dico AC fore rectam. Nam (3) sit AC non recta (per hyp. contrariam) (4) erit AVC recta (per postulatum 1.). Ergo $AVC \sqcap AC$ (per def. 1). (5) Ergo $AVC + CB \sqcap AC + CB$ (per ax. 3. Si inaequalibus addas aequalia summa cum minore, minor est summa cum majore seu si $\odot \sqcap$ ☽ erit $\odot +$ ☿ $\sqcap$ ☽ $+$ ☿). (6) Ergo $AVC + CB \sqcap AB$ (per 5 et 1). Ergo AB non est recta (per def. 1.) contra Hypothesin. Ergo AC est recta. Q. E. D.

$\widehat{5}$ Magnitudo rectae est distantia extremorum.

(1) Nam distantia est magnitudo lineae quae brevior inter eadem non datur (per

---

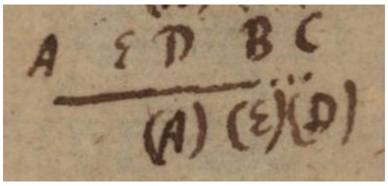
7 *Randbemerkung:* Utiliter hic assumuntur in progressu Ax. def. lem. necessaria.

def. 3). (2) Quae autem aliis omnibus brevior est ea brevior non datur (alioqui peccaretur in ax. 2.). Talis autem recta est (per def. 1.). Q. E. D. (3) Distantiam autem duorum punctorum A et B adeoque rectam interceptam imposterum simpliciter exprimemus per AB. (4) Eaque ratione etiam imposterum exprimemus situm puncti ad punctum. De quo infra Ax. 5.

$\widehat{6}$ Punctum in recta sui ad extrema situs unicum est.

(1) Sit recta ABC dico $A.B.C$ esse unic. seu non dari aliud punctum D ejusdem situs ad $A.B$. Detur enim D (contra intentum) ita ut sit $A.D.C \sim A.B.C$ (3) erit $AD = AB$ (vid. prop. 5. art. 4.) (4) et $DC = BC$. (5) ergo $AD + DC = AB + BC$ (per axioma 4 si aequalibus addas aequalia fiunt aequalia). (6) Ergo $AD + DC \infty AB + BC$ (per prop. 1. et per art. (1) hujus prop.). Nam quia $AB + BC$ recta per (1) ergo minor alia omni, per def. rectae. Ergo minor quam $AD + DC$ si D alia quam B. quod absurdum. Nam art. 5. dictum est esse aeuales. Coincidere ergo debent D et B seu $A.B.C$ est unic.

$\widehat{7}$ Recta per quodlibet extremum produci potest seu omnis recta est pars alterius rectae, cum qua alterutrum extremum, habet commune.



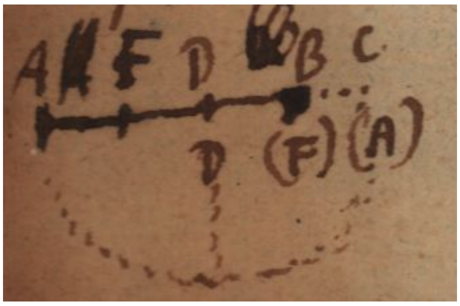
[*Fig. 1*]

Sit recta AB dico dari aliam rectam ABC. (1) Recta AB divisa intelligi potest in duas partes inaequales AD majorem et DB minorem (postul. 2). (2) Jam majoris pars minori aequalis est (per def. 4 majoris et minoris). (3) Ergo sit AE (pars AD) $= DB$. (4) Transferatur AED in $(A)(E)(D)$ sic ut $(A)(E)$ superponatur congruent (per postulatum superpositionis congruorum quod sit post. 3). (5) Nempe ipsi BC, rectae enim aequales congruae sunt (per prop. seq. seu Lemma). (6) Ergo habetur recta $DB(D) \infty (A)(E)(D)$. (7) Quod (D) erit C quaesitum. Habetur ergo ABC. Quod desiderabatur.

Schol. Habemus hic demonstrationem Euclidei postulati, quod recta produci possit; quo simul et modus hoc efficiendi seu constructio continetur. Assumendo simplicius

25 postulati: EUKLEIDES, *Elementa*, I, post. 2.

aliquid nempe translationem rectae seu regulae potissemus tamen rem aliter elegantius adhuc praestare adhibendo non generalem translationem, sed specialem quandam simpliciorem, movendo rectam circa unum punctum ita.



[*Fig. 2*]

Nempe recta AB producenda in ABC secta intelligatur in D sic ut AD sit major DB. Sumatur in AD pars $DF = DB$ et circa punctum immotum D, moveatur DA (postulatum 4) donec DF transferatur in DB seu $D(F)$ (quia $DB = DF$ aequales ex hypothesi unde congruae per Lemma seq.). Ergo DFA translata est in $D(F)(A)$ seu in $DB(A)$. Est ergo (A) ipsum C quaesitum, seu habetur DBC. Quod erat fac.

$\overset{\frown}{8}$ Lemma. Duae rectae aequales sunt congruae. Seu quod idem est duae rectae sunt similes.

Sit recta AB, (1) est via brevissima inter puncta A et B; sit recta CD, (2) est via brevissima inter C et D. (3) Et si sumas puncta duo, A, B; et alia duo C, D nullum aliud discrimen intelligi potest quam distantiae, seu magnitudinis brevissimae viae (Axioma 5), (4) sed et hoc discrimen hoc loco nullum est (ex hyp. distantiae aequalis). Ergo nullum plane discrimen in determinatione duarum rectarum intelligi potest. (5) Jam (Axiom. 6) in quorum determinatione nullum discrimen intelligi potest ea congrua sunt. ergo duae rectae aequales congruae sunt.

$\overset{\frown}{9}$ Si trium punctorum distantiae duae simul aequales sint distantiae tertiae, recta punctis distantiam tertiam habentibus terminata, ex rectis duabus quae reliquarum distantiarum punctis terminantur, componetur.

(1) Esto $AB + BC = AC$. (2) Dico fore $AB + BC \infty AC$. (3) $AC \sqcap AB$ (ex 1. juncta def. maj. et min.). (4) Ergo (per dict. def. add. post. 4) erit $AE + EC \infty AC$ sic ut sit $AE = AB$. (5) Ergo $EC = BC$ (per 4 et 1). (6) Ergo $A.E.C \simeq A.B.C$ (per 4 et 5). (7) Ergo $E \infty B$ (per 6). (8) Ergo $AB + BC \infty AC$ (per 6 et 4). Q. E. D. (per 2).

$\overset{\frown}{10}$. Si in eadem recta duae sint rectae AB, BC consistentes ad commune punctum B nec habeant partem communem component rectam AC cui ambae simul aequabuntur.

(1) Nam AB, BC non habent partem communem (ex hyp.). (2) Ergo $AB+BC = AC$ (nam per Ax. 7. totum AC aequatur omnibus partibus simul, quae partem communem non habent). (3) Jam AB et BC sunt rectae (ex hyp.). (4) Ergo (per prop. 9.) $AB + BC \infty AC$.

$\overset{\frown}{11}$ Si duae rectae aequales AF et AC habeant extremum A et aliud punctum B congruens totae congruunt.

(1) Nam (ex Hyp.) punctum B est in recta AC, et in recta AF. (2) Ergo $AB + BC \infty AC$. (3) Et $AB+BF \infty AF$. (4) Jam $AC = AF$. (5) Ergo $AB+BC = AB+BF$ (per 2. 3.). (6) Ergo $BC = BF$ (per a x. 8. si aequalibus detrahas aequalia residua sunt aequalia). (7) Ergo $A.B.C \simeq A.B.F$ (per 4 et 7). (8) Jam $A.B.C$ unic. (per prop. 6.). (9) Ergo $C \infty F$ (per 7 et 8). (10) Ergo (per prop. 3.) $AC \infty AF$.

$\overset{\frown}{12}$ Si duae rectae AB et AC, habeant extremum A, et aliud punctum E commune, una earum ut AB in alteram AC incidet.

(1) Nam vel sunt aequales vel una altera est major (per A x. 9). (2) Si sunt aequales coincident ambae (per pro. 11.). (3) Si altera ut AC sit major, erit pars ejus aliqua AD, aequalis ipsi AB (ex def. Maj. et min.).

9–13 *Nebenbetrachtung:*
$$\begin{aligned} & AB + BC \infty AC \\ & AB + BF \infty AF \\ & AC = AF \\ \text{Ergo } & AC \infty AF \end{aligned}$$

85 (40889). LOCUS AD PUNCTUM ET RECTAM [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 19–20. 1 Bog. 4°. 3 S. Textfolge Bl. 20 r°, 20 v°, 19 r°. Bl. 19 v° leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

[*Teil 1*]

Locus punctorum ad punctum et rectam, data, unicorum est recta perpendicularis ad rectam datam, sed transiens per punctum datum. Quod ut consideretur distinctius ajo primum punctum ipsum datum cadere in hunc locum, est enim sui ad seipsum, situs unicum, ergo et sui situs ad seipsum et ad hanc rectam.

Deinde ostendam dari aliquod punctum in recta data, cadens in locum propositum.

[*Fig. 1*]

Esto punctum datum C, recta data AB. Centro C radio CB describatur circulus, is si rectae non alibi occurrit, punctum B erit quaesitum, sin alibi occurrit in D, non utique occurret nisi in D, seu recta circulum non secat nisi in duobus punctis, quod suppono aliunde; bisecetur DB in G, dico G esse quaesitum seu circulum centro C radio G descriptum non alibi occurrere rectae AB. Ponatur punctum E, praeter puncta A et

D, per quod centro C descriptus circulus occurrit rectae rursus in F. Bisecetur EF, ajo punctum bisectionis idem fore quod supra G. Quod ut apparebit ostendendum est prius $FB = DE$. Nam puncta E. F dantur data recta DB, (quae determinatur ex datis D et B) et centro C et radio circuli $= CE = CF$. Jam et recta per DB et centrum circuli eodem modo se habet ad B et ad D ergo et intersectio rectae per circulum nempe E et F eodem modo se habet ad D et ad B; id est quantum F abest a B tantum E aberit a D, vel quantum F abest a D tantum E aberit a B. Jam si $FB = ED$ (per demonstrata[)] et $BG = DG$ ex Hypothesi, erit $EG = FG$ (quia omnia $D.E.G.F.B$ in eadem recta) quod asserreramus. Hinc jam porro sequitur G esse punctum quaesitum quod in locum propositum cadit. Seu rectam centro C. radio CG descriptam non secare rectam AB in alio. Secet enim alibi, ut in I. bisectio ipsius IG per demonstrata cadet in G quod est absurdum nisi coincidant I et G.

Eadem brevius: $G.D \sim G.B$ et $C.D \sim C.B$. Ergo $G.D.C \sim G.B.C$. Jam $G.D.B$ un. Ergo $G.D.B.C$ un. Q. E. Dem.

$G.D.B$ un. significat G non tantum esse un. ad D et B. sed et ad ambo esse eodem modo.

Quia ergo C et G sunt in loco quaesito, recta per ipsa transiens etiam puncta sua omnia habebit in loco quaesito.

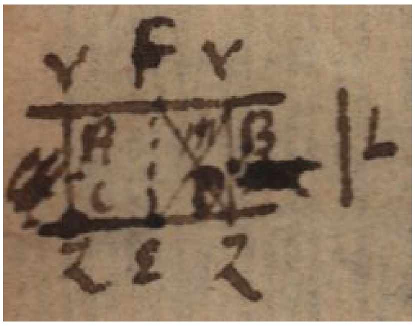
Praeterea quodvis punctum ad $D.B$ (adeoque et ad $D.B.C$) unicum cadit in rectam CG. Esto enim aliud H. Inde educatur recta aliqua quae tam CG quam AB in diversis punctis secet ut CG in K, et AB in L. Cum H ex Hypothesi, et K per demonstrata sint sui situs unica ad rectam AB et C, etiam recta per KH similiter erit adeoque et punctum L quod est absurdum, solum enim punctum G in recta AB tale est. Hinc ergo sequitur rectam per CG esse locum quaesitum et puncta omnia in eam cadentia esse sui situs unica ad rectam et C, itemque puncta sui situs ad haec unica in eam cadere.

Quia etiam $C.G.D \sim C.G.B$. erit ang. $CGD =$ ang. CGB. Cumque hi anguli sibi sint deinceps (nam $B.D.G$ sunt in recta) erit angulus ad G rectus, et CG perpendicularis ad rectam DB.

Erit et CG minima ad DB. quia punctum quodvis rectae DB praeter G cadit extra circulum. Unde recta ad centrum ducta major radio.

---

1 occurrit | circulo *ändert Hrsg.* | rursus L



[*Fig. 2*]

Si a puncto quovis rectae $\overline{Y}$ educatur in eodem plano perpendicularis YZ aequalis datae cuidam, L. erit erit $\overline{Z}$ recta aequaliter ubique distans ab $\overline{Y}$ et quidem ex puncto quovis Z minima ad $\overline{Y}$ est ZY aequalis ipsi L. Tantum ostendendum est $\overline{Z}$ esse rectam. Ex punctis duobus A et B in recta $\overline{Y}$ educantur perpendiculariter AC et BD aequales ipsi L ad easdem partes, ita ut sint in $\overline{Z}$. Hoc variis modis probari potest. Intelligatur enim rectam AC moveri per $\overline{Y}$ eodem semper manente angulo recto. Extremitate sua C describet $\overline{Z}$. Ergo $\overline{Z}$ erit linea[,] via scil. puncti C. In linea $\overline{Z}$ sumantur duo puncta C et D aequidistantia a recta $\overline{Y}$. Dico rectam per ipsa transeuntem etim aequidistare a recta $\overline{Y}$. Primum sit F med. inter A et B. Ajo et E fore med. inter C et D. Ergo $E.F.A \sim E.F.B$ rursus $F.B.D \sim F.A.C$. Ergo $E.F.A.C \sim E.F.B.D$. Ergo $E.C \sim E.D$ seu $EF = ED$. Imo et ang. $FEC =$ Ang. FED. Sed et $F.B.D \sim E.D.B$. Ergo $FD = EB$ et ang. $EBD =$ ang. FDB. Ergo cum BE et DF se secent in M, erit triang. MDB isosceles, seu $MB = MD$. Similiter ostendetur triangula MFB et MED esse isoscelia, ac proinde $MF = MB$, et $ME = MD$, jam et ang. $FME =$ ang. BMD opposito. Ergo $FDE \sim BMD$. Ergo $FE \sim MD$ quod ostendendum erat. Jam similiter ostendetur idem de quovis puncto medio inter E et D vel C et E.

[*Teil 2*]

Corpus finitum est cujus quodlibet punctum ab alio aliquo distantiam habet minorem distantia aliqua certa.

Puncta numero finita intra corpus finitum includi possunt.

Omnia puncta quorum quodlibet ab aliquo puncto distantiam habet minorem distantia aliqua certa intra corpus finitum includi possunt.

Si punctum sumatur intra corpus, et aliud extra corpus, neutrumque sit in ejus superficie, poterit punctum reperiri, in superficie, quod tam ab uno quam ab altero minus distet, quam ista distant inter se.

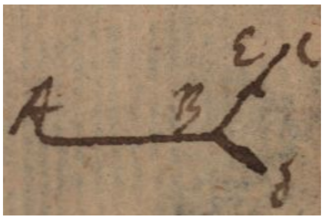
Si ambo puncta sumantur intra corpus, neutrumque sit in superficie, poterit punctum reperiri in superficie quod ab altero eorum magis distet quam ipsa distant inter se.

[*Teil 3*]

Data recta potest sumi major. Includatur enim data recta in sphaera cujus centrum sit alterum rectae extremum, utique punctum extra sphaeram magis a recta distabit.

Recta produci potest. Sit recta AB, dico eam posse produci. Sumatur alia recta major, LMN cujus pars LM aequalis sit ipsi AB, applicetur ad AB, sic ut LM et AB coincidant erit ABN (id est LMN) recta AB producta. Aliter idem demonstravi ex similitudine rectarum. Unde contra demonstrari potest ad punctum datum apponi posse rectam majorem data recta.

Duae rectae non habent segmentum commune. Seu recta ex uno extremo non nisi uno modo produci potest.



[*Fig. 3*]

Sint ABC et ABD, duae rectae diversae si fieri potest, ita ut duae AB et BC, nullam habeant punctum commune praeter B, et similiter AB et BD. Et cum altera BC vel BD sit altera major, vel sint aequales; ponatur ea quae minor non est, esse BC, dico quodlibet punctum ipsius BD cadere in BC. Esto id punctum ipsum D, Et quia BC seu BEC major BD, poterit BE poni aequalis BD, jam ABE est recta (pars rectae ABC). Ergo $A.B.E.$ un. Jam $BD = BE$ ex hypothesi et $AE = AD$ (quia $AE = AB+BE = AB+BD = AD$). Ergo $A.B.D \backsim A.B.E$. Ergo (quia $A.B.E$ un.) erit $D \infty E$.

86 (40892). SPECIMEN ANALYSEOS FIGURATAE [1685 – 1687]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 21–22. 1 Bog. 2°. 4 S.

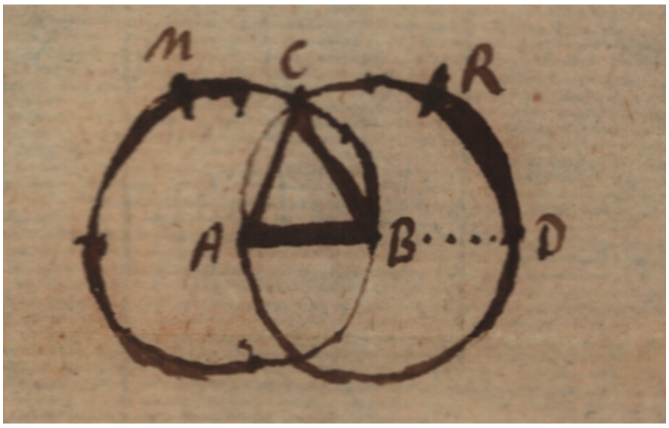
Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1685–1687 belegt.

Specimen Analyseos Figuratae in *Elementis* Geometriae

Analysin figuratam voco, quae modum praestat literis puncta significantibus repraesentandi Figuras, et inveniendi atque demonstrandi earum effectus et proprietates, ita ut non tantum magnitudines, ut in Calculo Algebraico, sed situs ipsi per novum hoc Calculi genus, directe exhibeantur. Specimen autem hujus artificii edemus in *Elementis* Euclidis, et inter procedendum assumemus Lemmata, Axiomata, Definitiones aliasque propositiones, quibus indigebimus.

Quicquid autem in Decem prioribus libris Euclidis exponitur, hoc intelligendum est in uno esse plano. Ne id perpetuo admoneri opus sit.

Ad Lib. 1 Elem.



[*Fig. 1*]

Prop. 1. Super data recta linea terminata AB. triangulum aequilaterum ABC construere.

(1) $AC = AB$ ex hypothesi. (2) $BC = BH$ ex hyp. Et quod his satisfacit est C. (3)

Sit $AM = AB$. (4) Fiat (per postulat. 1) $\overline{M}$ circumferentia circuli centro A intervallo AB (per definitionem 1). (5) Sit $BR = BA$. (6) Fiat $\overline{R}$ circumf. circuli centro B intervallo BA (ut ad 4). (7) Jam quoddam R est M (per Lemma 1), (8) Seu $\overline{R}$ et $\overline{M}$ sibi occurrunt (ex. 7. per defin. 2). (9) Datis lineis $\overline{M}$ et $\overline{R}$ (per 4 et 6) sibi occurrentibus (per 7, 8) habetur eorum occursus (per postulatum 2) nempe R quod est M. (10) Id vero est C (per 1 et 3 ac per 2 et 5). (11) Habetur ergo C. (12) Jam datur AB (ex hyp.). (13) Ergo habetur ABC. Qu. Er. Fac.

Lemma 1. Si duo circuli MA ex A et RA ex B habeant mutuo centrum in alterius circumferentia, B in $\overline{M}$, et A in $\overline{R}$, eorum circumferentiae $\overline{M}$ et $\overline{R}$ sibi occurrent alicubi in C.

Iisdem quae antea positis, (14) $BA = BA$ (per se). (15) Ergo quoddam R est A (per 5). (16) Itaque quodd. R est intra circulum $A.\overline{M}$ (, per defin. 3, nam punctum intra circulum esse dicimus cujus distantia a centro est minor radio). (17) Producatur AB ex B in D (per postulatum 3) (18) ut sit $BD = BA$ (per lemma 2). (19) Ergo $AD = AB + BD$ (per lemma 3). (20) Ergo $AD \sqcap AB$ (totum parte per Axiom. 1). (21) Ergo D est extra $A.\overline{M}$ (per def. 4, nam punctum extra circulum esse dicimus cujus distantia a centro est major radio). (22) Jam D est R (per 18 et 5). (23)

---

1 *Zu (4):* Def. 1 . Circumf. centr. interv. lib. 1 pr. 1 art. 4.
Postul. 1. Dato centro et intervallum circulum describere.

3 *Zu (8):* Def. 2. Occursus art. 8.

4 *Zu (9):* Postul. 2 Datis occurrentibus habetur occursus art. 9.

12 f. *Zu (16):* Def. 3. intra circulum esse, art. 16.

13–273,8 *Zu (17) u. (26)*: Postul. 3. Recta produci potest ex uno termino ad distantiam quantamvis art. 17. 26.

15 *Zu (20):* Axiom 1. Totum majus parte art. 20.

16 f. *Zu (21):* Def. 4. extra circ. esse art. 21.

5 eorum *(1)* intersectio *(2)* occursus *L*

Ergo qu. R est extra $A.\overline{M}$. (24) Itaque (per 16 et 23) qu. R est in $\overline{M}$ (per Ax. 2, omne continuum $\overline{R}$ quod intra et extra figuram $A.\overline{M}$ est, esse et in ejus circumferentia $\overline{M}$.

S c h o l. Unde etsi vi formae ex puris particularibus sequatur, tamen vi materiae in continuis ex 16 et 23 sequitur 24.

(25) Ergo (ex 24 per def. 2 ad 8) $\overline{M}$ et $\overline{R}$ sibi occurrunt. Q. E. D.

L e m m a 2. Recta AB ex centro B (imo puncto quovis intra Circulum) produci potest ut et cirumferentiae circuli $\overline{R}$ alicubi occurrat in D.

(26) Produci enim potest ad distantiam quantamvis (per postul. 3 ad 17). (27) Ergo ad E sic ut sit $BE \sqcap BA$. (28) Ergo (per def. 4 ad 21) recta producta est extra circulum $B.\overline{R}$. (29) Eadem est in circulo ad ejus centrum B (per def. 3 ad 16). (30) Ergo (per Ax. 2 ad 23) occurrit ejus circumferentiae alicubi in D.

C o r r o l l. L e m m a t i s 2. Recta AD transiens per punctum B intra circulum, circulo bis occurrit in A et D. Nam AB producta ex B (recedendo ab A) circumferentiae occurrit alicubi in D, per Lemm. 2. Et DB producta ex B (recedendo a D) circulo occurret alicubi in A.

L e m m a 3. Si tria puncta A. B. D. sint in recta distantia duorum quorundam ex ipsis, AB coincidit ipsi $AB + BD$ summae distantiarum tertiae D ab ipsis A. B.

(31) Tria puncta sunt in recta (ex hyp.). (32) R e c t a AD est via brevissima seu distantia inter extrema A et D (per def. 5). (33) Ergo punctum B in recta minus distat ab extremo A, quam extrema A, D inter se. (34) Et $AB + BD = AD$ (omnes partes nullam partem communem habentes toti, per ax. 3). (35) Est autem AB distantia inter A et B et BD inter B et D (per def. 5 ad 32). (36) Superest ut ostendamus tribus punctis in recta existentibus capi posse rectam quae duobus ex illis terminetur tertium

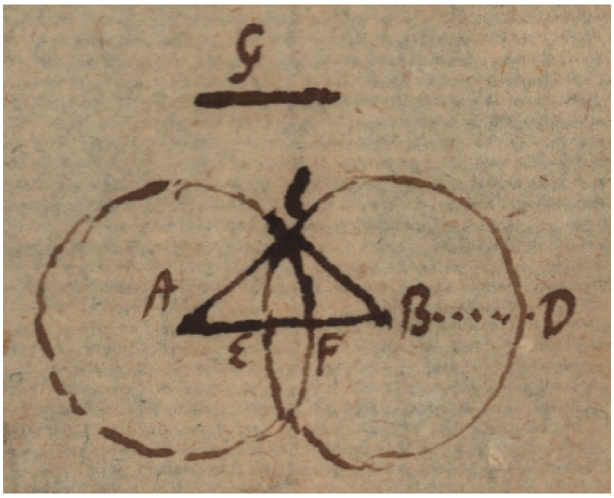
---

1 f. *Zu (24):* A x. 2. Continuum quod intra et extra figuram est ejus circumferentiae occurrit art. 24.

18 f. *Zu (32):* D e f. 5. Recta est via brevissima inter extrema sive distantia duorum punctorum. Art. 32.

20 f. *Zu (34):* A x. 3. Omnes partes nullam partem communem habentes aequantur Toti. Art. 34.

vero includat. (37) Ponamus enim punctum aliquod rectam cui insunt percurrere. (38) Id ipsa attinget successive (per axioma 4). (39) Esto ergo A primum, B secundum, D tertium. (40) Ergo portio rectae quam percurret inter A et D terminabitur ipsis A et D, comprehendet autem B.



[*Fig. 2*]

A d d i t a m e n t u m 1. Si duo circuli $A\overline{M}$, $B\overline{R}$ aequalium radiorum habeant radium, majorem dimidia distantia centrorum A. B. sibi occurrent in C extra rectam per centra.

(41) Recta AB secat $\overline{R}$ bis in E et D (per corroll. Lemm. 2). (42) Et similiter $\overline{M}$ in F. (43) Sit E ex B versus A (44) et D ex B recedendo ab A (45) sitque F ex A versus B (46) AE erit minor AF (adde mox 58). (47) Nam quia (ob 43) E cadit inter B et A, vel B inter E et A (48) erit (per Lemm. 3) AE differentia inter AB et BE, (49) seu inter AB et AF (50) quia $AF = BE$ (ex Hyp.). (51) Jam si $AF \sqcap AB$ (52) erit $AF = AB + AE$ (per 48, 49). (53) Ergo $AF \sqcap AE$. (54) Sin $AB \sqcap AF$, erit $AB - AF = AE$ (per 48, 49). (55) Jam $AF \sqcap \frac{1}{2}$ (ex Hyp.). (56) Ergo $AE \sqcap \frac{1}{2}AB$. (57) Ergo $AF \sqcap AE$. (58) Utroque ergo modo erit $AE \sqcap AF$ ut asserebatur art. 46. (59) Rursus AD est major AF. (60) Nam $AD = AB + BD$ (per Lemm. 3) (61) $= AB + AF$ (quia $BD = AF$ ex hyp.). (62) Ergo quoddam R est intra $\overline{M}$ nempe E. (quia AF seu $AM \sqcap AE$ per 58). (63) Quiddam

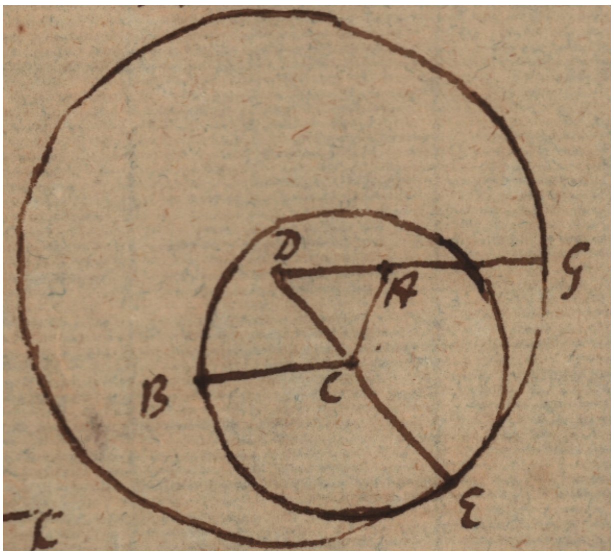
1 f. *Zu (38):* A x. 4. Quod movetur non est simul in pluribus locis. Art. 38.

R est extra $\overline{M}$ nempe D (quia per 59 $AD \sqcap AM$ seu AF). (64) Ergo (per Ax. 2) qu. R est in $\overline{M}$, ut C.

A d d i t a m e n t u m 2. Super basi data AB. triangulum isosceles construere cujus crura AC vel BC sint magnitudinis datae G, quam oportet esse majorem dimidia basi AB.

(65) Centris A et B (66) Intervallis $= G$ (per prop. 2. independenter ab hac demonstratam) (67) describantur circuli (postul. 1.) se secantes alicubi in C. Per additam. 1. erit $AC = G$ et $BC = G$. Quod erat fac.

P r o p. 2. Ad datum punctum A ponere datae rectae BC aequalem rectam AG.

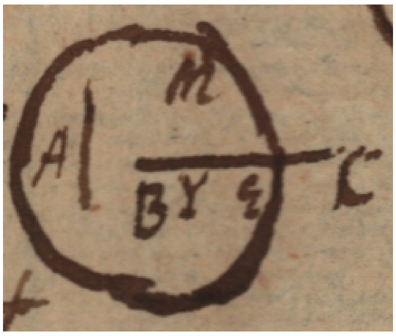


[*Fig. 3*]

Solutio. (1) Jungatur AC. (2) Super qua Triang. Aequil. ACD construatur (per 1. prim.). (3) Centro C. radio CB describatur circumferentia circularis BE (per postul. 1.) (4) cui recta DC producta ex C (per postul. 3) (5) occurret alicubi in E (per prop. 1. Lemm. 2). (6) Centro D radio DE describatur Circulus (postul. 1) (7) cui recta DA producta ex A occurret alicubi in G (per dict. Lemm. 2). (8) Erit $AG = BC$. (9) Nam $DC+CE = DE$ (per 5 et Lemm. 3 ad prop. 1.) (10) $= DG$ (per 6 et 7) (11) $= DA+AG$ (per 7 et Lemm. 3 ad prop. 1.) (12) $= DC+AG$ (per 2). (13) Ergo (per 9 et 12) $AG = CE$ (14) $= BC$ (per 3. 4).

S c h o l. ad prop. 2. Analysis qua constructio haec inveniri potest, talis est. Ad punctum A ponenda est recta aequalis rectae positae ad punctum C. Recta autem posita ad punctum C intelligi potest non tantum BC, sed et alia quaecunque ut CE, ipsi CB aequalis, seu ex C ad circumferentiam circuli CBE ducta. Cum ergo puncta A et C debeant tractari eodem modo, etiam recta AC tractanda est sic, ut respectu C tractetur quemadmodum tractata est respectu A. Quaeratur ergo punctum aliquod D eodem modo se habens ad A et C, quod fit super AC construendo triangulum aequilaterum vel isosceles ADC. Ducta recta ex D per C producta occurret circulo in E; ipsi DE sumatur aequalis DG in recta ex D producta per A, erit et $AG = CE$, quia eodem modo invenitur G respectu A, quo E respectu C.

Prop. 3. Duabus datis rectis A et BC majore ab ea detrahere BE aequalem ipsi A.



[*Fig. 4*]

(1) Fac $BD = A$ (per 3. prim.) (2) et fac $\overline{M}$ ut sit $BM = BD$ (per postul. 1.). (3) Jam BC est intra $\overline{M}$ in B (ut ad art. 16. prop. 1.) (4) extra $\overline{M}$ in C ((5) quia $BC \sqcap A$ ex hyp. (6) ergo $\sqcap$ BM per 1. 2.) (6) Ergo (per Ax. 2) BC occurrit ipsi $\overline{M}$ alicubi in E. (7) Ergo BE pars BC. (8) Et $BE = BD = A$.

Item sic:

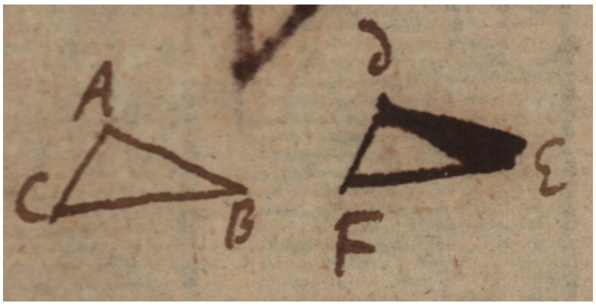
Sit $\overline{Y} \infty BC$. (4) Erit $BY + YC = BC$ (per Lemm. 3. ad prop. 1.). (5) $BC \sqcap A$ (ex hyp.). (6) Ergo qu. $BY = A$ (nam ex definitione 6. Majoris et Minoris, Minus est A cui qu. BY pars alterius, BC, quod majus dicitur, aequalis est). (7) Ergo qu.

---

19 f. *Zu (6):* Def. 6. Si A sit aequale parti ipsius B, A minus dicetur B majus. Lib. 1. pr. 3. art. 6.

Y est M. (9) Quod sit E. Datur ergo E (per postul. 2.). (10) Ergo et $BE = A$ (per 6) (11) pars BC (per 4). Q. E. F.

P r o p. 4. Si duo Triangula BAC, EDF, duo latera unius BA, AC duobus lateribus alterius ED, DF, respondens respondenti, aequalia habeant, et angulum unius A angulo alterius D aequalem, sub aequalibus rectis lineis contentum; tunc Triangulum triangulo congruum erit.



[*Fig. 5*]

(1) Ponamus dari positione Angulos LAM et NDP, (2) aequales ex Hypoth. (3) ergo congruos. (Nam anguli rectilinei aequales definiuntur d e f. 7. qui congrui sunt.) (4) Et G magnitudinem AC et DF, (5) et H magnitudinem AB et DE. (6) Denique dari in quibus lateribus angulorum sumendae sint hae rectae, nempe AB in AM, AC in AL, DE in DP, DF in DN. (7) Dantur ergo puncta B, C, item E, F (per 3. primi). (8) Ergo A, B, C; item D, E, F (per 1 et 7.). (9) Ergo Triangula ABC et DEF (nam datis punctis ad quae anguli figurae consistunt, figura data est per A x. 5.). (10) Et quidem ambo eodem modo ex datis congruis determinate exhibentur (ex toto processu). (11) Ergo congrua sunt (per Axioma 6). Q. E. D.

S c h o l. Si quis superpositionem adhibeat res eodem redit, si enim data cingrua fiant actu congruentia seu coincidentia per superpositionem, coincident etiam quae ex ipsis determinate dantur; alioqui non unum sed plura his datis satisfacientia haberi possent,

---

13 f. *Zu (9):* A x. 5. Datis punctis ad quae anguli figurae consistunt figura data est. Art. 9. Potest censeri postulatum.

16 *Zu (11):* A x. 6. Quae eodem modo ex datis congruis (determinate) dantur congrua sunt. Art. 11.

contra hypothesin. Unde Axiomatis sexti ratio intelligitur.

P o r i s m a. Triangulum magnitudine et specie datur magnitudine datis angulo et lateribus eum comprehendentibus (per 1. usque ad 9). Nam ut positione detur tantum opus est angulum positione dari, et quae crura anguli, quibus magnitudinibus laterum assignentur, quae nihil in magnitudine et specie mutant, nam utrumque crus in angulo eodem modo se habet.

S c h o l. P o r i s m a voco quod ex demonstratione colligitur, c o r o l l a r i u m quod ex propositione.

P r o p. 5. Triangulum ABC, quod duo latera AB, AC aequalia habet, etiam angulos eorum B, C ad reliquum latus, BC, aequales habet.

[*Fig. 6*]

(1) ponatur positione data BC. (2) Et data sit G, aequalis ipsis BA, CA (3) et partes ad quas cadere debet A (hoc est per def. 8. plano secto in duas partes a recta BC idefinite producta detur in qua parte debeat esse A). (4) Datur A si est possibilis, (5) nam centris B et C intervallo aequali G (per 2. primi) (6) describuntur circuli, (postul. 1) (7) jam A est in circumferentia utriusque (per 2) si scilicet possibilis est. (8) Ergo circuli sibi occurrunt in A si A est possibilis. (9) Ergo (per postul. 2.) datur A. (10) Ergo (per ax. 5) datur ABC. (10) Ergo et anguli ABC, ACB (nam per ax. 7 dato aliquo dantur ejus requisita) (11) et quidem eodem modo (per processum expositum). (12) Ergo (per Ax. 6) congrui sunt anguli. (13) Ac proinde aequales. (Nam congrua sunt aequalia per ax. 8.)

S c h o l. Idem ostendi potuisset per superpositionem, si aliud sumtum fuisset tri-

17 f. (10) . . . (10): Die Zählung wiederholt sich.

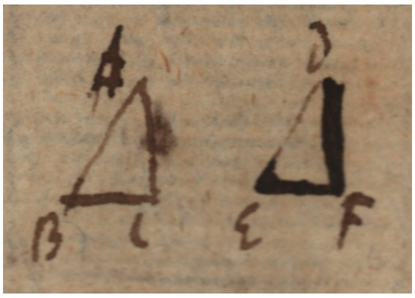
angulum huic congruum, DEF et nunc ABC applicaretur ipsi DEF; nunc ACB ipsi DEF, ita nunc angulus ABC nunc angulus ACB congrueret eidem DEF, ergo congrui essent inter se.

P r o p. 6. Triangulum ABC quod duos angulos B et C aequales habet, etiam latera AB, AC ad reliquum angulum A pertinentia aequalia habebit.

Demonstratur eodem modo, (1) quia dato latere BC, et angulis B, C et partibus ad quas debet esse A, datur A. (2) Nam data positione recta BC et angulo ad eam alterius rectae BA[,] datur ipsa recta BA, indefinite (dato enim positione angulo latera dantur per ax. 7), eodem modo CA indefinite, (3) quae si possibilis est A se secabunt in A. (4) Datur ergo A, adeoque utraque eodem modo, ergo congruent. Q. E. D.

S c h o l. Idem potuisset demonstrari ex praecedenti. Ut et per superpositionem ad instar praecedentis.

P r o p. 7. Si triangula ABC, DEF latera lateribus alterius aequalia habeant, respondens respondenti, Triangula erunt congrua.



[*Fig. 7*]

Demonstratur eadem Methodo, quia data positione uno latere unius trianguli, et uno alterius aequali, et reliquis datis magnitudine, circulos ex datorum positione laterum extremis, et magnitudinibus tanquam intervallis describendo dabitur utrumque triangulum, eodem modo, ergo per Ax. 6. congrua erunt.

P r o p. 8. Datum Angulum BAC bisecare.

[*Fig. 8*]

Sit recta bisecans FA, et $FAB = FAC$. Ea se eodem modo habet ad BA et ad CA. Habemus unum punctum rectae FA, nempe A, quaeratur adhuc aliud F ad quod ea recta se habeat ut ad A. Quod fiet si BAC, (positis BA, CA, aequalibus ut utrumque latus eodem modo tractetur respectu FA) transferamus in BFC centris B et C, radiis aequalibus ipsi BA vel CB describendo circulos, qui se secabunt alicubi in F (quia triangulum BFC ipsi BAC congruum per 7. prim. ob basin eandem BC et latera aequalia, utique possibile est). Recta ergo FA eodem modo se habens ad AB et AC utique angulum bisecabit.

[*Fig. 9*]

Idem praestabitur si super BC basi trianguli isoscelis ABC quodcunque aliud triangulum isosceles BFC construamus per additament. 2. ad prop. 1. Nam locus omnium punctorum eodem modo se habentium ad duo latera ejusdem anguli vel ad duo extrema ejusdem rectae, est recta transiens per duos apices duorum isoscelium eodem modo se ad angulum vel rectam propositam habentium.

P r o p. 9. Datam rectam BC bisecare.

Quaerenda sunt duo puncta eodem modo se habentia ad B et C. Quod fiet si duo triangula isoscelia BAC, BDC qualiacunque construantur super basi BC, recta per angulos basi oppositos seu per eorum apices ducta basin bisecabit.

S c h o l. Euclides pro prop. 8. et 9. utitur triangulo aequilatero, sed praestat adhibere constructionem magis generalem.

3 P r o p. | 8. *ändert Hrsg.* | Datam *L* 7 prop. | 7. et 8. *ändert Hrsg.* | utitur *L*

87 (40896). DE PUNCTO PROPOSITIONES [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 27+54. 1 Bog. 2°. $1\frac{2}{3}$ S. auf. Bl. 27. Auf Bl. 54 N. 88 (40897).

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1686 belegt.

Si quicquid est in A coincidit ipsi A, tunc A dicitur Punctum. Hinc si A est punctum, et B est in A erit $B \infty A$. Et contra si B est in A, et ideo $B \infty A$ erit A punctum, et B punctum.

Punctum puncto congruit seu $A \simeq C$. Congrua enim sunt quae coincidentibus aliquibus in ipsis, assumtis, ad reliqua determinanda sufficientibus, prorsus coincidunt, exempli causa tribus punctis datis datus est positione circulus, itaque quia duo circuli aequales coincidentibus tribus eorum punctis, inter se coincidunt, hinc duo circuli aequales dicuntur congrui. At in punctis plura determinantia sumi non possunt, cum plura quae in eodem puncto sumuntur, inter se et cum puncto coincidant, et ideo si duo puncta in aliquo saltem sibi applicentur atque coincidant, omnino coincident, hoc est erunt congrua.

Punctum puncto simile est seu $A \sim C$. Nam quae congrua sunt multo magis similia sunt. Cum enim similia sint quae per se singulatim discerni non possunt, congrua autem quae per se discerni non possunt, ita ut opus sit assumi aliquod tertium; hinc patet omnia congrua esse similia; licet non contra. Sed et punctum puncto simile esse ex sola definitione similitudinis et puncti patet, sine respectu ad congruitatem. Nam quicquid considerando in uno puncto per se singulatim sumto observari potest, illud etiam in quovis alio potest observari. Quoniam omnia quae in puncto per se singulatim sumto observari possunt, ad hoc unum redeunt, quod quicquid in ipso sumitur ipsi coincidit.

Punctum puncto homogeneum est. Homogenea enim voco, quae similia sunt, vel transformando simiia reddi possunt. Jam puncta jam tum similia sunt, ut non sit opus transformatione. Transformatur unum in aliud, cum quodlibet punctum quod sumi potest in uno, sumi potest in alio, seu cum motu eorum quae sunt in extenso seu motu punctorum extensi, fit aliud extensum.

18 f. patet | omnia similia esse congrua; *ändert Hrsg.* | licet *L*

Punctum puncto aequale est. Nam a e q u a l i a sunt quae congrua sunt, aut transformatione congrua reddi possunt. Hinc patet quae similia et aequalia sunt esse congrua.

