PHILIUMM
Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe
Version 2

PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe. Version 2. Bearbeitet von Sandra Bella, Mattia Brancato, Vincenzo De Risi, Achim Trunk und Siegmund Probst unter Verwendung von Vorarbeiten von Vincenzo De Risi, Javier Echeverría und der Editionsstellen in Hannover und Münster, hrsg. von der Leibniz-Forschungsstelle Hannover der Niedersächsischen Akademie der Wissenschaften zu Göttingen beim Leibniz-Archiv der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek. Hannover, 29. September 2023.

ZU DIESEM DOKUMENT

Die Sammlung *PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe* enthält mathematische Texte von Leibniz, die bisher nicht veröffentlicht wurden oder nur in Drucken außerhalb der Akademie-Ausgabe vorliegen. Das Dokument gibt den Stand der Arbeiten an diesen Stücken vom September 2023 wieder, wobei der Bearbeitungsstand von Transkriptionen bis hin zu nahezu abgeschlossenen Editionen reicht.

Die Texte wurden auf Grundlage der Handschriften in Zusammenarbeit mit dem Projekt PHILIUMM The Philosophy of Leibniz in the Light of his Unpublished Mathematical Manuscripts (ERC 101020985; Leitung: David Rabouin) von Sandra Bella, Mattia Brancato, Vincenzo De Risi, Achim Trunk und Siegmund Probst erarbeitet. Zum Teil konnte auf Vorarbeiten von Vincenzo De Risi, Javier Echeverría und der Editionsstellen in Hannover und Münster zurückgegriffen werden. Die Erfassung der Stücke hat Manuela Mirasch-Müller teilweise nach Vorarbeiten der Bearbeiter und von Christopherus Ray'onaldo und Jule Schwarzkopf durchgeführt.

Der Satz ist mit Hilfe des von John Lavagnino und Dominik Wujastyk entwickelten TEX-Macropakets EDMAC erstellt worden. Einige Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris erstellt und in TEX weiterbearbeitet.

Vorläufigkeit

Bei den Texten dieser Sammlung handelt es sich um vorläufige Ergebnisse. Spätere Versionen werden in einigen Aspekten davon abweichen. So werden sich die Anzahl und die Reihenfolge der Stücke und damit auch ihre Nummern und Seitenzahlen ändern. Bei Seitenumbrüchen und Zeilenzählung kann es ebenfalls zu Verschiebungen kommen. Schließlich können sich auch inhaltliche Änderungen ergeben; insbesondere sind die Datierungen noch vorläufig. Zur leichteren Identifikation wird jeder Text mit seiner Nummer aus dem Leibnizeditionskatalog gekennzeichnet. Die Texte werden sukzessive in künftige Bände der Leibniz-Akademie-Ausgabe übernommen und dann aus dieser Sammlung entfernt.

Versionierung und Langfristigkeit

Im Lauf der editorischen Arbeit an den Texten können geänderte vorläufige Fassungen zugänglich gemacht werden. Unterschiedliche Fassungen des Dokuments werden durch Versionsnummern kenntlich gemacht und sind so eindeutig identifizierbar.

Wir empfehlen ausdrücklich, stets die aktuellen Fassungen der Bearbeitungen der Stücke zu nutzen. Bitte überprüfen Sie deshalb vor der Nutzung auf unserer Webseite, ob eine neuere Version dieses Dokuments verfügbar ist oder ob ein Text inzwischen in eine Vorausedition oder einen publizierten Band übernommen wurde.

Die Langzeitarchivierung und die langfristige Bereitstellung der Dokumente erfolgen über die Niedersächsische Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, die das Akademien-Vorhaben „Leibniz-Edition" gemeinsam mit der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften betreut. Die Zitierfähigkeit wird gewährleistet.

Zitierhinweis

Die vollständigen bibliographischen Angaben des Dokuments können der Titelseite entnommen werden. Wir empfehlen, bei Zitaten aus der Sammlung *PHILIUMM* oder Verweisen auf diese stets die Versionsnummer mit anzugeben. Eine Zitation einer Handschrift könnte in einer Kurzform nach dem Muster des folgenden Beispiels gestaltet werden:

G. W. Leibniz, *Multa et mira de Angulo contactus* (GWLB LH 35 XII 1 Bl. 228–229; vgl. *PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe, Version 2*, dort N. 1 (39455), S. 1–10).

Die Signatur der edierten Handschrift findet sich jeweils im Kopf des Stückes.

Kontakt

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Deutschland
Leitung: Michael Kempe
Email: leibnizarchiv@gwlb.de
Internetauftritt: http://www.gwlb.de

Das Projekt PHILIUMM betreibt die Webseite *PHILIUMM Leibniz manuscripts-Digital humanities laboratory* (https://eman-archives.org/philiumm), auf der HTML-Versionen von Transkriptionen und Übersetzungen sowie weitere Materialien zur Verfügung gestellt werden.

À PROPOS DE CE DOCUMENT

La collection *PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe* contient des textes mathématiques de Leibniz qui n'ont pas été publiés à ce jour ou qui ne sont disponibles qu'en version imprimée en dehors de l'édition académique. Le document montre l'état du travail sur ces pièces en septembre 2023, avec l'état de traitement allant des transcriptions aux éditions presque achevées.

Les textes suivants ont été élaborés à partir des manuscrits en collaboration avec le projet PHILIUMM The Philosophy of Leibniz in the Light of his Unpublished Mathematical Manuscripts (ERC 101020985 ; principal investigator : David Rabouin) par Sandra Bella, Mattia Brancato, Vincenzo De Risi, Achim Trunk et Siegmund Probst, aidés pour partie par les travaux préparatoires de Vincenzo De Risi, de Javier Echeverría et des éditeurs de Hanovre et de Münster. La saisie des textes a été effectuée par Manuela Mirasch-Müller, en partie à partir du travail préparatoire des collaborateurs et de Christopherus Ray'onaldo et Jule Schwarzkopf.

La mise en page a été réalisée à l'aide du logiciel TEX EDMAC développé par John Lavagnino et Dominik Wujastyk. Quelques figures ont été élaborées avec les programmes WINGEOM et WINPLOT de Richard Parris et traitées par la suite dans TEX.

Caractère provisoire des textes

Les textes de cette collection sont des résultats préliminaires. Les versions ultérieures différeront à certains égards. Ainsi, le nombre et l'ordre des pièces et avec eux leurs numéros et numéros de page changeront. Il peut également y avoir des décalages dans le cas de sauts de page et de comptage de lignes. Enfin, il peut également y avoir des changements dans le contenu ; en particulier, les dates sont encore provisoires. Pour faciliter l'identification, chaque texte est indiqué par son numéro dans le catalogue de l'Édition Leibniz. Les textes seront progressivement intégrés dans les futurs volumes de l'édition de l'Académie puis retirés de cette collection.

Gestion des versions et disponibilité à long terme

Au cours du travail éditorial sur les textes, des versions préliminaires modifiées peuvent être rendues accessibles. Les différentes versions du document sont identifiées par des numéros de version et peuvent donc être clairement identifiées.

Nous vous recommandons expressément de toujours utiliser les dernières versions de l'édition des pièces. Par conséquent, veuillez vérifier avant d'utiliser notre site Web si une version plus récente de ce document est disponible ou si un texte a depuis été incorporé dans une pré-impression d'un volume ou un volume publié.

L'archivage à long terme et la disponibilité de nos documents sont assurés par l'Académie des sciences de Basse-Saxe à Göttingen, qui est co-responsable avec l'Académie des sciences de Berlin-Brandebourg du projet interacadémique de l'Édition Leibniz. La citabilité est garantie.

Format de citation

Les références bibliographiques complètes se trouvent sur la page du titre. Nous vous recommandons de toujours inclure le numéro de version lors de la citation ou de la référence à la collection *PHILIUMM*. Une citation d'un manuscrit sous forme abrégée pourrait ressembler à l'exemple suivant :

G. W. Leibniz, *Multa et mira de Angulo contactus* (GWLB LH 35 XII 1 fol. 228–229 ; cf. *PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe, Version 2*, N. 1 (39455), p. 1–10).

La cote du manuscrit édité se trouve dans la tête de la pièce.

Adresse de contact

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Allemagne
Directeur du département : Michael Kempe
adresse e-mail : leibnizarchiv@gwlb.de
site web : http://www.gwlb.de

Le projet PHILIUMM exploite le site *PHILIUMM Leibniz manuscripts-Digital humanities laboratory* (https://eman-archives.org/philiumm), sur lequel des versions HTML des transcriptions et des traductions ainsi que d'autres documents sont disponibles.

ABOUT THIS DOCUMENT

The collection *PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe* contains mathematical writings by Leibniz which are either previously unpublished or available only in printed publications outside the Academy edition. The document presents the state of work on these texts as of September 2023, ranging from simple transcriptions to nearly completed scholarly editions.

The following texts have been prepared from manuscript sources in collaboration with the project PHILIUMM The Philosophy of Leibniz in the Light of his Unpublished Mathematical Manuscripts (ERC 101020985; principal investigator: David Rabouin) by Sandra Bella, Mattia Brancato, Vincenzo De Risi, Achim Trunk and Siegmund Probst. For some, the editors were able to build on preliminary work carried out by Vincenzo De Risi, Javier Echeverría, and by members of the Academy editorial groups in Hanover and Münster. Manuela Mirasch-Müller was responsible for inputting the texts, partly on the basis of preparatory work by the editors and by Christopherus Ray'onaldo and Jule Schwarzkopf.

The TEX macro suite EDMAC, developed by John Lavagnino and Dominik Wujastyk, was used for typesetting. Some of the figures were initially produced using the WINGEOM and WINPLOT programs created by Richard Parris, and completed using TEX.

Preliminary status

The writings presented in this collection are preliminary research results. Later versions can be expected to diverge from them in some respects. Thus, the quantity and the sequence of the texts will change, as will their numbering and pagination. Likewise, there may be shifts in page transitions and line numbers. Finally, changes may occur to the content itself; the dates assigned to the writings, in particular, are only preliminary. For easy identification, each text is cited using its number in the Leibniz edition's working catalogue. The writings will be progressively integrated into future volumes of the Academy Edition of Leibniz, after which they will be removed from this collection.

Versions and long-term availability

Over the course of editorial work, successive versions of the preliminary presentation may be made available. Distinct versions of the document are marked with version numbers and are thus unambiguously identifiable.

We strongly recommend always using the most recently published version of our edition of each text. Please check our website before citing this document to ascertain whether a newer version of this document has become available or a particular text has been incorporated into a preliminary edition or a published volume.

Long-term archiving and availability of our documents are provided by the Göttingen Academy of Sciences and Humanities in Lower Saxony, which is jointly responsible with the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities for the interacademic project of the Leibniz Academy Edition. Citability will remain assured.