Puncti pars nulla est. Si A sit in B, homogeneo; sitque aliquid ut C, in B, quod non sit in A, dicetur B t o t u m , et A p a r s. Ex qua definitione, juncta definitione puncti demonstratur partem puncti B esse nullam; sit autem ea pars A, erit A in B, et C erit etiam in B nec tamen C erit in A. Jam ex defin. puncti A coincidit ipsi B, et C etiam ipsi B, ergo C et A coincidunt inter se. Ergo C est in A contra Hypothesin.

Punctum est minimum. Nam minimum est, quo nullum aliud datur minus. Jam si C aequale est B parti alterius A, dicetur A m a j u s , et C m i n u s. Sit ergo A punctum erit C (puncto minus) aequale B parti puncti. Quod est absurdum, puncti enim pars nulla est per praecedentem.

4 dicetur | A t o t u m , et B p a r s *ändert Hrsg.* | Ex *L* 8 f. si *(1)* Minus est *(2)* A *(3)* C qvod aeqvale est A *(4)* | A *(a)* qvod *(b)* aeqvale est B parti alterius C, *ändert Hrsg.* | dicetur *L*

88 (40897). DE RECTA PROPOSITIONES
[1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 27+54. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 54. Auf Bl. 27 N. 87 (40896).

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1686 belegt.

Si punctum mobile a puncto A ad punctum B sit transferendum via simplicissima, seu ex hoc uno determinata dicetur R e c t a. Hinc manfestum est rectam esse possibilem, utique ex duobus punctis A et B datis, determinatur aliquid; et via illa est unica; ponamus enim duos esse modos aeque simplices, hi cum differant inter se, debet aliquid accedere praeter A et B, ut una ab alia distinguatur, itaque ex solis A et B non determinatur contra Hypothesin. Hinc optime recta exprimetur per AB. Sequitur hinc Rectam esse lineam; item esse lineam inter duo puncta quavis alia minorem; ac proinde per eam optime exprimi distantiam, seu situs relationem inter duo puncta. Denique sequitur quodlibet punctum in recta esse sui situs unicum ad extrema; imo et ad duo quaevis alia puncta in eadem recta.

Possibile est a quovis puncto ad quodvis duci rectam, hoc ex sola natura spatii et situs patet. Intelligimus enim omnia quae situm habent in eodem esse loco communi, continuo, ita ut continua aliqua via ab uno ad aliud perveniri possit, ex quibus simplicissima est recta.

Recta rectae similis est. $AB \sim CD$ patet quia in modo determinandi si rectas per se singulatim spectes nullum discrimen notari potest. Utraque enim oritur de quaerendo determinatam viam inter extrema. Et licet diverso modo se habeant A et B quam C et D hoc ipsum tamen non praecedit originem rectae, sed inde resultat, et per rectam diversam cognoscitur. (Sed non ideo ABC ipsi DEF similis. Nam si aliter se habeat AB ad BC, quam DE ad EF, jam singulatim spectando notari potest discrimen.)

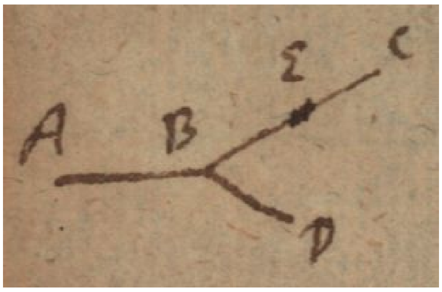
Recta unaquaeque produci potest per quodcunque ejus extremum, ita ut tota sit recta; seu quaevis recta est pars rectae unum commune cum ea extremum habentis. Sit

19 f. recta. *(1)* A puncto *(2)* Duae rectae se non nisi in uno puncto secant Sit enim recta ABCD et alia recta *(3)* Recta *L* 21–24 utraqve . . . cognoscitur *erg.* *L*

recta AB dico eam esse partem rectae alicujus ABC. Sumatur in recta AB punctum D erit AD recta pars rectae ADB, jam per praecedentem recta rectae est similis ergo e[s]t et AB recta pars rectae alicujus ABC. Hoc perinde est ac si ita fuissemus argumentati punctum ex A recto motu egrediens similiter semper se habet, ergo motus est continuatus. Ita et poterit continuari.

Idem aliter demonstrari potest, si ponamus recta data aliam dari majorem; adhibita superpositione. Sit enim recta AB, quae produci debet, ita ut AB sit pars totius recta ABY. Esto alia recta LN major recta AB, itaque AB erit parti cuidam ipsius LN aequalis, quae sit LM. Applicetur LMN ipsi AB, habebitur ipsi LMN rectae coincidens recta ABN locusque ipsius N erit Y quaesitum.

Duae rectae nisi productae coincidant non habent partem communem seu recta ex uno extremo non nisi uno modo produci potest.



[*Fig. 1*]

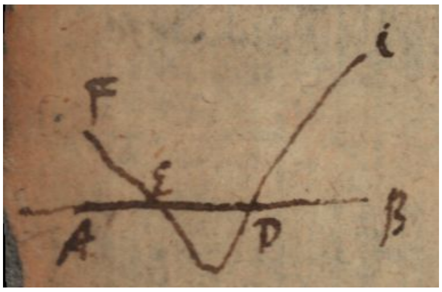
Sint ABC et ABD duae rectae diversae si fieri potest, ita ut BC et BD sumantur extra AB. Ponatur BC esse ea quae non est minor altera BD, sed vel aequalis, vel major, dico quodlibet punctum ipsius BD, ut D, cadere in rectam BC. Dicatur in eam non cadere, et sumatur in BC ipsa $BE = BD$. Quia ABC est recta, ergo punctum B est sui situs unicum ad A et C, et similiter punctum E est sui situs unicum ad A et C. Ergo (sublato C per calculum alibi demonstratum) punctum E est sui situs unicum ad A et B. Jam BD est aequalis ipsi BE, ergo idem est situs puncti E ad B, qui puncti D ad

3 ABC. *(1)* qvor *(2)* Duae rectae non habent partem communem. sit enim ABCD et EBCF rectae qvarum pars communis BC jungatur DF et in ea sumatur punctum medium C *(3)* Hoc *L*

19 alibi: vgl. N. 85 (40889) Teil 3.

B. Similiter recta AE vel ABE est aequalis rectae AD vel ABD nam ABE recta aequ. $AB+BE$, et ABD aequ. $AB+BD$ (quae BD aeq. AE). Ergo idem est situs E ad A qui D ad A. Ergo idem est situs D ad A et B qui E ad A et B, unde sequitur vel E non esse sui situs unicum contra demonstrata, vel E et D coincidere. Quod erat demonstrandum.

Duae rectae, nisi productae coincidant, non possunt habere duo puncta communia; sed sese secant in uno tantum.



[*Fig. 2*]

Sint duae rectae AB et CF sese in D et E secantes. Rectas autem productas coincidere definio, quando omnia earum puncta sunt sui situs unica respectu eorundem duorum punctorum; quod ex praecedenti patet. Quia E est in recta AB, erit sui situs unicum ad A et B; similiter et D, unde vicissim demonstratur tam A quam B esse sui situs unica ad D et E seu esse in recta DE producta. Similiter quia E et D sunt [in] recta CF, demonstratur etiam F et C esse in recta ED producta. Itaque rectae AB et FC productae coincidunt, vel quod idem est in eandem productam coincidunt.

---

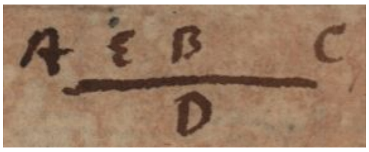
14 *Nach* coincidunt *Kustos:* Tantum

9 qvando *(1)* qvodlibet unius punctum *(a)* ex iisdem du *(b)* |est nicht *gestr.*| sui situs *(aa)* ad eadem *(bb)* respectu eorum *(2)* omnia *L*

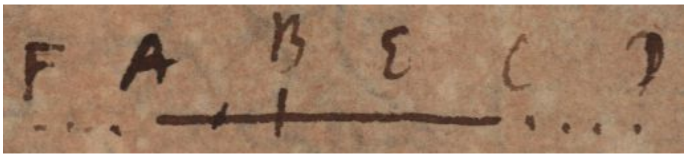
89 (40898). DE LINEARUM PRODUCTIONE
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 28. 1 Bl. 8°. 2 S. Textfolge Bl. 28 v°, 28 r°.

Datierungsgründe: **[noch]**



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

(1) Si punctum D sit in eadem recta cum duobus A, B, vel cadet in rectam his duobus terminatam, vel in eam productam.

(2) Si rectae pars CB producatur in A, ita ut terminus post productionem A, remotior sit ab aliquo in eadem recta puncto D, quam terminus ante productionem B, et continuetur productio in F, adhuc magis removebitur a D terminus secundae productionis F. quam primae A.

(3) Si punctum D in aliqua recta positum non cadit in aliquam ejus rectae partem, BC, nec pars haec producta per unum extremum B in ipsum incidit, tunc producta per alterum C in eam incidet, patet ex 1.

(4) Iisdem positis, si pars BC producta per unum C in punctum extra eam in eadem recta positum D incidet, producta per alterum extremum B in eam non incidet. Patet ex 5 et 2.

(5) Si recta BC producatur ex uno extremo C in D major erit distantia termini post prductionem C, a termino permanente B, quam termini ante productionem C ab eodem permanente B. Hoc patet ex definitione productionis. Nam producere BC per C in D est facere $BC + CD \infty BD$. Hinc videtur et demonstrari 2. Nam sit $CB + BA \infty CA$ et $BA + AF \infty BF$ et sit $AD \sqcap BD$ ostendendum est fore $FD \sqcap AD$ scil. si D non cadit in AB.

(6) Nempe si AB non ∞ $AD + DB$ et $AD \sqcap BD$ erit $AD \infty AB + BD$. Nam si $AD \sqcap BD$ erit $AV + VD \infty AD$ ut sit $VD = BD$. Jam AB non ∞ $AV + VD$ posito $VD = BD$.

Si A, B, C sint in eadem recta, et $AB + BC$ non ∞ AC nec erit $AB + BC = AC$ sed erit $AB + BC \sqcap AC$.

Si ex tribus punctis ejusdem rectae, unum a reliquis duobus aequidistet, cadet semper in eam portionem rectae, in quam ambo puncta cadunt a quibus aequidistat.

Generalius: Si punctum tantum distet ab uno puncto ejusdem rectae quantum ab altero, distantia ejus ab alterutro erit dimidium distantiae ipsorum inter se.

Si plures magnitudines non habeant partem communem, component totum aequale omnibus simul.

Si duo continua habeant unum extremum commune, nihilque aliud, component unum continuum aequale ambobus.

$AYB + BZC$. et $AY + YB \infty AB$, et $BZ + ZC \infty BC$ et nullum Y est Z. Erit $AB + BC = AC$. Producta est recta AB si sumitur BC non nisi B commune habens cum AB.

(Si A, B, C sunt in eadem linea, et AB est minus AC, et pars ejus cadit in AC[,] totum cadet in AC.)

Si AB, BC sunt in eadem linea [ABC] nec habent partem communem, erit $AB + BC \infty$ toti lineae in qua sunt. Ergo si AB et BC, non habent partem communem, cum totum constituant, quicquid est in AC comprehenditur in ipsis. Et in recta ipsae ambae etiam comprehenduntur in AC.

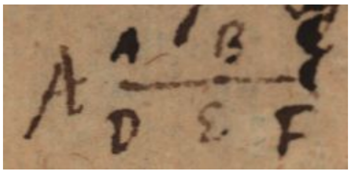
Si duae rectae sint in eadem recta; et habeant extremum commune, et aliud praeterea punctum, earum una in altera comprehenditur.

90 (40899). DE RECTIS AEQUALIBUS [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 29. 1 Bl. ca 8°. 1 S. auf Bl. 29 r°, Bl. 29 v° leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

Si duae rectae aequales habeant extremum et aliud praeterea punctum congruens totae congruent.



[*Fig. 1*]

$AB + BC \infty AC$. $DE + EF \infty DF$. $DE \infty AB$ et $EF = BC$ ergo $EF \infty BC$. Nam $A.B.C \simeq D.E.F$ et $A.B \infty D.E$. Ergo $A.B.C \simeq A.B.F$ Jam $A.B.C$ un. Ergo $F \infty C$.

Hinc si duae rectae habeant extremum et aliud praeterea punctum commune una earum tota in alteram cadet, si aequales sunt, per praecedentem, si inaequales pars majoris saltem aequalis erit.

91 (40903). DE REDUCTIONE SIMILIUM
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 32. 1 Zettel [**noch**]. 1 S. auf Bl. 32 v°. Bl. 32 r° leer. — Bl. 32 hing ursprünglich zusammen mit LH 35 I 14 Bl. 35 (N. 94 (40907)).

Datierungsgründe: [**noch**]

Videntur s i m i l i a reduci posse ad congrua, et c o n g r u a reduci posse ad c o i n c i d e n t i a . Nam c o n g r u a sunt quae coincidunt si determinantia actu congruant seu coincidant. Hinc idem est modus determinandi utrobique.

S i m i l i a sunt quae congrua sunt, positis duobus homologis congruis. Homologa autem sunt relata respondentia, ac proinde eaedem utrobique sunt relationes.

92 (40904). DE POSITIONE SPECIE MAGNITUDINE
[Erste Hälfte 1687]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 33. 1 Bl. 8°. 1 S. auf Bl. 33 v°, 9 Z. auf Bl. 33 r°. — Auf Bl. 33 r° Fragment eines Entwurfs für die *Réplique de M. L. à M. l'Abbé D. C. contenuë dans une lettre écrite à l'Auteur de ces Nouvelles le 9 de Janv. 1687. Touchant ce qu'a dit M. Descartes que Dieu conserve toujours dans la nature la même quantité de mouvement* (gedr: *Nouvelles de la République des Lettres*, Februar 1687, S. 131–144).

Datierungsgründe: Leibniz hat die Endfassung der *Réplique* seinem Brief an P. Bayle vom 19. Januar 1687 beigelegt (vgl. II, 2 N. 32). N. 92 (40904) ist nach dem Entwurf des Artikels auf Bl. 33 geschrieben worden.

Quae ex congruis eodem modo determinantur congrua sunt.

Quae ex similibus eodem modo determinantur similia sunt.

Si ea congrue se habent, vel coincidunt, quibus positione datis res specie data positione habetur, ipsae res congruunt vel coincidunt.

Si inter ea ex quibus datis A positione datur, sit species et positio ipsius B. iisdem positis omissa tantum positione ipsius B; dabitur A specie.

Quod positione datur, id datur specie et magnitudine.

Ex quibus quid positione datur, ex his si aliud eodem modo positione detur, coincident illa inter se.

Si inter ea ex quibus A specie et magnitudine datur, sit species et magnitudo ipsius B; Ex iisdem omissa magnitudine ipsius B. dabitur A specie. Non tamen licet credo dicere omissa specie ipsius B dari A magnitudine.

Videndum quid de his dici debeat quae dantur alternative; ea si eodem modo se habent, videndum an plura possint esse quam 3, quia tantum 3 puncta eodem modo se habentia inter se reperiri possint, ita et tres sphaerae.

11 Qvae *(1)* ad congrua similiter se habent congrua sunt. Qvae ad similia similiter se habent similia sunt, hoc est *(a)* Qvae ex si *(b)* qvae ex similibus eodem modo *(aa)* determinantur *(bb)* determinat⟨a⟩ *(2)* ex *L* 13 ea *(1)* congruunt *(2)* congrua sunt *(3)* congrue *L* 14 f. coincidunt *(1)* Specie datum est A, *(a)* si *(b)* qvod uno ex reqvisitis positis *(2)* sp *(3)* Si datur species ipsius A, et dentur aliqva alia B. C etc. et ex his *(4)* Si ex data specie et positione ipsius A, et *(5)* Si *L* 15 qvibus *(1)* A sit *(2)* datis ... datur, *(a)* detur species *(b)* sit *L* 20 qvibus A *(1)* positione *(2)* specie *L*

Si B est in $L + M + N$ etc. et quicquid est in B vocetur Y. erit qu. Y in L vel M vel N. Alioqui nullum Y erit in L.

Si L est in $A + B$ et non est in A nec in B poterit resolvi in $L + M$ ∞ [*bricht ab*]

3 Si *(1)* A est in B + C et non est in B nec in C poterit A resolvi in *(2)* L est *L*

93 (40906). DE DISCRIMINE INTER VIAM ET LINEAM [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 34. 1 Zettel **[noch]**. 1 S. auf Bl. 34 v°. Bl. 34 r° leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

Discrimen aliquod fieri posset inter viam et lineam si punctum mobile tendat per aliquam lineam a puncto A ad punctum B, et per eandem redeat a B ad A, linea percursa non erit major quam si non rediisset; nihil enim est lineae in regressu quod non fuerit in itione et idem sibi appositum non facit novum. At via percursa erit duplo longior nisi malimus sumere viam pro linea.

94 (40907). DE MOTU PARALLELO [1685?]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 35. 1 Bl. 12°. 1 S. auf Bl. 35 r°. Bl. 35 v° leer. — Bl. 35 hing zusammen mit LH 35 I 14 Bl. 32 (N. 91 (40903)). — Gedr. (tlw., mit engl. Übers.): De Risi, *Leibniz on the Parallel Postulate*, 2016, S. 138–139.

Datierungsgründe: [**noch**]

Si linea recta moveatur vestigiis suis parallela puncta ejus quaelibet describunt lineas inter se congruentes.

Si planum ita moveatur ut duae ejus rectae (quae productae non coincidant in unam), maneant suis vestigiis parallelae omnes ejus rectae manebunt suis vestigiis parallelae, omniaque adeo puncta ejus describent lineas parallelas.

Si solidum ita moveatur, ut tres ejus rectae maneant suis vestigiis parallelae (vel duo plana,) omnes ejus rectae (omniaque plana,) suis vestigiis parallele movebuntur, omniaque puncta movebuntur congrue.

Aliter:

Si duo rectae, tria plani, quatuor solidi puncta (ad determinandum sufficientia) moveantur congruenter, omnia eorum puncta congruenter movebuntur.

Directiones punctorum parallelae esse possunt, etsi lineae non sunt congruae, ut patet cum ejusdem radii puncta plures circulos describant.

Videndum an linea recta ita mota, ut tamen semper vestigia ejus ad idem punctum convergant, suis punctis lineas describat similes.

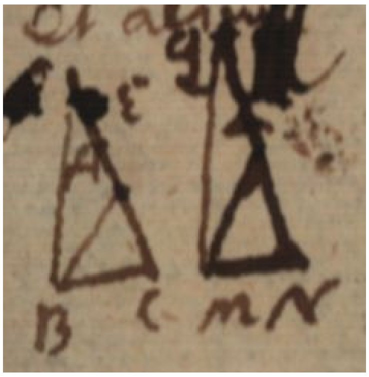
9 ut *(1)* tres *(2)* duae *L* 14 movebuntur *(1)* parallel *(2)* congrue *L* 16 Si *(1)* tria *(2)* duo *(a)* rect⟨–⟩ *(b)* rectae *L* 17 congruenter, *(1)* seu directiones habeant parallelas; *(2)* omnia *L* 17 f. movebuntur *(1)* Viae *(2)* Directiones *(a)* parallelae *(b)* punctorum *L*

95 (40908). DE REBUS SPECIE DIFFERENTIBUS
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 36. 1 Zettel [**noch**]. 2 S.

Datierungsgründe: [**noch**]

Specie res differre cognosci potest non tantum ex attributis ipsarum per se spectatorum, sed et ax attributis aliarum rerum quibus ipsae insunt.



[*Fig. 1*]

V. g. sit triangulum ABC et aliud LMN, si ipsa sigillatim per se spectentur considerari potest AB, et AC in uno, eorumque notari ratio D. item LM et LN in altero, et eorum notari ratio P. Quod si nequeat reperiri in LMN ratio P quae sit eadem rationi D. utique ABC et LMN non sunt possibilia. Et hoc cognovimus ex ipsis sigillatim per se spectatis. Sed potest tamen dissimilitudo etiam agnosci ex forinsecus assumtis, v. g. producatur CA in E ut fiat CAE dupla CA, item NL in Q ut fiat NEQ dupla NL. Jungatur illic EB, hic QM; si jam $QL : QM$ non :: $EA : EB$. erunt ABC et LMN dissimilia. Si tamen definias similia quae non discerni possunt attributis per se spectatorum hinc etiam demonstrabis, nec discerni posse attributis, alterius rei per se spectatae, cui ipsae insunt, quia similia similiter addita faciunt similia.

Forte attributa rei per se spectatae, omnia illa intelligi possunt, quae cum re necessariam habent connexionem, ut cum linea recta ejus productio possibilis.

96 (40910). PRAESUMTIO LOCO DEMONSTRATIONIS [1686 (?)]

Überlieferung:

L Notiz: LH 35 I 14 Bl. 38. 1 Zettel **[noch]**. 7 Z. auf Bl. 38 r°. — Auf Bl. 38 v° Fragment eines Briefentwurfs in Leibniz' Hand: ⟨—⟩ernehme, daß man ⟨—⟩ | ⟨—⟩ige erinnerungen thun ⟨—⟩ | ⟨—⟩ Beschaffenheit dieser di⟨—⟩ | ⟨—⟩ thun, bey dem Herr ⟨—⟩ | ⟨—⟩schleunigen, auch die ⟨—⟩ | ⟨—⟩ dienliche Vorstellung ⟨—⟩ | ⟨—⟩ bey bergwercken eine⟨—⟩ | ⟨—⟩gen nicht zu sehr abgew⟨—⟩ | ⟨—⟩ damit ich nach befinden, ⟨—⟩ | ⟨—⟩ thun ⟨—⟩ | ⟨—⟩en noch streitigen pun⟨—⟩ | ⟨—⟩ könne. ⟨—⟩

Datierungsgründe: **[noch]**

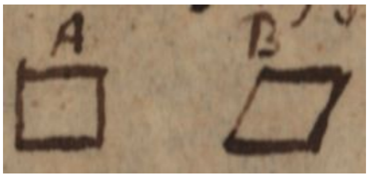
In rebus simplicissimis praesumtio tenet locum demonstrationis, ita ut pro certo habendum sit possibile esse, cujus contrarium demonstrari posse non apparet. Exempli causa a quolibet puncto ad quodlibet dari viam; punctum aliquid moveri posse salvo suo situ ad duo alia puncta.

97 (40914). DE TRANSITU CONTINUO
[1686 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 41. 1 Zettel **[noch]**. 2 S. Textfolge Bl. 41 v°, 41 r°. — Auf Bl. 41 r° Figurenskizze ohne Bezug zum Text:

Datierungsgründe: **[noch]**

Inter duos situs eorundem datur transitus per motum continuum.



[*Fig. 1*]

Quadratum A et rhombus B, is cum sit ex quadrato factus, seu cum eadem sint in B quae in A, necesse est continuo aliquo motu ex A fieri posse B, servatis iis qui utroque communia sunt punctis rectarum communibus.

Generalis haec regula magni momenti quod inter duo commune aliquid habentia, seu quae ex eodem facta fieri possunt[,] transitus semper datur continuus qui non sit per saltum ut via a puncto ad punctum etc. Est inter postulata generalia. Et datur unus modus determinatus.

98 (40915). DE LOCIS PLANIS ET SOLIDIS [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 42. 1 Zettel [**noch**]. 1 S. auf Bl. 42 r°. Bl. 42 v° leer.

Datierungsgründe: [**noch**]

Loci plani haec est proprietas reciproca, ut circulum non nisi in duobus punctis secare potest.

Locus solidus est qui circulum secare potest in quatuor punctis. Videndum an ex hac loci plani definitione praevideri possit ea loca quae Pappus ex Apollonio recensuit plana esse.

8 recensuit: Vgl. Pappos, *Collectiones*, III, 7 u. IV, 36.

99 (40916). DE MAGNITUDINIBUS DESIGNANDIS IN CALCULO LINEARI [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 43. 1 Zettel **[noch]**. 1 S. auf Bl. 43 v°. Bl. 43 r° leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

Ubi meus calculus linearis erit constitutus, erit credo optimum, pro magnitudinibus designandis adhibere Numeros fictitios seu in speciem veros sive certos pro indefinitis adhibitis; pro Punctis autem designandis adhibere literas. Nam et numeri sunt quantitates, serviuntque ad calculum ubique comprobandum. Praeterea hoc modo calculus linearis poterit fieri literis minusculis cum majusculae sint prolixiores scripturae. Et cum ex incertis fiunt certae in magnitudinibus vel lineis, licebit verae fieri minuscula in majuscula more Pellii.

---

9 prolixiores: Vgl. J. Wallis, *A Treatise of Algebra*, 1685, S. 126, der dies Th. Harriot zuschreibt: „He first changeth the *Capital* or Great Letters, (which *Vieta* and *Oughtred* are mostly made use of for Species or *Symbols*,) into Small Letters; as taking up less room"; Leibniz hat das Werk in den *Acta Eruditorum*, Juni 1686, S. 283–289, rezensiert. 11 more Pellii: Vgl. den Hinweis auf die Verfahrensweise von J. Pell in J. Wallis, *a. a. O.*, S. 128: „And for Known Quantities, he useth Capital Letters, A, B, C &c; and for Unknown Small Letters, *a*, *b*, *c*. And in the Process of Operation, when a Quantity, at first Unknown, comes to be Known; he changeth the small Letter for a Capital"; Beispiele finden sich *a. a. O.* ab S. 221.

100 (40921). DE VARIIS MODIS GENERANDI RECTAM [1680 (?)]

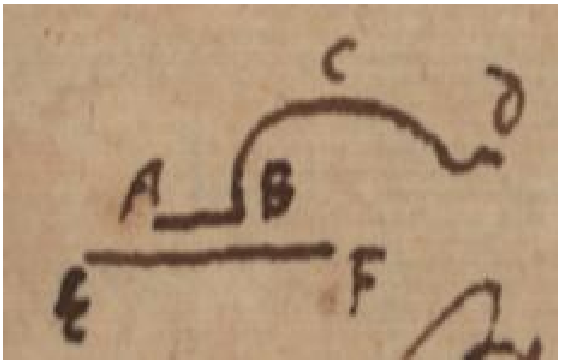
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 48. 1 Bl. ca 4°. 2 S.

Datierungsgründe: [**noch**]

Recta variis modis generata intelligi potest, ut si corpus aliquod duobus punctis immotis moveatur locus omnium punctorum immotorum est recta.

[*Fig. 1*]

Item si lineae alicujus extrema diducantur quantum fieri potest, salva lineae magnitudine, linea illa fit recta. Qui modus describendi non indiget solido.



[*Fig. 2*]

Item si quodcunque extensum $ABCD$ recta aliqua AB in ipso ducta moveatur super recta immota EF, tunc quodlibet punctum extensi describet rectam, eaeque omnes rectae, nisi coincidant erunt parallelae inter se.

Sed ex his modis ultimus supponit aliquam rectam jam esse; secundus supponit cognitam naturam distantiae, nempe intervalli brevissimi duorum punctorum, quod coincidit cum recta. Primus modus videtur independens maxime. Si tamen velimus ut serviat ad demonstrationes plane absolutas prius demonstrandum videtur possibile esse corpus aliquod moveri duobus punctis immotis, deinde etiam haec inest difficultas, quod fieri potest aliquando ut nulla generetur recta corpore ita ut diximus moto, si sic sit excavatum ut puncta illa in rectam cadentia absint. Addenda ergo est cautio, nempe corpus debere esse plenum seu quicquid extensi in eo inclusum intelligi potest, debere ipsi inesse; sed ita vereor, ne notio includentis et inclusi rursus rectam praesupponat. Sunt alii modi generandi rectam, sed per puncta, ut si omnia puncta quaerantur, quae non nisi unico modo se habent ad duo puncta data; item si quaerantur omnia puncta quorum unumquodque se eodem modo habet ad quodlibet ex punctis duobus datis.

Considerandae etiam sunt notiones rectae, quae generationem ejus non continent, tamen ipsam possibilem ostendunt. Ut si recta ponatur esse lineam cujus partes sibi congrua sunt. Ponamus enim lineam dari in qua id non fiat, abradique paulatim incongruitates a superficie quam illa linea terminat, ut quod uni parti congruit alteri congruat. Item si recta ponatur esse linea, quae se ad diversas plagas diverso modo non habet, ut curva quae habet cavum et convexum; nempe si superficies aliqua spatium seu corpus interminatum secet et eodem modo se habeat ad utramque partem corporis, ea dicetur planum. Rursus si linea aliqua planum interminatum in duas partes secet, et eodem modo se habeat ad utramque partem plani, seu partes sectae congruant dicetur recta. Videtur autem hinc apparere rectam pariter et planum esse possibiles. Quia nihil est definitum, quo pars una ab alia sit diversa, itaque nihil est in datis, quod prohibeat sectionem fieri eodem modo, imo, ut sectio fiat diverso modo eoque determinato assumendum adhuc aliquid novum, est porro si manus exerraverit, corrigi potest applicatione unius ad aliud. Videtur etiam demonstrari posse rectam esse possibilem si reta definiatur, ut paulo ante diximus, locus omnium punctorum unico modo se habentium ad duo puncta proposita A et B. Adhibito postulato quodam generali, si in spatio duo conveniant in aliquo datur locus continuus infinitorum in eodem convenientium, ambo comprehendens, vel id quod uni congruit, motu pervenire potest ad alterum, servata eadem proprietate. Sint jam in spatio duo puncta A et B immota, inter se diversa, et sit punctum mobile M. patet si M sit in A hunc ejus spatium quo se habet ad A et B esse unicum, nec alio modo collocari posse, ut eodem modo se habeat, nam in eo modo quo se nunc habet continetur ut coincidat ipsi A at alio modo obtineri non potest, quia A ponitur immotum. Similiter si M translatum intelligatur in B, situs ejus ad A et B est rursus unicus. Ergo per postulatum nostrum, mirabile ita transferri potuit ab A ad B ut semper servaret hanc naturam, seu semper situm haberet unicum ad A et B. Atque ita describet lineam rectam. Ergo recta est possibilis. Ita si duobus quibuscunque ponatur aliquid commune semper potest modus continuus dari faciendi unum ex alio salva eadem proprietate. Quin et si duo sint diversa semper patet modus dari faciendi unum ex alio per aliquam mutationem continuam per gradus.

101 (40923). VIA UNIFORMIS SEU LINEA RECTA EST POSSIBILIS [1680 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 51. 1 Zettel [**noch**]. 1 S. auf Bl. 51 v°. Bl. 51 r° leer.

Datierungsgründe: [**noch**]

Uniforme difformi prius est. Itaque hinc sequitur viam uniformem seu lineam rectam esse possibilem. Item corpus secari posse aliqua superficie in duas partes versus sectionem congruas; seu eodem se habentes modo ad secans si quantum oportet producantur. Quae superficies cum plana sit, planum erit possibile. Eodem modo planum linea alia in duas partes congruas versus sectionem, seu respectu sectionis se eodem modo habentes secari potest, hoc est rursus recta linea est possibilis.

102 (40925). IDEM ET AEQUALE
[1686 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 52. 1 Streifen [**noch**]. 2 S. Textfolge Bl. 52 v°, 52 r°. — Auf Bl. 52 r° unten Figur außerhalb des Textes:

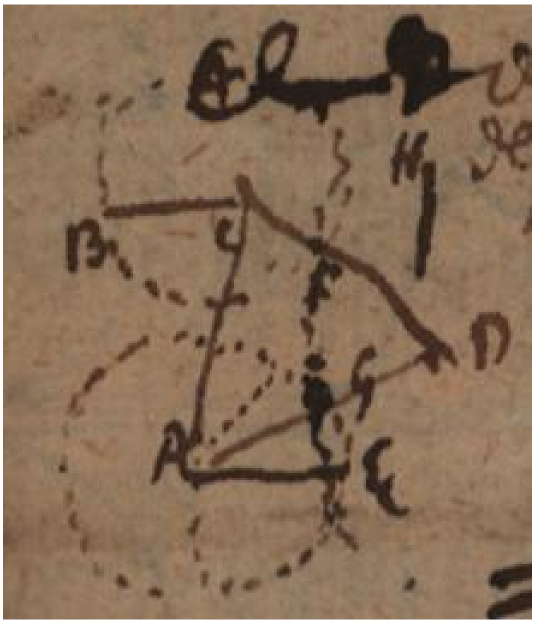
Datierungsgründe: [**noch**]

Idem sibi additum non facit aliquid novum. Aequale autem aequali additum facit novam magnitudinem, hinc cum aequalium sit eadem magnitudo, dici non debet cum ipsa sibi addantur magnitudines sibi addi, sed ipsas res, vel potius numeros. Itaque 4 non est idem cum 4 sed =. Hinc magnitudo non est Numerus. Licet per numerum cognoscatur. Idem de ratione dicendum. Hinc nec ratio addi dicenda rationi, nec ratio est pars rationis.

103 (40926). SECUNDA EUCLIDIS
[Ende 1682 – Anfang 1683 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 53. 1 Bl. ca 8°. 1 S. auf Bl. 53 r°. Auf Bl. 53 v° Fragment einer Aufzeichnung zum Holzbedarf für den Harzbergbau.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Dezember 1682 belegt.



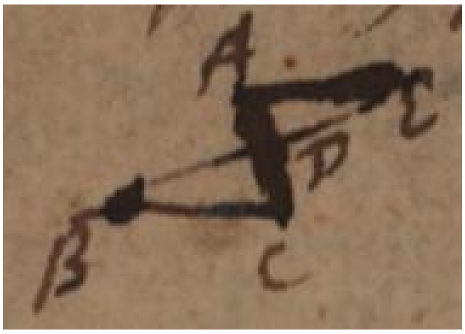
[*Fig. 1*]

Secunda Euclidis est puncto dato A apponere rectam datae BC aequalem, ope solius postulati ducendae rectae, et describendi ex centro dato circuli. Hujus analysis vera haec est, problema reddatur determinatum eritque circa centrum A describere circulum AE aequalem circulo circa C. intervallo B. C. Junge AC et quaere punctum D eodem modo se habens ad A quo ad C seu ad duos circulos. Jam juncta DC circulo CB occurrit in F ut DF sit aequalis ipsi H alicui. Ergo similiter circulus AE occurret DG aeq. eidem H. Ergo centro D. radio DF describendo circulum intersectio ejus et rectae DA dabit

7 Tertia *L ändert Hrsg.*

G. At centro *A* radio AG describetur circulus quaesitus *AEG*.

Alia solutio specialior.



[*Fig. 2*]

Ad punctum datum *A* apponere *AE* aequalem et parallelam ipsi *BC*. Junge *AC* ejusque sume medium punctum *D*. Junge *BD* et produc in *E*, sic ut sit *DE* aeq. *DB*. et juncta *AE* erit quaesita. Sed bisectio rectae *AC* seu inventio puncti *D* necessaria est.

104 (40928). SPECIMEN RATIOCINATIONIS NOVAE [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 55–56. 1 Bog. 4°. 4 S.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1686 belegt.

Specimen ratiocinationis sine exemplo novae, ubi ope novi cujusdam axiomatis introducitur calculus cujus ingredientia non sunt magnitudines sed puncta. Qua ratione institui potest Analysis Geometrica plane nova et ab Algebra toto coelo diversa, quia situs immediate exhibetur.

Locus ex duobus punctis determinatus est R e c t a. Seu in recta $\overline{Y}$ punctum Y est unicum suae relationis ad duo quaedam puncta. Et ideo si talis procedat consequentia[:] $A.B.Y \infty A.B.(Y)$. Ergo $Y \infty (Y)$. $\overline{Y}$ erit Recta. Hinc sequitur puncta A et B esse in eadem ipsa recta, nam A est unicum suae relationis ad A, ergo et unicum suae relationis ad A et B. Idem est de B. Quaelibet etiam duo puncta in recta hoc habent, ut quodlibet aliud in eadem recta sit suae ad ea relationis unicum. Nam sint duo puncta in recta L et M, dico punctum quodlibet Y in hac recta $\overline{Y}$ esse suae ad ea relationis unicum. Nam $Y.A.B$ $\overset{(1)}{\text{est}}$ unic. et $L.A.B.$ $\overset{(2)}{\text{est}}$ un. et $M.A.B$ $\overset{(3)}{\text{est}}$ un. Ex Hypothesi. Jam ex quavis determinatione tolli tolli potest litera ope determinationis alterius, seu determinantia substitui possunt in locum determinati salva determinatione. Hinc ex 1 et 2. tollendo A ope 3 seu pro A ubique ponendo $M.B$ per 3, tunc ex 1. fiet $Y.M.B.B$ un. hoc est $Y.M.B$ $\overset{(4)}{\text{est}}$ un. et ex 2 fiet: $L.M.B.B$ est un. hoc est $L.M.B$ $\overset{(5)}{\text{est}}$ un. Et habemus duas determinationes 4 et 5. in quibus abest A. Superest ut in harum una tollamus et B ope alterius, quod fiet in det. 4. tollendo B ope 5 seu pro B ponendo $L.M$. Tunc ex determ. 4 fiet: $Y.M.L.M$ est un. seu $Y.M.L$ $\overset{(6)}{\text{est}}$ un. Quod erat demonstrandum.

Locus ex tribus punctis determinatus (quorum tertium ex duobus determinatum non est seu quae non sunt in una recta) est p l a n u m. Hinc similiter colligitur tria hac puncta esse in eodem plano, et tria quaelibet plani puncta (non in una recta jacentia) determinare reliqua. Utrumque prorsus eo modo demonstratur in plano, quo simile aliquid demonstravimus in Recta. Hinc porro colligitur omnem rectam in planum cadere. Nam quod determinatum est ex duobus A et B, multo magis determinatum est ex tribus

$A.B.C$. Sequitur etiam eandem rectam posse esse duorum planorum, sit enim planum det. ex $A.B.C$ et rursus planum det. ex $A.B.D$ manifestum est, quod ex $A.B$ determinatum est esse in utroque plano.

Pars rectae recta est, pars plani planum est, nam ex iisdem punctis determinantur ex quibus tota.

Duae rectae non possunt habere dua puncta communia, alioqui enim non nisi unica erit ex illis punctis determinata. Eodem modo duo plana non possunt habere tria puncta communia, nisi in eandem rectam cadant, nec duas possunt habere rectas communes.

Tam recta infinita infinitae, quam finita finitae est similis. Nam quoad duas rectas infinitas sit $\overline{Y}$ det. ex $A.B$ et $\overline{Z}$ det. ex $L.M$ patet nullum discrimen ex his notari posse singulatim. Quoad finitas sit AB det. ex A et B extremis, et LM det. ex L et M extremis rursus nullum discrimen notari potest singulatim. Nam et punctum puncto simile est et modus quo rectae ex punctis constituuntur etiam sunt similes.

Planum infinitum infinito simile est, non semper finitum finito. Sit planum determinatum ex A, B, C item ex $L.M.N$. Ajo ea esse similia, nam si similiter se habent $A.B.C$. atque $L.M.N$, res est manifesta. Sin minus saltem in plano LMN sumi possunt alia tria similiter se habentia ac A, B, C; imo plane eodem modo se habentia. Unde duo quaevis plana infinita congrua sunt; et partes earum sibi superincedere seu applicari possunt. Sed hoc quod dixi puncta in plano $L.M.N$ sic posse sumi adhuc demonstrandum est. Quemadmodum etiam adhuc demonstrare operae pretium foret, rectam esse lineam, et planum esse superficiem, et plana duo indefinita non posse in uno puncto tantum sibi occurrere, et locum omnium punctorum, eodem modo se ad 4 puncta non in eodem plano posita habentium esse spatium universum; seu quodlibet punctum determinatum esse relatione sua determinata ad 4 talia puncta. Item demonstrare operae pretium erit locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad tria puncta esse rectam; ad duo, planum; ad quatuor, spatium universum.

$\overline{Y}$ designat locum omnium Y et $\overline{\overline{Y}}$ locum omnium $\overline{Y}$ et ita porro. Numerus autem omnium Y regulariter intelligitur quovis assignabili major.

$\overline{Y}$ est c o n t i n u u m , si posito omne Y esse X vel Z sequitur quoddam X coincidere cuidam Z. $\overline{X}$ tamen et $\overline{Z}$ sint diversa. Regulariter autem tali nota ut $\overline{Y}$ continuum intelligo.

Si omne quod est in A, coincidit ipsi A, tunc A erit punctum seu si A sit punctum talis institui potest ratiocinatio: B est in A. Ergo $B \infty A$ seu punctum est tale $\overline{Y}$ in quo non potest sumi $\overline{X}$ nisi duo X coincidant.

Linea est tale $\overline{Y}$ in quo non potest sumi $\overline{\overline{X}}$ nisi duo $\overline{X}$ habeant commune $\overline{Z}$. Hoc est, ut familiarius rem exponam; Linea ut $\overline{Y}$ est locus quidam, sed et superficies est locus; et corpus; et quanquam superficies aut corpus sit rursus locus alicujus loci, nempe linearum indefinitarum, tamen hoc discrimen ad lineam definiendam non sufficit, nam et linea diversarum linearum locus esse, ita ut tam in linea quam in corpore vel superficie possit concipi $\overline{\overline{X}}$ seu locus omnium $\overline{X}$. Hoc tamen interest quod in superficie vel alia Dimensione potest talis locus $\overline{\overline{\overline{X}}}$ assumi, quemadmodum quadratum aut circulus si motu rectae $\overline{X}$ generentur, ubi duo loca ipsius $\overline{X}$ utcunque assumantur, aut nihil habent commune, aut saltem non habent alium locum novum $\overline{Z}$, sed tantummodo punctum aliquod aut finiti numeri puncta communia; at in linea, si concipiamus eam ut locum infinitorum locorum, nempe infinitarum linearum, (v. g. si rectam generari a recta mota intelligam) talia duo loca rectae generantis assumi possunt, quae habeant rursus rectam aliquam adeoque novum locum $\overline{Z}$ communem. Cum enim recta per rectae motum generatur infinita puncta rectae generantis in aliorum ejusdem loca succedunt durante motu, quod non fit quando motu rectae generatur superficies.

Hinc si $\overline{X}$ et $(\overline{X})$ sint in linea $\overline{Y}$, et $\overline{Z}$ sit in $(\overline{X})$ itemque $\overline{Z}$ sit in $(\overline{X})$ et hinc sequatur $(\overline{X})$ et $(\overline{X})$ coincidere locus non est linea.

Hinc generalem expressionem pro gradibus dimensionem nanciscimur talem:

Punctum est in quo non possunt intelligi infinita X quin coincidant.

Linea est in qua non possunt intelligi infinita $\overline{X}$ inter se diversa, quin quodlibet eorum habeat cum aliquo ex reliquis commune $\overline{Z}$.