Suggestions for citation

The complete reference of this document can be found on the title page. We recommend always specifying the version number when citing or referring to *PHILIUMM*. The following is an example of how a citation of a manuscript may be provided in an abreviated form:

G. W. Leibniz, *Multa et mira de Angulo contactus* (GWLB LH 35 XII 1 fol. 228–229; see *PHILIUMM. Transkriptionen und Vorauseditionen mathematischer Schriften für die Leibniz-Akademie-Ausgabe, Version 2*, N. 1 (39455), p. 1–10).

The shelfmark for the manuscript source may be found in the introductory notes to each individual text.

Contact

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Germany
Head of department: Michael Kempe
E-mail: leibnizarchiv@gwlb.de
Website: http://www.gwlb.de

The PHILIUMM Project operates the website *PHILIUMM Leibniz manuscripts - Digital humanities laboratory* (https://eman-archives.org/philiumm), where HTML versions of transcribed and translated Leibniz writings are provided along with various other materials.

INHALTSVERZEICHNIS

PHILIUMM

Transkriptionen und Vorauseditionen 1677 – 1716

1 (39455). MULTA ET MIRA DE ANGULO CONTACTUS
13. Dezember 1681

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 228–229. 1 Bog. 2°. 4 S.

3 Xb. 1681

Multa et mira de Angulo contactus notavi in scheda, 1 Xb. cujus inscriptio est: *Lineae datae parallelam ducere per punctum datum.*

[*Fig. 1a*]

Res eo redit, ut angulus consideretur, quem facit una tangens ad vicinam, sint duae curvae *ABC*. *DEC*. tangens utique communis *CT* axi *MT* occurrens in *T* tangunt enim se curvae in puncto *C*.

[*Fig. 1b*]

Ponantur puncta E et B etiam coincidere et rectam BC sumi pro latere polygoni infinitanguli curvam repraesentantis. Sumatur ejusdem polygoni curvae ABC aliud punctum A, et curvae DEC punctum D. Jungantur chordae AB, DE sive AB. DB posito B et E coincidere et BA producatur dum axi occurrat in F, et ED axi occurrat in G. Tunc angulus contactus curvae DEC ad rectam tangentem communem major est, si angulus GET sit major quam FBT.

Unde patet angulos contactus crescere cum infinite parvis, sunt enim TF. TG infinite parvae; subtensae nempe angulorum FBT. GBT. infinite parvorum.

Verum mensuram anguli contactus hinc petere non licet prout enim DE sumitur major aut minor, alia oritur quantitas anguli, aliaque rectarum TG, TF ratio inter se invicem vel etiam arcuum quibis hi anguli insistunt. Nec refert etsi DE. BC semper sumantur aequales; Possunt enim esse semper aequales, et tamen dimidio minores.

Solus circulus hoc habet, ut ubique eundem habeat angulum contactus ad eandem rectam, itemque angulum contactus ab utraque parte aequalem. Idem est si plures Circuli se tangant.

---

1 *Unter Fig. 1b:* Hic inveni praeclara de mensura anguli contactus.

[*Fig. 2*]

Est quoque anguli contactus quantitas idem cum lineae curvedine. Circulorum autem curvedines sunt in ratione radiorum generantium AD. BC. CD; quia omnes circuli sunt similes et curvedines eorum similiter producuntur, sunt ergo effectus in ratione causarum. Neque enim discerni possunt nisi compraesentia, vel adhibito aliquo tertio nempe recta vel alio dissimili ad ipsos aut dissimiliter posito.

[*Fig. 3*]

Jam caeterarum omnium curvarum curvedines possunt aestimari a circulis inscriptibilibus. Sit curva GDE cui inscriptilis est circulus radio AD descriptus tangens in puncto

D. Is scilicet in parte curvae concava totus poni potest seu totus jacet intra curvam. In eadem recta ad curvam perpendiculari DA, quantum satis producta, sumatur punctum C tale ut centro C radio CD descriptus circulus (qui curvam tanget in D, quia CD est ad curvam perpendicularis) curvam iterum alicubi secet in F. Is itaque circulus cujus radius CD utique curvae non est ita inscriptilis, ut eam tangat in puncto D. Quaeritur circulus inscriptilium in puncto D tangentium maximus, cujus centrum sit punctum B. Hujus igitur radii BD magnitudo quantitatem curvedinis determinabit. Calculo autem investigari potest, quia circulus centrum habens in recta DC eo ipso quia curvam GDE tangit, facit aequationem duas habentem radices aequales. Sed hoc modo si punctum F incidat in punctum D ⟨-- fiunt⟩ minimum tres radices aequales.

Ergo ut tangentes sive directiones curvarum investigantur per rectas tangentes et duas radices aequales, ita anguli contactuum, sive directionum mutationes sive curvedines investigantur per circulos tangentes, et tres radices aequales. Habemus ergo problema quod tot ingenia exercuit absolutum tandem, et reductum ad puram Geometriam. Angulus communis exprimitur maginitudine arcus; angulus contactus seu curvedo magnitudine circuli, seu radii. Ille magnitudine curvae, hic rectae. Recta utrobique extra curvam ad convexitatem tendens est tangens curvae seu exprimit curvae directionem. Circulus tangens intra curvam seu ad concavitatem ad alteram partem tendentium circulorum tangentium maximus, exprimit curvae in illo puncto curvedinem ad illam partem seu contingentiae quantitatem.