Superficies est in qua non possint intelligi infinita $\overline{\overline{X}}$ inter se diversa quin quodlibet eorum habeat cum aliquo ex reliquis commune $\overline{\overline{Z}}$.

Corpus est in quo non possunt intelligi infinita $\overline{\overline{\overline{X}}}$ inter se diversa, quin quodlibet eorum habeat cum aliquo ex reliquis commune $\overline{\overline{\overline{Z}}}$.

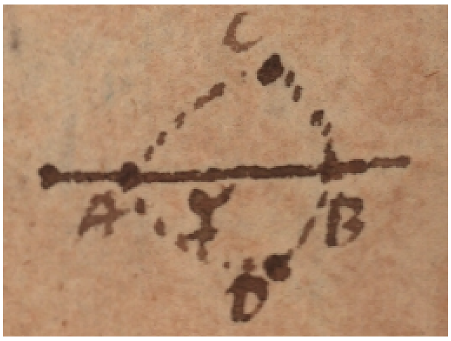
1–18 *Randbemerkung:* Hic tandem notionem aliquam pro tribus dimensionibus distinctam satis et ex mera inexistentia pendentem inveni. Sine ulla motus consideratione.

105 (40931). RECTA EST VIA SIMPLICISSIMA [1685 – 1687]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 60. 1 Bl. 4°. 2 S. — N. 105 (40931) und N. 106 (40932) bildeten ursprünglich ein Bl. 2°. — Gedr. (mit frz. Übers.): ECHEVERRÍA / PARMENTIER, *La caractéristique géométrique*, 1995, S. 310–315.

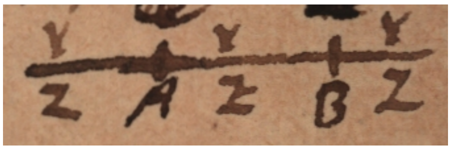
Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1685–1687 belegt.

Cum multae sint viae per duo puncta transeuntes, una erit simplicissima quae proinde erit ex solis his duobus punctis determinata, eademque brevissima, et uniformis, et unica. Ejus naturam ita optime ad novi calculi a me inventi rationem exprimemus:



[*Fig. 1*]

Sit punctum Y, determinatum determinato suo situ ad puncta A et B, locus omnium punctorum Y dicetur recta; quam voco $\overline{Y}$ vel $A.B.\overline{Y}$. Pono enim assumi punctum C per quod via aliqua in A et B incidens vel ab A ad B tendens, transeat; hoc punctum habet situm utique quendam certum tam ad punctum A quam ad punctum B, quod si aliud quoque datur D eundem habens situm ad puncta A et B, nulla ratio est cur una transeat potius per C quam per D, nec proinde talis via est determinata ex solis punctis A et B assumtis; cum tamen utique via aliqua determinata detur, ideo sumenda habebuntur talia puncta, quale sit Y, quae scilicet ita assumuntur, ut nullum aliud sumi possit, quod eodem modo situm sit ad A et B, quo ad ea situm est Y.



[*Fig. 2*]

Unde si sit $Y.A.B.$ $\overset{\text{(congruum)}}{\infty}$ $Z.A.B.$ et ex eo concludatur Y $\overset{\text{(coincidere)}}{♉}$ Z intelligetur Y vel Z esse in recta transeunte per $A.B$: Vicissim si Y vel Z sunt in recta per $A.B.$ et $Y.A.B \infty Z.A.B$ sequetur Y ♉ Z.

Breviter: Si $A.B.Z$ est unica (seu si $A.B.Z \infty A.B.Y$ est ♉) $\overline{Z}$ est recta. Necessario autem A erit Z et B erit Z.

Hinc duae rectae non possunt se secare in duobus punctis. Quin productae coincidant, sive non nisi una est recta indefinita, per duo proposita puncta transiens. Sit recta transiens per puncta $A.B$, et sit alia transiens per eadem, dico eas coincidere. Nam omne punctum quod ex situ suo ad puncta $A.B$ determinatum est cadit in unam ex ipsis $\overline{Y}.A.B$ quam talium punctorum locum definivimus. Jam omne punctum rectae alterius $\overline{Z}.A.B$ dato situ suo ad puncta $A.B.$ est determinatum, (cadit enim in rectam per puncta $A.B.$ transeuntem) ergo omne punctum rectae $\overline{Z}.A.B$ cadit in rectam $\overline{Y}.A.B.$

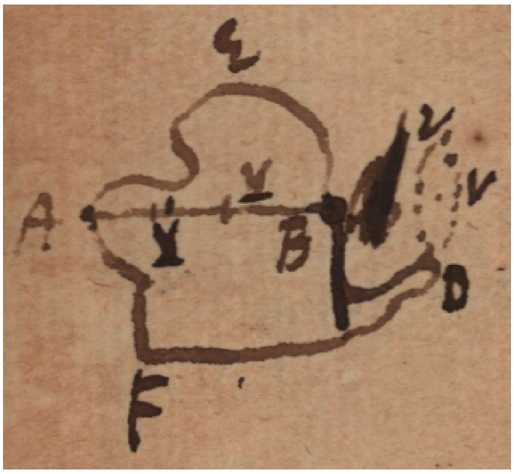
[*Fig. 3*]

Hinc sequitur duas rectas non posse habere segmentum commune, alioqui haberent et duo puncta communia quae in hoc segmento assumi possunt. Ergo darentur duae rectae per eadem duo puncta communia transeuntes.

[*Fig. 4*]

Nec possunt claudere spatium, alioqui bis concurrerent seu duo puncta communia haberent.

Patet etiam hinc modus generandi lineam rectam omnium simplicissimus, et qui simul continet generationem circuli, nullis rectis circulisque licet praesuppositis.



[*Fig. 5*]

Sumatur corpus rigidum $AEBDF$ cujuscunque magnitudinis et figurae, ejusque duobus quibusdam punctis (tanquam polis) existentibus immotis A, et B, moveatur aliquod corporis punctum ut D, tunc omnia corporis puncta durante hoc motu quiescentia cadent in lineam rectam per polos transeuntem $\overline{Y}$ quae dicitur Axis. Unumquodque autem punctum motum ut D suo motu describet circumferentiam circuli $\overline{V}$. Patet enim puncta corporis in eandem cum punctis A et B rectam (rigidam) cadentia ut Y ipsis immotis non posse moveri, cum enim punctum tale ut Y cum punctis A et B linea rigida connectatur, situm cum iis servabit, ergo et locum, quamdiu punctae A et B, locum suum retinent seu immota manent, quoniam ob rectam ex dato puncti situ ad A et B locum ejus determinatum definivimus.

Hinc vero etiam habemus definitionem circuli, nam puncta quae situm suum variare possunt salvo ad eadem duo puncta situ circulum describent, et locus omnium punctorum eundem ad duo puncta situm habentium erit circumferentia circuli. Et circulus ille alius alio minor est, tandemque evanescit in punctum axis. Hinc etiam intelligimus dari definitionem Circuli independentem a definitione plani.

106 (40932). SPATIUM, PUNCTUM, LINEA, CORPUS [1685 – 1687]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 61. 1 Bl. 4°. 1 S. — N. 106 (40932) und N. 105 (40931) bildeten ursprünglich ein Bl. 2°.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1685–1687 belegt.

S p a t i u m est extensum absolutum, itaque in spatio continetur quicquid extensum est; et spatium est illimitatum.

P u n c t u m est omnium quae in extenso situm habent simplicissimum.

Itaque spatium caret situ, punctum extensione.

Punctum puncto congruit, alioqui simplicissimum non esset.

L i n e a est puncti via seu locus continuus successivus.

A quolibet puncto A ad quolibet punctum B duci potest linea quae evitet punctum datum C. Ponamus enim corpus dari in cujus extremitatem cadant A et B, in medium vero C. Patet lineam in extremitate ductam non occurrere puncto in medio. Quod autem tale corpus dari possit ostendo. Dato enim corpore quocunque in quo continentur A, B, C possunt partes adimi addique, ita ut A et B detegantur, C vero tegatur.

Infinitae dantur lineae per duo puncta data A et B transeuntes, et nullum praeterea punctum commune habentes. Infinita enim dari possunt corpora in quorum extremitates cadant puncta A et B, ita tamen ut ea extremitates sint inter se diversae, si scilicet una aliam includat.

Corpus est extensum cujus nulla pars dari potest cujus non assignari possit pars clausa. Clausum voco cujus nullum punctum ab externo attingi potest.

107 (40937). RECTAE PARALLELAE [um 1692 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 66. 1 Bl. 4°. 1 S. — Gedr. (teilw., mit engl. Übers.): De Risi, *Leibniz on the Parallel Postulate*, 2016, S. 144–145.

Datierungsgründe: [noch]

Sit $\overline{\overline{X}}$ cujus partes sint $\overline{\overline{Y}}$ et $\overline{\overline{Z}}$, non habentes partem communem. Si omne V sit X, et omne V sit Z erit V sectio. Si totum $\overline{\overline{X}}$ sit planum, et sectio $\overline{V}$ eodem modo se habeat ad segmenta considerata ut interminata $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$, erit sectio $\overline{V}$ Recta. Nempe $\overline{\overline{Y}}.\overline{V} \infty \overline{\overline{X}}.\overline{V}$.

Omnia sequentia intelligantur esse in eodem plano, etsi non admoneatur.

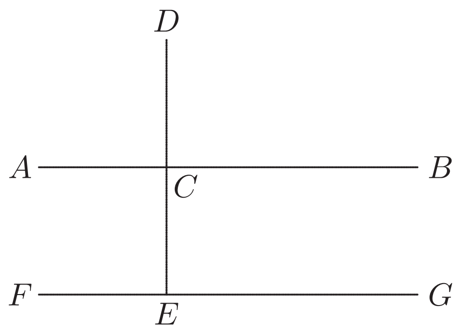
Duae rectae parallelae sunt, quae si termini earum non spectantur, ubique se habent inter se eodem modo. Hoc est ut quemadmodum se res habet si ex unius puncto spectetur altera, eodem modo se res habeat si ex alio spectetur.

Sit una $\overline{P}$ altera $\overline{Q}$ jam qu. P sit A. Si jam $A.\overline{Q} \infty P.\overline{Q}$ erunt $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ parallelae. [Sed demonstrandum est, quod $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ eodem modo se habeant. Verum jam video non esse opus si nihil sit in determinantibus, quod ad ipsa sit diversum] [Planum per unamquamque dividitur in duas partes, pars inter duas parallelas intercepta est utrique communis et ita ad ambas eodem modo se habet. Ergo et omnia sic constituta. Idem est etsi non essent parallelae.]

---

6 *Am Rand*: Duplex linea est superficiei ut $\overline{\overline{X}}$ at simplex lineae, ut $\overline{V}$.

14–19 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.



[*Fig. 1*]

Si sit recta AB, et per ejus punctum C alia recta DE, ubique se habens eodem modo, id est angulo recto, et per hujus punctum E ducatur FEG recta, itidem angulo recto; sed hoc cum fieri posset multis modis, unus est, ut simul recta FEG, ubique eodem modo seu congruenter se habeat ad AB; erit utique parallela. Ex solius rectae DCE motu per rectam AB non describitur parallela, nisi simul intelligamus rectam DE non gyrari nec vacillare inter movendum. Sed hoc non melius. ⟨Impedietur⟩ nisi simul per 2 parallelas transeat.

108 (40938). DE HOMOGENEIS ET DE HOMOGONIS [1686 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 67. 1 Bl. 8°. 1 S. auf Bl. 67 r°. — Auf Bl. 67 v° drei Figuren ohne Textbezug.

Datierungsgründe: [**noch**]

H o m o g e n e a sunt quae similia fieri possunt magnitudine salva. Symbola vel
b o l a
M e t a s y m b o l a sunt quorum unum in alterum abire potest. H o m o g o n a sunt quorum unum mutatione continua in alterum abire potest, talia sunt non tantum h o m o g e n e a , hoc est similia vel assimilabilia, ut linea recta, et linea curva, triangulum, et quadratum, sphaera et cylinder; sed et heterogenea; ut punctum et linea; et superficies, et spatium. Imo et momentum et tempus; hora et dies.

Mutatio continua est f l u x u s. Ut fluxu puncti fit linea; fluxu homogenea invicem mutantur ut punctum in lineam, circulus in quadratum, imo in conum. Transitus est aliud a mutatione vel fluxu, et fit etiam in essentiis ut a numero ad numerum. Sed talis non est continuus; nec a nobis mente fieri potest, sed a D e o ; revera tamen fit etiam in essentiis seu de specie ad speciem, ut in Ellipsibus. Videndum tamen an non sint Transitus de essentiis ad Essentias sine Homogono; ut si de planta in plantam; imo a planta per animal ad hominem tendas. Quanquam fortasse in his omnibus sit homogonum nobis ignotum. Ut quemadmodum quantitatum ita et formarum sit continuitas. Quarum

---

6 f. *Randnotiz:* (Metasymbola, anasymbola)

7–11 *Randbemerkung:* H o m o m e t r a comparabilia, H e t e r o m e t r a incomparabilia

12 f. *Randbemerkung:* Quae Euclides vocat Homologa, rectius vocarentur Homoptota.

17 *Über* Homogono: Metasymbolo

---

24 vocat: Eukleides, *Elementa*, V, def. 11.

sedes seu spatium erit scientia D e i uti spatium locorum nihil aliud est quam divinae operationis immensitas. Et sane spatium locale scilicet est ordo continuus coexistendi. Et modus per hunc ordinem res discernendi adhibetur, cum res discernimus per situm. Si duo sint coexistentia homogona et uno A manente, alterum B manens per se quale erat, mutetur respectu aliorum continue, donec efficiatur, ut datum quiddam quod est in B, coincidat dato cuidam in A; determinato modo mutationis ad hoc necessario; determinatus erit situs ipsius B ad A. In mutatione situs est continua mutatio eorum quibus aliquid coincidit.

S p a t i u m est ordo continuus coexistendi.

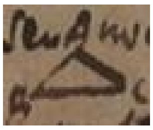
S i t u s est respectus unius ad alia in ordine coexistendi.

Omnis mutatio continua est. Situs tam per coexistentia nunc quam per futura haberi potest, nam futura ex praesentibus determinantur et vicissim.

109 (40946). SIGNA CONGRUENTIAE ET COINCIDENTIAE [1682 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 75. 1 Streifen [**noch**]. 11 Z.

Datierungsgründe: [**noch**]

$=$ signum aequalitatis $\sim$ similitudinis $\sqcap$ majoritatis $\sqcap$ minoritatis $\simeq$ congruentiae seu aequalitatis et similitudinis simul et denique $\approx$ coincidentiae seu identitatis. Videndum tamen an non hanc liceat distinguere in virtualem et formalem. Ex. gr.  ABC et BCA coincidunt etsi non respondeant seu non sint similiter expressa. Et idem in congruentia notari potest, ut  et  ABC et LMN congruunt simul et similiter exprimentur. Ergo $ABC \approx LMN$. Sed si conferas ABC et MLN potuit scribere $ABC \stackrel{-}{\sim} MLN$, quasi postposita similitudine seu scribemus $ABC \stackrel{\frown}{\sim} BCA$. An $\stackrel{\frown}{\approx}$ coincidens?

[*Fig. 1*]

110 (40949). ELEMENTA GEOMETRIAE GENERALIA
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 80–81. 1 Bog. 2°. 3 S. Auf Bl. 81 v° Skizzen technischer Zeichnungen zur Windmühlentechnik (s. u. S. 325; Druck in Reihe VIII).

Datierungsgründe: **[noch]**

Elementa Geom. Generalia

Curvae altiores Conicis, quarum tamen curvedo a duobus tantum dependet. Contra Cartes. Item de focis.

Punctum est quod locum habet, partes non habet seu quod sui ipsius tantum locus est.

Via est locus successivus ejusdem moti rigidi, seu locus continuus plurium congruentium.

Linea est via puncti. Superficies via lineae transversa. Transversa via est in qua punctorum moti omnium non est eadem via. Unde patet conditionem viae transversae ipsi puncto fustra addi.

Corpus est via transversa superficiei. Jam demonstrandum esset, viam transversam corporis non dari ac proinde nullam esse viam cujus pars sit corpus, quae non ipsa sit corpus; sive ut vuldo loquuntur tres tantum esse dimensiones.

Omne quod transverse movetur, est terminus viae transversae; ac proinde et partium ejus, quia pars viae est via. Hinc sequitur terminos partium lineae esse lineas, sequitur et duas lineas sibi in puncto occurrere, possunt enim considerari simul velut una linea, ita ut occursus earum, sit terminus partium.

Patet duas lineas sibi occurrere semel non nisi in puncto, sed duas superficies tam in puncto quam in linea sibi occurrere posse, et duo corpora in superficie[,] linea vel puncto.

Punctum durante motu nec decrescere, nec salva puncti natura crescere potest, at linea describens superficiem, aut superficies describens corpus, crescere aut decrescere possunt.

Veniamus jam ad alias definitiones:

Corpus est substantia extensa. Superficies est terminus corporis, qui alterius termini ejusdem corporis terminus non est. Linea est terminus superficiei, qui alterius termini ejusdem superficiei terminus non est. Nam terminus termini est terminus terminati, unde si superficies terminum habet lineam, erit et linea terminus corporis. *Punctum* est terminus lineae.

Demonstrandum jam esset, primum superficiem rursus terminos habere, lineas, et lineam rursus terminos habere, id est definitiones quas attulimus esse reales, sive rerum possibilium.

Praeterea demonstrandum esset, terminum lineae terminos ultra non habere, sive definitionem puncti superiorem et praesentem coincidere.

Quoniam terminus differt a terminato, sequitur in omni corpore dari puncta quae non sint in ejus superficie. Quae puncta dicentur esse *intra corpus*.

Corpus ab alio corpore se toto tangi non potest, quia tangitur superficie tantum, habet autem puncta extra superficiem. At superficies ab alia superficie se tota tangi potest, si unum corpus alterum includat.

Difficile est universalia de his rebus demonstrare, nisi simplicissimis lineis et superficiebus prius examinatis.

Possis etiam definire *lineam* viam puncti, et *superficiem* terminum corporis qui alterius termini ejusdem corporis terminus non sit. Unde jam connectendas duas methodos demonstrandum esset lineam esse terminum superficiei qui alterius termini ejusdem superficiei terminus non sit vel superficiem viam lineae. Sane in omni superficie ese lineam demonstrari potest; nam in omni superficie sunt plura puncta, est autem continuum, ergo ab uno puncto ejus ad alterum in ipsa datur via continua seu linea. Sed demonstratum non est, lineam et superficiem differre, et inter lineam et superficiem non dari dimensionem mediam.

Definiamus ita: *Linea* est via puncti seu cujus partium termini sunt puncta. *Superficies* est cujus partium termini sunt lineae.

Linea quaelibet salva sua magnitudine transformari potest. ergo et salva partis cujuslibet magnitudine, si in formam simplicissimam transformatur fit recta.

Situs puncti ad punctum determinatur, si extenso aliquo rigido, connectantur.

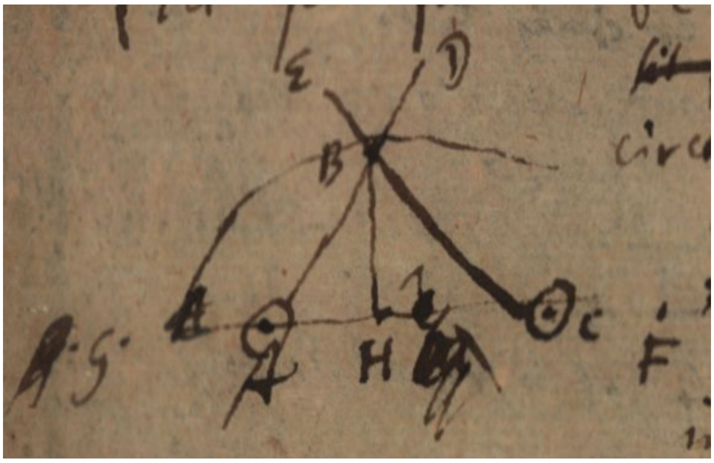
Extensi rigidi unum extremum potest esse fixum, alterum mobile.

punctum ejus mobile habet omnia loca in uperficie sphaerica. Si aliud alterius extensi etiam describat superficiem sphaericam, se secabunt sese duae superficies sphaericae, secabunt autem sese in via puncti, seu linea, nam unius rigidi extremum mobile intelligi potest incedere per superficiem alterius. demonstratur autem eas sese secare, si alterum corpus sphaericum cum altero habet partem communem. Hinc demonstratur unumquodlibet punctum ita moveri posse, ut simul situm servet ad duo puncta; et ita movetur in linea, uti situm servans ad unum tantum movetur in superficie. Hinc demonstratur et quodlibet corpus moveri posse duobus punctis licet existentibus immotis. Atque haec est via demonstrandi Geometriam per motus corporum rigidorum.

Sequitur alia methodus generandi figuras per corporum flexibilitatem, salva tantum manente magnitudine. Sed definitiones tamen ex prioribus sunt praesupponendae.

Recta fit si lineae extrema maxime diducantur. Planum si superficiei. Solius rectae flexionibus et accedentibus punctis fixis, videntur omnes lineae describi posse. Si unum fit extremum fixum recta diducta in eodem plano describet suo extremo vel punctum altero quoque extremo existente fixo, vel arcum circuli, eo moto.

Si duo sint puncta fixa, et eadem semper sit periodus fili per puncta fixa et punctum curvae, describitur sectio Conica seu linea secundi gradus.



[*Fig. 1*]

Sint duo regulae AD. et CE mobiles illa circa A, haec circa C. Sitque fissura ab A versus D, in qua mobilis stylus, ut et sit similis crena CE in qua etiam mobilis stylus. Jam stylus per fissuras ita transadigatur in B ut simul per ambas fissuras transeat, nec amplus ex illis elabi possit, patet circumacta alterutra regula stylum incedere in ambabus easque conjungere; licet autem unam nonnihil super alteram poni necesse sit, fingantur tamen esse in eodem plano, quia elevatio exigua est vel fingendum regulas latitudine carere. Nunc filum alligatum clavo fixo in A transeat inde in B, ibique stylum circumiens, tendat ad C ubi rursus alligetur, tunc circumacta alterutra regula patet describi lineam in qua summa rectarum AB et BC semper sit eadem, vel etiam periodus $ABCA$, si filum non alligatur sed in se redire tantumque circa clavos et stylum libere circumplicari ponatur.

Quid si filum a clavo A eat ad stylum B, atque eum circumiens redeat ad clavum A, eumque rursus circumiens inde tendat ad C atque inde rursus ad B, et a B denique redeat ad A, hebebimus semper $AB + AB + AC + CB + BA$ aequ. d constanti seu erit $3AB + BC$ aequ. d constanti.

Investigemus qualis hujus curvae aequatio: Sit AH aequ. x. BH aequ. y. AC aequ. a, erit CH aequ. $a - x$ et fiet: AB aequ. $\sqrt{xx+yy}$, et BC aequ. $\sqrt{a^2 + xx - 2ax + yy}$. Ergo habebimus: $3AB + BC$ aequ. datae d. seu $3\sqrt{xx+yy} + \sqrt{aa + xx + yy - 2ax}$ aequ. d. Ergo fiet $aa + xx + yy - 2ax$ aequ. $dd + 3^2xx + 3^2yy - 2.3.d\sqrt{xx+yy}$ seu fiet:

$$\begin{array}{llllll} aa & -dd & +xx & +yy & -2ax & \\ & & & & & \text{aequ. } 2.3.d\sqrt{xx+yy} \\ & & -3^2xx & -3^2yy & & \end{array}$$

et utrobique quadrando ascendetur ad curvam quarti gradus. Si pro 3 poneretur 1, haberemus curvam 2^{di} gradus quod locum habet in Ellipsi, sed si manent 3, et compendii causa pro $+aa - dd$ ponatur cc fiet $8xx + 8yy + 2ax - cc$ aequ. $6d\sqrt{xx+yy}$ quae deprimi non potest; nam si ponas $8yy - cc$ aequ. 0. fiet $4xx + ax$ aequ. $6d\sqrt{xx + \frac{cc}{8}}$, ubi tamen ascendetur ad quartum gradum ut: $16x^4 + 16ax^3 + aaxx$ aequ. $36dxx + \frac{36}{8}aa - \frac{36}{8}dd$ positoque: $16x^4 + aaxx$ aequ. $36dxx$, sublato ita d restabit tamen: $16ax^3$ aequ. $\frac{36}{8}aa$ quae aequatio utique solida est.

Erravit ego Cartesius cum credidit eas curvas quarum ut loquitur curvatura a duobus tantum dependet, esse scundi gradus. Itaque falsum est per umbilicos posse explicari gradus curvarum. Pulchrum hoc nostra opinione fuisset, sed nihil pulchrum nisi verum.

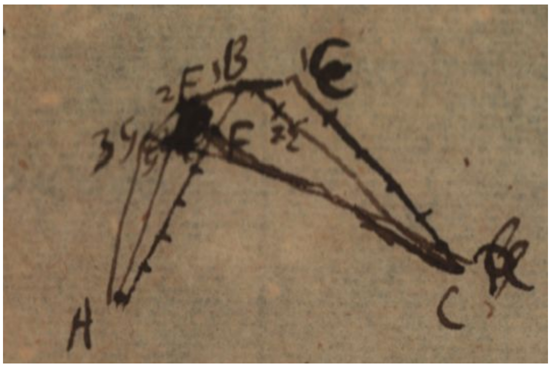
De reliquo etsi quotiescunquelibet adhuc circumplicaretur, et AB adhuc saepius essent repetendae tamen non ascenderet altius, quotiescunque AB toties occurrit quoties CB curva est conica; nempe hic Ellipsis.

Si adhibendo ejusmodi periodum punctum C. non maneat fixum, sed procedat recta BC suis vestigiis parallela habebitur quidem periodus, sed non habemus aliquid compositum ex solis AB et BC simplicibus, dato aequale. Quia mutatur ipsa AC.

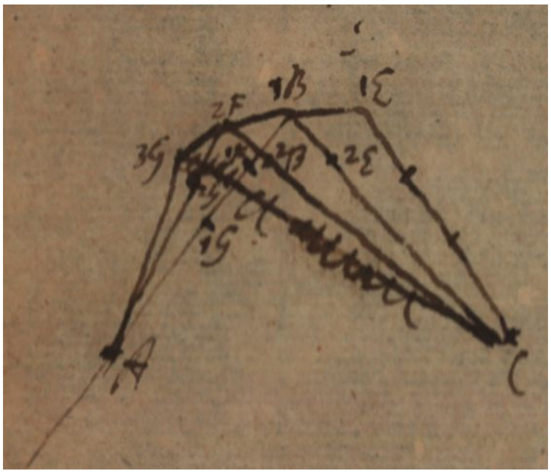
Quaeramus tangentem curvae paulo ante exhibitae. Sit AB aequ. z. et BC aequ. v. Jam $3z + v$ aequ. d. Et $3d\bar{z} \dagger d\bar{v}$ aequ. 0. Jam $d\sqrt{\omega}$ aequ. $\frac{d\varpi}{2\sqrt{\omega}}$. Ergo fiet $d\bar{z}$ aequ.

$\dfrac{xd\overline{x} + yd\overline{y}}{\sqrt{xx + xx \sqcap z}}$ et $d\overline{v}$ aequ. $\dfrac{xd\overline{x} + yd\overline{y} - ad\overline{x}}{v}$ et fiet: $\ddagger 3xvd\overline{x} \ddagger 3yvd\overline{y}$ aequ. $xzd\overline{x} + yzd\overline{y} -$ $azd\overline{x}$ sive fiet: $\dfrac{d\overline{x}}{d\overline{y}}$ aequ. $\dfrac{yz \ddagger 3yv}{az - xz \ddagger 3xv}$.

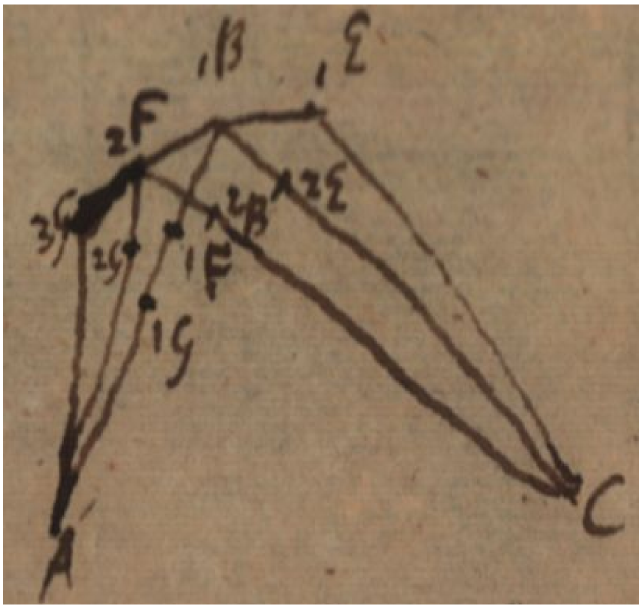
Videamus an ex motu describente tangentem invenire liceat.



[*Fig. 2a*]



[*Fig. 2b*]



[*Fig. 2c*]

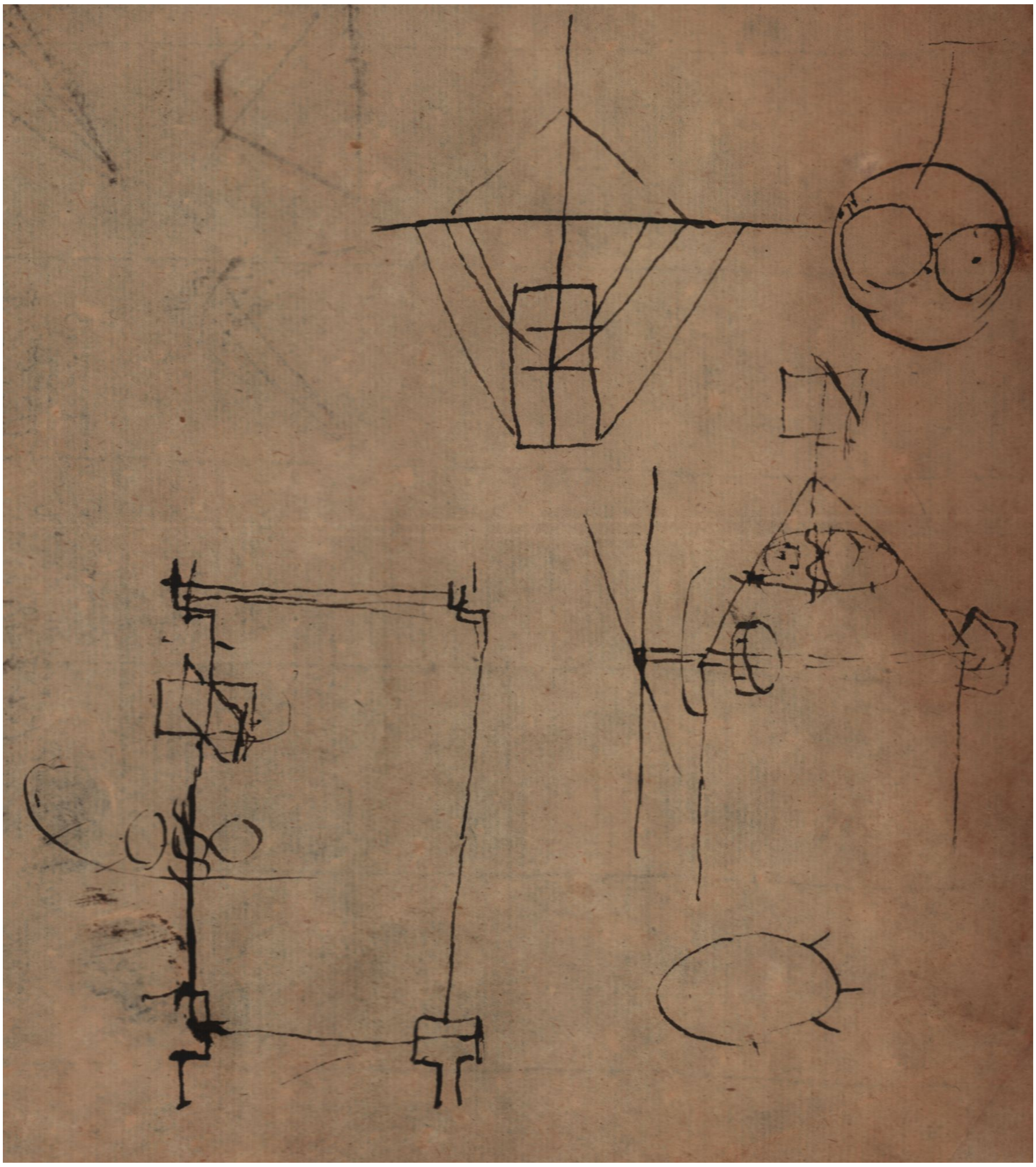
Sit catena $A1G1F1B1EC$ tensa in $1B1C$, ita ut ibi unum membrum vel articulus isque omnium medius a caeteris distinctus appareat, reliqui sint in linea recta. Jam clavum infigentes in puncto $1B$ ut ibi catena sit firma apprehendamus manu $1F$ ibique catenam manu tendentes, tamdiu moveamus, donec, punctum $1E$ perveniat in $2E$, sintque $1B.2E$ et C in eadem recta quo facto extrahentes clavum ex $1B$ eum similiter anfigamus in $2F$, et cum $1B.2F.2G$ eodem modo procedamus ut processimus cum $1E1B1F$ donec $1B$ proveniat in $2B$, et $2F$ manente $2G$ perveniat in $3G$ sintque $2F.2B$ etc. in eadem recta. Quo posito patet $1E1B2F3G$ etc. esse polygonum curvae, ergo perpendiculares ad hujus polygoni latera sunt curvae normales. Quoniam autem aliunde scimus Tangentem Ellipsis facere angulos aequale[s] ad duas rectas ex focis ductas, necesse est $A2F1B$, et $C1B2F$ angulos esse aequales. Quod quomodo ex natura Trapezii $A2F1BC$ demonstrari posset, esset dispiciendum.

Videndum quomodo semper ex datis focis et flexione Catenae, aliquid certi circa angulum ad Tangentem duci possi. Idque ideo potissimum, ut inveniatur regressus, seu modus inveniendi constructionem curvae ex data Tangentium proprietate.

Examinandum esset, quomodo tale quid possit in transcendentibus habere locum. Forte tum licebit fingere curvas catenas loco rectilinearum. Et ita habebitur quoque regressus seu proprietas tangentium.

8 patet | 1B1E2F3G *ändert Hrsg.* | etc. *L* 9 curvae | tangentes *ändert Hrsg.* | . qvoniam *L*

[*Skizzen zur Windmühlentechnik auf Bl. 81 v°*]

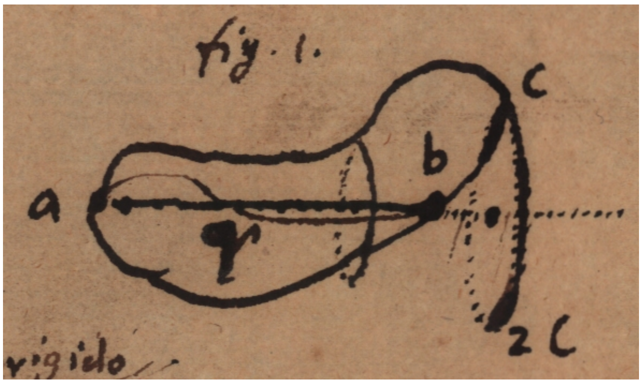


111 (40950). DE DETERMINATIS ET CONGRUIS [1680 – 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 82–83. 1 Bog. 2°. 4 S. halbbrüchig beschrieben.

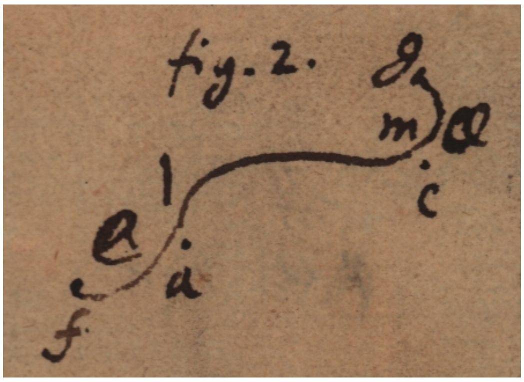
Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1680–1682 belegt.

E x t e n s u m r i g i d u m voco, in quo utcunque moto nulla quoad extensionem fit mutatio, id est non tantum ipsius, sed nec eorum quae in ipso sunt extensio non mutatur.

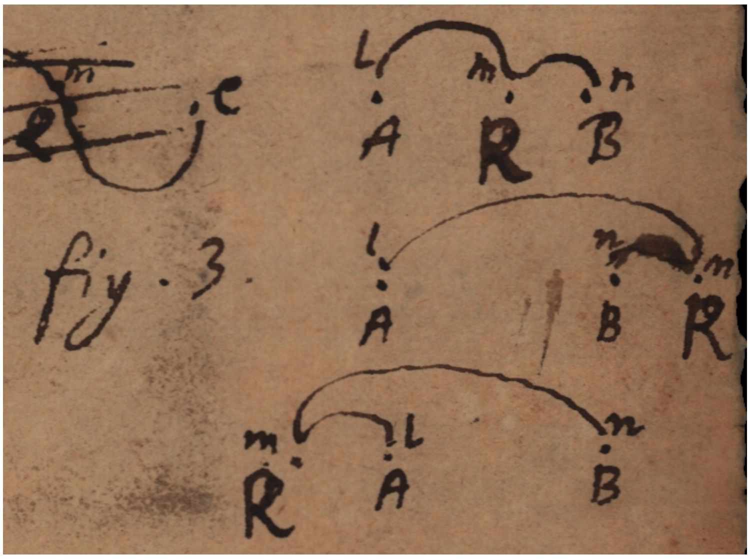


Si Extensum aliquod rigidum $a\,b\,c$ duobus ejus punctis a et b quiescentibus moveatur, tunc omnium ejus punctorum quiescentium, ut r locus erit recta $a\,b$, puncti autem alicujus moti c locus successivus $c\,2\,c$ erit a r c u s c i r c u l i. Habemus ergo generationem rectae et circuli, nulla recta nulloque circulo praeexistente[,] rectae quidem per quietem, circuli per motum.

Ex hac generatione rectae sequitur punctum omne, ut r in eadem cum duobus datis punctis a. b recta esse, si cum ipsis rigido aliquo extenso ut $a\,r\,b$ connexum, ipsis quiescentibus moveri non potest. Et vicissim si punctum aliquod in eadem cum duobus datis punctis recta sit, cum quibus rigido extenso connexum est, quiescentibus illis moveri non posse. Satis autem extenso rigido connexa sunt puncta, ut $a.r.b$ quando omnia in eodem extenso rigido, ut $a\,b\,c$ reperiuntur.



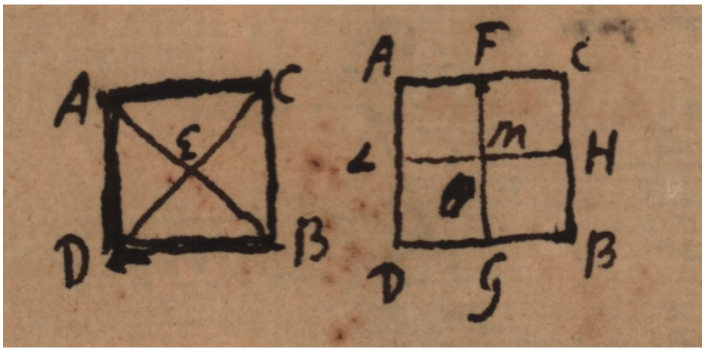
Si puncta ut a et c eudem semper servant situm inter se, tunc eadem semper ejusdem extensi rigidi $f\,l\,m\,g$ puncta $l.m$ eis applicari possunt; Et vicissim si eadem semper extensi rigidi puncta eis applicari possunt, eundem semper servant situm inter se.



Recta ergo definiri potest locus omnium punctorum, quorum unumquodque ut R eum habet situm, ad duo puncta A et B, ut quamdiu hunc ad ea situm servat (quod fit quamdiu tria puncta $A.R.B.$ iisdem rigidi $l\,m\,n$ punctis $l.\,m.\,n$ applicari possunt) ipsis A et B immotis, R moveri non possit, (id est si l et n manentibus immotis, tunc utcunque moveatur extensum $l\,m\,n$, necesse est et m esse immotum). Itaque locus ipsius R, est determinatus, determinato ejus situ ad puncta A et B. Hinc statim patet ipsa puncta A et B, utique cadere in hanc ipsam rectam seu locum omnium punctorum R. Utique enim ipsis A et B manentibus immotis ipsum R moveri non potest. Patet etiam in extenso quoad extensionem immutabili, (quale est ipsum spatium, item corpus aliquod rigidum) duobus punctis determinatis, determinatum esse rectam quae per ipsa transit.

[*Fig. 4*]

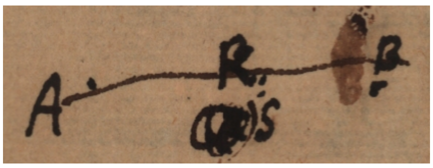
Hanc rectae proprietatem ut calculo exprimam, erit mihi ∞ signum congruentiae, exempli causa $F \infty G$ id est F congruum esse ipsi G.



[*Fig. 5*]

At ♉ signum erit coincidentiae. Ut si in quadrato aequilatero $ACBD$, ducantur rectae AB, CD, angulos oppositos connectentes, et se secantes in puncto E, et rursus ducantur aliae rectae FG, HL, laterum oppositorum puncta media jungentes, et se secantes in puncto M, tunc revera puncta E et M coincidunt, poteritque scribi E ♉ M.

Situm punctorum quorundam inter se scribam simplici punctorum denominatione interpuncta, ut $A.R$ vel $R.A$. Significat situm inter puncta A et R. determinatum, vel rigidum quodcunque ipsa connectens. Similiter $A.B.R$ significat trium punctorum situm inter se. Et ita porro.

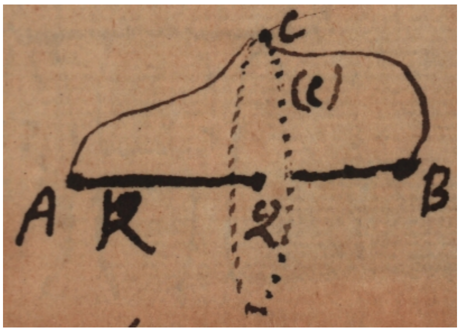


[*Fig. 6*]

[*Fig. 7*]

Cum itaque situs ille puncti R ad duo puncta $A.B$, qui locum puncti R determinat, sit situs puncti R in linea Recta cum punctis A et B; situsque ejus ad puncta A et B scribatur $A.R.B.$ determinatus si placet rigido aliquo ARB tria puncta connectente; sitque praeterea punctum aliquod S, eundem habens situm ad puncta A et B quem habet punctum R, ita ut rigidum punctis $A.R.B$ applicatum eodem modo applicari possit ad $A.S.B$ puncta; sequetur puncta S et R coincidere, siquidem R cum ipsis A et B est in eadem recta.