Considerandum in genere, data curva, in quot punctis ei occurrere possit circulus ad summum; unde jam ista erunt aestimanda. Curvarum praeter circulum (et helicem cylindricam ex illis quae in plano describi non possunt) curvedo ubique mutatur. Potest tamen exhiberi ejus maxima et minima curvedo. Hinc potest circulus AD tam esse parvus, ut perpetuo intra curvam ADE procedere et rotari possit ita ut nunquam in ipsam illidatur. Potest etiam circulus CD tam esse magnus, ut nunquam intra curvam rotari possit. Circulus maximus qui intra curvam totam rotari potest, est is cujus curvedo est eadem cum maxima curvae curvedine. Et cum hunc quaeremus, credo quatuor ad minimum radicibus aequalibus opus fore. Nimirum maxima curvedo habebit curvedines ab utraque parte decrescentes caeterae habebunt ab una parte crescentes ab altera decrescentes. Itaque ut tangens forte adhuc alibi occurrere potest, ita potest esse m a x i m a m e d i a curvedo pro parte curvae, (nam maximam extremam habet quaelibet pars. Maximam mediam voco quae radii habet decrescentes, ab utraque parte) et circulus qui eandem curvedinem habet per maximam determinabitur.

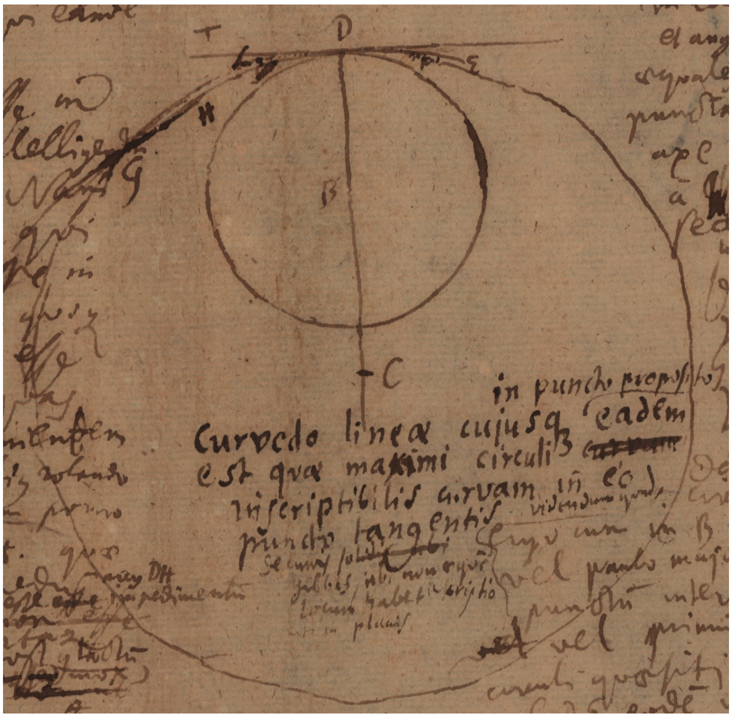
Cum autem dicitur curvedinem curvae eandem esse in aliquo puncto, quae est alicujus circuli tunc intelligendum est curvedinem in eodem puncto ab una tantum parte. Nam ut circa idem punctum duo sunt anguli contactus, qui possunt esse valde inaequales, et solent quoque esse in curvis excepto circulo et helice cylindrica; ita quoque duplex est curvedo: igitur cum dicitur tantam esse curvedinem, in puncto aliquo, dicendum est ad quas partes.

[*Fig. 4*]

Ita ponamus circulum AD rotando venientem ab E versus D. Ubi illidi intra curvam nec posse amplius rotando progredi ita ut omnia ejus puncta successive ordine tangat (nam per saltum porro progredi posset) multa puncta transmittendo inter D et H. quae duo scilicet puncta tunc simul tangit. Relictis intermediis arcus DH. Verum puto ad hoc impedimentum progressus non esse attendendum quia per accidens fit, ut posita tam magna DH sed debet esse impedimentum in ipsa DH utcunque exigua a D versus H continuata itaque potius considerandum an circulus post contactum egrediatur e curva ita ut postea iterum eam secet ut in pagina praecedenti designavimus. Est autem DF pars circuli centro D descripti necessario intra curvam, quia circulus curvam tangit a parte concava. Jam si quaeratur radius BD talis ut punctum F incidere incipiat in D tunc BD exprimit magnitudinem curvedinis. Sed alius poterit esse circulus quo idem fiet a parte altera DE. Interdum tamen angulus contactus seu curvedo ab utraque parte eadem cum scilicet constat utrobique eodem modo ad tangentem referri ut tangens verticis parabolae Hyperbolae vel Ellipsis, seu tangens ad axem perpendicularis, facit angulum contactus utrobique aequalem.

[*Fig. 5*]

Jam melius video sit parabola GDE, cujus vertex D. perpendicularis ad curvam seu ejus tangentem, in vertice est ipse axis CD. Sumto jam alicubi puncto in Axe C. radio CD descriptus circulus utique curvam tanget. Sed is si cadat extra curvam iterum eam secabit et quidem in duobus punctis utrobique eodem modo. Habet ergo duas radices aequales quatenus tangit in D. Item oppositas aequales ob G et E. Sed si CD sit tam parva ut G et E incidant in D, tunc coincident omnia quatuor puncta, in quibus circulus parabolae occurrit. Et ejus circuli radius sit DB, inscriptilium maximus. Equidem patet non coincidere duas curvas circuli BD et parabolae, ideoque angulum contactus parabolae ad TD tangentem esse minorem quidem, quam circuli BD ad eandem tangentem, sed dicendum est differentiam esse infinite parvam respectu ipsius anguli contactus; adeoque cum ipse angulus contactus HDT sit infinite parvus respectu rectilinei erit angulus contactus LDH infinite parvus respectu ipsius HDT atque adeo infinities infinite parvus respectu rectilinei. Hinc uti angulus rectilineus est major quolibet angulo contactus ita angulus contactus circularis major quolibet angulo contactus curvae ad circulum suae curvedinis quia ut tangens recta directionem curvae, ita tangens circulus inscriptilium maximus curvedinem exprimit. Differentiae habentur infinite parvae. Hoc ⟨-⟩ non intellecto nemo se expediet.



[*Fig. 6*]

Ne quis autem putet eo casu quo puncta D. G. E coincidunt, fieri radium BD etiam infinite parvum; dabo exemplum ubi manifestum est contrarium. Sit curva EDG quam a circulo ex centro B radio BD descripto intus tangi certa est (utique enim talis curva vel ejus portio datur). Trans ea sumatur praeterea punctum aliquod L et angulo LDB sit aequalis FDB, et rectae GD. FD. aequales, habebitur punctum F et per tria puncta LDF describatur circulus centro utique C in axe existente, quia duo puncta L. F. aequidistantia a D etiam se eodem modo ad axem habent is circulus ergo LDF curvam tanget in D. Sed idem extra eam egredietur et secabit eam in puncto aliquo G, ponatur jam hic circulus continue diminui donec punctum G incidere incipiat in punctum D. Utique is circulus erit quem quaerimus cujus scilicet curvedo eadem quae curvae datae. Idem patet sic quoque. Diminuatur circulus CD centro continue accedente versus B. Ergo cum in B venerit, cadet totus intra curvam, ergo vel paulo major jam intra eam cecidit, et

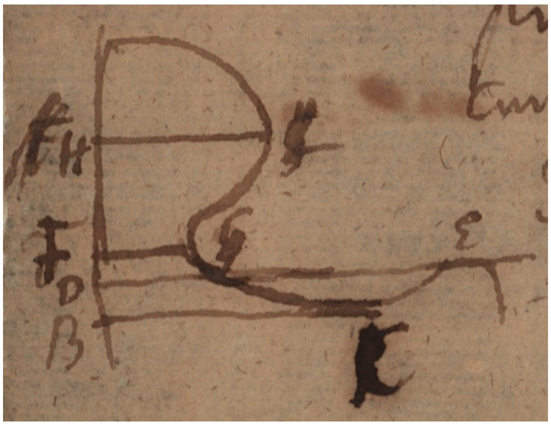
1 *Dazu am Rand*: NB. solutio summae difficultatis

designari poterit punctum inter C et B quo intra eum cadere incepit vel primum incipit in B. et tunc B erit centrum circuli quaesiti.

Si jam curva GDE eodem modo se habet ab utraque parte ad rectam DC seu si est axis tunc angulus contactus utrobique idem. Sed si sit diversus ut si sit radius BD maximus intus tangentium curvam GD seu quo G incidit in D. at non ideo F incidat in D. sed circuli ex BD sinistra medietas. Statim ingrediatur citra curvam GHD. Dextra vero medietas curva DE egrediatur, patet diversas esse curvedines, ut circulus BD habebit curvedinem curvae GHD, versus H. at circulus major CD maximus ingredient⟨ium⟩ intra DE versus F exgrediatur ex DH versus L. Is exprimet curvedinem curvae in puncto D versus E. Idem patet etiam ex punctis flexuum.

Puncta flexuum habentur per coincidentiam trium punctorum, in quibus recta talem curvam secat. Curvedines habentur per coincidentiam trium punctorum in quibus circulus curvam ab ea parte ad quam curvedo esse intelligitur, secat. Curvedinem coincidere cum angulo contactus ex eo patet quod curvedo utique est directionum ad se invicem inclinatio sive directionum per minima mutatio, id vero est quoque angulus curvae ad tangentem seu angulus tangentis ad tangentem proximam. Quia sumendus angulus contactus in puncto quantum satis vicino, unde chorda ad punctum contactus ducitur chorda autem in puncto indefinite vicino est ipsa tangens.

Post tractatas directiones seu tangentes tractandae sunt quoque curvedines seu directionum mutationes seu anguli contactuum.



[*Fig. 7*]

Videndum an curvae duae inaequales possint habere easdem curvedines, seu an curvae parallelae easdem habeant curvedines, an vero aliae puncta reversionum determinant maximam et minimam curvae ordinatam. Punctum reversionis moti regulae per directricem exhibet reascensum vel redescensum respectu condirectionis curvae, seu ordinatam quae est tangens ut BC. DE. sed punctum reversionis mobilis in regula dextrorsum vel sinistrorsum, seu appropinquatione vel respectu directricis, exhibet ordinatam maximam vel minimam perpendicularem FG. vel HL.

Notandum in puncto flexus quodammodo curvam habere duas diversas tangentes et nullam; an forte tunc punctum curvae quiescit atque ita nulla tunc ejus directio est?

[*Fig. 8*]

[*Fig. 9*]

Aliquando infiniti curvae tangentes dari possunt ad unum idem punctum; sit curva mota hoc modo: $ABCDEBFGHLFM$ patet infinitas esse tangentes exiguae particulae $BCDE$ utcunque illa contrahatur, adeo, ut etsi tandem fiat infinite parva, tamen maneant infiniti tangentes, ut in connexione B duarum semicycloidum AB. BF. Hoc si accommodetur ad modum nostrum generalem describendi curvas, patebit illic fieri reversiones sursum deorsum dextrorsum sinistrorsum, et infinitas interim directionum mutationes tempore infinite parvo, per spatia infinite parva; si tangens realis semper cum puncto circumferetur, directionem curvae exprimens, ea deberet momento absolvere totum circulum seu unam circulationem. Hinc contingunt infinitae directiones simul. Videntur hoc casu esse duae curvae.