Itaque ut rem paucis et calculo complectar, si posito esse $A.R.B \propto A.S.B$ sequitur esse R ♉ S erit locus omnium R, R e c t a. Et vicissim sin compendii causa aliud praeterea adhibere velimus signum determinationis, poterimus scribendo $\overline{dt\ R}$ significare locum ipsius puncti R esse determinatum seu certum, et similiter scribendo $\overline{dt\ A.R}$ situm punctorum A et R esse determinatum seu certum. Ita $\overline{dt\ A.R.B}$ significabit situm horum trium punctorum esse certum. Itaque R e c t a transiens per A et B est locus punctorum R quorumcunque, si ex $\overline{dt\ A.R.B}$ sequitur $\overline{dt\ R}$.



[*Fig. 8*]

Omnia autem puncta extra hanc rectam moveri possunt servato suo situ ad duo puncta A et B. Ita licet punctum C ponatur ipsis A et B rigide connexum, si tamen non sit in recta per A et B transeunte, moveri poterit punctis A et B immotis, et motu suo describet circularem $C(C)$ quemadmodum supra definivimus; itaque cum durante motu eundem semper situm servet ad puncta A et B, habebimus $A.C.B \propto A.(C).B$ eritque locus omnium C vel (C) circularis.

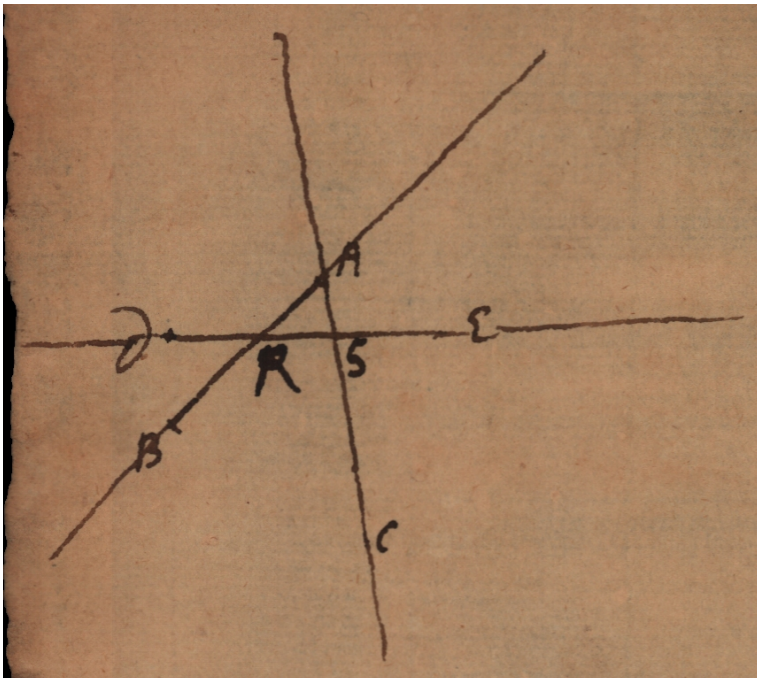
Omne punctum, ut C. quod eundem situm servat ad aliqua puncta, ut A et B. servabit etiam eundem situm ad id punctum R. quod situ ad A et B determinato locum

8 $\propto$: Leibniz wechselt zur Bezeichnung der Kongruenz vom Symbol ∞ zum Symbol $\propto$.

habet determinatum; (et proinde punctum C motum servato situ ad puncta A et B. eundem servabit situm etiam ad quodlibet punctum R. rectae per A et B transeuntis, seu ad ipsam hanc rectam) seu generaliter quod situm eundem servat ad determinantia, servat et ad determinatum. Haec propositio meretur demonstrari.

Poterit etiam ostendi, semper puncto uno sumto B in recta AB inveniri posse aliud R, ita ut sit $C.B \infty C.R.$ excepto unico casu, ubi B et R ad se properantia uniformiter sibi occurrunt, scilicet in Q.

P l a n u m determinatum est, assumtis tribus punctis, seu omnia puncta quorum situ ad tria puncta dato determinatus est locus, cadunt in planum per illa tria puncta transiens; coincidit haec definitio cum generatione plani per rectam super duabus rectis immotis motam:

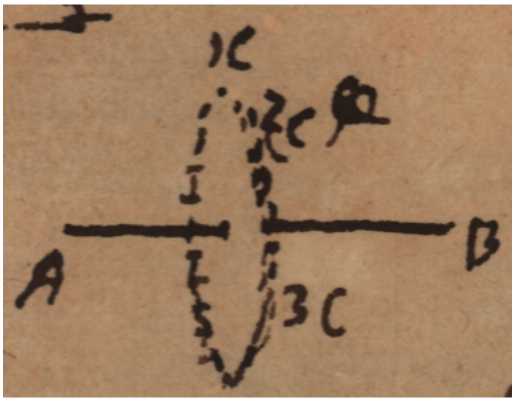


[*Fig. 9*]

Sint enim duae rectae, una transiens per puncta A et B, altera transiens per puncta A et C. Et sit alia recta mobilis transiens per puncta $D.E$. Haec mota super his duabus rectis, et AB attingens in R, AC in S. dabit lineam rectam per $R.S$. transeuntem seu ex punctis R et S determinatam.

Cumque omnia puncta ut R et S sint ex punctis $A.B.C$. determinata, et rectae ipsas jungentes determinatae ex ipsis, omniaque puncta harum rectarum (ex posita generatione plani per motum rectae) sint omnia puncta plani; patet omnia puncta plani ex tribus punctis A. B. C. esse determinata.

At sumtis quatuor punctis determinatum est spatium ipsum infinitum, seu locus omnium punctorum quorum unumquodque est determinatum dato ejus situ ad quatuor puncta data; est spatium infinitum, seu locus omnium punctorum in universum, seu quod idem est omnis puncti locus est determinatus, si datus sit ejus situs ad quatuor puncta data, sed hoc debet demonstrari.



[*Fig. 10*]

Cum supra dictum sit punctum C durante motu eodem modo se habere ad rectam AB ergo recta AB eodem modo se habebit ad tria puncta $1C.2C.3C$. ergo etiam eodem modo se habebit ad planum per haec tria puncta determinatum. Et eodem modo cum puncta tria planum determinantia eudem habeant situm ad duo quaedam puncta A et B, etiam ipsum planum sit determinatum eundem ad ea situm habebit.

Demonstrandum est easdem propositiones esse reciprocas, seu omnia puncta eundem simul situm ad duo diversa puncta habentia, cadere in planum; et ad tria habentia cadere in rectam. His habitis conjungi poterunt demonstrata alibi de congruis, et demonstrata hic de determinatis, et habebitur[,] puncta duo eundem situm habentia ad quatuor puncta data, quae eundem situm ad tria aliqua puncta non habent, congruere.

112 (40952). FIGURAE MATHEMATICAE [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 85. 1 Bl. 8°. 1 S. auf Bl. 85 v°. Bl. 85 r° leer. — Gedr.: Echeverría, *La Caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 326–327.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1678–1682 belegt. [**noch**]

Figurae Mathematicae

Si quis figuris potius quam scripto integram aliquam scientiam exempli causa Geometriam tradere velit, ei utendum est observatione quadam unde judicetur quo ordine figura animo percurri debeat. Nam in scripto ipse verborum ordo satis est. Itaque observandum foret accurate ordo literarum vel numerorum. Sed quia alias ob causas utile est easdem servare literas, in diversis figuris, cum eadem recurrunt et cum literae non sufficiunt numeros adhibere necesse est, ideo poterimus in eam rem uti numeris masculis, at numeri exigui adjecti ordinem contemplandi dabunt. Ordo autem sit non qui est loquendi sed qui est lineas ducendi, saepe enim nominant priorem lineam quae posterius duci debet.

7 qvam *(1)* verbis *(2)* scripto *L* 11 est *(1)* diversas *(2)* easdem *L* 12 f. masculis, *(1)* qvae contemplandi ordinem demonstrabunt *(2)* at *L*

113 (40959). RECTAE SPATIUM NON COMPREHENDUNT [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 91. 1 Zettel **[noch]**. 12 Z. auf Bl. 91 r°. Auf Bl. 91 v° Rest einer Aufschrift: ⟨—⟩Conseil ⟨—⟩⟨S⟩⟨d.⟩S. d' ⟨—⟩ebourg.

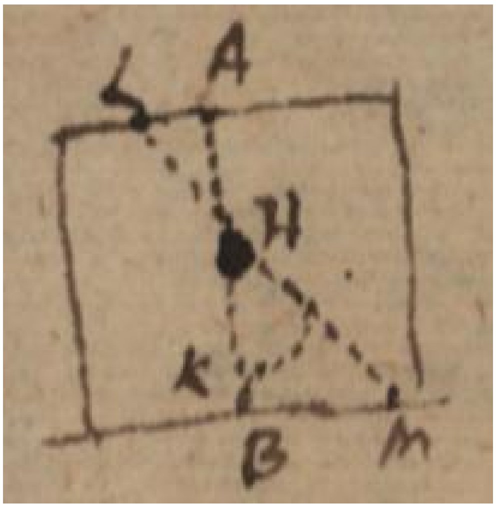
Datierungsgründe: **[noch]**

Recta ex puncto procedit sibi similiter. Itaque et angulus duarum rectarum ex puncto procedit sibi similiter, et proinde quoniam semel a se invicem recedunt, continue magis magisque recedent, nec proinde unquam rursus convenient, aut spatium comprehendent. Idem est ab altera parte.

114 (40961). SECTIO PLANI AMPHIDEXTRA
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 92. 1 Zettel [**noch**]. 7 Z. auf Bl. 92 r^{o}. Bl. 92 v^{o} leer.

Datierungsgründe: [**noch**]



[*Fig. 1*]

Si Recta sit sectio plani amphidextra duae rectae non nisi semel concurrunt. Quod si enim adhuc semel diversimodo tractantur segmenta. Nempe *AB* secetur ab *LM* in puncto *H*. Ajo non posse adhuc semel secari in *K*. Nam alioqui non videntur congruere segmenta. Sed hoc accuratius discutiendum.

115 (40962). DE ANGULIS IN TRIANGULO
[Herbst 1693 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 93. 1 Ausriss [**noch**]. $1\frac{1}{2}$ S. Textfolge Bl. 93 v°, Bl. 93 r°. — Auf Bl. 97 v° Fragment einer Briefanschrift an Detlev Marcus Friese, der sich auf einer Reise auf dem Weg nach Leipzig befinden sollte.

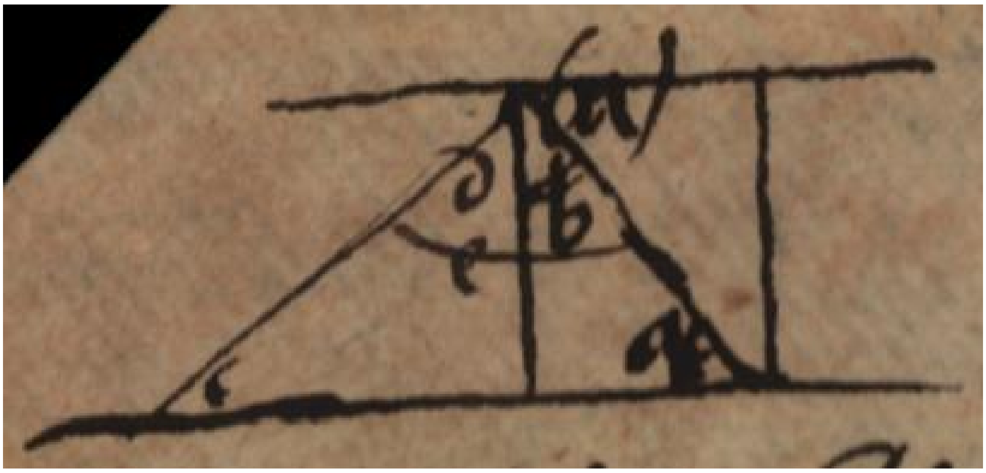
Datierungsgründe: Vgl. den Brief von Friese an Leibniz, vom 10./20. Oktober 1693 (I, 9 N. 398 S. 593).

Trianguli tres anguli duobus rectis aequales

[*Fig. 1*]

$m = n$. $n = p$. Ergo $m + p$. $m + q =$ rect. Ergo $p + q =$ rect. Similiter $s + r =$ rect. Ergo $p + q + r + s = 2$ rect. Jam $q + r = t$. Ergo $p + s + t = 2$ rect. Q. E. D.

Haec demonstratio recta quidem, sed non qualem desidero. Indiget enim inspectione figurae, quod ego nollem.



[*Fig. 2*]

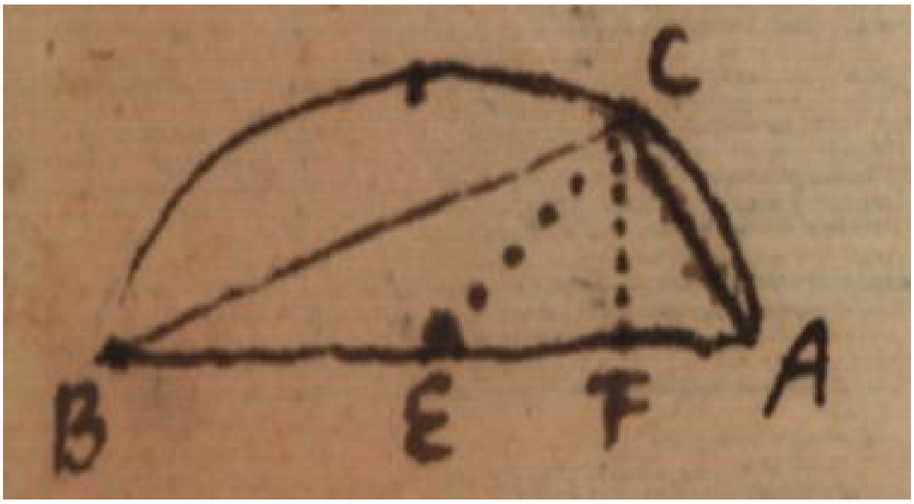
$a = (a)$. $(a) + b =$ rect. Ergo $a + b =$ rect. Ergo similiter $c + d =$ rect. Ergo $a + b + c + d = 2$ rect. $b + d = e$. Ergo $a + c + e = 2$ rect.

116 (40969). DE ANGULO IN SEMICIRCULO
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 97. 1 Bl. 12°. $1\frac{1}{2}$ S. Textfolge Bl. 97 v°, Bl. 97 r°.

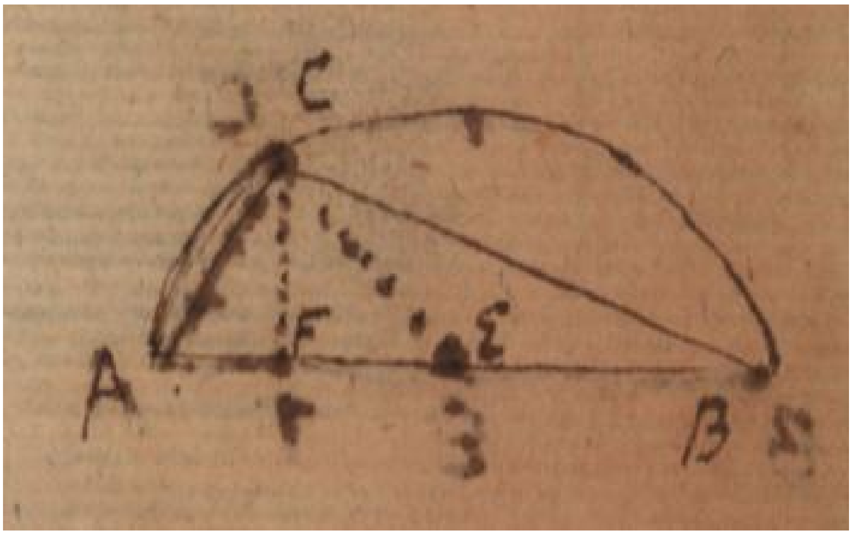
Datierungsgründe: **[noch]**

Utrum angulus in semicirculo sit rectus Calculo sic investigetur.



[*Fig. 1*]

In semicirculo cujus diameter AB sit angulus BCA, quaeritur an is sit rectus. Quod sic inveniatur. Opus est ut in calculum ingrediatur tam natura Circuli, quam natura anguli recti. Itaque ex anguli recti natura, oportet quadratum AC, et quadratum BC aequari quadrato AB. Id ergo utrum verum sit videamus. Itaque invenienda est magnitudo AC, et BC; ex natura circuli. Quam ut ad calculum revocemus considerandum est omnia puncta Circuli, ut A vel B, vel C, aequaliter distare a centro E. Itaque radium EA, vel EB, vel EC vocemus r. Et ex puncto C ad axem AB demittamus perpendicularem CF, ut habeamus in circulo ordinatam CF, quam vocabimus y, et abscissam EF, quam vocabimus x. Et relatio inter ordinatam et abscissam aequatione expressa dabit naturam Circuli. Nam quadrat. FC, + quadrat. FE. aequatur quadr. radii EC, seu $xx + yy \overset{(1)}{=} rr$. Hinc jam investigemus AC, et BC; jam quadratum AC aequatur quadrato FC, seu yy, plus quadr. AF, quod est $rr - 2rx + xx$, (quia AF est $r - x$ seu $EA - EF$). Ergo quadr. $AC = yy + rr - 2rx + xx$ seu per 1. Similiter quadratum BC aequatur quadrato CF seu yy plus quadr. BF quod est $rr + 2rx + xx$, (quia BF est $x + r$ seu $FE + EB$). Itaque quadratum $BC = yy + rr + 2rx + xx$.



[*Fig. 2*]

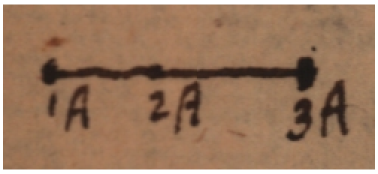
117 (40981). DE SIMILITUDINE ET CONGRUENTIA
[1680 – 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 110. 1 Bl. 2°. 2 S.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1680–1682 belegt.

Recta est linea sibi similis. Hoc differt ab uniformi, nam arcus circuli non est sibi similis.

Si punctum ita moveatur ut semper via sit sibi similis, ea via dicetur Recta.

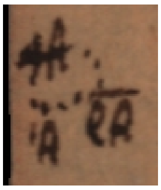


[*Fig. 1*]

Sit via $1A2A3A$, ita ut sit $1A2A$ sim. $1A3A$, sumtis tribus punctis $1A$, $2A$, $3A$, quibuscunque. Nulla scilicet linea datur in natura praeter rectam, cujus partes sunt similes inter se. Itaque si motus puncti quam maxime sit sibi similis est rectus. Hinc sequitur etiam durante motu recto punctum esse semper similiter positum ad viam percursam. Nempe A in $2A$ se habet ad $1A2A$, ut A in $3A$ se habet ad $1A3A$.

Si punctum moveatur in linea recta non redit ad locum priorem. Nam cum pars rectae sit toti similis, (ex definitione rectae) itaque si aliquando motus ab $1A$ per $2A$, $3A$, redit ad $1A$, in quavis parte similiter rediretur ad punctum prius, et in quavis parte similiter rediretur ad punctum prius, et in quavis partis parte, utcunque parva itaque nullus vel minimus fieret progressus.

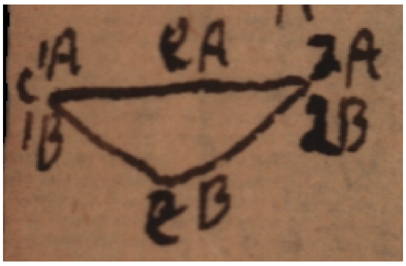
14–340,3 *Nebenbetrachtung:* In datis duabus rectis terminatis dantur puncta similiter posita utrinque seu sit $1A2A$, et $1B2B$ dari possunt hic eA, illic eB, sic ut sit $1A\overline{eA}2A \sim 1B\overline{eB}2B$. Nam sit motus aequabilis $1A2A$, itemque $1B2B$, et percurrantur eodem tempore, ergo omnia puncta quae eodem tempore utrinque assequimur erunt quaesita.



[*Fig. 2*]

In characteribus[:] In $1A\overline{eA}4A$ sit $4A \infty 1A$ ergo et $\overline{eA} \infty 1A$, quodcunque demum sit punctum eA. Ergo omnia puncta coincident inter se, contra hyp.

Recta rectae in uno tantum puncto occurrere potest.



[*Fig. 3*]

Cum punctum A egreditur ex C versus $2A$, et aliud B ex C versus $2B$, motu utroque sibi simili et a e q u a b i l i nunquam sibi rursus occurrent, aut semper, id est coincident. Alioqui motus sibi erit dissimilis cum aliquando sibi accedunt, aliquando non item.

6–341,18 *Nebenbetrachtung:* Si A sit sibi simile et L sit sibi simile datur B pars ipsius A, et M pars ipsius L talis ut sit AL sim. BM. Voco sibi simile cujus quaevis pars similis toti. Poterit credo demonstrari per uniforme incrementum.
Si sit A sim. B AB sim. LM A sim. L B sim. M L sim. M fiet AL sim. BM.
A sim. Y et A continet Y.
L sim. Z et L continet Z.
$$\left.\begin{array}{l}\overline{\text{Omn.}}\ e\ \infty\ A\\ \text{Omn.}\ g\ \infty\ B\end{array}\right\}\ \text{Caeterum et exprimendum quod } A \text{ et } B \text{ sunt continua.}$$
Omn. g est e.
Ergo si A sibi sim. sequitur esse A sim. B.
Videndum quod tali calculo exprimatur continuitas. Sit continuum C. Ita videtur exprimi, ut nulla sit pars ejus determinata.

Adeoque poterit pars una motus ab alia discerni, contra Hypothesin. Forte non opus est consideratione aequabilitatis motus, hoc modo. Si quid sibi simile sit $C2A$ et as alterum sibi simile $C2B$ referatur, et tota se habeant certo modo, etiam necesse est dari partes se habentes eodem modo ut CeA, CeB et harum partium CeA, et CeB, vel $eA2A$, $eB2B$ rursus partes; itaque coincident et eA, eB, et ubique dabuntur puncta coincidentia; adeoque totae lineae coincident. Contra Hypothesin.

Sola extensorum recta est sibi similis. Itaque sola extensorum linea est similis. Unde videtur superfluum in definitione: Recta est linea sibi similis, sufficiebat enim dicere, Recta est extensio sibi similis. Sed respondetur; id non posse sumi in definitione, quod opus habet demonstratione. Itaque ostendendum est solarum hoc esse linearum.

Ex lineis non nisi recta habet aliquam partem similem toti. Ex superficiebus non nisi plana; at omne corpus habet partem similem toti.

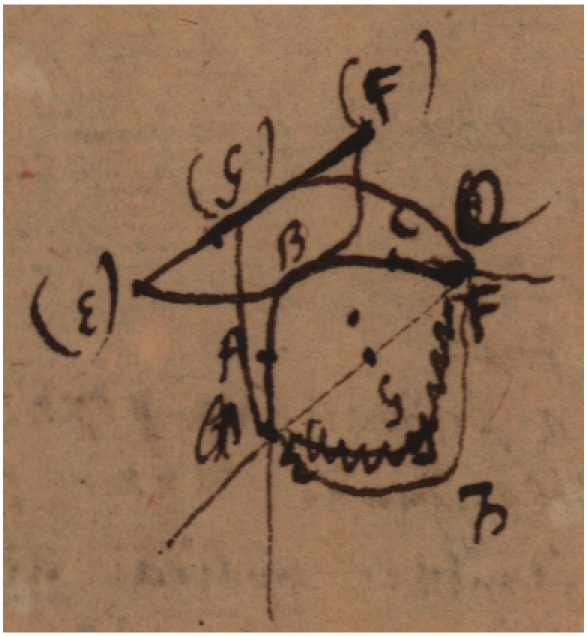
Potest etiam certa esse notio uniformitatis, ut rectae, plano, et spatio competat, nempe Uniforme hoc sensu erit, quod intus sibi simile est, seu in quo locus unus ab alio discerni non potest, dummodo ad extrema non perveniatur; seu dummodo non assumendo excurratur ultra ipsum. Ita quod ad unum ejus punctum constitui potest, etiam ad aliud ejus punctum constitui potest. Et talis etiam est arcus circuli, itemque helix cylindrica. Atque hic non tam similitudinis quam congruentiae ratio habetur.

Utile erit condere Elementa Geometriae per solam congruentiam non adhibita similitudine vel ejus axiomatibus. Ut videamus quousque nos haec sola notio ducat.

Videtur unum in alio esse, si sola sublatione ex eo fieri possit, seu ita ut nulla sit opus Hypothesis positiva, aut consequentia.

Sibi congruit, si his quae sumi possunt in uno ejus loco, congrua assumi possunt in alio loco ejusdem. Ita fortasse sibi simile a sibi congruere distinguemus, ut sibi simile sit cujus pars sit similis toti.

Spatium ubique sibi congruit. P l a n u m est sectio spatii in duas partes congruentes. R e c t a est sectio plani in duas partes congruentes. Recta non redit in se, nam si rediret in se, secaret planum in duas partes non congruentes[,] unam inclusam orbe in quem redit, alteram extra. Duae rectae concurrentes sunt in eodem plano, nam si recta moveatur in duabus rectis facit planum. Hoc ostendendum. Nempe recta eodem modo se habet ad quamvis partem plani. Sed plana possunt intelligi infinita per ipsum Transeuntia, facta motu. (Hoc ostendendum.)



[*Fig. 4*]

Si recta[e] ABC et EF se secant in duobus punctis E et F debet alia quoque dari EGF se ad ipsam ABC habens eodem modo ut EGF, ergo simul occurret ipsi F et ipsi (F), vel ipsi E et ipsi (E). Coincident ergo E et (E) item F et (F). Ergo habemus duo spatia $EGFBE$, et $E(G)FBE$ quae debent congrua esse, cum sunt a diversis partibus ejusdem rectae EBF. Similiter recta EGF habebit ab altero latere $E\beth F$, $E\gimel F$ congruentes ipsis EBF, EGF.

Itaque $E(G)F \overset{(1)}{\infty} EGF$ et $E(G)F \overset{(2)}{\infty} E\gimel F$. Ergo (per 1 et 2) $EGF \overset{(3)}{\infty} E\gimel F$. Jam $E(G)FBE \overset{(4)}{\infty} EGFBE$ (per 1) (congrua enim sunt plana quorum extrema congrua sunt) et $E(G)FBE \overset{(5)}{\infty} E\gimel FBE$ pars et totum. Q. E. Abs.

Eo ipso dum recta ab omni parte se habet eodem modo ipsa immota reliqua moveri possunt. Et punctum omne quod non movetur cadit in ipsam rectam. Jam duobus punctis determinatis tanquam immotis, eo ipso determinatum est quid moveatur aut quiescat, ergo duobus punctis determinatis ipsa recta determinata est.

Intus sibi simile, est, cujus partes extremis similes, sibi prorsus sunt similes. Et talia sunt tria; spatium, planum et recta. Nam in spatio vel plano vel recta, quamdiu extrema non attinguntur, nihil occurrit quo unus locus ab alio discernatur. Recta autem habet plus aliquid, nam recta non intus tantum, sed et omnino est sibi similis, et partes rectae quaecunque (non tantum extremis similes,) sunt similes inter se.

Hinc etiam patet porro discrimen inter uniforme et intus sibi simile; nam et arcus circuli et helicis cylindricae, et superficies sphaerae sunt uniformes, sed tamen non sunt intus sibi similes, nam duo portiones superficiei etiam ejusdem sphaerae, inaequales non sunt similes, licet ecttremis similibus, nempe circumferentiis circulorum terminentur. Recta autem et planum et spatium non tantum uniformes sunt, sed et intus sibi similes. In uniformibus duae partes extremis congruentes certo situ electo sunt inter se congruentes; Datur tamen et alius situs, secundum quem extremis licet congruere integra non congruunt.

Ad Elementa Geometriae in plano, nihil aliud opus est assumere, quam rectas in plano duci posse, et duas partes plani extremis similes etiam inter se esse similes. Post introductas rectas et angulos, s i m i l i t u d o reduci potest ad congruentiam, nempe angulorum.

Sint partes plani quarum ambitus sint similes, erunt ipsae partes similes.

$\overline{Y}$ est recta, si $\overline{Z}$ sit in $\overline{Y}$ et ideo $\overline{Z}$ sim. $\overline{Y}$.

Si sit A in $\overline{Y}$ et B in $\overline{Y}$ rursusque sit A in $\overline{Z}$ et B in $\overline{Z}$, sintque $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ rectae, erit $\overline{Y} \infty \overline{Z}$ seu determinatis A et B in $\overline{Y}$ determinata est $\overline{Y}$ recta.

Si linea in plano ducatur sic, ut ad duas quas separat plani partes terminet eodem modo, ea erit recta seu r e c t a est sectio plani in duas partes congruentes. Recta est linea eodem modo se habens ad duas quas separat plani partes.

Addendum est aliquid, nam et linea serpentina secare potest spatium in duas partes congruentes, sed non respectu ejusdem partis in secante. S u p e r f i c i e s est sectio spatii, l i n e a est sectio superficiei. P l a n u m est sectio spatii in duas ubique partes congruas. Ubique inquam, ita et in quavis parte id locum habet. Et similiter recta est sectio plani in duas partes ubique congruas. Itaque pars plani est planum, et pars rectae est recta.

118 (40998). DE CURVIS SIMILIBUS
[um 1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 18 Bl. 14. 1 Bl. 4°. 2 S. — Gedr. (teilw., mit engl. Übers.): De Risi, *Leibniz on the Parallel Postulate*, 2016, S. 138–141.

Datierungsgründe: [noch]

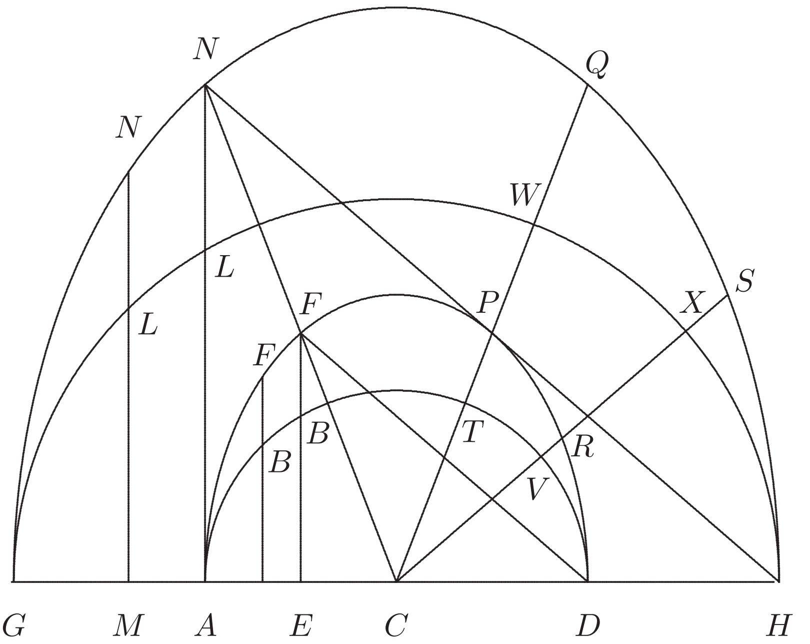
De curvis similibus et similiter positis et parallelis

Dubitavi diu an duae curvae inaequales (praeter circulos) exacte similes esse possint, ex. g. duae Ellipses, duae parabolae, etc. Notabam enim non nisi circulum circulo ubique aequidistantem esse posse, curvam vero aequidistantem Ellipsi vel alteri curvae non esse Ellipsin, aut ejusdem cum sua curva denominationis. Et videbatur mihi duas curvas similes et similiter positas necessario debere esse parallelas, jam vero deprehendi id necesse non esse si parallelismus pro aequidistantia sumatur esse tamen si parallelismus sumatur ab angulis iisdem quas rectae parallelae ex punctis similiter positis eductae ad ambas curvas faciunt vel eadem recta educta ex centro communi. Et vidi cuilibet curvae aliam similem et similiter positam posse exhiberi, si in generatione ejus ratione simili seu singulatim indiscernibili procedatur.

Ex. gr. si centro C, diametro AD describatur semicirculus ABD et quamlibet ejus ordinatam ut EB in data ratione producendo usque ad B, fiat semielliptica AFD. Et similiter centro eodem C diametro GH describatur alius semicirculus GLH, cujus ordinata quaevis ML in eadem quam dixi ratione producatur in N, fiet semielliptica GNH priori similis et similiter posita, omnia enim singulatim utrobique indiscernibilia sunt.

Hinc duae circumferentiae Ellipticae similes, erunt inter se ut axes, areae vero ut axium quadrata.

6 *Daneben*: Haec recta sunt.

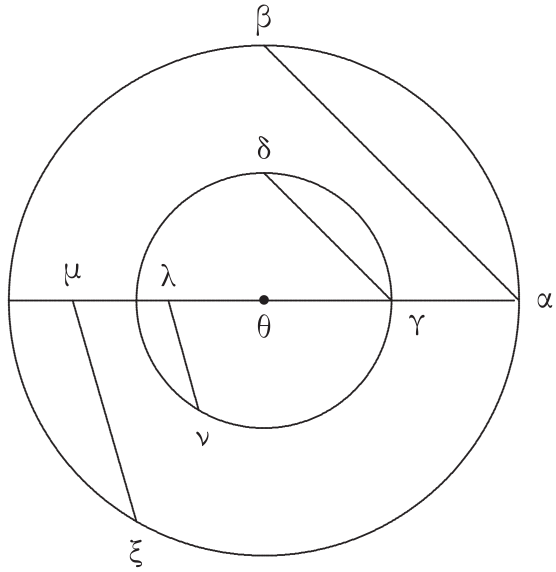


[*Fig. 1*]

Duae rectae ex centro eductae CPQ, et CRS, duabus Ellipsibus FF et NN occurrentes, illi in punctis P et R, huic in punctis Q et S, abscindent sectores et arcus similes et similiter positos, eritque sector $PCRP$ ad sectorem $QCSQ$ ut area Ellipsium, seu ut quadratum AD ad quadratum GH; seu ut sector $TCVT$ respondens circuli generantis minoris ad sectorem respondentem $WCXW$ circuli generantis majoris. Et arcus Ellipticus PR erit ad arcum ellipticum QS, ut arcus circularis PR ad arcum circularem WX, seu ut AD ad GH.

Hoc amplius recta quaevis ex centro C educta utrique Ellipsi ad eosdem angulos occurrit, seu Ellipses duae in punctis P et Q sunt sibi parallelae seu eandem habent inclinationem, hoc enim sensu hic parallelismum intelligo. Atque haec quidem si rectae ex puncto, quod utrobique eandem functionem facit educantur nempe ex centro communi. Sed si duo sumantur puncta diversa in diversis Ellipsibus eandemque functionem facientia, ut vertices D et H (ut nunc de focis nil dicam) et ex iis educantur rectae parallelae, ut DF, HN idem ab his rectis parallelis praestabitur quod in centro ab eadem. Ita segmenta $DFPD$, $HNQH$ erunt etiam inter se ut quadrata axium, et arcus eorum ut axes; et ad eosdem angulos curvae occurrent, nam et rectae parallelae sunt inter se et curva ibi parallela curvae, nimirum in N eadem inclinatio quae in F, nam et recta CFN ex centro occurret utrique. Idem erit si non ut hactenus rectae, sed aliae curvae similes et similiter positae ducantur, ea etiam partes circumferentiarum et arearum proportionales abscindunt et ad eosdem angulos occurrent utrobique. Patet et superficies Sphaeroeidum a similibus Ellipsibus genitarum forent ut quadrata axium, solida ut cubos. Et centra gravitatis esse similiter posita. Ellipses similes habent eandem rationem distantiae focorum ad axem, et vel ad longitudinem fili ex focis describentis, seu ad summam ex focis eductarum. Et vicissim tales Ellipses esse similes patet ex indiscernibili generandi modo.

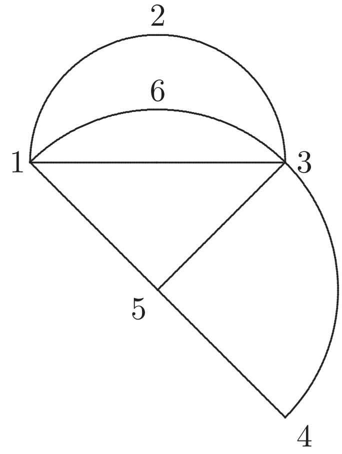
Talia de omnibus aliis curvis dici possunt. Et sane in Circulo ex sola consideratione similitudinis statim patent Theoremata egregia multa ab aliis prolixe demonstrata. Exempli causa Circulos (et sectores similes) esse ut quadrata diametrorum, Circumferentias seu arcus similes esse ut diametros.



[*Fig. 2*]

Imo rectae eundem angulum facientes ad diametros segmenta quoque vel alias portiones proportionales ab area, vel circumferentia abscindent ita segmentum $\alpha\beta\alpha$ ad segmentum $\gamma\beta\gamma$ ut circulus ad circulum, seu ut quadrata radiorum $\theta\alpha$, $\theta\gamma$. Arcus quoque $\beta\alpha$ et $\delta\gamma$ radiis $\theta\alpha$, $\theta\gamma$ proportionales, et ideo recta $\theta\delta\beta$ ex centro ducta per δ et β transibit. Imo si sumantur punctum λ pro uno circulo, et μ pro altero, ita ut distantiae eorum a centris, nempe $\theta\lambda$, $\theta\mu$ sint ut radii $\theta\gamma$, $\theta\alpha$, et per ea ducantur parallelae $\lambda\nu$ et $\mu\xi$ etiam proportionales arcus aut portiones abscindent, erit enim arcus $\gamma\nu$ ad arcum $\alpha\xi$ ut $\theta\gamma$ ad $\theta\alpha$, et trilineum $\gamma\lambda\nu\gamma$ ad trilineum $\alpha\mu\xi\alpha$, ut quadratum radii $\theta\gamma$, ad quadratum radii

$\theta\alpha$. Ex hoc principio similitudinis orta est quoque inventio dimensionis lunularum, et aliorum mixtilineorum.



[*Fig. 3*]

Est enim semicirculus 3123 dimidius semicirculi 4134 (quia Circuli cum sint similes sunt ut quadrata diametrorum). Ergo quadrans 15361 aequalis semicirculo 3123. Auferatur ab utroque segmentum 1361 restabit illic triangulum 153, hic lunula 12361, aequales. Et eadem plane demonstratio est, si arcus non sint circulares sed Elliptici, parabolici, Hyperbolici, vel alterius curvae cujuscunque adaptabilis. Addantur Scaligeri securiculae, Vietae lunulae speciales, Leotaudi Amoenior curvilineorum contemplatio. Et principium quadrandi per similitudines hoc habet egregium quod non dependet a reductione ad absurdum seu ab inscriptione aut circumscriptione polygonorum.

Caeterum ita solutus est mihi nodus, cognita vera similitudinis et parallelismi natura, qui me diu vexabat; cum a priori satis intelligerem unamquamque figuram posse contrahi vel expandi in aliam minorem vel majorem per omnia similem et similiter positam, et tamen lineam lineae parallelam ducendo eo sensu ut recta ad unam perpendicularis etiam esset ad alteram perpendicularis (quo casu aequidistantes sunt) obtinerem curvas plane dissimiles. Cui malo nunc occurri. Centrum autem similitudinis, non nisi centrum figurae detur haberi potest.

8 securiculae: J. J. Scaliger, *Cyclometrica elementa duo*, 1594, S. 17 f. 9 lunulae speciales: Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593, Bl. 17 v° – 22 v° (*VO* S. 375–386). 9 contemplatio: V. Léotaud, *Curvilineorum amoenior contemplatio*, 1654.

119 (41022). DUAE METHODI GEOMETRIAE [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 26 Bl. 5. 1 Bl. 2°. Ca $\frac{3}{4}$ S. auf Bl. 5 r°. Bl. 5 v° leer. — Gedr. (mit frz. Übers.): 1. Echeverría / Parmentier, *La caractéristique géométrique*, 1995, S. 46–49; 2. (span. Übers. nach 1.) Mora Charles, *Obras filosóficas y científicas*, Vol. 7B: *Escritos matemáticos*, 2015, S. 423–424.

Datierungsgründe: **[noch]**

Duae sunt Methodi Geometriae quas in animo habeo, una per meros characteres totam exprimens figuram, sine ullo verborum aut figurae adjectae auxilio; altera per mera verba, sine auxilio aliorum characterum, aut etiam figurae. Utraque hoc modo perfecta redditur, usumque habebunt, illa quidem quae per characteres fit, ad tractandum situm instar magnitudinis, et sternendum iter Methodo per verba. Methodus autem per mera verba efficiet, ut non solum, sine figuris, sed etiam sine calamo difficillima etiam et maxime composita investigare possimus; inter meditandum, vel etiam inter colloquendum. Sed latent in his utilitates longe majores.

Methodus per meros characteres hoc habet incommodi, quod durante operatione seu calculo, mens de re quam quaerit non cogitat; itaque utilis est cum inquisitionem aliis mandamus, methodumque praescribimus, ubi uti possumus hominibus qui nihil plane rei de qua agitur intelligunt.

Sed methodus per verba semper facit ut mens de re quam agit cogitet, et semper per novarum veritatum gradus se procedere percipiat. Habet tamen hoc incommodi quod paulo prolixior est, ut pro Abscissa facilius dicitur *AB*; itaque cum calamo utimur et figuram vel catalogum saltem literarum ante oculos habemus, via per characteres brevior est.

Habet etiam hoc incommodi methodus per verba vulgaria quod connexiones transitus et consequentiae variis ambiguitatibus laborent. Cum characteres simplicissimi sint et paucis tantum praeter literas signis utantur, ut congruitate, aequalitate, ratione, proportione, similitudine, coincidentia. Sed si haberetur lingua philosophica, in ea omnes

8 f. characteres | literales *erg. u. gestr.* | totam *L*

commoditates omnium characterum essent unitae.

Quod de Geometria dixi, etiam de Algebra dici potest, et arithmetica, posse et illas tractari verbis, unde aliquando nomina apta formulis imponere studui. Figuris solis sine verbis aut characteribus res exacte exprimere impossibile est, nam multa delineari non possunt. Et tunc quoque quando delineari possunt, saepe figura nimis fit intricata, et animum intuentis varietate confundit. Utile tamen erit Atlantem Universalem componere, in quo figuris omnia exhibeantur quoad licet.