Per reversiones patet dari duas radices aequales, ut ita nullo respectu habito ad tangentes. Patet enim ibi duas ordinatas in unam coalescere.

Modus describendi curvam per focos, vel adhibitis meris regulis cum funibus, vel curvis vel etiam curvis et regulis cum funibus, et curvis vel constanti[bu]s longitudinibus si per extremorum foramen transeat funis vel curvis evolutis, extremo funiculi ad curvam existente libero.

2 (39511). DE REIHERI EUCLIDE GERMANICO
[April/Mai 1698 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 305. 1 Bl. ca 8$^{\text{o}}$. $1\frac{1}{2}$ S.
Cc 2, Nr.

Datierungsgründe: J. A. Schmidt und Leibniz erwähnen in Briefen vom 22. und 23. Mai 1698 einen Besuch von S. Reyhers Stiefsohn Andreas bei Leibniz (I, 15 N. 381, S. 595 u. N. 383, S. 598).

Non ita diu est quod filius Celeberrimi IC$^{\text{ti}}$ et Mathematici Domini Samuelis Reiheri mihi paterno nomine dono obtulit Euclidem Germanicum praeclara et accurata diligentia expressum. In eo opere cum alia valde laudo, tum inprimis studium τῆς ἀκρίβειας, quod in Elementis constituendis summi momenti censeo, adeo ut optem ipsa Postulata et Axiomata demonstrata haberi, ad usque vere indemonstrabilia, nempe identicas veritates: Idque non tam certitudinis, sed analyseos gratia desiderarem, ita enim notiones perfectius resolverentur.

Hactenus tamen in Euclide quaedam mihi deesse visa sunt ad summam acribeiam, et ut de Axiomatibus demonstrandis (quod Apollonius et Proclus aggressi sunt) nunc taceam; certe in ipsis theorematibus quaedam interdum tacite assumuntur, quae demonstratione indigerent; quale illud est in propositione prima libri *Elementorum* primi; quod scilicet duo circuli ex duobus rectae ejusdem extremis, ipsiusque rectae intervallo descripti sibi occurrant. Quod fieri assumitur, dum ex puncto occursus rectas ad duo illa extrema duci jubetur. Cujus demonstrationem etiam a D$^{\text{no}}$ Reihero praeteriri video.

---

8 Euclidem Germanicum: S. Reyher, *In Teutscher Sprache vorgestellter Euclides*, 1697; in der GWLB Hannover befindet sich ein Exemplar des Buches mit Goldschnitt unter der Signatur Ld 647.

3 (39554). USUS SIGNI ∞ PRO COINCIDENTIA SEU IDENTIFICATIONE [1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XII 2 Bl. 6. 1 Bl. ca 16°. 1 S.

Datierungsgründe: [**noch**]

U s u s s i g n i ∞ pro coincidentia seu identificatione

$x^3 * ppx + q^3 = 0$

$x^3 = \sqrt[3]{-\frac{q^3}{2} + \sqrt{\frac{p^6}{27} + \frac{q^6}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q^3}{2} - \sqrt{\frac{p^6}{27} + \frac{q^6}{4}}} \infty a + b$

$x^3 = a^3 + b^3 + 3abx \infty -ppx - q^3$

Ergo $ab = -\frac{pp}{3}$ et $a^3 + b^3 = -q^3$. Quod succedit nam $a^3 + b^3 = -\frac{q^3}{2} - \frac{q^3}{2} = -q^3$ et $ab = \sqrt[3]{\frac{q^6}{4} - \frac{p^6}{27} - \frac{q^6}{4}} = -\frac{pp}{3}$.

4 (39634). TENTATA EXPRESSIO CIRCULI PER PROGRESSIONEM DYADICAM [1680 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 97. 1 Bl. 4°. $1\frac{1}{5}$ S. — Gedr.: (engl. Übers.) Strickland/Lewis, *Leibniz on Binary*, 2022, S. 61 f.

Datierungsgründe: **[noch]**

Tentata expressio circuli per progressionem dyadicam

Progressio dyadica est $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64}\ \frac{1}{128}\ \frac{1}{256}\ \frac{1}{512}\ \frac{1}{1024}\ \frac{1}{2048}$.

Valor Circuli cujus diameter 1 est $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}$.

$\frac{1}{2}$ est valor circuli minor justo, quia $\frac{1}{2} \sqcap 1-\frac{1}{3}$. (Jam $1-\frac{1}{3}$ est $\sqcap$ circulo) differentia $\frac{1}{6}$.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ non est minor quam $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ quia ad $\frac{1}{6}$ addendo $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ minus fit quam $\frac{1}{4}$.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ non est major quam $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ comparetur cum $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$. seu $\boxed{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\boxed{+\frac{1}{4}}+\frac{1}{7}$ cum $\boxed{\frac{1}{1}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}$.
$\boxed{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{4}$

Erit illud majus hoc ergo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ major circulo.

11 qvia *(1)* ad 1 *(2)* $\frac{1}{3}$ addendo *(3)* ad *L* 13 $\frac{1}{5}$ *(1)* (qvia *(2)* $\frac{1}{2}$ *L*

Sumatur $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ et comparetur cum $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ seu $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ cum $\frac{3}{8}+\frac{1}{5}$ seu $\frac{2}{35}$ cum $\frac{1}{24}$, erit $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ non minor quam $\frac{1}{1}$ etc. $-\frac{1}{7}$.