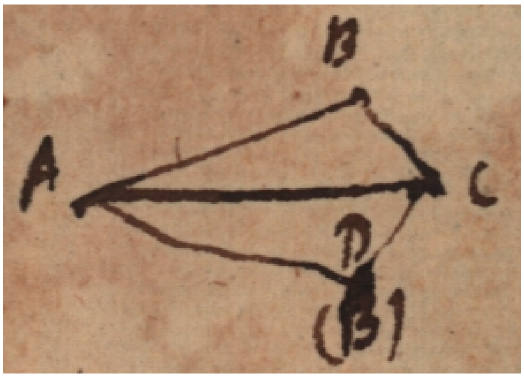
120 (41042). AD VIGESIMAM SECUNDAM PRIMI ELEMENTORUM [1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 5 Bl. 22. 1 Bl. 16°. 1 S. auf Bl. 22 r°. Bl. 22 v° leer.

Datierungsgründe: **[noch]**

[*Fig. 1*]

Si circulus circulum secat, utique ei occurrit in pluribus quam uno puncto, quia partim extra est partim intra. Itaque punctum intersectionis non est in eadem recta, cum centris, quia non est sui situs unicum.



[*Fig. 2*]

Ergo ABC est triangulum, posito B esse punctum intersectionis. Ergo per 20 1$^{\text{mi}}$ $AB + BC \sqcap AC$.

An sic quoque? $AC + DC = AC$ quia totum aequale partibus at $AB + BC \sqcap AC$.

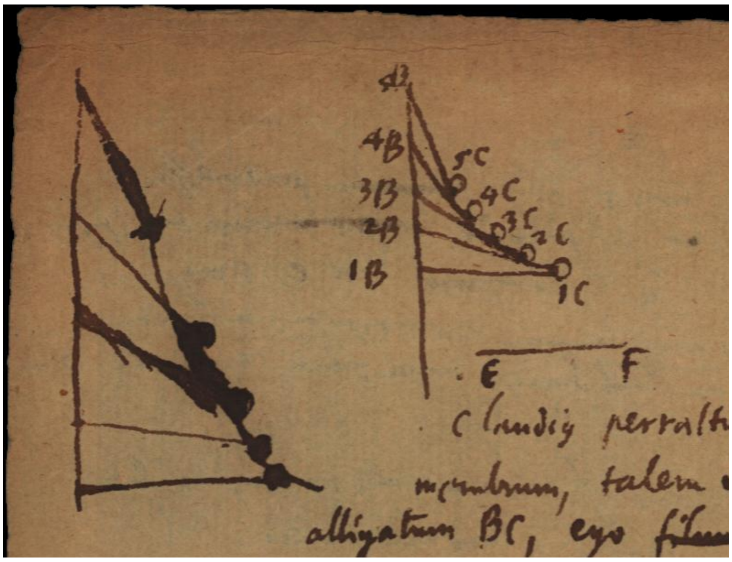
ex natura trianguli per 20 1^{mi} vel ex definitione rectae. Ergo circuli ex A radio AB et ex B radio CB descripti se secabunt per constructionem 22 1^{mi} in B et (B). Ergo si punctum B est extra rectam, [est et] aliud punctum (B) eodem modo se habens ad A et C. Constructionem autem 22. 1^{mi} vide demonstratam a Borelli prop. 23 sui libri 1^{mi} *Euclidis restituti*, quod scilicet circuli se secent. Et ita ex definitione, quod recta sit minima, videtur demonstrari posse, quod sit locus punctorum unicorum, ad duo puncta. Ne assumere planum necesse sit, potius adhibeatur sphaera.

4 demonstratam: Vgl. G. A. Borelli, *Euclides restitutus*, 1658, S. 48–50 sowie S. 18 f.

121 (42078). DE CURVA PERRALTII
[1677 – September 1693]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2a Bl. 122. 1 Bl. 4°. 2 S.

Datierungsgründe: [Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Hannoversche Zeit von Leibniz belegt. Der Text ist vor dem im September 1693 in den *Acta Eruditorum* erschienenen *Supplementum geometriae dimensoriae* entstanden; noch]



[*Fig. 1*] [*Fig. 2*]

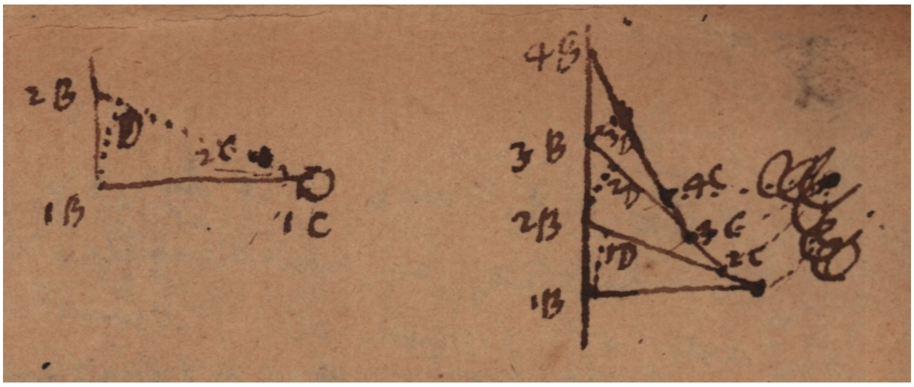
Claudius Perraltus editor Vitruvii, idemque Academiae Scientiarum Regiae membrum, talem mihi aliisque curvam investigandam proposuit. Sit corpus C filo alligatum BC, ego fili extremitatem B apprehendens manu, ducensque per rectam $1B2B3B4B5B$, cogo corpus C. sequi; sed quia linea BC non est rigida, sed filo flexili constans, ideo extre-

10 ego *(1)* filum duco *(2)* fili *L* 10 manu, *(1)* eam duc *(2)* ducensqve *L* 11 flexili *(1)* constanti *(2)* constans *L*

8 editor: *Les dix livres d'architecture de Vitruve, corrigez et traduits nouvellement en François, avec des notes et des figures*, 1673 u. ö. 9 proposuit.: vgl. VII, 6 N. 21 S. 259 Fig. 3.

mitas C non fertur parallela ipsi B, sed ob corporis C resistentiam nonnihil retardatur; quaeritur quae sit linea $1C2C3C4C5C$.

Solutionem ei hactenus nemo dedit, ego talem reperi. Considerandum est manum B non movere secum corpus C, nisi quatenus ipsum trahit, id est quatenus corpus C in eadem recta movetur in qua manus, seu manum sequitur, non vero quatenus movetur in parallela seu manum comitatur. Unde si filum semper facillime allongari posset, corpus C manum B nullo modo sequeretur, cum tamen esset eam filum comitaturum si filum rigidesceret, licet posset allongari.



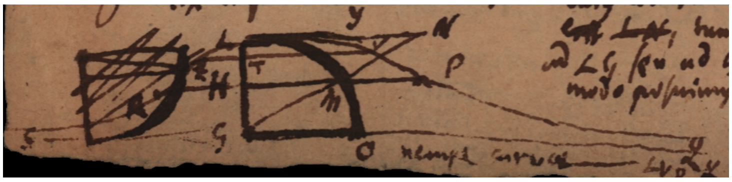
[*Fig. 3*] [*Fig. 4*]

Unde motum manus ex duobus consideremus compositum, uno quasi circa C in arcu $1BD$, quo nihil agit in corpus C, altero ex D in $2B$, quo secum corpus $1C$ trahit in $2C$. Unde patet rectam $2B2C$ esse curvae CC tangentem, quae cum sit semper eadem, aequalis scilicet longitudini ipsius fili, habemus ergo Curvae CC naturam talem, ut tangens BC inde producta ad axem BB, sit semper aequalis datae rectae EF. Quod quidem rigorose demonstrare possum si fingam manum ducentem moveri non in recta $1B2B3B4B$, sed in composita ex arcubus ex rectis $1B1D2B2D3B3D4B$, hoc enim supposito manifeste oritur quod diximus. Potest enim supponi nam positis rectis $1B2B$, $2B3B$, etc. infinite parvis, adeoque et arcubus infinite parvis $1B1D$, $2B2D$, $3B3D$, etc. utique manus a recta BB non recedit, nisi intervallo infinite parvo, sive nullo intervallo. Constat etiam rectam quae duo curvae puncta intervallo infinite parvo a se remota jungit, nempe $1C2C$, vel

3 est *(1)* extremitatem B non secum movere *(2)* manum *L* 7 eam *(1)* secuturum, si linea BC *(2)* filum *(a)* rigidesceret *(b)* comitaturum *L* 8 allongari. *(1)* Inde in hanc co *(2)* Unde *L* 10 C *(1)* qvo nihil non nihil *(2)* in *L* 19 Constat *(1)* enim *(2)* etiam *L* 20 jungit, *(1)* semper esse tangentem *(2)* nempe *L*

$2C3C$ semper esse tangentem.

Res ergo reducta est ad hoc problema Geometricum, invenire curvam cujus tangentis portio inter curvam et axem intercepta sit data seu erit: $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} : dy :: a : y$. seu $\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 : dy^2 :: aa : yy$ seu $\overline{dx}^2 \smile \overline{dy}^2, +1$ aequ. $aa \smile yy$ seu $\overline{dx}^2 \smile \overline{dy}^2$ aequ. $aa \smile yy, -1$ seu $\overline{dx}^2 \smile \overline{dy}^2$ aequ. $\overline{aa - yy}, \smile yy$, seu dx aequ., $\dfrac{dy}{y}\sqrt{aa - yy}$.



[*Fig. 5*]

Faciamus ω : a :: dx : dy et quadrante circuli descripto LMO cujus centrum G, radiusque GM sit a. et GH sit y. $HM\sqrt{aa - yy}$, tunc LN seu tangens arcus LM, erit ω, est enim LN ad LG seu ad $\underline{a}$, ut HM ad HG seu ut $\sqrt{aa - yy}$ ad y. At eodem modo posuimus esse ω ad a, nempe ut dx ad dy seu ut $\sqrt{aa - yy}$ ad y. Fiat in HM producta HP aequal. LN, erit LPQ curva tangentium. Describatur alia $LZRS$ curvae tangentium, nempe curvae $LVPQ$, quadratrix, ita ut fit TZ ad HR ut $LTVL$ ad $LHPVL$, tunc ordinata TZ vel HR erit x, quia dx ad dy ut ω ad a.

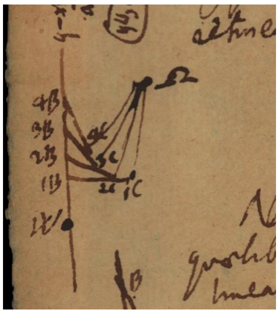
Patet etiam quia $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} : dy :: a : y$. seu quia est $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2}$ aequ. $ady \smile y$ Elementa hujus curvae esse progressionis harmonicae, seu proportionales ordinatis Hyperbolae, et proinde curvae ipsius arcus esse proportionales Logarithmis, posito abscissas

13 *Am Rande:* Brevissime C non movetur nisi tractione, tractione autem sequitur filum in eadem recta. Jam Motus est in tangente, ergo filum est tangens. Notabile nihil referre parum an multum corpus C motui renitatur modo cogatur sequi et filum non extendatur.

2 cujus *(1)* partes inter *(2)* tangentis *L* 4 aa : yy *(1)* | seu *nicht gestr.* | $\dfrac{\overline{\mathrm{dx}}^2}{\overline{\mathrm{dy}}^2}$ aeqv $\dfrac{\mathrm{aa} - \mathrm{yy}}{\mathrm{yy}}$ *(2)* seu *L* 8 $\mathrm{HM}\sqrt{\mathrm{aa} - \mathrm{yy}}$ *(1)* erit LN *(2)*, tunc *L* 9 LN | ad LG *gestr.* | ad *L* 15 esse *(1)* proportio *(2)* progressionis *L* 16 proinde *(1)* curvam *(2)* curvae *L* 16 abscissas *(1)*, a pun *(2)* GH *L*

GH esse aequales numeris posito logarithmos omnes esse infinitos, sed si logarithmos incipiamus ab L. Licet numerorum a SG logarithmi omnes erunt finiti, excepto logarithmo nihili, qui infinitus.

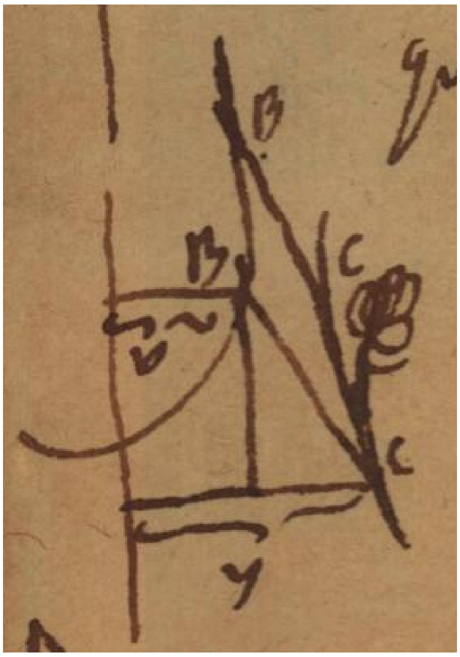
Memini jam me in alia scheda quaerentem Curvam cujus arcus essent Logarithmis proportionales, invenisse ejus hanc fore proprietatem, ut portiones tangentium inter axem et curvam semper essent constanti aequales, et porro quaerendo invenisse hanc curvam fore quadratricem Tangentium, et vero patet ejus determinationem analyticam pendere ex quadratura Hyperbolae seu constructioni Logarithmorum; at ejus determinatio Organica, seu descriptio per Motum continuum hoc modo reperta est.



[*Fig. 6*]

Notandum est sive corpus C pondere suo, sive asperitate medii, sive appressione, sive Elaterio retineatur semper eandem fore curvam. Ut si corpus ΩC ponatur esse Elasticum cujus extremum unum Ω sit fixum, ita ut nec circa centrum Ω moveri possit, hinc motu manus filum BC adducente sequetur punctum C, et arcus $\Omega 1C$ rectus, in $\Omega 2C$ erit flexus nonnihil, in $\Omega 3C$ ad huc magis et ita porro, quamdiu C propius accedit ad Ω.

1 numeris *(1)* unde patet logarithmos *(2)* posito *(a)* logarithmus Unitatis esse infinitum *(b)* logarithmos *L* 1 f. si | logarithmos *erg.* | incipiamus ab L. | licet numeros a SG *erg., ändert Hrsg.* | logarithmi *L* 3 infinitus. | Itaqve cum *gestr.* | *L* 7 patet *(1)* eam pendere ex qvadratura Hyperbolae *(2)* eius *L* 9 seu *(1)* constructio *(2)* descriptio *L* 9 continuum *(1)* pendet ex *(2)* hoc *L* 11 sive . . . medii *erg. L*

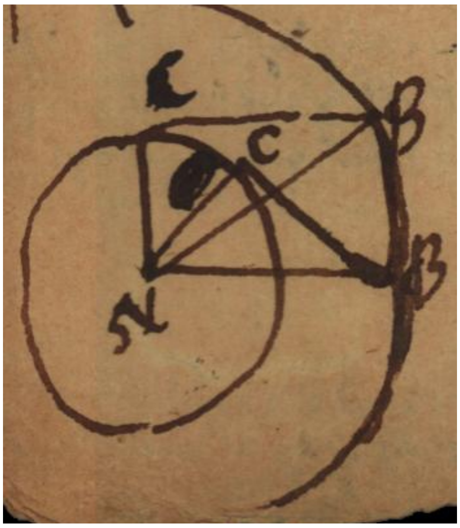


[*Fig. 7*]

Notandum, si BB non sit recta sed curva quaelibet, semper tamen portionem tangentis ipsius lineae CC interceptam inter lineam BB et lineam CC fore aequalem datae EF. Ordinata lineae BB sit v. Fiet: $\sqrt{\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2} : dy :: a : y - v$. Ubi cum v pendeat ex x. ex parte. Inventio curvae analytica fit perdifficilis, at descriptio hac eadem Methodo facillime habetur, tantum ducendo manum per lineam BB.

Imo si ponatur ipsa BC portio tangentis intercepta continue crescere in certa ratione seu relatione ad WB hoc modo habebitur curvae descriptio.

2 Notandum, | ut, hoc obiter dicam *gestr.* | si *L* 2 f. tangentis *(1)* BC, *(2)* ipsius *L* 4 EF. Ordinata *(1)* Sit *(2)* Ordinata *L* 5 x. *(1)* solu *(2)* ex parte *L* 5 at *(1)* constructio *(2)* descriptio *L* 6 tantum *(1)* curvam *(2)* ducendo *L* 8 ad *(1)* WC *(2)* WB *(a)* nihilominus *(b)* hoc *L*



[*Fig. 8*]

Elegans observatio si curva BB quam percurrit manus sit circulus, curva CC erit etiam circulus, et quidem concentricus priori et minor; sed requiritur ut constans BC sit minor circuli BB radio.

NB. generaliter possum hoc problema solvere, qualis debeat esse linea BB ut curva CC fiat data. Ex. gr. debet CC esse recta, tunc BB erit etiam recta, et initio incidet in situm fili.

2 quam ... manus *erg.* *L*   5 problema *(1)* invenire *(2)* solvere *L*

[*Fig. 9*]

Ut $1C$ fiat parabola. Sit C parabola, erit $1B$ data. 43 aequ. bis 13 seu $2x$. $3C$ aequ. $\sqrt{2ax}$. Ergo $4xx+2ax$ aequ. $\overline{C4}^2$ Sit 12 aequ z. et $2B$ v. jam 41 est x; fiet $x+z$: $4B$ seu $\sqrt{4xx+2ax}-h :: 2x : \sqrt{2ax}$. Rursus $x+z : v :: x-z : \sqrt{2ax}-v$. $\overline{x-z}^2+\overline{y-z}^2$ aequ. a^2. $y-v$ aequ. $\sqrt{aa-\overline{x-z}^2}$ aequ. vv.

2 *Daneben, durch Umrahmung isoliert:* $BC \sqcap h$

122 (45188). DE LUDO LATRUNCULORUM
[1697 – Frühjahr 1698]

Überlieferung:

L Notiz: LBr. 130 Bl. 33. 1 Bl. 16°. 1 S. auf Bl. 33 r°. (Unsere Druckvorlage)

E Druck nach unbekannter Abschrift: FELLER, *Otium Hanoveranum*, 1718, S. 183 f.; (weiterer Druck nach *E*) DUTENS, *Opera*, 6,1, 1768, S. 312.

Datierungsgründe: Im Text wird ein 1697 erschienenes Buch von J. Ch. Wagenseil erwähnt, J. F. Fellers Entfernung aus dem Dienst bei Leibniz in Hannover im Frühjahr 1698 stellt einen Terminus post quem non dar.

Cuperi ad Wagenseilium Epistola inserta Notabilibus Noribergae cap. 22. Quaerit ab eo Cuperus de ludis Judaeorum, simulque libri Th. Hyde *de ludis Orientalium* mentionem faciens, ex eo apparere ait, *latrunculorum ludum nihil cum Scachis habere commune, id quod caeteroquin statuebant Salmasius, Meursius, aliique et latrunculorum ludum illum esse, quem nos* D a m m e n *vocamus.*

(+ Sed hoc ego vix credo: Latrunculorum ludi lex fuisse videtur, ut noster miles inter duos hostiles delatus periret, gemino miles ab hoste perit. Nec geminum pro damma accipi posse puto, sed fuisse duos, idque rationi consentaneum est. +)

12 communem *L ändert Hrsg. nach Wagenseil, S. 164*

---

10 Quaerit: vgl. J. Ch. WAGENSEIL, *De Sacri Rom. Imperii Libera Civitate Noribergensi commentatio*, 1697, S. 163 f. 11 libri: Th. HYDE, *De ludis Orientalium libri duo*, 1694.

123 (49565). ANAGOGICA
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 41 VII B Bl. 8. 1 Zettel [noch]. 7 Z. auf Bl. 8 r° (= Teil 1). Am unteren Rand Buchstabenfragmente. 3 Z. auf Bl. 8 v° (= Teil 2), darunter Abdruck von Leibniz' Siegel, rot.

Datierungsgründe: [„aequ". für Gleichheit; noch]

[*Teil 1*]

Anagogica

Euclides exhibiturus figuram cujus tria latera sunt aequalia, quaerit exhibere figuram cujus duo quaelibet latera sunt aequalia. Idque est analyseos quiddam genus, ita enim ab aequalitate trium res reducta est ad aequalitatem duorum.

[*Teil 2*]

$\sqrt[2]{r+\rho} - \sqrt[2]{r}$. aequ. μ. seu $2r + \rho - \mu^2$ aequ. $2 \, \langle \, \sqrt[2]{r^2 + r\rho} \, \rangle$. eritque: μ aequ. $\dfrac{\rho}{2\sqrt{r}}$

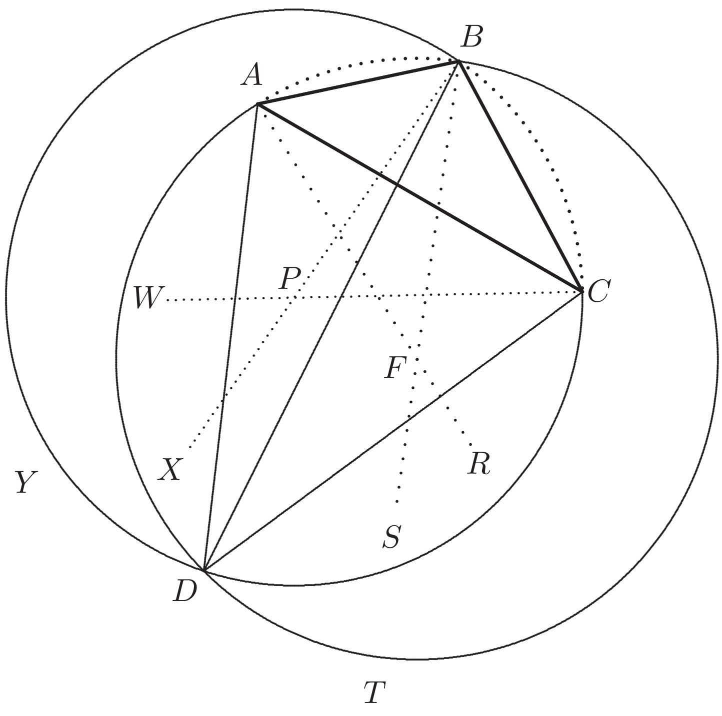
9 quaerit: Eukleides, *Elementa*, I, 1. 13 μ aequ. $\dfrac{\rho}{2\sqrt{r}}$: Leibniz verwendet den ersten Term der Näherung mit dem traditionellen Wurzelalgorithmus.

124 (50357). PRACTIQUE D'UN PROBLEME D'USAGE [1684 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 36 Bl. 212. 1 Bl. 4°. 1 $\frac{1}{2}$ S.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Oktober 1684 belegt. **[noch]**

Practique d'un probleme d'usage



[*Fig. 1*]

Si d'une station donnée D. je puis voir trois points A, B, C, dont les distances entre eux AB, BC, CA me sont données, on me demande la distance BD d'un de ces points, B de la station même, D. Ce qui peut servir pour jetter des bombes dans une ville, dont nous avons le plan, et pour plusieurs autres usages.

En Termes de Geometrie: Un triangle ABC estant donné, et les angles ADB, CDB, on demande BD.

Voicy l'operation par lignes:

Faites sur le papier ou autrement un Triangle ABC semblable à celuy qui est donné. Supposons maintenant par exemple que l'angle ADB soit de 20 degrés, et l'angle CDB de 27 degrés ou tel autre qui vous plaira. Ostés le double de 20, sçavoir 40 degres de deux angles droits ou de 180 degrés restent 140, prenés en la moitié qui est 70, et de A et B, tirés AR, BS en sorte que l'angle RAB et SBA soit chacun de 70 degres ce qui se peut faire avec le tranporteur ou autrement et AR, BS se couperont en F et par le moyen du centre F et du rayon FA ou FB, vous tracerés un cercle ABT.

Faites la meme chose sur CB, avec l'angle CDB, qui est de 27 degrés, c'est à dire ostés son double qui est 54 de 180, reste 126, dont la moitié est 63, et de C et B tirés CV, BX en sorte que l'angle VCB et XBC soit chacun de 63 degrés; et CV, BX se couperont en P. Et par le moyen du centre P et du rayon PC, ou PB vous decrirés le cercle CBY.

L'intersection de ces Cercles sera le point D tirés AD, CD, BD et vous trouverés que les angles ADB, CDB seront tels qu'on a supposé sçavoir le premier de 20 et le second de 27 degrés.

On peut donc trouver maintenant par le moyen d'une eschelle exactement divisée en de tres petites parties quelle proportion doit avoir BD à une des droites données comme AC, la quelle proportion estant la même en grand ou en petit, il sera par là aisé de trouver la veritable ligne BD en grand, car par la regle de trois comme AC prise est à BD trouvée en petit suivant l'eschelle, ainsi AC donnee en grand est à la quatrieme BD demandée en grand.

Si on demande une grande exactitude, il faut venir à l'operation qui se fait par le calcul de Trigonometrie qui n'est pas fort difficile et se peut tirer de ce que nous venons de dire. Mais l'operation par lignes peut suffire pour l'usage ordinaire pourveu qu'on aye de bons instrumens.

125 (53427). QUAESTIO DE JURE NEGLIGENDI [Herbst 1702 – 1703]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 21 Bl. 1–2. 1 Bog. 4°. 4 S. halbbrüchig beschrieben mit zahlreichen Korrekturen und Ergänzungen. — Gedr.: Pasini, *La nozione*, 1985, App. S. 40–47.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1700–1703 belegt. [**noch**]

Quaestio de jure negligendi quantitates infinite parvas comparatione ordinariarum, vel ordinarias respectu infinitarum; et quascunque Infinitesimas respectu earum quae ipsis sunt infinituplae multas nuper in Academia Scientiarum Regia concertationes peperit, quae res fecit ut mea quoque sententia qualiscunque exquireretur.

Ea vero huc redit; dandam operam esse, ut Mathesis pura a controversiis Methaphysicis illibata conservetur. Hoc nos facturos si parum curantes an realia sint infinita et inifinite parva in quantitatibus, numeris, lineis; utamur infinitis et infinite parvis, tanquam expressione apta ad cogitationes contrahendas. Ita licet imaginariae essent. Eae quantitates tamen possent adhiberi ut radices imaginariae in Algebra.

Hinc sequitur nunquam hoc compendio esse utendum nisi cum substituta explicatione, res redit ad demonstrationem rigorosam more Euclideo vel Archimedeo. Idque ad eum modum quem dedi in Actis Eruditorum, cum Lemmata Incomparabilium explicarem.

Nam dici potest ita se habere varios gradus infinitorum aut infinite parvorum, ut si concipiam distantiam stellarum fixarum esse incomparabiliter majorem Diametro globi terrae, et globum hunc Grano arenae; et granum arenae corpusculo lucis, ita ut unum comparatione alterius pro puncto habeatur. Etsi nulla talis in nostra Methodo quantitas definita adhibeatur sed tam parva quam quis volet.

Cum ergo ostendi potest in Geometricis affirmationibus errorem esse quovis assignabili minorem, id est nullum; dicimus per compendium errorem seu discrimen esse infinite parvum, et tanquam quantitatem adhibemus in calculo negligimusque comparatione ejus cujus respectu est discrimen. Quoniam statim ratiocinatio fit rigorosa, commutando indefinite parvum, in parvum definite, sed assignata quantitate minus quod nullum admitti posse demonstratio ostendit ita ut res quodammodo redeat ad illud singulare demonstrandi genus cujus exempla passim extant ubi ex assumta inaequalitate duarum quantitatum directe concludimus earum aequalitatem.

Atque hoc est principium calculi differentialis, cum discrimina vel differentias assumimus incomparabiliter minores ipsis differentibus, et varios hic gradus agnoscimus, constituentes quandam novi generis legem homogeneorum.

Et prosunt hae quantitates indefinitae, etiam ad universales propositiones in ipsis definitis. Ex. gr. theoremata de rectis convergentibus verificantur in parallelis tanquam specie convergentium, ubi punctum concursus abest infinite. Sic omnia quae demonstrantur de Ellipsibus, verificantur certo modo et in parabola, si concipiatur parabola ut Ellipsis cujus alter focus infinite absit.

Hinc oritur Lex illa Continuitatis, cujus magnum etiam in physicis usum ostendi in pristinis rei literariae Novellis. Concipiendo aequale, ut inaequale evanescens, et quietem ut motum infinite parvum; aliaque id genus. Ubi uti datorum unum in alterum evanescit, ut motus in quietem; ita et regula pro motu eodem casu evanescere debet in regulam pro quiete. Alioqui regulae sunt incohaerentes.

Itaque admirando naturae artificio ubique fit, ut omnia itaque procedant in ratiocinando tanquam haec quantitates essent quam maxime reales; Neque aliter rerum ordo et connexio sibi constaret.

Quod attinet ad nonnullas difficultates ex seriebus infinitis, dico non proprie opponi nihilum infinito, sed nihilum omni at infinito opponi infinite parvum. Itaque $\frac{1}{0}$ = infinito, non est vera propositio, nisi 0 significet numerum infinite parvum, qui scilicet tanquam ipsi 0 succedaneus abjici potest, per rationes supra dictas ut si dicerem $\frac{aa}{dx} = f$ tunc a quantitas ordinaria esset media proportionalis inter infinitam f et infinite parvam dx.

Hinc non est putandum bis 0 esse aliud quam 0. uti quosdam ingeniosissimos viros statuere accepi, dum scilicet infinite parvum cum nihilo quodam modo confundunt.

Cum series infinitae divisione vel Extractione aut aliis modis investigantur, vis veritatis in eo consistit, ut ostendatur discrimen esse minus quavis quantitate. Nempe si quis dicet discrimen esse inter circulum, et hanc quantitatem ejus a me inventam $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. (posito quadrato diametri 1): ostendam id discrimen esse nullum, seu minus eo quod quis potest assignare. Quia in hac serie ubicunque sistas progrediendo, error semper minor est proxime sequente fractione, ea vero si satis progrediare minor est data quavis quantitate.

Haec causa est cur continuata divisio non det seriem fractioni aequalem, nisi termini decrescant, nam ut error dato minor ostendi possit, opus est seriem decrescere et quidem sufficienter.

Sic in fractione $\frac{a}{b+c}$ si dividas a per $b+c$ prodit

$$\boxed{+a} \qquad\qquad\qquad ⨍\ \frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{b^3} - \frac{ac^3 : b^3}{b+c}$$

$$\boxed{b+c}$$

$$\boxed{-\frac{ab}{b}}\boxed{-\frac{ac}{b}}$$

$$\boxed{b+c}$$

$$\boxed{+\frac{acb}{bb}} + \frac{acc}{bb}$$

$$\boxed{b+c}$$

$$-\frac{accb}{b^3} - \frac{ac^3}{b^3}$$

$$\boxed{b+c}$$

ita ut sistere liceat ubivis, tantum ipsi ultimo residuo hoc loco $-ac^3 : b^3$ subscribendo divisorem $b+c$, ut fiat fractio $\frac{-ac^3 : b^3}{b+c}$, quae adjuncta seriei faciet eam aequalem ipsi fractioni datae $\frac{a}{b+c}$.

Itaque si sit $\frac{a}{b+c} = \frac{4}{3+1} = \frac{4}{4} = 1$ prodibit $\frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{4}{27} - \frac{4:27}{3+1}$ id est $\frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{4}{27} - \frac{1}{27} = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{3}{27} = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{3} - \frac{3}{9} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1.$

Et utcunque continues seriem, prodibit $\frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{4}{27} - \frac{4}{81}$ etc. usque ad $\pm$ (+ vel −) $\frac{4}{3+1}\frac{1}{3^e}$ quae cum possit esse minor quavis data. Sed si sit $\frac{4}{1+1}$, semper ubi desines remanebit (+ vel −) $\frac{4}{1+1}\frac{1}{1^e}$ sed $\frac{1}{1^e} = 1$ ergo semper remanet $\frac{4}{2}$ quae non decrescit nec fit tandem minor quavis data.

Quod ergo attinet ad talem seriem $\dfrac{2}{2-2} = 1+1+1+1$ etc. $= \dfrac{2}{0}$ vel talem $\dfrac{2}{1-1} = 2+2+2+2$ etc $= \dfrac{2}{0}$, quae deberent esse inter se aequales cum tamen una sit alterius dupla; dicendum est nullam esse hic aequalitatem inter seriem infinitam et fractionem. Dicendum etiam est, absolute nihilum, non dividere omnino, nec multiplicare, nisi ut prorsus tollat. Ipsam autem $\dfrac{1}{0}$, posito 0 pro perfecte nihilo, esse debere absolute infinitam cujus nulla est extensio sive quantitas. Ipsum verum infinitum absolute, nempe Deus quantitate calculabili, nempe partibus caret et τὸ omnia, quod partes haberet revera non est unum totum, seu non potest constituere quantitatem quae multiplicando vel dividendo mutetur.

Eoque modo respondendum esset ei, qui 0 assumens, ut quantitatem, et utens axiomatis istis duobus receptis, (primo) aequalia uni tertio esse aequalia inter se et (2^{do}) aequalia multiplicata vel divisa per eandem quantitatem manent aequalia sine ullo ad nostrum calculum infinitesimalem respectu, sic argumentaretur $1,0 = 0 = 2-2 = 2,$ $1-1 = 2,0$. Ergo $1,0 = 2,0$ ergo $1 = 2$.quod est absurdum.

Respondendum est 0 verum seu absolute sumtum tali calculo non subesse, seu si quid multiplicetur per 0, id producto rursus per 0 diviso non restitui, cum quaelibet per 0 multiplicatae dent idem, nempe nihil.

At instabis saltem posse ostendi $\dfrac{1}{0} = \dfrac{2}{0}$ seu aliquod esse duplum sui ipsius. Nam $\dfrac{1}{0} = \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{2}{2-2} = \dfrac{2}{0}$. Respondendum est $\dfrac{1}{0}$ tali calculo non subesse, seu $\dfrac{1}{0}$ non duplicari multiplicando per 2, unde non licet dicere bis $\dfrac{1}{0}$ nisi eo modo quo bis dicimus idem nihil id⟨eo⟩ adjicientes ut si eandem veritatem repetamus, cum $\dfrac{1}{0}$ significet oppositum τῷ nihilo, seu omnia nempe Numerum omnium unitatum. Et si quid multiplicet omnia, non prodire novum, cum omnia augeri non possint. Uti si quis dividat nihil per aliquem numerum seu in partes duas, tres, etc. non prodeat novum, quia nihil minui non potest. Vicissim uti nihil non potest duplicari ita non potest assumi dimidium numeri omnium, seu numeri omnium unitatum ex quibus intelligitur nihil et omnia multiplicando aut dividendo non mutari. Sed secus esse de infinitis et infinite parvis suppositis, quibus utimur in calculando; id est tam parvis aut tam magnis quam opus est, ut error ostendatur minor dato.

126 (57118). DE AEQUATIONIBUS DIFFERENTIALIBUS ET QUADRATURIS

September 1690

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 272. 1 Zettel 9,8 × 6,9 cm. 2 S. — Bl. 272 hing zusammen mit einer Aufzeichnung zu Rollkurven (LH 35 XIII 2c Bl. 16) und einer Aufzeichnung zu Traktrix-Kurven (LH 35 XIII 2c Bl. 87).

Septemb. 1690

Possunt quadraturae reduci ad se invicem et alias nova hac methodo, ut aequationes ad curvam reducamus ad differentiales variis modis, et quidem ad differentiales reducibiles ad quadraturas. Ita si plures concurrunt quadraturae eae ad se invicem reducentur. Licebit et sumere in eum finem ipsas transcendentes. Si ex differentiali curvae cognitae tollatur a constans per ipsam Aequationem, fiet aequatio differentialis, in qua solum supererit $\overline{x:y}$. qualem ostendi reducibilem ad quadraturas, ita haec quadratura datur ex cognita natura curvae. Sed optimum erit differentialem produci talem in qua ab una parte sit solum x cum dx ab altera solum dy cum y. Ita una quadratura pendebit ab alia. Quod si effici posset ut utrobique essent rationales innotescerent notabilia de logarithmis. Quia compositum ex quadraturis rationalibus daret curvam ordinariam.

127 (57869). DE EPICYCLOIDIBUS
[September 1690]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2c Bl. 16. 1 Zettel 7 × 9,7 cm. 1 S. — Bl. 16 hing zusammen mit einer Aufzeichnung zu Differentialgleichungen und Quadraturen (LH 35 XIII 1 Bl. 272) und einer Aufzeichnung zu Traktrix-Kurven (LH 35 XIII 2c Bl. 87).

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung auf LH 35 XIII 1 Bl. 272 ist auf September 1690 datiert.

[*Fig. 1*]

Ostensum est si circulus rotetur super alio circulo, describi lineam cycloidalem certi generis, quae revera est ex genere linearum ordinariarum. Quod si volutio AB incipiat in A puncto describente in A basin attingente, et sumatur recta CB tangens arcum AB, et ei aequalis, tunc Cycloidalis linea CH super recta CB descripta istam novam curvam AH tanget. Atque ita revera haberi potest punctum Cycloidis vulgaris Galileanae, independenter a quadratura Circuli, sed initium baseos hujus cycloidis non datur. Patet etiam contactibus talium Cycloidum Galileanarum infinitarum fieri istam lineam ordinariam novam.

128 (58048). ARCHIMEDIS SCRIPTA [1700 – 1716]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 28. 1 Zettel 6,2 × 11,5 cm. 2 S. — Bl. 28 hing zusammen mit der Aufzeichnung *Generalis expressio valoris* (LH 4 V 10 Bl. 52).

Datierungsgründe: [noch]

Archimedis scripta

Ex Libro Archimedis *Cyclometrico* ac libro *de Sphaera et cylindro* eliminati sunt Dorismi, ab Eutocio ut videtur, vel aliquo alio – in libris *de Aequiponderantibus* plus superest Dorismorum, nam in eos Eutocius serius scripsit et strictius tantum. Caeteri Archimedis libri, in quos Eutocii *Commentarios* non habemus, (puta *de Conoidibus et Sphaeroidibus, de Spiralibus, de quadratura parabolae*, et *Arenarius*) dorismum suum adhuc retinent.

Haec Wallisius notavit praefatione ad *Cyclometricum*. Hinc confirmatur librum *de aequiponderantibus* esse Archimedis de quo dubitabat Barrovius, quod demonstratio ipsi non satis firma videatur: mihi tamen contra non tantum firma satis, sed et pulcherrima videtur, et digna Archimede. Credidit Barrovius non posse propositiones hujusmodi physicas demonstrari ex hujusmodi solis assumtis, qualia sunt in limine hujus libri. Quia non erat expertus scilicet, quantum duci posset ex hac unica propositione: n i h i l e v e n i r e s i n e r a t i o n e d e t e r m i n a n t e, cujus exemplum est assumtum illud Archimedis quod corpora aequalia ex aequalibus distantiis sint in aequilibrio.

---

13 praefatione: Leibniz bezieht sich auf Wallis' Ausführungen am Schluss der *Notae ad Arenarium*, WO III, 1699, S. 537; in seiner Ausgabe von 1676 sind diese Bemerkungen noch nicht erhalten. 14 dubitabat: vgl. *Archimedis Opera*, 1675, S. 105 f. 19 assumtum: ARCHIMEDES, *De Aequiponderantibus* I, post. I.

129 (58054). SITUS
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 42. 1 Bl. 8°. 8 Z.

Datierungsgründe: [noch]

Situs ultra quantitatem considerat qualitatem seu formam; ita ut in magnitudinis consideratione adhibetur aequalitas; ita in situs consideratione adhibetur similitudo. R e c t a ex magnitudine definita, est brevissima inter puncta extrema sed ex similitudine definita, est cujus pars quaevis similis toti. Et ita est simplicissimae naturae sive magnitudinem spectes, sive formam.

130 (58084). GENERALIA
[1685 (?)]

Überlieferung: *LH* 35 VII 30 Bl. 128. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl 128 r°. Auf der Rückseite Aufzeichnung zur Optik (58085). **[noch]**

Datierungsgründe: **[noch]**

Generalia

Si B sit in A, et sint homogenea, non tamen coincidentia, erit B *pars* A *totum*. Si determinantia sint coincidentia congrua, similia erant et determinata. *Homogenea* quae transformatione possunt reddi similia. *Aequalia* quae congrua. Duo puncta determinantia cadunt in rectam quam determinant. Nam rectae $\overline{Z}.A.B.$ unica sit qu. $Z \infty A$ fiet $A.A.B.$ unica quod est semper verum seu axioma aeternae veritatis. Ergo $A \infty$ qu. Z.

Si $A.\overline{B}.C.$ un. ergo vicissim $B.A.\overline{C}.$ un. seu in universum $A.B.C$ un. Salva in quavis determinatione semper pro determinato substitui possunt determinantia omnia. Datum designo per lineolam subductam ut $Z.\underline{A.B}$ *est relatio*, $Z.\underline{A.B}$ un. est *determinatio*.

Axioma: si sit $A.\underline{B.C}$ un. erit $B.\underline{A.C}$ un. seu si valet haec consequentia: $A.B.C \sim D.B.C$. Ergo $A \infty D$. Valebit et haec: $B.A.C \sim E.A.C$ ergo $B \infty E$ quicquid eodem modo se habet ad deteminantia, etiam ad determinata ut si $\overline{X}$ sit circulus erit $X.A.B. \sim F.A.B.$ Hinc si $\overline{Z}.\underline{A.B}$ un. erit et $X.\overline{Z} \sim F.\overline{Z}$. Unde datur recta ad quam omnia puncta in circuli circumferentia eodem se habeant modo nempe recta F. patet et F cadere in $\overline{X}$ nam $F.Z \sim F.Z$

Continuum est cujus duae partes cointegrantes habent aliquid commune, quod dicitur *terminus*. *Partes cointegrantes* voco quae simul sunt aequales toti, nec habent partem communem. *Indivisibile* hic cujus pars nulla est, quod tamen *inest* seu ex quo crescente fieri potest totum seu in quod abit tandem quantum continuo aliquo aequabili decremento. *Inesse* dicitur seu constituere quod est requisitum immediatum. Minimi nullum est requisitum immediatum. Transformatio est mutatio rei iisdem minimis manentibus.

Definitione lineae rectae, quod ex aequo suo interjaceat puncta nusquam demonstrando utitur Euclides. Est enim obscura.

Postulata sunt assumtae possibilitates.

Congenia sunt linea et superficies, licet non homogenea. Congenia intrinseca, quae insunt. Plura simul percipi, ut frigus et dulcedinem non sufficit ed extensionem. Opus est ergo ut simul percipiam relationem uniformitatis inter plura quae percipio, ut si percipiam chartam albam et murum nigrum tamen concipio uniformitatem, et licet murus posset esse albus.

Duorum statuum, graduum, etc. unus ex alio fieri potest per mutationem continuam si similes sunt inter se, talis esse poterit mutatio ut transeat per meros status similes intermedios et quidem simplicissima non transibit plus semel per eundem. Mutatio continua potest esse similis etsi sit per non similia, si ab A ad E per C transitus similis transitui ab A ad C per B et a C ad E per D. et ita porro subdividendo. Et hoc modo necesse est transitum semper quoque eodem per minus diversa ab extremis quam extremas sunt inter se, seu esse continuam appropinquationem.

Si mutatio continua sit similis secundum unam assumtionem, erit similis quoque secundum aliam, ut si sit mutatio $A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ L$ et sit $AEL \sim ACE \sim ABC$ erit $ABD \sim BCD$.

Si mutatio similis transit per unum simile, transibit per mera similia. Mutatio autem seu transitus ex datis extremis determinatus seu unicus est similis per mera similia. In dissimilibus videndum an detur semper determinatus transitus; ut ex centro in circulum concentricum, imo nec uniformis datur tamen determinata mutatio in dissimilibus si omnia determinantia in statu a quo et in statu ad quem singula singulis sint similia et respondentia in respondentia mutentur mutatione uniformi pro mutatione uniformi, sicut eadem ubique portio servetur. Ita circuli determinata est mutatio in Ellipsin datam. Determinatam voco mutationem cum determinata sunt per ⟨quae⟩ fit ⟨transitus⟩.

Si posita A in B eo ipso coincidant A et B, erit A punctum. Si $(\overline{A})$ via ipsius A seu linea, poterit $((A)$ esse initium $(A))$ finis. Si Y punctum, $\overline{Y}$ est linea. Si omne Z sit Y dico esse $\overline{Z}$ in $\overline{Y}$. Si omne Z sit Y et omne Y sit Z est $Z \infty Y$, si vera eodem tempore, sin diverso erit unum ex altero transformatione factum. Si quod continue uniformiter mutetur transit per omnes gradus seu si $\overline{\odot}$ sit successive omnium $\odot$ erit et $\odot \infty$ ☽ si $\odot$ et ☽ homogenea sunt. $((\odot)$ primum $(\odot))$ ultimum $(\overline{\odot})$ omnia successive. Extremum est commune pluribus partem communem non habentibus, et quorum

8–25 Duorum … ⟨transitus⟩: Vgl. VI, 4 N. 144 S. 606 Z. 17 – S. 607 Z. 14.

unum in alio non est. Dato situ duorum punctorum possibile est dari alia duo situm eundem habentia. Possibile enim est haec connexa moveri. Idem est de pluribus. Cum situ idem et distantia eadem quia ex dato situ distantia determinatur. *Distantia* punctorum AB dicitur *major* punctorum CD *minor* quando omne corpus suis quibusdam extremis applicatum ipsis A et B et deinde uno extremo translatum in C ita collocari potest, ut aliquo suo puncto praeter priore quo in B inciderat, incidat in D. Aliter: minor est quando aliquod extensum reperiri potest, quod applicatum ad C et D suis extremis postea translatum in A non potest attingere B. Posterior definitio simplicior priore sed ex neutra habetur continuitas, seu ex majore ad minorem transiri per omnia media. Si punctum sumatur in corpore, et sit aliud punctum in eodem corpore, quod a priore non minus distat quam quodvis aliud, erit posterius in corporis *extremitate*. Dato uno puncto corporis reperiri potest aliud quod a nullo alio minus distat cum enim sit in extremitate corporis. Aliud corpus latum circa prius seu ipsum contingens tandem in ipsum incidet cum semper plus minusve a proposito puncto recedat. Hinc probabitur et in extremitate ejusdem corporis semper reperiri posse punctum quo nullum aliud magis a dato puncto distat, vel minus vel distantiam habentia minorem data.

Si sint plura relationem determinationis inter se habentia, hoc est ut reliquis positis unum aliquod sit determinatum, tunc etiam quodlibet aliud eorum ex reliquis erit determinatum. Hoc intellige si unum ex illis non revera contineat plura.

Puncta plagam determinantia praestant in situ, quod unitas in numeris seu Magnitudine.

$t \overset{\diamond}{\cdot} = m$ mihi significat relationem quamcunque magnitudinis inter t et m, si sit $t \overset{\diamond}{\infty} m$ continebit relationem quamcunque seu modum transitus ex una re in aliam.

Lineae non appellantur figurae sed superficies et solida, ita divisio trium dimensionum reducitur ad dichotomiam. Duo corpora solida et duae figurae planae semper intus sunt similes, item duae lineae rectae. Seu si intus sis nullum observas discrimen nisi pervenias ad extremitates. Ut in profundo mari vel tenebroso carcere.

Si sint duo puncta $L.M$ ejusdem inter se situs ad $A.B$, et rursus duo alia $P.Q$ ejusdem inter se situs ad $A.B$ transitus datur ab $L.M$ ad $P.Q$. quo similiter continuato necesse est transiri per omnia, et ita perveniri ad unum ad ea quae inter se coincidant, seu ad punctum sui situs unicum. Item duae sphaerae se possunt tangere, itaque dari potest punctum sui situs ad duo centra unicum.

D est Z idem est quod D incidere Z in locum $\overline{Z}$.

Problemata unius scientiae revocantur utiliter ad problemata alterius simplicioris.

Physica ad Mechanicam, haec ad Geometriam, Geometria ad Arithmeticam.

Loca punctorum serviunt in Geometria, ut Tabulae numerorum, vel Scalae in Arithmetica.

131 (58090). VERSUS MEMORIALIS QUEM FECI PRO TIRONIBUS GEOMETRIAE

[Mitte November – Dezember 1706]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 142. 1 Zettel ca 13 × 11 cm. Unten Risskante. 1 S. auf Bl. 142 r°.

Datierungsgründe: Leibniz hielt sich ab Mitte November 1706 für einige Monate in Berlin auf. Dort erhielt er ein Exemplar von Ph. NAUDÉ, *Gründe Der Meßkunst*, 1706, in das er auf S. 177 nach dem Abschnitt 468 den Hexameter von Z. 19 ebenfalls eingetragen hat (Leibn. Marg. 95). Der Vers ist wohl ebenso wie der Hexameter in S. 376 Z. 3 durch den vorstehenden Abschnitt 468 angeregt: „Um zu wißen / wieviel Regulare Cörper seyn können / so muß man betrachten auf wie vielerley Art man gleichseitige △, oder Quadrate / oder Regular Viel-Eck bey einander fügen kan / um dichte Winckel damit zu formiren. Und dardurch wird man mercken / daß nur fünferley Art Regular-Cörper seyn können / nemlich ein Tetraëdrum mit 4. gleichseitigen △ umschräncket / als Figur 2. Ein Octaëdrum als Fig. 3 mit 8. solche △. Ein Icosaëdrum mit 20 solche △ als Fig. 4. Ein Exaëdrum oder Cubus Fig. 5. mit 6 Quadrat umschräncket. Und endlich ein Dodecaëdrum mit 12. Regular Fünfeck umschräncket als Fig. 6.“ In einem Brief an Johann Andreas Schmidt vom 15. Dezember 1706 (Druck in I, 26) empfahl Leibniz das Buch, weil es auch die räumliche Geometrie enthalte.

Versus memorialis quem feci pro Tironibus Geometriae

Cum trias hedrarum numerum non dividit hedra est.

Ope hujus versus succurrere potest memoriae quaenam figurae planae regulares quorum corporum regularium hedras constituant. Sensus est cum numerus hedrarum corporis regularis non potest dividi per ternarium, tunc hedra ipsa est triangulum regulare. Nempe tetraedrum, octaedrum et icosaedrum, habent hedras 4, 8, 20, nullus horum numerorum dividi potest per 3, ergo (per versum memorialem) hedra debet esse triangulum. Hinc facile intelligitur quae sint hedrae duorum reliquorum corporum regularium. Nam cubi hedra utique est quadratum, cumque solum pentagonum supersit (aliae enim figurae regulares planae non adhibentur) id hedra erit ejus quod superest corporis regu-

18 *(1)* Pro Tironibus *(2)* versus *L* 18 f. Geometriae *(1)* Cum laterum numerum latera hedrar *(2)* Cum *L* 19 f. est *(1)* Versus | est *erg.* | memoralis ut per qvem sci *(2)* Ope *L* 20 potest *(1)*, qvot *(2)* memoriae *(a)* qvorum *(b)* qvaenam *L* 22 f. triangulum *(1)*, seu habet trila *(2)* regulare *L* 23 habent *(1)* latera *(2)* hedras *L*

laris nempe dodecaedri.

Addi posset versus pro denominatione polyhedrorum quinque regularium[:]

Quinque dupla numeros bis quartum res dabit hedras

2	3	4	5	6
4	6	8		12
			20	

132 (58662). SUMMAE SERIERUM MULTIPLICATAE
[Juli (?) 1693]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VI 25 Bl. 5. 1 Zettel 20,5 × 9 cm. 1 S. auf Bl. 5 r°. — Auf Bl. 5 v° ein gestrichenes Konzeptfragment für den Brief an Herzog Rudolf August vom 20. (30.) Juni 1693 (I, 9 N. 39). Das Blatt hing ursprünglich zusammen mit LH 35 I 9 Bl. 22. Dort befindet sich auf Bl. 22 v° ein weiteres gestrichenes Fragment des Briefkonzepts, auf Bl. 22 r° eine Notiz über einen Reiseweg (Druck in einem späteren Band der Ausgabe).

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte geschrieben worden sein, als das Briefkonzept nicht mehr benötigt wurde.

Summa serierum multiplicando per distantias a vertice duplici ratione servire potest ad summas, una dum hoc modo terminus seu ordinata in plures resolvitur, quae methodus tamen cessat cum divisores seu factores nominatoris alioqui sunt aequales inter se quatenus sunt aequales. Alius usus in eo consistit, ut terminos seriei quaesitae A consideremus ut differentias, alterius seriei B. Jam differentiae seriei ductae in distantias a vertice, dant aream complementalem. Ergo si summa seriei A in distantias a vertice haberi potest habentur complementa arearum seriei B. Ergo et summa seriei B, detrahendo scilicet a rectangulo sub altitudine et basi, summam complementalem. Haec ratio etiam pro divisoribus aequalibus ipsius denominatoris inservire potest. Videtur res semper procedere, etiam cum factores ut x, $x+1$, $x+2$, non sunt continui. Videmur redire ad summam seriei harmonicae. At cum haec in istis saepe supponatur quae quoties infiniti termini summandi sunt, infinita est; possunt excogitari varii modi destruendi, conjunctione plurium serierum. Haec methodus etiam adhiberi potest, cum distantiae a vertice crescunt non Arithmeticae, sed Geometricae; item et cum alio modo. Hac arte varia nova prodibunt theoremata.

Etiam in numeris: Summari potest fiat $x = \dfrac{1}{z}$. et $dx = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z+dz} = \dfrac{dz}{zz+zdz}$. $dx^2 = x^2 + 2xdx + dxdx - x^2$. Ergo summari potest $2xdx + dxdx$. Ergo et $\dfrac{1}{z^3+zzdz} + \dfrac{dzdz}{zz+zdz}$.

133 (58761). INFINITESIMALES
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VII 3 Bl. 2. 1 Streifen 7,7 × 2 cm. 5 Z.

Datierungsgründe: [noch]

Infinitesimales non turbant legem homogeneorum ordinariam, sic $ad(dz : dv)$ et dx sunt homogeneae tam ordinarie quam infinitesimaliter item $d\omega d(dz : dv)$ et ddx.

134 (58777). PUISQUE DES PERSONNES QUE J'ESTIME BEAUCOUP [Juli 1705]

Überlieferung: *l* Reinschrift: LH 35 VII 9 Bl. 1–2 1 Bog. 4°. 4 S. von Schreiberhand mit Korrekturen und Ergänzungen (*Lil*) von Leibniz' Hand.

Datierungsgründe: Der vorliegende Text (vgl. auch die lateinische Ausarbeitung 37993, Gotha *Forschungsbibl.* Chart. A 448–449 Bl. 41–42) sollte wohl ursprünglich dem Brief von Leibniz an Pierre Varignon vom 27. Juli 1705 beigelegt werden. Leibniz vergaß dies und sandte eine neue Fassung, in der vermutlich seine Ergänzungen und Korrekturen berücksichtigt waren, als Beilage im Brief vom 31. Juli 1705 an Jacques Lelong (vgl. I, 24 N. 463 S. 835).

Puisque des personnes que j'estime beaucoup, ont demandé mon sentiment sur les objections qu'on a faites à M. Saurin, et qu'il refute dans le journal des savans du 13 d'Avril 1705, je ne puis me dispenser de dire que j'ay admire qu'un Auteur versé dans le calcul de l'Algèbre, et qui a l'honneur d'estre de l'Academie Royale des Sciences a pu alleguer de telles raisons contre une solution tres evidente, et qu'on ne peut nier d'avoir donné dans le but.

Une partie de ses objections revient à nous vouloir oster la liberté d'employer dans le calcul des differences et des sommes les premiers axiomes de la geometrie, par exemple celuy qui permet de substituer *aequalibus aequalia* et de mettre à la place de la raison de dy à dx sa valeur trouvée en termes ordinaires : comme s'il n estoit pas indifferent de faire de telles substitutions plus tost ou plus tard. Et en effect M. Saurin luy monstre, que lors qu'on s'abstient de cette substitution dans l'endroit ou son adversaire ne la veut point admettre, on ne laisse pas d'arriver à la même conclusion, contre ce que celuy ci a crû.

J'avoue de n'avoir pû m'empecher au commencement (lors que par hazard je jettay le yeux sur la pag. 250 de ce journal avant que d'avoir lû ce qui precede) de croire que

12 admire *(1)* qv'une personne versée *(2)* qv'un Auteur versé *Lil* 14 f. d'avoir *(1)* reussi *(2)* donné dans le but *Lil* 18 celuy qvi permet *erg. Lil*

11 f. 13 d'Avril: Das richtige Datum ist 23. April.

M. Saurin se moquoit de cet auteur en luy attribuant des objections trop estranges mais j'ay bien reconnu par après qu'on ne luy avoit point fait de tort, et j'ay esté sur tout surpris qu'il a este capable de dire que *quarrer les deux membres de la formule* (ou Equation) $s = xdy : dx$, c'est, faire une operation qui n'a pas encor esté practiquée *dans la Geometrie Transcendante n'y indiquée par aucune regle de cette Geometrie*. Comment donc? Faut il avoir la permission ou l'autorité de quelque regle pour se servir d'un axiome qui apprend que lors que deux grandeurs sont égales, leur quarrés le sont aussi ? Et faut-il que ceux qui donnent des preceptes d'un nouveau calcul s'amusent à repeter tout ce qui est du calcul ordinaire? D'ailleurs on practique tous les jours mille tours d'adresse dans le nouveau calcul comme dans l'ancien, dont l'Auteur des objections n'aura point vû d'exemple ny de regle

Il n'y a qu'une seule de ses objection[s] qui a quelque apparence quand on ne la regarde pas de pres: c'est pour quoy je veux l'examiner un peu: soit une courbe dont l'Equation locale est:

$$\begin{array}{ccccccccccc} y^4 & - & 8y^3 & - & 12xyy & + & 48xy & + & 4xx & = & 0 \\ & & & + & 16yy & & & - & 64x & & \end{array}$$

ou y est l'abscisse et x est l'ordonnée. En la différentiant il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3yy - 12y - 2x + 16 = v}{y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x = z}$$

ou bien pour abréger $dy : dx = v : z$. On demande la soutangente de cette courbe, ou ce qui est la meme chose, la valeur de $xdy : dx$, dans le cas où $x = 2 = y$. Or il se trouve alors $v = 0$ et $z = 0$ donc au lieu de $dy : dx = v : z$, il y aura $dy : dx = 0 : 0$. Mais en ce cas il faut faire $dy : dx = dv : dz$ suivant l'article 163 de l'Analyse des infinitesimales publiée par M. le Marquis de l'Hospital. Ce qui estant fait effectivement en expliquant v et z par x et y suivant leur valeur supposée; il se trouve que $dy : dx$ est $\pm\sqrt{1:8}$ et qu'ainsi dans ce cas où x est 2 la soutangente $xdy : dx$ est $\pm\sqrt{1:2}$.

L'Auteur de l'objection y oppose que la Methode des Tangentes ne souffre qu'une seule differentiation, qui estoit celle de l'Equation Locale de la Courbe, ce qui nous a donné $dy : dx = z : v$ et il pretend qu'il n'est pas permis icy de venir à une seconde

1 f. estranges *(1)* de ce qv'elles me paroissoient meriter, *(2)* mais ... et *ändert Lil* 4 : dx *erg. Lil* 13 de ses *erg. Lil* 14 peu: *(1)* il y a *(2)* soit *ändert Lil* 22 z = 0 *(1)* dans *(2)* donc *ändert Lil*

differentiation en mettant dv et dz, à la place des grandeurs v et z. Je réponds qu'en effect la methode des tangentes en general n'ordonne pas cette seconde differentiation; mais elle ne la defend pas non plus en general. Et dans le cas particulier dont il s'agit, il y a une raison particuliere qui l'ordonne, savoir la regle du cas ou le calcul nous mene à 0 : 0 (c'est-à-dire à 0 divisé par 0) car alors pour en tirer quelque chose, il convient de se servir de la methode prescrite pour cet effect qui est independante des Tangentes, et a lieu en toute sorte de rencontres ou 0 : 0 se trouve; comme le dit article 163 fait voir, ou on ne l'applique pas meme aux tangentes, sauf a d'autres de l'y appliquer quand ils en auront besoin. Et Mons. Saurin bien loin d'en devoir estre critiqué merite l'applaudissement de s'estre avisé si apropos d'une Methode qu'on n'employe pas ordinairement pour les Tangentes par ce qu'ordinairement on n'en a point besoin.

Mais à fin qu'on s'estonne moins de cette substitution des dv et dz au lieu des grandeurs v et z; je veux adjouter quelque chose qui pourra servir à éclaircir d'avantage le dit article 163. Il faut donc savoir qu'on ne peut point determiner ce que c'est qu'0 : 0, si on demeure purement dans ces termes ; puisqu'il n'y a pas plus de raison de dire que cette fraction est egale à 1, que de dire qu'elle est egale à 2; ou generalement à b: car multipliant par 0, les deux costés de chacune de ces Equations, il y aura 0 egal à 0 multiplie par 1, ou à 0 multiplie par 2, ou à 0 multiplie par b. dont l'un est aussi vray que l'autre: car quelque grandeur ou nombre qu'on puisse multiplier par 0, il provient tousjours 0. C'est pourquoy au lieu de prendre dans ce cas les v et z pour des r i e n s (qui ne sont point des grandeurs, puisque dans les grandeurs le tout n'est pas egal à la partie, ny le double au simple, au lieu que deux fois rien est autant qu'une fois rien) il faut les prendre pour des grandeurs naissantes ou evanouissantes: or z naissant ou evanouissant est autant que son dz. Et v dans le même cas est autant que son dv.

Et ce cas des evanouissans ou naissans, est si pres du cas dont il s'agit qu'il n'en differe d'aucune grandeur assignable, comme il est manifeste dans la figure 130. du traité de l'Analyse des infinitesimales, ou la distance entre B et b est moindre qu'aucune qu'on puisse assigner. Il est encor à propos de considerer, que lors que z evanouit, ce n'est pas assez de mettre 0 à la place, car l'0 tout pur n'a nul rapport au z et ne marque point l'origine, qu'il tire de ce z au lieu qu'il faut marquer que c'est le z qui evanouit et non pas tout autre grandeur. Et cela s'obtient en mettant non pas le z tout evanoui (qui n'est rien absolument) mais le z evanouissant c'est à dire dz, comment nous venons de faire.

1 dz, *(1)* au lieu *(2)* à la place *ändert Lil* 7 voir, *(1)* qvi *(2)* ou on *ändert Lil* 23 evanouissantes: *(1)* est autant qve son dz *(2)* or ... dz *ändert Lil*

135 (58923). SCIENTIA PERSPECTIVA
[1684 – 1687]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XI 1 Bl. 9–10. 1 Bog. 2°. An den Rändern 3 unregelmäßige kleine Ausschnitte.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1684–1687 belegt.

Scientia perspectiva est, ars objecti apparentiam in Tabula exhibendi, id est data aliqua Tabula (sive plana, sive superficie concava aut convexa, aut mixta) et objecto (sive id sit punctum, sive linea, superficies, solidum, cujus natura data est) datoque eorum situ inter se, et cum oculo (etiamsi distantiae quaedam ponantur infinitae aut infinite parvae; infinitae, ut si oculus a tabula vel objecto vel haec inter se infinite distare intelligantur; infinite parvae, si oculus incidat in Tabulam vel objectum, quo casu neutrum debet esse figura plana, vel objectum in tabulam, quo casu saltem non debent esse planae parallelae; item etiamsi oculus sit inter objectum et Tabulam; vel objectum inter tabulam et oculum,) datoque medio (eoque vel invariato, vel reflectente aut refringente, idque semel aut pluries, et lege vel communi vel alia quacunque pro arbitrio sumta) et situ ac figura lucidi (quod rursus vel simplex est, vel multiplex, et vel propinquum vel infinite distans; et si multiplex ejusdem aut diversi gradus, et radiis agit directis, reflexis aut refractis, unde varii illuminationum et umbrarum gradus) ducendi in tabula lineas (quanquam et per mera puncta facta eae lineae designari possint) repraesentantes lineas objecti (dum scilicet quodlibet punctum in tabula respondens puncto objecti est illud

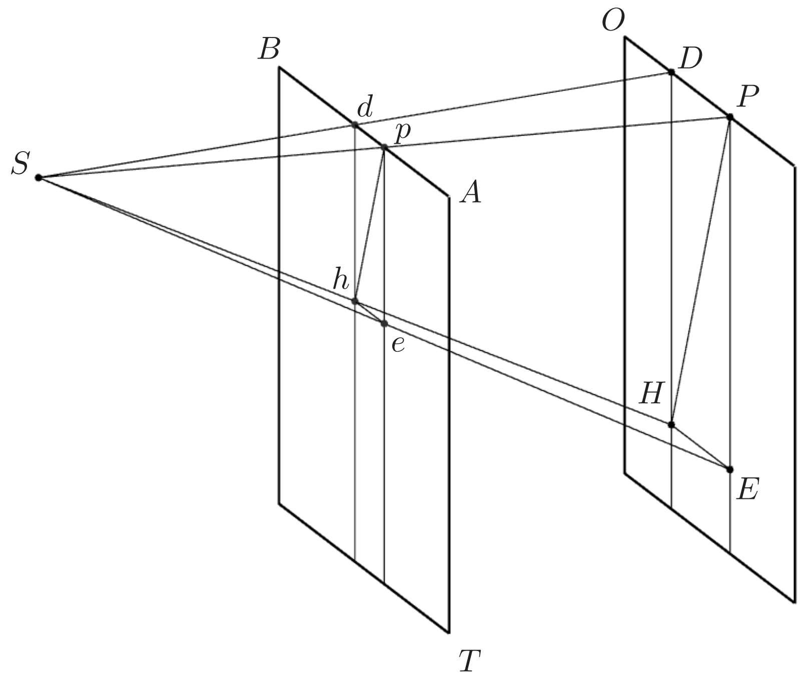
6 *(1)* Perspective a deux parties; la regle du trait et la regle des Touches ou teintes (le trait donne *(a)* les lignes *(b)* la figure, les touches donnent le degré de l'ombre ou de la lumiere) *(2)* Punct *(3)* P *(4)* Si figura qvaecunqve in plano exhibenda sit *(5)* De *(6)* Scientia *L* 6 est, *(1)* ars exhibendi figurae apparentiam, qvalis scilicet oculo apparea *(2)* ars *(a)* figurae *(b)* objecti *L* 8 mixta) *(1)* et distantia *(2)* Est *(3)* et *L* 12 objectum, *(1)* ubi vel objectum *(2)* qvo *L* 14 datoqve *(1)* deniqve *(2)* medio *L* 18 radiis *(1)* allucit *(2)* agit *L* 19 tabula *(1)* lineas qvae repraesentent ⟨—⟩ lineas objecti *(2)* puncta *(3)* superficies *(4)* lineas (qvanqvam | nam *erg. u. gestr.* | et *L* 20 designari *(1)* possint *(2)* possunt et coloribus lavando fieri possunt | integrae superficies *erg.* |) *(3)* possint) repraesentantes | puncta, *erg. u. gestr.* | lineas | , superficies *erg. u. gestr.* | objecti *L* 21 punctum *(1)* respondes *(2)* in *L*

quo radius ab objecto ad oculum secundum praescriptam visionis legem veniens, si opus continuatus, Tabulam secat. Utile est Tabulam talem et ita sumi, ne bis ab eodem radio secetur vitandae confusionis). Saltem (ad minimum) determinantes (hoc est quibus tota superficies objecti sufficienter distinguitur; attamen utile est etiam superflua opera designare et alias insigniores quo melius assimiletur) et exprimendi superficies lucidas umbrosasque (quod fit sive punctis sive lineolis, sive superficiebus seu continuo colore quod lavare vocant) repraes[ent]antes lucem et umbram objecti (hoc est gradus lucis et umbrarum continue variantes. Idque vel monochromatice fieri potest vel polychromatice. Illud colore duplici uno tabulae, altero qui tabulae illinitur, plerumque autem albo et nigro seu claro et obscuro, sive Tabula sit clara, umbrae autem illito colore designentur, sive color tabulae sit niger, et lux vel vacuis relictis, ut in nocturnis, et novo nigrae calcographiae artificio, sive illito alio colore. Hoc coloribus pluribus vel similibus objecti vel aliis. Semper autem considerandum est non tantum quam lucem umbramve accipiat objectum in quovis puncto, sed et quam inde ad oculum reflectat, quae pro distantia variat. Hinc colores quoque plus minusque vividi esse debent. Porro umbrarum et lucis expressio essentialis est perspectivae pars, et objecta quaedam, ut superficies concavae aut convexae sine ea exprimi non possunt, nec a planis discerni. Nec proinde sufficit ad perspectivam omnium punctorum loca in Tabula designare posse; nisi et cujusque puncti aut potius particulae superficiei clar-obscuritatem designemus).

Haec idea perspectivae vastissima est, et totam comprehendit Geometriam Situs, quae scilicet a magnitudinis (praeterquam rectarum) et motus calculo abstinet. At nos ut eam ad usum communem contrahamus, primum nunc omittamus radium reflexum et refractum, deinde Tabula tantum utamur plana, et luce solis, cujus lineae sunt parallelae.

1 oculum *(1)* veniens, si opus continuatus, *(2)* secundum *L* 3–5 Saltem (ad minimum) determinantes (hoc est quibus tota superficies objecti sufficienter distinguitur; attamen utile est etiam superflua opera designare et alias insigniores quo melius assimiletur) *erg. L* 5 alias *(1)* partes eius *(2)* insignores *L* 6 superficies | lucidas *erg.* et umbrosas *erg. u. gestr.* | umbrosasqve *L* 7 sive *(1)* lavando *(2)* superficiebus *L* 7 colore *(1)* lavando *(2)* qvod *L* 8 umbrarum *(1)* in ⟨—⟩ *(2)* continue *L* 9 potest *(1)* , hoc est *(2)* vel *L* 10 illinitur, *(1)* sive *(2)* plerumqve *L* 12 relictis, *(1)* vel superducta claro color *(2)* ut *L* 13 aliis. *(1)* Ubi semper considerandum est no *(2)* Semper *L* 17 superficies *(1)* gibbae *(2)* concavae *L* 18 discerni. *(1)* qvia extrem *(2)* Nec *L* 18 punctorum *(1)* apparentias *(2)* loca *L* 19 puncti *(1)* claritatem *(2)* aut *L* 19 superficiei *(1)* lucem aut *(2)* clar-obscuritatem *L* 22 At *(1)* nobis *(2)* nos *L*

Denique agamus primum de Situ apparentiarum, seu de apparentiis linearum, adeoque punctorum, dilatis ad finem usque apparentiis superficierum seu luce et umbris.



[*Fig. 1*]

Sit S spectator seu oculus, Tabula plana T. A. B. Objectum O in quo datur punctum quodcunque H, cujus quaeritur in tabula apparentia h, in qua recta SH tabulam

1 de *(1)* Sit ergo *(2)* Situ *L* 1 linearum, *(1)* omissa appa *(2)* punctorum et *(3)* adeoqve *L* 6 qvaeritur *(1)* apparentia *(2)* in *L*

4 [*Fig. 1*]: Leibniz hat die Punktbezeichnungen Q und q nachträglich zu E und e geändert, die Korrekturen aber im Text nur unvollständig durchgeführt. Es wird stillschweigend angeglichen.

secat. Ducatur Radius quo oculi axis opticus in tabulam dirigitur ut SP, qui assumatur tanquam principalis ad quem referantur omnia tam objecti, quam Tabulae puncta; secans tabulam in p puncto Principali. Tabula autem intelligenda est eo usque continuata; objectum quoque, cum sit totum Spatium eousque intelligitur jam continuatum, (licet partem tantum delineare velimus) ut radius principalis in ipsum incidat, sive cadat in partem quam delineare volumus sive non jam per punctum H objectivum transeat planum imaginarium parallelum Tabulae, secans radium principalem in P. hoc planum vocabimus objectivum, et punctum in eo P, principale objectivum. Ducantur in utroque plano rectae parallelae quotcunque, ut $\underline{pe}$, $\underline{hd}$ in uno, et PE, HD, in altero; rursusque aliae parallelae quotcunque angulum quemcunque facientes ad priores, ut pd, eh in uno, et PD, EH in altero; $\underline{pd}$ seu $\underline{eh}$ vocetur declinatio puncti $\underline{h}$ ejus enim magnitudo exprimit quantum in latus declinet a principali p (sive id latus sit dextrum sive sinistrum) at pe vel dh vocetur inclinatio sive elevatio puncti h, ejus enim magnitudo exprimit quantum id punctum $\underline{h}$ sit supra vel infra principale $\underline{p}$. Quanquam autem revera hic dextri vel sinistri superioris aut inferioris discrimen nullum sit in re ipsa, imaginationis tamen et clarioris locutionis causa adhibetur.

Est autem $\underline{pd} : PD :: \underline{sp} : SP$. ob triangula similia $\underline{spd}$, SPD.

Eodem modo $\underline{pe} : PE :: \underline{sp} : SP$. ob triangula similia $\underline{spe}$, SPE.

Itaque inclinationes vel declinationes punctorum apparentium sunt ad inclinationes vel declinationes punctorum objectivorum, ut distantia spectatoris a plano tabu-

3 *Am Rande:* optimum erit Radium principalem esse perpendicularem ad Tabulam.

1 Radius *(1)* qvicunqve *(2)* aliqvis *(a)* principalis SP *(b)* qvo *L* 2 principalis *(1)* sec *(2)* ad *L* 2 qvam *(1)* app *(2)* Tabulae *L* 3 p *(1)* objectum in P *(2)* puncto *L* 4 qvoqve, *(1)* etsi *(2)* cum *L* 5 velimus) *(1)* sive cadat P in id qvod delineare volumus sive non *(2)* ut *(a)* recta *(b)* radius *L* 6 sive *(1)* jam *(2)* cadat *L* 6 f. objectivum *erg. L* 7 imaginarium *erg. L* 7 Tabulae, *(1)* transiens *(2)* secans *L* 8 P. *(1)* et porro tam *(2)* hoc *L* 11 altero; *(1)* ex qvibus rectae parallelae ut dH voceretur *(2)* et *(a)* vocetur pd *(b)* $\underline{\text{pd}}$ *L* 11 vocetur *(1)* inclinatio puncti *(2)* declinatio *L* 12 $\underline{\text{h}}$ *(1)* in qv *(2)* eius *L* 12 a *(1)* primitivo *(2)* principali *L* 13 id *(1)* sit *(2)* latus *L* 13 dh *(1)* erit *(2)* vocetur *L* 15 hic *(1)* nec dextri nec *(2)* dextri *L* 16 et *(1)* facilioris *(2)* clarioris *L* 20 declinationes *(1)* apparentiarum *(2)* punctorum *L*

lae ad distantiam spectatoris a plano objectivo. Distantia autem Spectatoris intelligi potest portio radii principalis intercepta.

Item ob triangula $\underline{sph}$, SPH similia patet esse $\underline{ph} : PH :: \underline{sp} :: SP$. Sive distantiae punctorum apparentium a principali apparente Seu (omissa plani objectivi consideratione) a Radio principali, sive ab axe perspectivo si quidem is sit perpendicularis ad tabulam sunt ad distantias punctorum objectivorum a principali objectivo, ut distantia spectatoris a tabula ad distantiam Spectatoris a plano objectivo.

Verum cum manifestum sit radium principalem, ac puncta principalia esse pro arbitrio assumta; nec mutari apparentiam $\underline{ph}$, rectae PH, (manente situ oculi, tabulae, objecti) quicunque demum radius pro principali habeatur, et quicunque etiam assumatur angulus radii principalis ad Tabulam, generaliter dici potest: apparentiam rectae in plano tabulae parallelo ductae esse ad ipsam rectam ut distantia spectatoris a tabula est ad distantiam spectatoris ab illo plano sive illa distantia sumatur in recta perpendiculari, sive alio angulo quocunque semper enim eadem ratio est. Quoniam tamen distantia perpendicularis sola est determinata, merito praefertur.

Proposita igitur figura delineanda sive plana sive solida, ut commodissimum modum eligamus ejus apparentiam determinandi, videamus quomodo ipsa ejus puncta vere seu objective determinentur. Ita punctum plani determinatur, datis distantiis ejus (secundum angulus quoscunque) a duabus rectis in eo plano ductis positione datis, (modo non rectae illae parallelae sint) vel datis distantiis ab una tali recta, et uno puncto, vel quod est simplicissimum datis distantiis a duobus punctis (quanquam tunc duo sint casus, seu duo satisfacientia puncta quae tamen facile discernuntur).

Similiter in solido varii sunt modi puncta determinandi, sive per distantias a tribus

4–6 Seu (omissa plani objectivi consideratione) a Radio principali, sive ab axe perspectivo si quidem is sit perpendicularis ad tabulam *erg.* *L* 11 assumta; *(1)* hinc *(2)* nec *L* 12 habeatur, *(1)* generaliter pronuntiare possumus: *(2)* et *L* 14 ad *(1)* archetypam *(2)* ipsam *L* 19 igitur *(1)* corpore relin *(2)* figura *(3)* superficie delineanda sive plana sive solida *(4)* figura *L* 19 solida, *(1)* notetur distantia esse spectatoris a tabula, deinde | duae *erg.* | ducantur rectae *(a)* per *(b)* ad tabulam perpendiculares | (si placet) *erg.* | transientes *(aa)* per *(bb)* (si placet) per figuram delineandam, et, sumto qvocunqve puncto puncto objecti cuius apparentia in Tabula qvaeritur, ducantur rectae *(2)* cuius nota est natura, manifestum est *(3)* ut *L* 21 eius *(1)* a duabus rect *(2)* (secundum *L* 26 sive *(1)* distant *(2)* per *L* planis, sive per distantias a duobus planis et uno puncto vel ab uno plano et duobus punctis, vel a tribus punctis, ubi rursus duo puncta possunt satisfacere. Plerumque autem utile erit considerare planum horizontale, transiens per oculum, et puncti objecti super ipsum elevationes aut depressiones; vel loco hujus plani, horizontem terrae, cui insistere corpus intelligitur. Deinde utile est ita collocari oculum, ut quam plurimas partes objecti videre possit, tabulam quoque ita ut sit quam proxime perpendicularis ad lineas ab oculo ad primaria objecti puncta ductas.

His ita positis cum variae sint viae aliae aliis pro re nata commodiores, haec tamen in universum solet esse aptior. Tabula $T.A.B.$ intelligatur Horizonti perpendicularis; ex puncto spectatoris seu oculi S ducta intelligatur perpendicularis in Tabulam, sp. quae producatur quantum satis est. Et per p ducatur in Tabula recta Ap parallela Horizonti. In objecto intelligantur tria plana, unum horizonti parallelum transiens per oculum, quod vocemus horizontale, alterum Tabellae parallelum transiens per unum aliquod punctum fixum objecti quod vocemus objectivum primarium, tertium verticale transiens per oculum et punctum primarium, perpendiculare horizonti et tabulae. Datur distantia minima

---

4 *Am Rande:* $\mu : m :: b - \mu : a$. Seu $a\mu = bm - \mu m \mid \mu = bm : a + m$

2 punctis, *(1)* quicu *(2)* ubi *L* 4 depressiones; *(1)* deinde ita collocare oculum *(2)* vel *L* 5 est *(1)* corpus *(2)* ita *L* 6 ut *(1)* primariis *(2)* sit *L* 7 ductas. *(1)* inde *(2)* Sed qvomodocunqve locari opus sit ducta intelligatur recta principalis qvaecunqve; *(a)* et oblato puncto *(b)* qvae tabulam secet in puncto p *(aa)* ducatur *(bb)* jam sumto *(cc)* datur punc *(dd)* objectum autem in horizonti si placet parallela, tabulam horizonti si placet perpendicularem, secans in puncto p | et per hoc punctum ducatur in Tabula recta Ap. *erg.* | objectum autem secans in linea recta. Oblato jam puncto in Tabula designando, *(aaa)* constat ex Natura objecti qvantum id sit infra vel supra lin *(bbb)* ut H, per ipsum transire intelligatur planum Tabulae parallelum, secans rectam principalem in P. qvoniam constat altitudo ipsius P. super horizontem, itemque ipsius H, dabitur et inclinatio ipsius H respectu ipsius P qvae *(aaaa)* divisa per *(bbbb)* erit ad inclinationem ipsius h ut distantia spectatoris a plano objectivo transeunte per H ad distantiam spectatoris a tabella. Pono autem dari *(aaaaa)* aliqvod punctum objecti, secundum qvod constet qvantum *(bbbbb)* aliqvod planum objecti, qvo qvantum anteriora sint qvaelibet objecti puncta vel posteriora, in lineis inter se parallelis, constet. *(3)* His *L* 8 tamen *(1)* univer *(2)* in *L* 9 aptior. *(1)* Ex puncto oculi S educatur perpendicularis in *(2)* Tabula *L* 9 perpendicularis; | et *ändert Hrsg.* | puncto *L* 11 Ap *(1)* perpen *(2)* parallela *L* 11 Horizonti. *(1)* Objecti jam puncto *(2)* In *L* 12 f. qvod vocemus horizontale *erg. L* 14 objecti *(1)* tertium horizonti perpendiculare et Tabellae perpendiculare transiens per *(2)* qvod vocemus objectivum primarium, | tertium verticale transiens per oculum et punctum primarium, perpendiculare horizonti et tabulae *erg.* | *(a)* Dato jam puncto objecti *(b)* Datur L 15 minima *erg. L dreimal*

spectatoris et Tabellae; item spectatoris et plani objectivi primarii, prior vocetur a, posterior b. jam distantia minima puncti objectivi a plano objectivo primario vocetur l. seu longitudo, et distantia minima puncti objectivi a plano objectivo primario erit $b + l$. (posito planum objectivum primarium esse propius oculo. Sit remotius erit $b - l$) Distantia minima puncti objectivi a plano horizontali seu inclinatio vel elevatio vera vocetur E. Ergo inclinatio vel elevatio apparens e erit ad E ut a ad $b \mp l$. Seu erit e aequ. $\dfrac{a}{b \mp l}E$. Superest tantum ut sciamus distantiam minimam objectivi a recta primaria, vel si ea non ita facile haberi potest a plano novo perpendiculari ad Tabellam et horizontem, quae est declinatio et vocetur D. quae secabit Tabellam in recta ad horizontem perpendiculari, a qua recta distantia puncti in tabella vocatur d. Erit d aequ. $\dfrac{a}{b \mp l}D$.

Itaque oblato quocunque objecto mente concipiantur in eo tria plana, unum horizontale oculi (quod facile cognoscitur ex horizontali terrae, et elevatione oculi) secans tabellam in linea horizontali, alterum parallelum Tabellae per punctum aliquod objectivum notabile, tertium verticale seu perpendiculare Tabellae et horizonti secans Tabellam in linea verticali; et data distantia oculi et tabellae a, distantia oculi et plani objectivi primarii b, distantia puncti objectivi propositi et plani objectivi primarii (seu longitudine vera L, distantia puncti objectiv propositi et plani verticalis (seu declinatione sive latitudine vera) D distantia puncti objectivi propositi et plani horizontis oculi (seu inclinatione sive elevatione vera) E, erit in Tabella apparentiae hujus puncti declinatio a linea verticali, $\underline{d}$ aequ. $\dfrac{a}{b \mp l}D$, et inclinatio a linea horizontali, $\underline{e}$ aeq. $\dfrac{a}{b \mp l}E$.