Sumatur $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ et comparetur cum $\frac{1}{1}$ etc. $-\frac{1}{11}$ seu $\frac{2}{35}$ cum $\frac{1}{24}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ seu $\frac{2}{35}$ cum $\frac{1}{24}+\frac{2}{99}$ seu $\frac{1}{35}$ cum $\frac{1}{48}+\frac{1}{99}$ seu $\frac{13}{35\cdot 48}$ cum $\frac{1}{99}$ seu $\frac{13}{35\cdot 16}$ cum $\frac{1}{33}$. Erit illud minus

Si tantum dividas 48 per 13, quotiens est major quam 3, per quem si multiplices 35 fit 105 quod est majus quam 99 erit illud minus hoc. Ergo $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ est minor circulo.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ comparetur cum $\frac{1}{1}$ etc. $-\frac{1}{11}$ seu $\frac{13}{35\cdot 16}+\frac{1}{16}$ cum $\frac{1}{33}$ et videatur an illud sit minus. Seu $\frac{13}{35}+1$ cum $\frac{1}{2+\frac{1}{16}}$ ergo non est minus quam hoc. Ergo $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ cum $\frac{1}{1}$ etc. $+\frac{1}{13}$ seu $\frac{1}{35}+1$ cum $\frac{1}{2+\frac{1}{16}}+\frac{1}{13}$. Erit illud majus quam hoc ergo et majus circulo. Ergo sumamus:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$ fiet $\frac{1}{35\cdot 16}+\frac{1}{32}$ comp. cum $\frac{1}{33}+\frac{1}{13}$. Erit illud non majus quam hoc.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$ cum $\frac{1}{1}$ etc. $-\frac{1}{15}$ seu $\frac{13}{35\cdot 48}+\frac{1}{32}$ cum $\frac{1}{99}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$. An illud minus?

1 $\frac{1}{7}$ *(1)* seu $\frac{3}{8}+\frac{1}{5}$ *(2)* seu *L* 3 seu *(1)* $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ *(2)* $\frac{2}{35}$ *L* 6 Si *(1)* comparemus *(2)* tantum *L* 8 etc. *(1)* $+\frac{1}{9}$ *(2)* $-\frac{1}{11}$ *L* 12 $\frac{1}{13}$ *(1)* Seu $\frac{1}{3}$ *(2)* Erit *L*

1	1	vel alia dispositione	1
2	10		10
3	11		11
4	100		100
5	101		101
6	110		110
7	111		111
8	1000		1000
9	1001		1001
10	1010		1010
11	1011		1011
12———	1100		1100
13———	1101		1101
14———	1110		1110
15———	1111		1111
16———	10000		10000

$$\frac{1}{2} \quad 0100000 \quad \frac{\begin{array}{c}\cancel{1}1\\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}000\end{array}}{\begin{array}{c}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}1\\ \cancel{1}1\end{array}} \fint 011111$$

$$\frac{1}{3} \quad 0111 \quad \frac{01}{10} \fint 0$$

1) 1.00000

$$\frac{1}{2} \quad 0100000 \fint 0.1000$$

$$\frac{1}{3} \quad \begin{array}{l}\cancel{1}1\\ 0\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}000\\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\\ \cancel{1}\cancel{1}\end{array} \fint 0.01010101$$

$$\frac{1}{4} \quad 0.01$$

$$\frac{1}{5} \quad \begin{array}{l}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}1\\ 00100000\\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}1\\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}00\\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}11\end{array} \fint 0.001100110011$$

$$\frac{1}{6}\qquad \begin{array}{l} \cancel{1}\cancel{1} \\ 00\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}0000000 \fint 0.0010 \\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}0 \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}1 \\ \cancel{1}\cancel{1}1 \end{array}$$

an et sic $\frac{1}{5}$ $\qquad \begin{array}{l} 0 \\ 0000\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}11111 \fint 000101 \\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}1 \\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}0 \\ \cancel{1}\cancel{1}1 \end{array}$

5 (40813). DE UTILITATE NOTARUM , ET ; [1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 9 Bl. 59. 1 Streifen ca 7,0 × 2,6 cm. 1 S. auf Bl. 59 v°. — Bl. 59 r° leer.
Cc 2, Nr. 1546

Datierungsgründe: [noch]

Utilis in calculo nota , verb. gr. ;

$3 + 4 + 5 = 12; : 2 = 6$. Quod significat $3 + 4 + 5$ esse aequal. ipsi 12 et ipsum 12 divisum per 2, dare 6. ut si pro 3, 4, 5, scriberentur a, b, c. fieret:

$a + b + c = 12; : 2 = 6.$

Si scripsissemus $a + b + c = 12 : 2 = 6$. sensus fuisset $a + b + c$ aequari 6.

6 (40833). CHARACTERISTICA GEOMETRICA
20. August 1679

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 1–16. 8 Bog. 2° halbbrüchig beschrieben. 32 S. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Math. Schr.* 5, 1858, S. 141–168; 2. Echeverría, *La Caractéristique*, Teil 2, Paris 1979, S. 144–204–205–211; 3. Leibniz, G. W., *La caractéristique géométrique*. Hrsg. v. J. Echeverría u. M. Parmentier. Paris 1995. S. 142–233; 4. (span. Übers. 2.) *Leibniz: Obras filosóficas y científicas*, Vol. 7B: *Escritos matemáticos*, hrsg. v. Mary Sol de Mora Charles, Granada 2015, S. 439–480; 5. (engl. Teilübers.) R. Arthur, *Leibniz on Time, Space and Relativity*, 2021, S. 357–359.