Post hanc methodum universalem ad compendia veniendum est; quae in eo potissimum consistunt, ut non punctorum tantum verorum respondentes apparentias punctis

2 minima *erg. L dreimal* 2 objectivi a *(1)* plano horizon *(2)* plano *L* 3 f. posito *(1)* punctum *(2)* planum *L* 4 oculo. *(1)* Sint *(2)* Sit *L* 5 minima *erg. L* 5 horizontali *(1)* erit ⟨–⟩ *(2)* seu *L* 5 inclinatio *(1)* vera vocetur e *(2)* vel *L* 7 distantiam *(1)* puncti *(2)* minimam *L* 9 D. *(1)* fietqve *(2)* qvae *L* 11 unum *(1)* terrae, *(a)* (a qvo facile hab *(b)* (ex qvo facile *(aa)* dari *(bb)* potest judicari de distantia a plano oculi qvod plani terrae parallelum est *(2)* horizontale *L* 12 et *(1)* dist *(2)* elevatione *L* 12 f. secans tabellam in linea horizontali *erg. L* 14 verticale seu *erg. L* 15 distantia *(1)* tabe *(2)* oculi *L* 15 tabellae a, | distantia *erg.* | oculi *L* 16 b, *(1)* puncti objectivi in pl *(2)* distantia *L* 16 primarii *(1)* puncti objectivi propositi et *(a)* hori *(b)* plani horizontis oculi seu dec *(2)* (seu longitudine) L *(3)* (seu longitudine *(a)*) L *(b)* vera *L* 17 et *(1)* plani horizontis *(2)* plani *L* 19 erit *(1)* declinatio puncti *(2)* in *L* 20 verticali, *(1)* in tabella, *(2)* d̲ *L* 22 tantum *(1)* ab *(2)* verorum *L*

expressas sed et linearum integrarum respondentes apparentias in lineis exhibeamus earumque linearum in plano Tabellae describendarum naturam cognoscamus. Et quidem apparentia puncti est punctum. Apparentia linae rectae est recta, nisi tunc cum omnia ejus puncta in radium aliquem visionis incidunt, tunc apparentia rectae est punctum quod fit quando plura puncta eandem habent inclinationem et declinationem (ab eodem latere), seu cum inclinationes et declinationes proportionaliter crescunt cum ipsis b ǂ l seu longitudinibus distantia oculi a plano objectivo primario auctis. Lineae autem curvae apparentia punctum esse non potest, nisi fingamus visiones imaginarias per lineas curvas. Si duae lineae se tangant aut secent, etiam apparentiae earum se tangent aut secabunt. Si duae rectae sint in eodem plano quod continuatum transit per oculum, habent eandem apparentiam (et contra). Nam recta qua planum hoc Tabellam secat, totius plani apparentia est. Apparentia lineae objectivae ad Tabellam parallelae, est ipsi lineae objectivae parallela. Hinc apparentiae linearum objectivarum Tabellae parallelarum eosdem faciunt angulos inter se, quos ipsae linae objectivae, et proinde si linea in plano tabellae parallelo describatur, minimae ad ipsam apparentia erit et ad apparentiam minima. Apparentia lineae cujuscunque rectae vel curvae in plano tabellae parallelo descriptae est alia linea priori similis. Rectarum convergentium etiam apparentiae sunt convergentes concurruntque in puncto quod est apparentia puncti communis. [Itaque recta per ocu-

---

9 *Am Rande:* Punctum in Tabula est apparentia rectae per oculum et punctum ductae.

2 linearum *(1)* naturam *(2)* in *L* 3 apparentia *(1)* lineae est linea *(2)* puncti *L* 4 tunc apparentia rectae est punctum *erg. L* 9 secabunt. *(1)* Datis duobus punctis *(2)* Si duae rectae duorum punctorum apparentias communes habeant, totam apparentiam communem habebunt. Hoc autem contingit qvando duae rectae *(3)* Si *L* 11 contra). *(1)* Si duae rectae sint in eodem plano *(2)* Nam *L* 12 est. *(1)* Si duae rectae sint in eodem plano *(2)* Apparentia *L* 14 proinde *(1)* rectarum in appar *(2)* si *L* 16 tabellae *(1)* descripta est alia line *(2)* parallelo *L* 17 similis. *(1)* Apparentiae duarum planarum parallelarum *(a)* Tab *(b)* inter se, ut non tabulae concurrunt omnes in puncto eodem, qvo *(2)* Rectarum *L* 18 puncto *(1)* communi. Apparentiae rectarum alicuius plani transeunt per rectam communem plani et tabulae *(a)* Id punctum *(b)* Haec apparentia autem est punct *(c)* et cum apparentia rectae per oculum transeuntis sit punctum, id ipsum per *(2)* qvod *L* 18 Itaqve *(1)* punctum per oculu *(2)* recta *L* **8,19** f. *(1)* Ex his apparentiae *(a)* puncti *(b)* figurae in plano qvocunqve positae qvod Tabellae parallelum non est ita determinantur. Recta qvaevis in Tabula *(2)* Punctum in Tabula est apparentia rectae per *(a)* punctum *(b)* oculum *L*

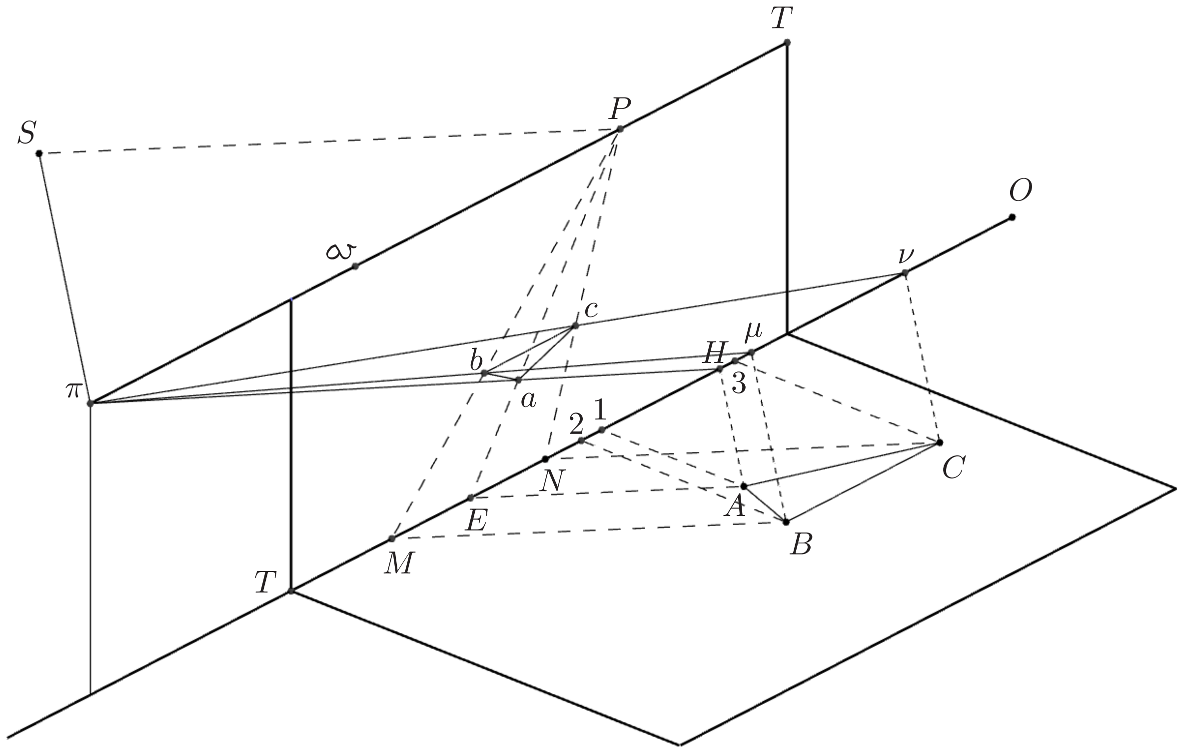
18–390,4 [: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

lum ad punctum convergentiae ducta tabulam secabit in puncto quod erit apparentia puncti convergentiae; nam cum radii seu rectae per oculum ductae apparentia debeat habere punctum commune cum aliis apparentiis, nec nisi unicum punctum habeat, illud ipsum unicum punctum erit hoc punctum commune]. Hinc cum parallelae intelligi possint convergentes infinito ab hinc intervallo, patet etiam punctum quo recta ipsis parallela per oculum ducta Tabellae occurrit, eorum apparentiam communem esse, ac proinde parallelarum apparentias esse convergentes, modo ipsi Tabulae parallelae non sint. Hinc ipsum punctum principale est apparentia communis rectarum quae sunt ad tabellam normales. Ex his apparentiae figurae planae cujuscunque licet planum tabellae parallelum non sit ita determinantur.

---

6 *Am Rande:* NB. *Daneben ist ein Stück Papier aus dem Bogen geschnitten.*

2 apparentia *(1)* sit punctum unicum, et *(2)* debeat *L* 4 commune]. *(1)* ponamus *(2)* Hinc *L* 8 normales. *(1)* Anguli apparentia est angulus, *(a)* ab axi *(b)* et qvidem si planum plano Tabulae parallelum sit *(aa)* aeqvalis *(bb)* simile *(2)* Anguli apparentia est angulus et qvidem si planum plano Tabulae parallelum sit, priori aeqvalis, sin minus ita determinabitur *(3)* Trianguli apparentia est triangulum *(4)* Ex his apparentiae *(a)* plani *(b)* figurae *L* 9 planae *(1)* in *(2)* cuiuscunqve *L* 10 ita *(1)* determinant *(2)* determinantur *L*



[*Fig. 2*]

Sit Tabula *TTO*, planum anguli *BAC* sit *OOT* secans Tabulam in *TO* et projectio ipsius *ABC* erit *abc*.

Sit *BC* parallela ipsi *TO*, erit <u>bc</u> eidem parallela. Ducantur *AE*, *BM*, *CN* ad concur-

2 planum *(1)* objectiv *(2)* anguli *L* 4 parallela. *(1)* Ducatur *(a)* AD *(aa)* per *(bb)* perpendicularis *(b)* DA normalis ad TOO. ducatur ad *(aa)* ver *(bb)* ex a versus P principale punctum *(aaa)* per *(bbb)* secans <u>bc</u> in <u>d</u> erit <u>ad</u> apparentia ipsius AD et <u>bd</u>, <u>dc</u> ipsarum BD, DC. *(aaaa)* Est autem *(bbbb)* Sunt autem *(aaaaa)* DC *(bbbbb)* BD *(aaaaaa)* DC *(bbbbbb)* et DC ad bd et dc, ut SP ad SP+ED *(2)* Ducantur *(a)* DE, EM *(b)* AE, BM, CN, *(aa)* inde erigantur perpendiculares a *(bb)* ad concursum planorum, *(aaa)* inde erigantur perpendiculares ad lineam hanc concursu parallelam per punctum principale P transeuntem N1, E2, M3 *(aaaa)* sunt ut *(bbbb)* patet ipsas ME, EN, ipsis 32, 21 esse aequales; et 1C vel 3B | (aequales) *erg.* | esse ad 2E datam, ut SP *(aaaaa)* +NC ad *(bbbbb)* SP ad SP + NC | vel MB *erg.* |, item 2a esse ad 2e datum, ut SP ad SP + EA. *(bbb)* Inde *L*

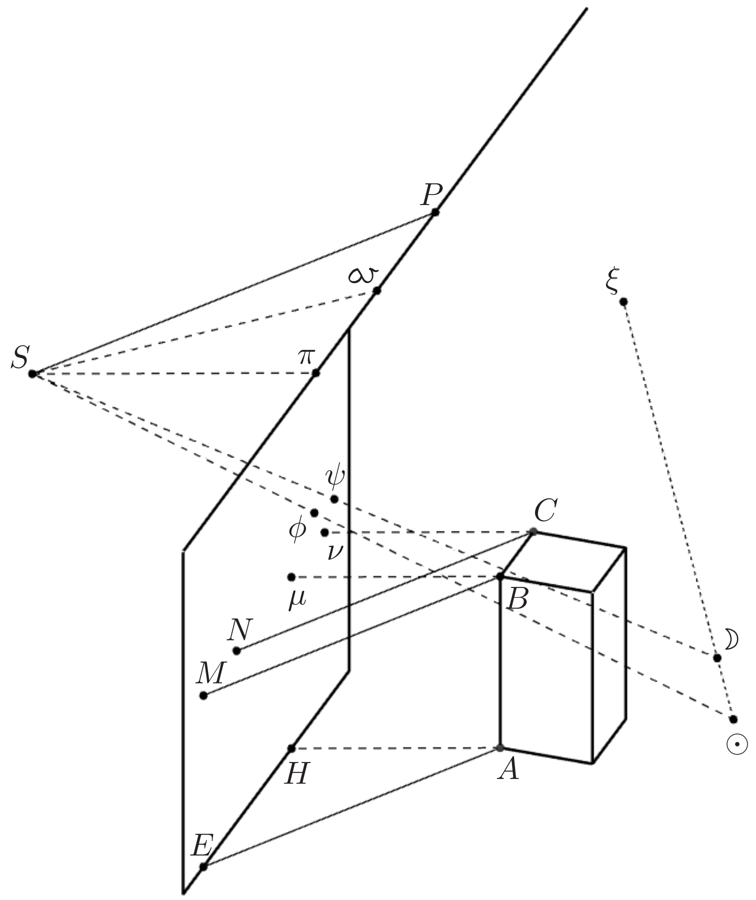
1 [*Fig. 2*]: Oberhalb der stark überarbeiteten Figurenskizze ist ein Stück Papier aus dem Bogen herausgeschnitten worden. Dort hatte sich wohl eine Vorstufe der Figur befunden, wie aus einem noch vorhandenen Fragment und den ersetzten Textstufen erschlossen werden kann.

sum planorum, Inde ad punctum principale jungantur rectae MP, EP, NP posito SP esse parallelam ipsis CN, AE, patet ipsas MP, EP, NP esse apparentias rectarum per M et B, E et A, N et C transeuntium, adeoque puncta b, a, c, in ipsas cadere. Quod si alias ducas parallelas ad eandem rectam communem plani et tabulae si opus productam, ut AH, $B\mu$, $C\nu$, et iis parallelam $S\pi$, ad habendum novum punctum principale et jungas $H\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ eae secabunt priores EP, MP, NP in punctis a, b, c, quaesitis. Ut autem hoc quam optime fiat in praxi, hanc rationem deprehendo commodam, ut parallelae diversae inter se invicem faciant angulum rectum, ad ipsam autem MN semirectum.

Erit ergo ang. πSP rectus et inter π et p sumendo mediam ꝏ, erit ob ang. $S\pi$ꝏ semirectum, πꝏ vel ꝏp aequal. a sꝏ si nos concipimus ꝏ tanquam distantiam oculi a Tabula, itaque sumto ꝏ tanquam puncto principalissimo sumantur ab utraque parte ꝏp et ꝏπ aquales distantiae Tabulae ab oculo. Inde a punctis objecti B, A, C ducantur ad rectam planis communem perpendiculares $B2$, $A1$, $C3$ et ipsi distantiae $B2$ sumantur aequales $2M$ et 2μ (ob angulum M vel μ semirectum). Similiter $1E$ et $1H$ aequales a $1A$, et denique $3N$ et 3ν aequales a $3C$, atque ita ducentes rectas ad puncta principalia P et π, $H\pi$ et ep se secabunt in $\underline{a}$, $\mu\pi$ et MP in $\underline{b}$, denique $\nu\pi$ et NP in C. Quod si angulus non sit semirectus possumus tamen idem efficere ubicunque sumamus punctum ꝏ principalissimum, licet enim angulus SꝏP ponatur obliquus, si tamen ꝏP et ꝏπ ponantur aequales inter se, et junctis Sꝏ, SP, $s\pi$ duca[n]tur ut ante ipsis parallelae $A1$, AE, AH et ita de caeteris, res succedet, et eadem provenient puncta a, b, c eruntque $1E$, $1H$ aequales, eandemque rationem habebunt ad $A1$ quam ꝏP vel ꝏπ ad Sꝏ, imo etsi puncta π et P sumantur pro arbitrio modo, AE, AH eandem habeant proportionem inter se, quam SP, $S\pi$ (positis ipsis parallelis ad AE, AH, idem invenietur punctum H.

Hinc patet quoque etiam plani considerationem non necessariam, sed si ex punctis quibuscunque A, C, B, utcunque sitis, ex unoquoque duae ducantur, una AE parallela ipsi SP, altera AH ipsi $S\pi$ utcunque assumtis junctae EP, $H\pi$ dabunt A semper idem.

4 communem *(1)* prod *(2)* plani *L* 8 semirectum. *(1)* , methodus *(2)* Erit *L* 15 ita *(1)* jungentes *(2)* ducentes *L* 17 semirectus *(1)* res tamen redibit eodem saltem enim recta Sꝏ *(2)* possumus *(3)* enim bisecans *(4)* possumus *L* 18 ꝏ *(1)* principalissim *(2)* primari *(3)* principalissimum *L* 19 aeqvales *(1)* angulo *(2)* distantia perpendiculari *(3)* inter *L* 20 c *(1)* ⟨–⟩ licet *(2)* eruntqve *L* 23 parallelis *(1)* po *(2)* seu poterit *(3)* ad tabulam Pπ, NM (parallelas) perpendiculariter *(4)* ad *L* 24 Hinc *(1)* etiam *(2)* patet *L* 26 AH *(1)* altera *(2)* ipsi *L* 26 assumtis *(1)* junctae parallelae ipsi Sπ cum πP *(2)* junctae *L*



[*Fig. 3*]

Res ergo generaliter huc redit, a punctis quotcunque ut A, B, C ducantur ad tabellam rectae parallelae AE, BM, CN, et aliae parallelae AH, $B\mu$, $C\nu$, et rectae puncta in plano designata sint semel in universum P et π, ita ut sit S. oculus, SP prioribus $S\pi$ posterioribus parallela; ducantur rectae ex E, M, N ad P, ut ex H, μ, ν, ad π, eae se secabunt in punctis quaesitis.

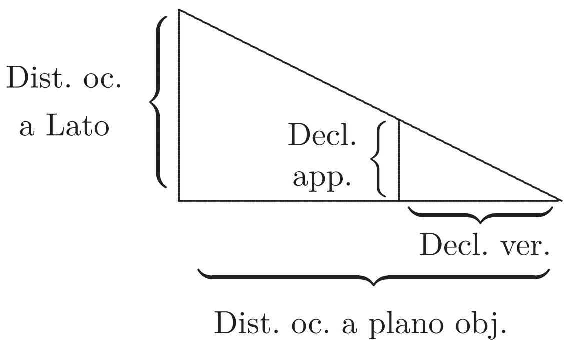
Quod si ponamus pro arbitrio a puncto S, (oculo spectatoris.) duci tres rectas *sp*,

3 et *(1)* ex oculo *(2)* rectae *(a)* ex oculo parall *(b)* puncta in plano | designatae *ändert Hrsg.* | sint *L* 4 universum *(1)* π et *(2)* P *L* 4 sit *(1)* SP.P *(2)* S *L* 6 qvaesitis. *(1)* Ut autem res in pu *(2)* Qvod *L*

sꝏ, $s\pi$ et ex punctis objecti ut C similiter tres rectas iis parallelas CN, CK, $C\nu$, et cadant P, ꝏ, π in eandem rectam, cadent et N, K, ν in rectam ei parallelam, eruntque omnia proportionalia seu similia; itaque si ducatur CK parallela Sꝏ et ducta per K recta parallela ipsi πꝏP sumantur in ea KN, et $K\nu$ quae sunt ad KC, ut ꝏp et ꝏπ sunt ad Sꝏ ducanturque Np, et $\nu\pi$ secabunt se in apparentia ipsius N. et proinde veniendo ad modum specialem in praxi plerumque aptiorem, si sit sꝏ perpendicularis a spectatore ad Tabulam, Pꝏπ parallela horizonti et ꝏp item ꝏπ aequal. sꝏ; similiter pro habendis apparentiis punctorum, ut C, ducta CK perpendiculari ad tabulam et per K ipsa $N\nu$ parallela ad horizontem, sumtisque KN, $K\nu$ quae sint ad KC ut ꝏP, ꝏπ sunt ad Sꝏ, id est in isto modo speciali sumtis KN, $K\nu$ aequalibus ipsi KC distantiae objecti a tabula, ductae NP, $\nu\pi$ se secabunt in apparentia puncti N. Hinc et talis praxis derivatur: Sit P punctum aliquod principale seu locus relativus oculi in tabula, et sit $p\pi$

---

12 *Am Rande:*



[*Fig. 4*]

1 Cν, *(1)* erit et recta *(2)* et *L* 3 si *(1)* ponatur *(2)* ducatur *L* 3 ducta *(1)* recta *(2)* per *L* 4 ut *(1)* SP et S *(2)* ꝏp *L* 5 Sꝏ *(1)* ponanturqve *(2)* ducanturqve *L* 5 $\nu\pi$ *(1)* in *(2)* secabunt *L* 6 ad *(1)* casus speciales *(2)* modum *(a)* simplicio *(b)* specialem *L* 10 est *(1)* hoc loco *(2)* in *L* 10 isto | modo *nicht gestr.* | modo *L* 10 KC | distantiae *nicht gestr.* | distantiae *L* 12 derivatur: *(1)* Sit P punctum *(a)* principale *(b)* principalissimum. Restat tantum ut modum per scalam determinandi subjiciamus seu locus verus oculi in tabula, ꝏπ distantia oculi a loco principalissimo, *(aa)* seu ꝏP aeqv ꝏ *(bb)* in tabulam translata horizonti si lubet parallela *(aaa)* AH *(bbb)* AE *(2)* Sit *L* 12 principale *(1)* seu locus oculi in Tabula, et SP distantia *(2)* seu *L*

aequalis ipsi SP distantiae oculi ab ipso loco relativo, (π quidam vocant p u n c t u m t e r t i u m). Sint jam puncta quotcunque quorum apparentia in Tabula designanda est, ut, A, B, C, sumatur cujusque ex ipsis ut A, locus relativus E et EH distantia puncti a suo loco relativo (posito AE ipsi SP, et AH ipsi $S\pi$, adeoque EH ipsi $P\pi$ esse parallelas) junctisque EP, $H\pi$ intersectio erit punctum A quaesitum. Quod et sic exprimi potest. Sit P locus oculi in Tabula relativus $P\pi$ aequalis distantiae oculi a puncto relativo, seu distantiae oculi relativae; jam E, M, N loca relativa punctorum objectivorum A, B, C.; et EH, $M\mu$, $N\nu$ aequales distantiis punctorum objecti relativis, parallelae ipsi $P\pi$, et sumtae in contrariam partem seu dextrorsum, ab E, M, N si π sumtum est sinistrorsum, posito tabulam cadere inter oculum et objectum; in eandem partem vero sumentur si oculus et puncta objectiva sint ab eadem parte Tabulae; a locis relativis punctorum ducantur rectae ad P. locum relativum oculi, et a punctis distantiarum ad π punctum distantiae oculi, EP et $H\pi$, item MP et $\mu\pi$, item NP et $\nu\pi$ dabunt puncta quaesita, a, b, c apparentias punctorum A, B, C.

Generaliter regula perspectivae totius sic exprimetur: L o c a r e l a t i v a voco puncta quibus parallelae inter se per puncta realia seu objectiva ductae occurrunt Tabulae. Jam si oculi pariter ac punctorum objectivorum, dentur bina cujusque loca relativa secundum diversos parallelismos, et ab uno quoque loco relativo puncti objectivi, ducatur in Tabula recta ad locum relativum oculi ejusdem parallelismi, quae rectae vocen-

1 aeqvalis *(1)* distantiae oculi a loco rela *(2)* ipsi *L* 1 f. (π quidam vocant p u n c t u m t e r t i u m) *erg. L* 3 sumatur *(1)* ipsae *(2)* cuiusqve *L* 3 E *(1)* AE (quae parallela ipsi *(2)* E et (ponendo AE, SP esse parallelas et EH distantia *(3)* et *L* 6 relativus *(1)* seu PN distantia eius *(2)* SP *(3)* Pπ distantia oculi in puncto relativo, S locus puncti objectivi *(a)* relativus *(b)* A, relativus seu distantia oculi relativa, E, M, N loca relativa punctorum M, *(4)* π *(5)* Pπ *L* 7 objectivorum *erg. L* 8 Nν *(1)* di *(2)* aeqvales *L* 8 relativis, *(1)* sumtae in *(2)* parallelae *L* 9 dextrorsum, *(1)* sinis *(2)* ab *L* 11 Tabulae; *(1)* et jam *(2)* a *L* 12 a *(1)* locis distantias *(2)* punctis *L* 13 π *(1)* locu *(2)* punctum *L* 13 oculi, *(1)* intersectiones *(2)* EP *L* 16 parallelae *(1)* per *(2)* inter *L* 16 puncta *(1)* objectiva *(2)* realia *L* 16 f. Tabulae. *(1)* Si ergo *(a)* loco relativo *(b)* ex locis *(aa)* per *(bb)* relativis, *(aaa)* bina *(c)* cuiusque puncti | objectivi *erg.* | in tabula designentur loca respecti oculi et punctorum objectivorum *(d)* bina loca relativa in Tabula notentur, et *(aa)* a punctis *(bb)* Radius relativus *(cc)* jungantur *(aaa)* loca relativa eiusdem parallelismi cum suo l *(bbb)* loca relativa eiusdem parallelismi cum respondente loco oculi. Et *(2)* Jam *L* 18 relativo *(1)* objecti *(2)* puncti *L* 18 f. ducatur *(1)* recta *(2)* in *L* 19–396,1 vocentur *(1)* radii Tabulares *(2)* r a d i i *L*

1 quidam: [noch]

tur radii relativi, dico apparentiam puncti objectivi, fore intersectionem duorum radiorum relativorum ad hoc punctum pertinentium.

Imo in mentem venit, an non eadem apparentia proveniat, si pro parallelas adhibeantur convergentes, ita enim adhuc generalior habebitur methodus, nam parallelae sunt tantum casus convergentium.

Ponamus ergo esse duas convergentias, seu duo diversarum convergentiarum centra ⊙ et ☽ et tam ex centro ⊙, quam ex centro ☽ duci rectas per S (oculum) et A, B, C, puncta objectiva, occurrentes tabulae in punctis, quae dicentur relativa; sit E locus relativus ipsius A, secundum convergentiam ☽, et H secundum convergentiam ⊙; et objecti A, oculi S loca relativa ψ et φ secundum convergentias ☽ et ⊙; jungantur $E\psi$, et $H\varphi$ eritque eorum intersectio apparentia a, puncti A, quod an verum sit videamus. Certum est ex praecedentibus rectae ☽AE apparentiam in tabula esse ψE, et apparentiam rectae ⊙AH esse rectam φH, ergo puncti A communis rectarum verarum ☽AE, et ⊙AH, erit a punctum commune seu intersectio apparentiarum ψE et φH.

Generalissima ergo perspectivae regula haec est, qua praxes aliae continentur, tanquam modi speciales: Loca relativa voco puncta quibus convergentes inter se (sub quibus comprehendo parallelas) per puncta realia seu objectiva ductae occurrunt tabulae. Jam si oculi pariter ac punctorum objectivorum dentur bina cujusque loca relativa secundum diversas convergentias (vel parallelismos[)], et ab unoquoque loco relativo puncti objectivi ducatur in Tabula recta ad locum relativum oculi, quam vocabo radium relativum, seu apparentiam convergentiae, dico apparentiam puncti objectivi fore duorum

---

11 *Am Rande:* Explicandum porro, quomodo ex determinationibus Geometralibus deducantur perspectivae, ita ut res ad calculum reduci possit

2 duorum *(1)* punctorum *(2)* radiorum *L* 3 non *(1)* pro parallelis idem punctum *(2)* eadem *L* 6 ergo *(1)* ex dua *(2)* esse *L* 7 et *(1)* ⊙ *(2)* ☽ *L* 7 per *(1)* puncta *(2)* S *L* 8 relativa; *(1)* et ⟨–⟩ locus *(2)* sit *L* 9 convergentiam ⊙; *(1)* et *nicht gestr.* *(a)* φ locus oculi seu *(b)* φ, *(c)* ψ, φ loca oculi secundum convergentias ψ jungantur E *(2)* et *(a)* loca *(b)* objecti A *(aa)* loca relativa *(bb)* oculi *L* 10 relativa *(1)* ψ, φ secundum convergentias *(2)* φ et ψ secundum convergentias *(3)* ψ *L* 12 praecedentibus *(1)* omnium *(2)* convergentis *(3)* rectae *(a)* ☽A locum *(b)* ☽AH locum in tabula esse ψH, similiter convergentis rectae *(4)* ☽AE *L* 12 esse *(1)* radium rela *(2)* ψE *L* 13 A *(1)* sectionis *(2)* communis *L* 13 erit *(1)* sectio appar *(2)* punctum *(3)* a *L* 14 et *(1)* φE *(2)* φH *L* 15 praxes *(1)* hactenus *(2)* aliae *L* 20 oculi, *(1)* qvae est ra *(2)* qvam *L*

radiorum relativorum ad idem punctum objectivum pertinentium intersectionem.

Illud autem hic consideratu adhuc dignum videtur, cum tria sint puncta fixa, S. ☉. ☽, ex quibus ductae rectae ad punctum objectivum A, Tabulam secant nempe SA, ☉A, ☽A, quae Tabulam secant in a, π, e, et ope locorum relativorum convergentiarum ad ☉ et ☽, invenitur locus relativus convergentiae ad S qui est ipsa apparentia, posito S oculo; revera tamen unumquodque trium punctorum posse considerari ut oculum, vel omissa oculi mentione, ac re reducta ad puram geometriam, unumquodque ex his tribus punctis S, ☉, ☽ posse tractari eodem modo. Et cum trianguli S☉☽ duo latera ☉S, ☽S secent tabulam in punctis φ et ψ, restat ut punctum designemus ξ quo tertium latus ☉☽, si opus productum tabulam secat, et hoc punctum tanquam fundamentale designemus in Tabula. Cum ergo puncti A, tria sint loca relativa, a, E, H, secundum convergentias S, ☽, ☉, et rectae ex ☽ et ☉ ad S secant tabulam in ψ et φ, ex ☉ et S ad ☽ secant tabulam in ξ et ψ, ex S et ☽ ad ☉ secant tabulam in φ et ξ, itaque quemadmodum $E\psi$ et $H\varphi$ secant se in a, ita $H\xi$ et $a\psi$ secabunt se in E, ac denique $a\varphi$ et $E\xi$ secabunt se in H (an hoc fortasse hexagrammum Pascalii enim ex tribus punctis, sex, in eodem plano: ψ, φ, ξ et a, E, H). Hic videndum an non juvetur constructio assumto puncto ξ, et consideratione universalitatis, quod scil. puncta ψ, φ, ξ arbitraria et quomodo referantur ad ipsa a, H, E uno ut a semper manente.

1 relativorum *(1)* intersectionem *(2)* ad *L* 3 nempe *(1)* S, ☉, ☽, et *(2)* SA *L* 4 ope *(1)* punctorum *(2)* locorum *L* 5 oculo; *(1)* considerandum est, po *(2)* revera *L* 9 ψ, *(1)* considerandum *(2)* restat *L* 11 sint *(1)* puncta relativa *(2)* loca *L* 12 in *(1)* φ *(2)* ψ *L* 13 tabulam *(1)* res *(2)* in *L* 14 secant *(1)* tabulam *(2)* se *L* 17 qvomodo *(1)* ex ipsis *(2)* referantur *L*

15 hexagrammum Pascalii: Vgl. VII, 7 N. 61.

136 (58925). PUNCTORUM RELATIO AD PLANUM SPECTATORIS [1684 – 1687]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XI 1 Bl. 13. Ca. 10,5 × 13 cm. 2 S.

Datierungsgründe: N. 136 (58925) dürfte kurz vor N. 135 (58923) entstanden sein, das eine weiter durchgearbeitete Form des Theorems enthält.

Si omnia puncta objecti referantur ad planum Spectatoris parallelum plano Tabellae et ad duas rectas perpendiculares in hoc plano (unam si placet horizontalem, alteram verticalem) per oculum transeuntes, unde inclinatio infra vel supra, et declinatio ad alterutrum latus aestimentur; habemus theorema: declinatio, vel inclinatio apparens est ad objectivam ut distantia Spectatoris a tabella ad distantiam plani Spectatoris a puncto objectivo.

Data igitur Geometrica constitutione alicujus corporis, (verbi gratia polyedri, coni &c.) ejusque situ, id est data inclinatione declinatione et distantia a plano spectatoris punctorum ad situs determinationem sufficientium; opus est ut aliorum ejus punctorum relatio ad planum Spectatoris inveniatur. Quod optime fiet, si per objectum eo loco ubi commodum videbitur ducamus planum parallelum plano spectatoris vel Tabulae et omnia puncta objecti corporis ad hoc planum novum referendo, statum ejus Geometricum hac ratione referamus; inde enim facile quoque erit statum Geometricum habere relatum ad planum spectatoris, manet enim inclinatio et declinatio eadem quae ante tantummodo distantia puncti objectivi a plano assumtitio addenda vel demenda est distantiae hujus plani a Spectatore. Itaque pro Scenographiis utique optimum factu est Oculum Spectatoris ponere in sublimi, et tabulam facere horizonti parallelam ut planum assumtitium sit ipsum planum horizontis, ejus enim ope jam tum solemus Geometricum corporis statum determinare, sic nullo novo calculo est opus; quod si Tabula sit horizonti perpendicularis, cum orthographia potius exprimenda est utique status objecti geometricus per planum aliud etiam horizonti perpendiculare debet exprimi.

8 transeuntes *(1)* a qvibus *(2)* unde *(a)* de *(b)* inclinatio *L* 8 et *(1)* inc *(2)* declinatio *L* 9 inclinatio *(1)* apparentiae *(2)* apparens *L* 14 situs *(1)* ejus *(2)* determinationem *L* 21 est *(1)* ipsum *(2)* ut *L* 21 Oculum ... parallelam *erg.* *L* 25 utiqve *(1)* habebitur planum e *(2)* status *L*

Sed sine his alia quoque utiliter circumspicientur compendia; verbi gratia, quia omne punctum in solido ex determinatis quatuor, imo si plaga data sit, tribus punctis per distantiam ab iis est determinatum hinc videndum quo modo generali regula ex data Punctorum determinantium loco in Tabella, detur in eadem locus puncti determinati. Item data magnitudine alicujus rectae et angulo, quo modo detur magnitudo et angulus apparentiae. Ubi notandum est assumi posse planum per rectam hanc transiens, et Tabellam secans, sed cum talia plana assumi possint infinita, utilius videri assumi planum transiens per rectam, et oculum. Deinde si rectae angulus apparens sit datus, seu si indefinite sit ducta in Tabella rectae apparentia vide determinandum erit, quomodo magnitudo ab ea abscindi possit optice, inde a puncto dato. Deinde etiam linearum curvarum determinanda est projectio ex plano in quo sunt in planum Tabulae.

Novissime cogitandum quam projectionem lineae quae in nullo sunt uno plano faciant in nostro plano. Pro superficierum projectione opus est tum projectione linearum terminantium, tum gradu umbrarum in medio quasi a ratione convexum aut concavum sive gibbum aut cavum exprimi possunt.

Unde patet totam perspectivam consistere in duobus: p r o j e c t i o n e seu repraesentatione linearum et u m b r i s seu repraesentatione superficierum.

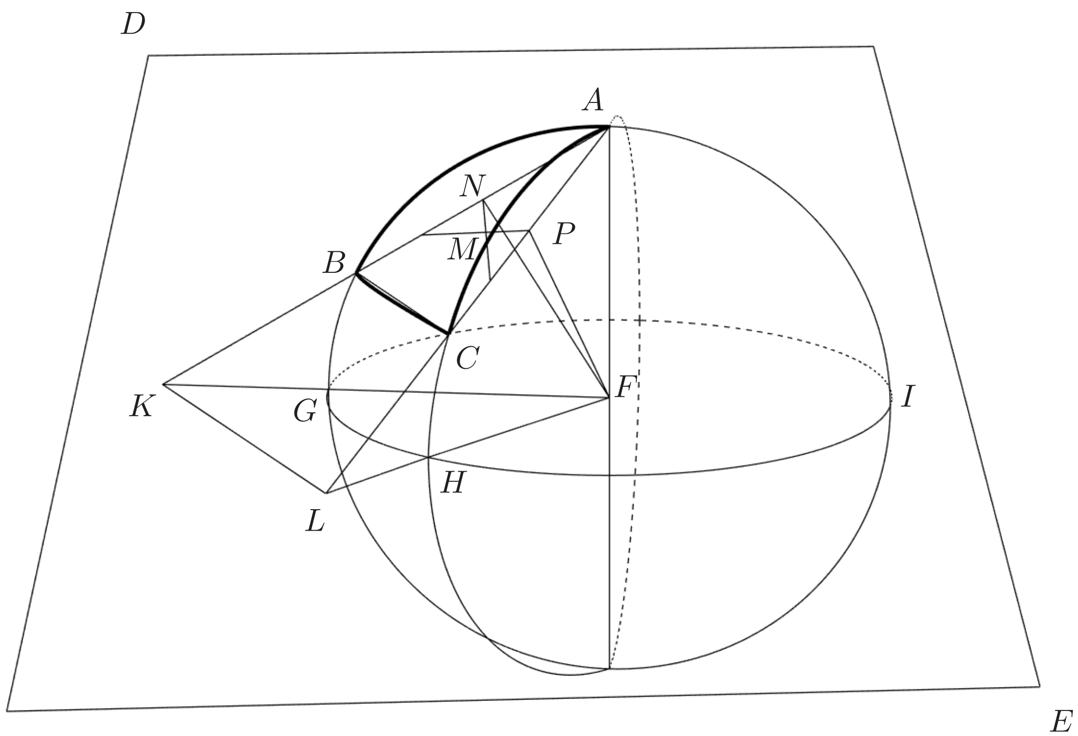
2 ex *(1)* dati *(2)* determinatis *L* 3 data *(1)* eius distantia co *(2)* Punctorum *L* 8 angulus *(1)* sit dat *(2)* apparens *L* 9 si *(1)* recta *(2)* indefinite *L* 9 apparentia *(1)* qv *(2)* vide *L* 12 sunt *(1)* plano *(2)* uno *L*

137 (58929). TRIGONOMETRIA SPHAERICA TRACTANDA PER PROJECTIONEM [1679 – 1680]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XI 3 Bl. 5–6. 1 Bog. 2°. Von Bl. 5 ist das obere Fünftel abgeschnitten. 2 S. Textfolge Bl. 6 r°, 5 v°.

Datierungsgründe: **[Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1679 bis 1680 belegt; noch]**

⟨Tri⟩gonometria sphaerica tractanda per projectionem in plano



[*Fig. 1*]

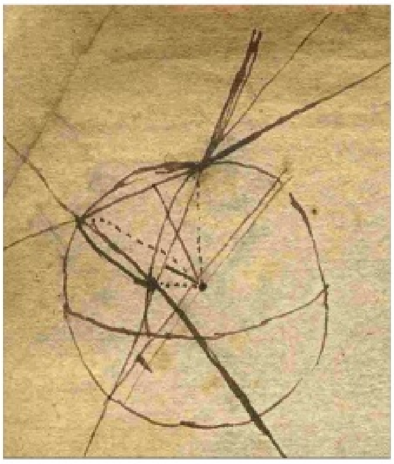
Sit Triangulum Sphaericum ABC, et planum DE secans sphaeram in tribus punctis A. B. C. utique projectio trianguli sphaerici ABC, erit triangulum rectilineum ABC in plano DE descriptum, cujus latera se habebunt ad latera sphaerici, ut chordae se habent ad suos arcus, radio FA. FB. FC, ex centro sphaerae F semper existente eodem. Jam quia et angulos trianguli sphaerici quodammodo in plano exhibere volumus, hinc polo A describatur aequator GHI arcus AB, AC productos si opus secans in punctis G et H.

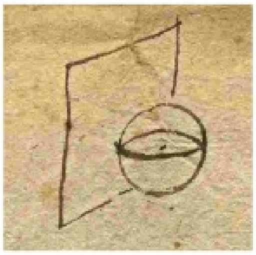
Quoniam ergo omnis projectio circuli magni in plano, si ex sphaerae centro spectetur, est recta, hinc arcus aequatoris, GH projectio in plano DE, sit recta KL. In plano DE jungantur puncta A et K, recta AK transibit per B. et AL eodem modo per C.

A puncto F (sphaerae centro) ad planum DE, vel ABC ducatur minima, quae hoc loco cadet intra triangulum ABC, quia cum sit minor quam FA vel FB vel FC, erit

---

1 *Am Rande*:



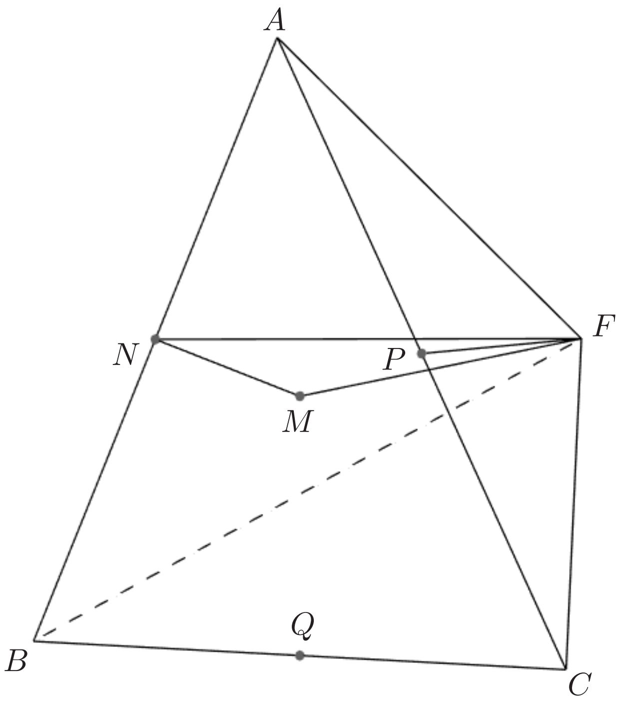


2 triangulum *(1)* planum ABC *(2)* rectilineum *L* 4 Jam *(1)* cum omnis projectio circuli magni *(2)* qvia *L* 6 AB *(1)* ABC, ACB *(2)* AB, AC *L* 6 productos *(1)* secans *(2)* si *L* 9 jungantur *(1)* recta *(2)* puncta *L* 9 C. *(1)* Triangulum AKL est isosceles. *(2)* A puncto *L* 10 ad *(1)* plani *(2)* planum *L* 10 ABC *(1)* triangu *(2)* ducatur *L* 11 qvia *(1)* de *(2)* cum *L*

intra sphaeram, sola autem plani DE, portio ABC est intra sphaeram. Methodus a dato puncto F ad datum planum ABC ducendi FM lineam minimam posito tria plani puncta A. B. C, esse data, eorumque distantiam a puncto extra planum a quo minima quaeritur; esse etiam datam, talis erit. Datis trianguli ABF tribus lateribus AF. AB. FB, dabitur altitudo FN, minima a puncto F, ad rectam AB, ergo dabitur et AN, ergo et punctum N, ex quo educatur perpendicularis NM, angulo MNA vel MNB recto.

---

1 *Nebenbetrachtung:*



A puncto ad planum ducere minimam, si distantia puncti a tribus plani punctis sit data. Perpendicularis ad planum est perpendicularis ad quamvis plani rectam cui occurrit. Duo plana cum faciunt angulum inter se quem faciunt duae rectae ad rectam planis communem eundem angulum facientes.

1 plani *(1)* portio *(2)* DE *L* 2 lineam *(1)* rectam *(2)* minimam *L* 3 a *(1)* Sphaerae *(2)* puncto *L* 4 esse *(1)* totius *(2)* etiam *L* 4 erit. *(1)* qvia *(2)* datis *L* 5 FN *(1)* ergo *(2)* minima *L* **3**,**8** puncto *(1)* dato *(2)* ad *L*

Eodem modo investigetur punctum P in recta AC, respondens ipsi N in recta AB, ex quo puncto P educatur etiam perpendiculariter PM, angulo MPA vel MPC recto, quae duae perpendiculares se secabunt in puncto M, et FM, erit Minima, quia MN minima ex M ad AB, et FN minima ex F ad AB, ergo et summa quadratorum ab FN et MN, hoc modo minima, ergo et FM latus hujus summae minima. Ubi notandum si ea methodo qua N et P investigetur Q, in recta BC, et inde educatur normalis, ad BC, eam etiam incidere in punctum M.

Hoc loco autem, cum puncta A. B. C. aequidistent a puncto F, puncta N. P. Q. erunt media rectarum AB. AC. BC. et punctum M, erit centrum Circuli triangulo ABC circumscripti. (Habetur AG diagonalis quadrati ab AF. Habetur et BG chorda arcus BG.) Sed non opus puncto M. Nam cum angulus GFA vel KFA sit rectus, et sumto puncto N medio ipsius AB, junctaque FN sit angulus FNA rectus, erunt triangula AFK et ANF similia, et cum dentur AF, AN (seu $\frac{1}{2}AB$), FN, ideo dabuntur et AK, KF.

Nimirum $AK : AF :: AF : AN$. Seu AK aequ. $: AF^2 \smile \frac{1}{2}AB$. Eodem modo AL aequ. $AF^2 \smile \frac{1}{2}AC$. Ergo $AK : AL :: AC : AB$. Cumque AL et AK, itemque AB et AC, angulum comprehendant eundem in A, erunt triangula ABC, et ALK similia, et quod notabile sub-contraria. Itaque cum dentur AF. AB. AC. BC, erit $\underline{AK}$ aequ. $AF^2 \smile \frac{1}{2}AB$, et de reliquo $\underline{AL : AK : KL} :: AB : AC : BC$.

Eodem modo habebimus et FL, nam sumto P puncto medio rectae AC jungamus FP, erit APF triangulum rectangulum simile ipsi AFL, ut supra Triang. ANF simile

4 qvadratorum *(1)* hoc modo, ergo et eius latus e⟨—⟩ *(2)* ab *L* 6 normalis *(1)* eam *(2)* ad *L* 11 BG.) *(1)* Habetur sed his *(2)* sed non *L* 13 FN *(1)* dabuntur et et AF *(2)* ideo *L* 18 Itaqve *(1)* de *(2)* cum *L* 19 BC. *(1)* Sed opus ut *(a)* qvaer *(b)* qvaeramus GH chordam arcus aeqvatoris *(2)* Eodem *L* 20 FL *(1)* duct *(2)* nam *L* 20 AC *(1)* cum habeamus *(2)* jungamus *L* 21 ipsi *(1)* LFA, et erit AL *(2)* AFL *L*

Triangulo AFK. Ergo habemus $FK : AF :: NF : AN$. seu FK aequ. $AF, NF \smile \frac{1}{2}AB$ et FL aequ. $AF, NP \smile \frac{1}{2}AC$. Est autem NF aequ. $\sqrt{AF^2 - \frac{1}{4}AB^2}$, et NP aequ. $\sqrt{AF^2 - \frac{1}{4}AC^2}$. Ergo $AB\sqrt{AF^2 - \frac{1}{4}AC^2} : AC\sqrt{AF^2 - \frac{1}{4}AB^2} :: FL : FK$ seu erit FL aequ. $AF\sqrt{AF^2 - \frac{1}{4}AC^2} \smile \frac{1}{2}AB$. FK aequ. $AF\sqrt{AF^2 - \frac{1}{4}AB^2} \smile \frac{1}{2}AC$. Et supra KL aequ. $\dfrac{2BC.AF^2}{AB.AC}$.

Trianguli autem FKL idem est angulus ad F qui est angulus sphaericus BAC. Eodem modo et caeteros angulos sphaericos in plano poterimus exhibere uti iam ipsa latera Trianguli sphaerici in plano exhibuimus per suas chordas. Et omnia haec triangula consistent circa idem punctum F.

Trigonometria sphaerica projectione in planum explicata

---

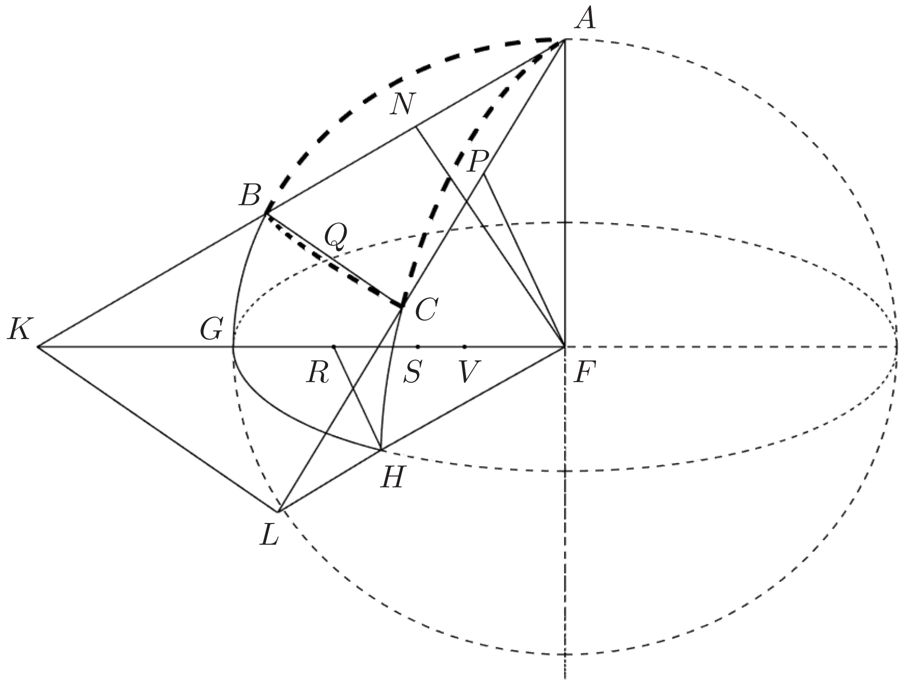
1 *Am Rande*: $\dfrac{KL}{AL} \sqcap \dfrac{BC}{AB}$

$$KL \sqcap \frac{BC(AL)AF^2}{AB\frac{1}{2}AC}$$

$$KL \sqcap \frac{2BC.AF^2}{AB.AC}$$

9 *Am Ende*:

1 aeqv. *(1)* AF^2 $\smile$ *(2)* $\frac{1}{2}$AF *L* 1 NF *(1)* ⟨$\smile$ $\frac{1}{2}$FB⟩ *(2)* $\smile$ $\frac{1}{2}$AB *L* 3 Ergo *(1)* FK : FL :: *(2)* AB *L* 3 AC$\sqrt{\mathrm{AF}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2}$ *(1)* $\frac{2\mathrm{BC.AF}^2}{\mathrm{AB.AC}}$ *(2)* :: FL *L* 9 F | Si ex recta FK erigatur planum perpendiculare ad planum DE, seu ex punctis rectae FK ducantur perpendiculares ad planum DE sectio plani DE, per hoc planum erit MK. Eodem modo ex FL erigetur planum secans planum DE normaliter, in ML cumqve haec duo plana sint parallela, utiqve eundem angulum inter se comprehendent, qvem rectae KF. FL, ergo et qvem rectae MK et ML. Ergo si compleatur triangulum MKL, erit eius angulus ad M, idem qvi angulus BAC trianguli sphaerici ABC; eodemqve modo et caeteris angulis Trianguli sphaerici ABC similes angulos ad punctum M consistentes exhibebimus; ac proinde omnia Trigonometriae sphaericae Regula ergo haec est: problemata per qvam commode in plano solvemus. *gestr.* | *L*



[*Fig. 2*]

In Sphaera centro F, radio FA descripta, sit Triangulum Sphaericum (ex arcubus circulorum maximorum constans) ABC polo A, meridianorum quadrantibus ABG, ACH

3 ABC *(1)* | *(a)* polo A describatur *(b)* GH arcus aeqvat *erg.* | sphaeram in tribus punctis A. B. C. secet planum ABC vel (productis rectis, AB versus K, et AC versus L) planum AKL. Cum puncta F. A. C. sint in eodem plano. Ac proinde et rectae AC et FH, cumqve hae duae rectarum *(2)* polo A *(a)* meridianis *(b)* meridianorum *L* 3 meridianorum *(1)* continui *(2)* continuatis ABC ABG seu *(3)* quadrantibus *L*

describatur arcus aequatoris GH. Et ducantur radii FG, FH aequales ipsi FA, et ad AF normales. Habemus duos quadrantes planos $ABGF$ et $ACHF$, quorum angulus est idem qui rectarum GF, HF, unde arcus aequatoris GH erit mensura anguli duorum planorum, seu anguli sphaerici A.

Jungantur puncta A. B. C. rectis, et habebitur Triangulum rectilineum ABC quod erit communis sectio sphaerae, et plani per tria puncta A. B. C. transeuntis. Cum rectae AB, FG sint in eodem plano, sunt enim ambae in quadrante plano $ABGF$, productae convenient alicubi in puncto K (parallelae enim non sunt, quia angulus AB ad AF acutus, GF ad AF rectus) similiter AC et FH, cum sint in eodem plano, nempe in quadrante plano $ACHF$, convenient alicubi in L. In recta AB sumatur punctum medium N, et in AC medium P, et jungantur FN, FP, erunt anguli N et P recti. Ergo triangula rectangula similia ANF et AFK, item similia APF et AFL. Ergo $AN : AF : NF :: AF : AK : FK$. Similiter $AP : AF : PF :: AF : AL : FL$. Ergo AF media proportionalis inter AN et AK, item inter AP et AL. Ergo rectangulum NAK aequale rectangulo PAL, ac proinde et rectangulum BAK aequale rectangulo CAL. Ergo $AB : AC :: AL : AK$. Triangula ergo ABC, ALK angulum A communem habentia, et latera angulum A, comprehendentia, proportionalia; erunt similia, et quod notabile subcontraria.

Ex his si valores linearum rectarum quaeramus, erit AK aequ. $AF^2 \smile AN$ et AL aequ. $AF^2 \smile AP$ et KL aequ. $BC.AL \smile AB$ vel quia BQ est $\frac{1}{2}BC$, et AN est $\frac{1}{2}AB$, erit KL aequ. $BQ.AL \smile AN$ et pro AL substituendo valorem $AF^2 \smile AP$ fiet $\underline{\underline{KL}}$ aequ. $BQ.AF^2 \smile \overline{AP.AN}$. Seu KL ad sinum ipsius arcus BC, (Lateris Trianguli sphaerici) ut in composita ratione sinus totius ad sinus reliquorum laterum. KF^2 aequ. $AK^2 - AF^2$. Ergo KF^2 aequ. $AF^4 - AF^2.AN^2, \smile AN^2$ seu KF aequ. $AF\sqrt{AF^2 - AN^2} \smile AN$. et LF^2 aequ. $AL^2 - AF^2$. Ergo LF^2 aequ. $AF^4 - AF^2.AP^2, \smile AP^2$ ergo erit LF aequ. $AF\sqrt{AF^2 - AP^2} \smile AP$. $\sqrt{AF^2 - AN^2}$ est FN. et $\sqrt{AF^2 - AP^2}$ est FP. Unde $\underline{\underline{KF}}$

1 GH. *(1)* jun *(2)* Et *L* 1 ducantur *(1)* arcus K *(2)* radii *L* 1 FG *(1)* FG *(2)* FH *L* 2 normales. *(1)* Sphaeram secet planum | AKL *erg.* | transiens per puncta A. B. C. ut AKL, erit sectio communis, triangulum *(a)* ABC *(b)* rectilineum ABC, producta recta AB versus K et AC versus L *(aa)* Arcus autem erit mensura *(bb)* Arcus autem aeqvatoris nempe GH erit mensura anguli *(2)* Habemus *L* 6 sectio *(1)* pla *(2)* sphaerae *L* 11 anguli *(1)* FN, FP recti *(2)* N *L* 14 Ergo *(1)* AN in AK aeqvale *(2)* rectangulum *(a)* sub A *(b)* NAK *L* 16 ergo *(1)* angulum comm *(2)* ABC *L* 19 BC.AL $\smile$ AB *(1)* et vel KL aeqv. *(2)* vel *L* 21 sinum *(1)* angulis lateris BC *(2)* ipsius *L* 21 ipsius *(1)* BC *(2)* arcus *L* 21 BC *(1)* arc *(2)* Lateris *L* 22 reliqvorum *(1)* arc *(2)* laterum *L* 23 et *(1)* F *(2)* LF^2 *L* 25 FP. *(1)* Unde KF est AF.AN $\smile$ AN. et *(2)* Unde $\underline{\underline{KF}}$ *L*

aequ. $AF.FN \smile AN$ et $\underline{\underline{LF}}$ aequ. $AF.FP \smile AP$. Unde valores $KL.KF.LF$ conjungendo fiet: $LF.FK \smile LK$ aequ. $FN.FP \smile BQ$. Quae theoremata omnia sunt elegantissima.

Et dato Triangulo ABC plano, seu sinibus laterum Trianguli sphaerici potest construi triangulum planum FKL habens angulum F eundem cum angulo trianguli sphaerici A. Idemque est de caeteris angulis sphaericis. Unde datis omnibus lateribus trianguli sphaerici habentur et anguli. Quae calculo prosequi operae pretium erit. Si jam addatur alibi a nobis aliisque demonstratum sinus laterum et sinus angulorum oppositorum esse proportionales cuncta eo facilius absolventur. Datis autem tribus lateribus: FL, FK, LK. angulus F ex communi Trigonometria ita invenitur: fiat ut duplum rectang. $FL.FK$ ad differentiam inter $FK^2 + FL^2$ et LK^2 ita sinus totus AF ad FR ad sinum complementi anguli GFH. (R autem rectus intelligi debet.) Per supra dicta $LF.FK$ aequ. $FN.FP.LK \smile BQ$. Et $LK \smile BK$ aequ. $AF^2 \smile AP.AN$. Ergo $LF.FK$ aequ. $FN.FP.AF^2 \smile AP.AN$. $\dagger FK^2 \dagger FL^2 \ddagger LK^2$ aequ. $\dagger AF^2.FN^2 \smile AN^2$, $\dagger AF^2.FP^2 \smile AP^2, \ddagger BQ^2.AF^4 \smile AN^2.AP^2$, seu aequ. $\dagger AF^2.FN^2.AP^2 \dagger AF^2.FP^2.AN^2 \ddagger BQ^2.AF^4, \smile AN^2.AP^2$. Sit sinus Totus FT. eritque $FR : FT :: \dagger FN^2.AP^2 \dagger FP^2.AN^2 \ddagger FT^2.BQ^2 : 2,$ $FN.FP.AP.AN$. Seu $FR \smile FT$ aequ. $\dagger \frac{1}{2}.\frac{FN.AP}{FP.AN} \dagger \frac{1}{2}\frac{FP.AN}{FN.AP} \ddagger \frac{1}{2}\frac{FT^2.BQ^2}{FN.FP.AP.AN}$. Sint $FR.FS.FV$ sinus compl. angulorum A. B. C. Pro FS loco A. B. N. P. C. Q ponetur B. A. N. Q. C. P. Pro FT loco A. B. N. P. C. Q ponetur C. A. P. Q. B. N. Ergo $FS \smile FT$ aequ. $:: \dagger FN^2.BQ^2 \dagger FQ^2.BN^2 \ddagger FT^2.AP : 2, FN.FQ.BQ.BN$. Et $FV \smile FT$ aequ. $:: \dagger FP^2.CQ^2 \dagger FQ^2.CP^2 \ddagger FT^2.AN^2 : 2,\ FP.FQ.CQ.CP$.

Sunt autem AN et BN, item AP et CP, item CQ et BQ aequales. Sinus scilicet recti arcuum AB, AC, BC, FN, FP; FQ sicut sinus complementi eorundem arcuum. Sinum rectum vel sinum compl. arcus AB. scribemus $SrAB$. $ScAB$ et sinum complementi anguli A, scribemus: ScA. et ita valores ipsorum FR. FS. FV. Seu ScA. ScB. ScC denuo scribemus

1 Unde *(1)* patet *(2)* valores *L* 2 fiet: *(1)* KN.KF.LF $\smile$ *(2)* LF *L* 3 sinibus *(1)* ang *(2)* laterum *L* 5 angulis *(1)* ejusdem triang *(2)* sphaericis *L* 11 GFH. *(1)* posto R autem rectum *(2)* R autem rectus *L* 11 debet.) *(1)* Ergo LF.FK *(2)* per *L* 15 Sit sinus Totus FT *erg. L* 15 FT *(1)* FC *(2)* $\dagger$FN^2.AP^2 *L* 18 FS $\smile$ *(1)* AF *(2)* FT *L* 19 aequ. *(1)* $\frac{1}{2}$ :: $\dagger$E *(2)* $\dagger$FN^2.BQ^2 *L* 19 Et *(1)* FT *(2)* FV *L* 22 BC *(1)* Sinus rectum arcus *(2)* FN.FP *L* 23 compl. *(1)* anguli *(2)* arcus *L* 23 ScAB *(1)* Sc *(2)* et *L*

$$\frac{2ScA}{\text{rad}} \text{ aequ. } \dagger \frac{ScAB}{SrAB}.\frac{SrAC}{ScAC} \dagger \frac{ScAC}{SrAC}.\frac{SrAB}{ScAB} \ddagger \frac{\text{rad}^2.\overline{SrBC^2}}{SrAB.ScAB.SrAC.ScAC}$$

$$\frac{2ScB}{\text{rad}} \text{ aequ. } \dagger \frac{ScAB}{SrAB}.\frac{SrBC}{ScBC} \dagger \frac{ScBC}{SrBC}.\frac{SrAB}{ScAB} \ddagger \frac{\text{rad}^2.SrAC}{SrAB.ScAB.SrBC.ScBC}$$

---

1 *Am Rande*: *Sc*. sinus compl. Anguli *A*
Sc.AB sinus compl. Arcus *AB*
Sr.AB sinus rectus Arcus *AB*
Radius. rad

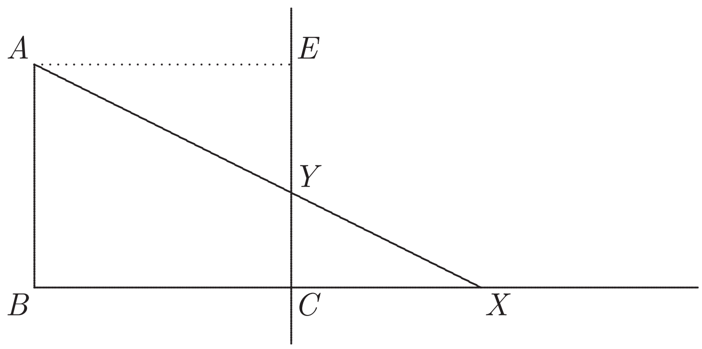
8,**24** f. Arcus AB *(1)* St sinus totus *(2)* Radius *L*

138 (58965). AUXILIA CALCULI EX DUCTU LINEARUM
[1680 – 1716]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XI 17 Bl. 24. Ausschnitt ca 11 × 4 cm. 2 S. Textfolge Bl. 24 v°, 24 r°. — Auf Bl. 24 r° Bleistiftnotizen zur mittelalterlichen Geschichte.

Datierungsgründe: Leibniz begann Anfang 1680 mit Studien zur Welfengeschichte, im August 1685 erhielt er den offiziellen Auftrag, eine Geschichte des Hauses zu verfassen.

Auxilia calculi ex ductu Linearum



[*Fig. 1*]

$AB, a.$ $BC, b.$ $BX, x.$ $CY, y.$

$CE.$ $AE.$

Ex datis constantibus a, b et variabili x quaeritur y.

Si adhibeamus triangula similia AEY et XCY fiet $AE : EY :: XC : CY$, seu fiet: $b : \overline{a-y} :: \overline{x-b} : y$ ubi valor ipsius y satis est implicitus. Sin adhibeamus triangula Similia XBA et XCY, fiet $XB : BA :: XC : CY$, seu fiet, $x : a :: \overline{x-b} : y$. Quae analogia

12 similia *(1)* ABX, YCX fiet *(2)* AEY *L*

simplicissime exhibet valorem ipsius y. Nimirum prior analogia aptior est ad inveniendam magnitudinem x, posterior ad y, quia in priore punctum X in posteriore punctum Y semel tantum occurrit, adeoque minus implicatur respectibus. Et ita praestamus ductu linearum quod praestandum esset calculo, si valorem ipsius y priore modo inventum et respectibus involutum evolvere vellemus. Utile hoc ad scalam perspectivae.

1 inveniendam *(1)* x qv *(2)* magnitudinem x, *(a)* qvia in ea punctum *(b)* posterior *L*
3 praestamus *(1)* calculo *(2)* ductu *L* 4 ipsius *(1)* x *(2)* y *L*

139 (59024). REGULA DE TRANSITU PER SALTUM [1677 – 1716]

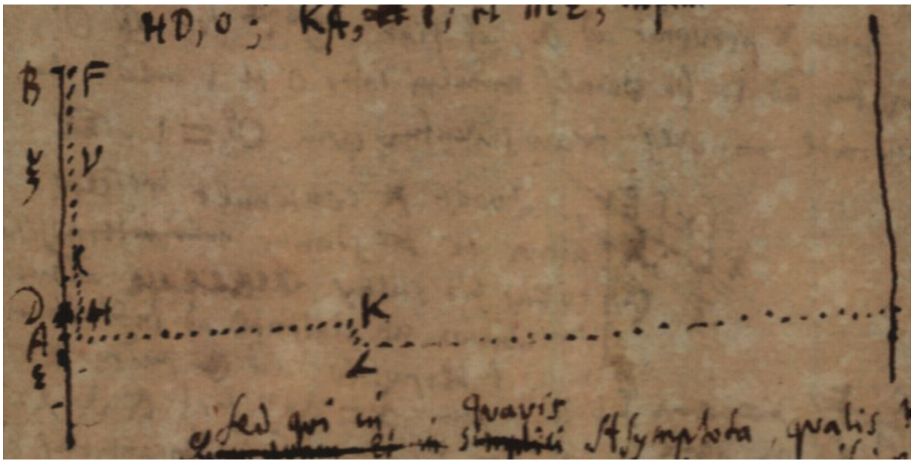
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 12 Bl. 4. 1 Bl. 8°. 2 S.

Datierungsgründe: Das Papier zeigt ein Fragment eines Wasserzeichens, das für die Hannoversche Zeit von Leibniz belegt ist.

Regula de Transitu per saltum non admittendo mirabilem quandam exceptionem pati videtur, sed ea oritur ex fictitiis expressionibus, calculo utilibus, attamen ut Jungius loqui solebat, non nisi toleranter veris. Constat n^0 esse 1, quicunque sit numerus n. Itaque etiam locum habebit, cum $n^0 = 0$, seu erit $0^0 = 1$. Ita ut 0^0 sit plus quam 0^1 vel 0^2 vel 0^3, etc. Quod ipsum satis paradoxum est, ut exponens minor in rationalibus integris faciat potentiam majorem. Sed jam ad instantiam contra regulam de Saltu non admittendo veniamus. Ita forte non licet adhibere potentias ipsius 0.

Sit 0^{a-x}. Hic si x sit 0, 1, 2, 3, etc. vel alius quivis numerus, modo minor quam a, (quem pono esse positivum seu nihilo majorem) erit $0^{a-x} = 0$. Sed illo ipso momento quo x pervenit ad a, ut fiat 0^{a-a} seu 0^0, a 0 transitur ad 1. Et omnes numeri inter 0 et 1 medii, seu fractiones unitate minores transsiliuntur, quia $0^0 = 1$. Quodsi x continuet crescere ultra a, statim novus fit saltus adhuc mirabilior, ab unitate ad infinitum, nullo interposito. Sit enim jam $x = a + y$ fiet $a - x = -y$ et $0^{a-x} = 0^{-y} = \frac{1}{0^y}$. Sed hoc est quantitas infinita, nam si y sit quantitas positiva major nihilo, erit $0^y = 0$ et $\frac{1}{0^y} = \frac{1}{0} =$ infinito. Itaque Nihilum, Unitas et infinitum sese immediate consequuntur, nullo interposito. Et 0^{a-x} est 0, si x sit citra a, unitas, si x cadat in a; et infinitum si x procedat trans a.

Ut saltum hunc in figura utcunque exhibeamus. Esto recta BC, a puncto B ad C, et ultra indefinite producta BC, in ea sumatur $AB = a$ sumto A puncto inter B et C. Porro sumto quocunque puncto ξ in recta BC, sit $B\xi = x$. Jam ducatur linea punctata $F\nu HIKLM$. Ex cujus puncto quocunque ducatur perpendicularis ad rectam BC, quales $FB, G\xi, HD, KC, ME$ et hae vocentur v, sitque $0^{a-x} = v$. Patet $FB, \nu\xi, HD$ fore nihilo aequales, seu hactenus lineam punctatam procedere per ipsam BC, sed eo momento quo venit ad A, longe ab ea prosilire et KA fieri $= a$ posita a repraesentare unitatem, progrediendo autem infra C a K vel L statim prosilire multo ad huc amplius, imo in in-



[*Fig. 1*]

finitum ad M, ita ut perpendicularis a M ad rectam BC nempe ME sit infinita. Ita tria v sibi indefinite propinqua HD, 0; KA, 1; et ME, infinitum erunt sibi immediata.

Sed qui in quavis Asymptota, qualis Hyperbolae, est saltus, non est Regulae adversus. Ibi enim crescit ordinata ad latitudinem quavis data majorem, antequam infinta fieri intelligatur adeoque per omnes rectas infinita minores. Hic vero subito transitur a 0 ad 1, non tamen per numeros majores nihilo minores vero unitate. Et similiter statim transitur ab unitate ad infinitum, nec tamen per numeros Unitate majores, et infinito minores. Cujus aliud exemplum non novi.

2 ad M: Die Punktbezeichnung M fehlt in der Figurenskizze.

140 (59034). PRIMARIAE PROPOSITIONES ELEMENTORUM [1678 – 1680]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 13 Bl. 22. 1 Bl. 12°. $1\frac{1}{4}$ S. — Auf Bl. 22 r° gegenläufig 5 Z. Notizen von Brandshagen. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 582.

Datierungsgründe: In den Notizen von Brandshagen werden der Kammermeister Hoffmann († 1680) und Hauptmann Ilten (1680 zum Major ernannt) erwähnt.

Primariae propositiones *Elementorum*

Putat Cartesius has solum propositiones esse ad calculum necessarias: pythagoricam de aequalitate quadrati hypotenusae cum quadratis baseos et catheti; alteram de Triangulis similibus latera proportionalia habentibus. Sed ex his duabus posterior continetur in priore. Ego has propositiones puto tenandas: Trianguli tres angulos esse duobus rectis aequales. Trianguli aream esse factum dimidum ex altitudine in basin; et Triangula similia habere latera proportionalia. Ex his duci possunt utiliter tamen notabuntur haec: quadrata catheti et baseos aequari quadrato hypotenusae, et in Circulo angulum ad circumferentiam esse dimidium anguli ad centrum. Utile etiam notare in circulo rectangula sub segmentis decussantibus sese, esse aequalia. Item tangentem circuli esse perpendicularem ad radium e puncto contactus eductum. Item angulum in ejusdem circuli segmento esse eundem; et in semicirculo esse rectum. Operae pretium erit caeteras primarias annotare propositiones et breviter demonstrare.

15 esse | dupulu⟨m⟩ *ändert Hrsg.* | anguli *L*

7 *Elementorum*: EUKLEIDES, *Elementa*. 8 Putat: R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 461 (*DO* IV S. 38). 8 pythagoricam: EUKLEIDES, *a. a. O.*, I, 47. 10 similibus: *a. a. O.*, VI, def. 1. 11 tres angulos: *a. a. O.*, I, 32. 12 aream: vgl. *a. a. O.*, I, 35–38; I, 41; VI, 1. 12 f. similia: *a. a. O.*, VI, def. 1. 14 quadrata catheti: *a. a. O.*, I, 47. 14 f. angulum ad circumferentiam: *a. a. O.*, III, 20. 15 rectangula: *a. a. O.*, III, 35. 16 tangentem: *a. a. O.*, III, 18. 17 angulum: *a. a. O.*, III, 21 u. III, 31.

141 (59035). SITUS PUNCTI
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 13 Bl. 23. 1 Bl. 8°. 1 S. auf Bl. 23 r°. Am linken Rand Fragmente eines weiteren Textes. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 582 f.

Datierungsgründe: [noch]

S i t u s   P u n c t i est modus determinandi distantiam ejus ab aliis quibuslibet, quorum distantia inter se invicem jam determinata est.

Si detur distantia puncti a quatuor aliis punctis solidum comprehendentibus, quorum distantia inter se determinata est, dabitur etiam distantia ejus ab alio quolibet puncto cujus distantia a quolibet quatuor priorum determinata est. Requiritur autem ut quatuor puncta non plus determinant quam tria. Unde etiam non debent tria quaedam ex his quatuor punctis cadere in eandem rectam, alioqui omnia quatuor caderent in idem planum sive triangulum cujus basis esset haec recta, apex punctum quartum.

S i t u s   E x t e n s i est ex quo sequitur situs cujuslibet ejus puncti.

Data specie lineae et tribus ejus punctis datur situs lineae.

Data specie superficiei et quatuor ejus punctis datur situs superficiei.

Data specie corporis et quinque ejus punctis datur situs corporis.

Haec accuratius examinanda.

142 (59040). PROBLEMATA
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 13 Bl. 31. 1 Bl. 8°. 1 S.

Datierungsgründe: [noch]

Problemata

Invenire numerum, qui auctus per 40, faciat 100. Sit numerus quaesitus a. qui auctus per 40 dabit $a + 40$. quod debet facere 100. Ergo

$$\begin{array}{rcr} a + 40 & \text{aequ.} & +100 \\ \underline{\quad - 40} & & \underline{-40} \\ a & \text{aequ.} & 60 \end{array}$$

Numerum 80 divellere in duas partes, ita ut partis unius excessus super alteram sit 20. Duae partes numeri 80 sint a et b. ergo $\underbrace{a}_{b+20} + b$ aequ. 80. ergo a aequ. $b + 20$.

Ergo $b + 20 + b$. aequ. 80. vel
$$\begin{array}{lcr} 2b + 20 & \text{aequ.} & 80 \\ \underline{\quad\;\; - 20} & & \underline{-20} \\ 2b & \text{aequ.} & 60 \\ \;\; b & \text{aequ.} & 30 \end{array}$$

Ergo a aequ. 50.

143 (59048). DE IMPOSSIBILITATE SPECIALIS QUADRATURAE PER SERIES INFINITAS
[nach 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 13 Bl. 39. 1 Bl. 4°. 2 S.

Datierungsgründe: [noch]

De impossibilitate specialis quadraturae per series infinitas, et de aequationibus coincidentibus aequandis per differentiales; loco comparationis aequationum. Notanda hic etiam de aequationibus coincidentibus

Ponamus specialem aliquam quadraturam haberi, habebitur valor alicujus sectoris; cumque valor ille possit demonstrari, supponendo in illa demonstratione literas pro quantitatibus eum sectorem in specie determinantibus habebitur valor sectoris illus, literalis. Rectae enim ex quibus determinatur revera non numeri sed lineae sunt, itaque his lineis dando literas, observandoque in calculo leges homogeneorum, necesse est sectoris valorem, si quidem inveniri potest, haberi expressum per ea quae ipsum sectorem determinant seu a quovis alio sectore distinguunt. Ergo tollendo haec duo determinantia, et substituendo alia duo, polygonum inscriptum et circumscriptum etiam ex illis determinabitur, et quidem ex pluribus eodem modo. Verum jam video, non demonstrari impossibilitatem, licet enim relatio illa omnibus sectoris communis sit transcendens, potest tamen fieri algebraica si nova accedat relatio. Ex gr. sit arc aequ $\frac{\text{tang}}{1} - \frac{t^3}{3\text{rad.}^2} + \frac{t^5}{5r^4}$ etc. assumendo novam aequationem specialem quae exprimat relationem inter t et r, vel etiam si placet inter a, t, et r. potest fieri ut substituendo valorem series fiat Terminabilis. Assumamus ergo relationem aliquam inter a et t, finitam aequatione expressam, ejusque ope tollendo a habebimus relationem inter t et r, per aequationem fortasse infinitam, de qua ut sciamus an contrahi possit in finitam assumamus aliam aequationem finitam inter t et r. sublatoque utrinque t, simul tolletur et r, seu restabit aequatio identica pure numeralis. Sed si hoc tractemus generaliter erit identica illa in literis arbitrariis quas assumsimus pro aequationibus relationem inter t et a, item inter r et t exprimentibus. Itaque re denuo considerata Aequatio est: a aequ $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4}$ etc. Detur aequatio alia inter a et t, in qua literae arbitrariae assumtae $b.\ c.\ d.$ Hujus ope tolletur a, et habebitur nova aequatio inter t et r. seu pro quantitate $\frac{t}{r}$. in qua erunt literae t. r; item b. c. d. Quae aequatio si reduci potest ad Algebraicam, assumatur algebraica, seu finita in qua literae t. r, et pro arbitrariis l. m. n. Ope harum duarum aequationum tollatur $\frac{t}{r}$. Habebiturque aequatio infinita composita ex literis indefinitis quidem numero, finitis tamen b. c. d etc. item l. m. n etc. Quae reddenda est finita. Quod tamen an commode fieri possit hoc modo non apparet. An ergo haec via melior: Duas habemus aequationes identicas seu coincidentes ad $\frac{t}{r}$, unam finitam alteram infinitam, quia sunt identicae, erunt et earum differentiales. Item si habeatur aequatio una identica potest dividi in duas partes quae utique debent (etsi id non appareat[)] esse ut coincidentes, ergo fingendo quamlibet partem instar aequationis, etiam coincident differentiales, seu aequationis identicae, etiam differentiales sunt identicae, licetque tunc literas pro arbitrario identicae, etiam differentiales sunt identicae, licetque tunc literas prop arbitrario determinatas vel indeterminatas fingere. Haec ergo utilissima loco comparationis aequationum. Comparantur enim non nisi coincidentes. Potest etiam inveniri valor ipsius $\frac{t}{r}$ tam per unam quam per alteram aequationem expressus serie infinita qui duo valores coincident. Sed rursus redimus ad aequandas coincidentes. Unde cum ducantur infinitae aliae etiam aequationes identicae, videndum an eas jungendo demonstrare liceat identicam finitam.

Quoniam differentiales adhibentur, hinc adhibere series quae habent incognitam vel irrationalem in exponente.

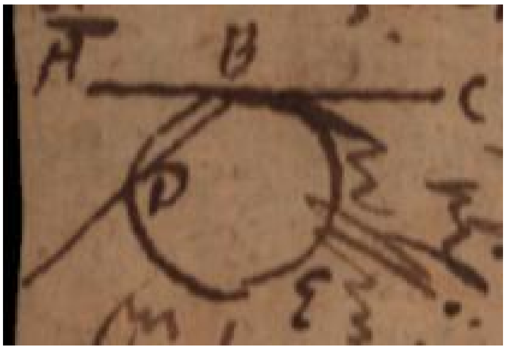
Videtur et sic procedi posse; dantur duae aequationes ad $\frac{t}{r}$, inter se coincidentes. Ergo si non sint ejusdem formae, necesse est, eas saltem habere divisorem communem. Quaeratur ergo maximus divisor communis, vel potius, quia eum maximum divisorem communem nos initio assumsisse ponere possumus; pro ipsa finita ipsius $\frac{t}{r}$ aequatione. Necesse est infinitam dividi posse per finitam. Ita ut nihil sit residuum. Eta ita invenientur literae, et habebitur exitus si quidem est possibilis. NB. NB. NB. NB.

144 (59177). DE ANGULO CONTACTUS
[1680 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III A 28 Bl. 9. 1 Bl. 8°. 11 Z. auf Bl. 9 r°. Auf dem restlichen Träger eine Aufzeichnung zur Algebra (59178). — Bl. 9 hing ursprünglich zusammen mit LH 35 III A 18 Bl. 8 u. 9 (39293 = VI, 4 N. 27, 39294, 39295).

Datierungsgründe: **[noch]**

De Angulis curvarum linearum disceptatum saepe est inter Geometras occasionem praebente Euclide, qui dixit angulum contactus, quem circulus facit cum recta tangente, esse quavis angulo rectilineo minorem. Inde quaeri coeptum est, an angulus contactus sit quantitas, aliaque multa quae in scriptis contrariis Jacobi Peletarii et Christophori Clavii, legi possunt. Sed mirum non est illis temporibus haec fuisse obscuriora, cum ne nunc quidem ubi generales linearum curvarum proprietates magis innotuerunt, expositum sit, quomodo angulus contactus possit mensurari.

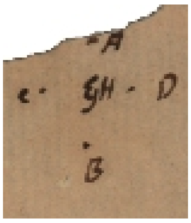


[*Fig. 1*]

145 (59243). DE COINCIDENTIA
[1685 (?)]

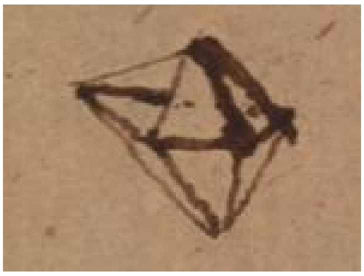
Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 5 Bl. 42. 1 Zettel **[noch]**. 7 Z. auf Bl. 42 r°. Bl. 42 v° leer.

Datierungsgründe: **[noch]**



[*Fig. 1*]

Si sit $CA \infty CD \infty DA \infty DB$ et $CABC \infty BDAB$ et $EABCD \infty FABCD$, et denique $GABCDEF \infty HABCDEF$ coincident G et H seu erit $G \not\infty H$.



[*Fig. 2*]

VERZEICHNIS DER BILDQUELLEN

Die verwendeten Faksimiles von Ausschnitten aus Handschriften sind den *Digitalen Sammlungen* der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek (GWLB) entnommen. Scans der vollständigen Handschriften sind unter den in der Liste angegebenen persistenten URLs zugänglich.

Die Digitalisate der mit einem ∗ gekennzeichneten Seiten wurden durch die GWLB mit der Public Domain Mark als gemeinfrei ausgewiesen. Alle übrigen wurden von der GWLB unter einer CC0 1.0 Public Domain Dedication Lizenz zur Verfügung gestellt. Die Urheberschaft dieser Digitalisate liegt bei der GWLB.

In den jeweils angegebenen Stücken werden Ausschnitte aus Blättern der folgenden Handschriften benutzt:

LBr. 695 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=DE-611-HS-860722

N. 6 (38367) Bl. 71 r° (∗)

LH 35 I 1 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067960

N. 29 (39848) Bl. 14 v°

LH 35 I 2 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067961

N. 32 (39859) Bl. 13 r°, 14 r°

LH 35 I 3 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067962

N. 35 (39869) Bl. 13 r°, 13 v°, 14 r°

LH 35 I 4 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067963

N. 36 (39879) Bl. 2 r°

LH 35 I 5 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067964

N. 37 (39880) Bl. 1 r°, 1 v°

N. 38 (39881) Bl. 2 r°

N. 39 (39882) Bl. 3 r°

N. 40 (39883) Bl. 4 r°, 4 v°

N. 43 (39889) Bl. 18 r°, 18 v°, 19 v°, 20 r°, 21 r°, 21 v°

N. 47 (39894) Bl. 26 v°

N. 48 (39896) Bl. 27 r°, 27 v°

N. 49 (39897) Bl. 28 r°, 28 v°

N. 50 (39898) Bl. 31 r°, 31 v°

N. 51 (39899) Bl. 29 r°

N. 53 (39903) Bl. 36 r°

N. 81 (40882) Bl. 40 r°

N. 120 (41042) Bl. 22 r°

N. 145 (59243) Bl. 42 r°

LH 35 I 6	http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067965	
	N. 59 (39950)	Bl. 1 v°, 2 v°, 3 r°
	N. 60 (39951)	Bl. 5 r°
LH 35 I 8	http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067967	
	N. 61 (39955)	Bl. 3 r°
LH 35 I 11	http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067970	
	N. 69 (40839)	Bl. 25 r°, 25 v°
	N. 75 (40847)	Bl. 47 r°
	N. 76 (40850)	Bl. 54 r°
LH 35 I 12	http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067971	
	N. 79 (40860)	Bl. 10 r°
	N. 80 (40869)	Bl. 20 r°, 20 v°, 21 v°
LH 35 I 14	http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067976	
	N. 81 (40882)	Bl. 9 v°, 16 r°
	N. 82 (40885)	Bl. 12 v°
	N. 84 (40888)	Bl. 17 v°
	N. 85 (40889)	Bl. 19 r°, 20 r°, 20 v°
	N. 86 (40892)	Bl. 21 r°, 21 v°, 22 r°, 22 v°
	N. 88 (40897)	Bl. 54 v°
	N. 89 (40898)	Bl. 28 v°
	N. 90 (40899)	Bl. 29 r°
	N. 95 (40908)	Bl. 36 v°
	N. 97 (40914)	Bl. 41 r°, 41 v°
	N. 100 (40921)	Bl. 48 r°
	N. 102 (40925)	Bl. 52 r°
	N. 103 (40926)	Bl. 53 r°
	N. 105 (40931)	Bl. 60 r°, 60 v°
	N. 109 (40946)	Bl. 75 r°, 75 v°
	N. 110 (40949)	Bl. 80 v°, 81 r°, 81 v°
	N. 111 (40950)	Bl. 82 r°, 82 v°, 83 r°, 83 v°
	N. 114 (40961)	Bl. 92 r°
	N. 115 (40962)	Bl. 93 r°, 93 v°
	N. 116 (40969)	Bl. 97 r°, 97 v°
	N. 117 (40981)	Bl. 110 r°, 110 v°

LH 35 II 1 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067993

N. 7 (38950) Bl. 2 r°

LH 35 III A 28 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068241

N. 144 (59177) Bl. 9 r°

LH 35 III B 18 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068267

N. 11 (39295) Bl. 9 r°, 9 v°

N. 12 (39301) Bl. 16 r°

LH 35 IV 12 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068009

N. 139 (59024) Bl. 4 v°

LH 35 XI 3 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068176

N. 137 (58929) Bl. 6 r°

LH 35 XII 1 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068194

N. 14 (39361) Bl. 64 r°

N. 15 (39363) Bl. 67 v°

N. 16 (39365) Bl. 68 r°, 68 v°

N. 17 (39366) Bl. 69 r°, 70 r°, 71 r°, 72 v°

N. 18 (39450) Bl. 219 v°

N. 20 (39530) Bl. 325 r°, 325 v°

LH 35 XIII 2a http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068197

N. 121 (42078) Bl. 122 r°, 122 v°

LH 35 XIII 2c http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068199

N. 127 (57869) Bl. 16 r°