10 Augusti 1679.

Characteristica Geometrica

(1) C h a r a c t e r e s sunt res quaedam quibus aliarum rerum inter se relationes exprimuntur, et quarum facilior est quam illarum tractatio. Itaque omni operationi quae fit in characteribus respondet enuntiatio quaedam in rebus: et possumus saepe ipsarum rerum considerationem differre usque ad exitum tractationis. Invento enim quod quaeritur in characteribus facile idem invenietur in rebus, per positum ab initio rerum characterumque consensum. Ita machinae exhiberi possunt modulis, corpora solida repraesentari possunt in plana tabula, ita ut nullum sit punctum corporis, cui non respondens aliud assignari possit in tabula secundum leges perspectivae. Itaque si quam operationem geometricam scenographica ratione in tabula plana super imagine rei peregerimus; poterit eventus illius operationis exhibere punctum aliquod in Tabula, cui facile sit invenire punctum respondens in re. Ac proinde solutio problematum stereometricorum in plano peragi poterit.

12 *(1)* Characterum utilitas in eo consistit ut dum ipsi tractantur, de re *(a)* ipsa *(b)* qvam repraesentant cogitare necesse non sit donec sub exitum tractationis qvod inventum est in characteribus rursus ad rem ipsam transferatur *(2)* (1) C h a r a c t e r e s *L* 12 sunt *(1)* qvaedam rei *(a)* signa *(b)* notae qvibus *(aa)* ipsae *(bb)* aliarum *(2)* res *L* 12 f. relationes *(1)* exprimi possunt, Unde fit ut operationi qvae fit in characteribus respondeat semper *(2)* exprimuntur *L* 14 respondet *(1)* consideratio *(2)* enuntiatio *L* 14 saepe *(1)* usqve ad exitum *(a)* cons *(b)* tractationis *(2)* ipsarum *L* 15 exitum *(1)* considerationis *(2)* tractationis *L* 17 consensum. *(1)* ita delineationibus in tabula plana factis exprimi possunt *(2)* Ita *(a)* corpora *(b)* machinae *L* 19 in tabula *erg. L* 20 scenographica ratione *erg. L* 20 f. peregerimus; *(1)* poterimus *(2)* poterit *(a)* ex *(b)* eventus *L* 21 f. cui *(1)* respondeat pun *(2)* facile sit *(a)* pun *(b)* invenire … re |, qvaesitum *gestr.* |. Ac *L*

(2) Quanto autem characteres sunt exactiores, id est quo plures rerum relationes exhibent, eo majorem praestant utilitatem, et si quando exhibeant omnes rerum relationes inter se, quemadmodum faciunt characteres Arithmetici a me adhibiti, nihil erit in re quod non per characteres deprehendi possit: Characteres autem Algebraici tantum praestant quantum Arithmetici, quia significant numeros indefinitos. Et quia nihil est in Geometria quod non possit exprimi numeris, cum Scala quaedam partium aequalium exposita est, hinc fit, ut quicquid Geometricae tractationis est, etiam calculo subjici possit.

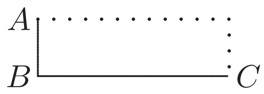
(3) Verum sciendum est, easdem res diversis modis in characteres referri posse, et alios aliis esse commodiores. Ita Tabula in qua corpus arte perspectiva delineatur potest et gibba esse, sed praestat tamen usus tabulae planae; et nemo non videt characteres numerorum hodiernos, quos Arabicos vel Indicos vocant, aptiores esse ad calculandum, quam veteres Graecos et Romanos; quanquam et his calculus peragi potuerit. Idem et in Geometria usu venit; nam Characteres Algebraici neque omnia quae in spatio considerari debent, exprimunt; (Elementa enim jam inventa et demonstrata supponunt;) neque situm ipsum punctorum directe significant; sed per magnitudines multa ambage investigant. Unde fit ut difficile sit admodum quae figura exhibentur exprimere calculo; et adhuc difficilius calculo inventa efficere in figura: itaque et constructiones quas calculus exhibet plerumque sunt mire detortae et incommodae. Quemadmodum alibi ostendi exemplo problematis hujus[:] data basi, altitudine et angulo ad verticem invenire Triangulum.

(4) Equidem animadverto Geometras solere descriptiones quasdam figuris suis adjicere, quibus explicentur figurae, ut quae ex figura ipsa satis cognosci non possunt, ut linearum aequalitates ac proportionalitates saltem ex verbis adjectis intelligantur: plerumque et longius progrediuntur, et multa verbis exponunt, etiam quae ex figura ipsa sunt manifesta, tum ut ratiocinatio sit severior, nihilque a sensu atque imaginatione pen-

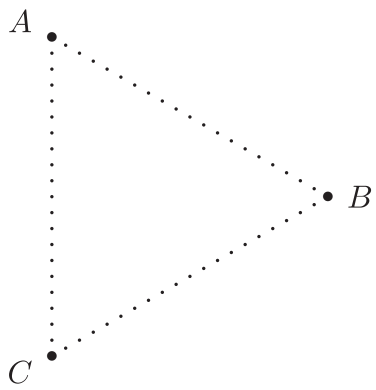
2 utilitatem *(1)*; ut *(2)*, *(a)* qvod numeros *(b)* et *L* 3 a me adhibiti *erg. L* 4 possit: *(1)* ita etiam characteres Algebraici, hun *(2)* Characteres *L* 10 f. potest | non plana tantum, sed *gestr.* | et *L* 14 spatio | extenso *gestr.* | considerari *L* 15 f. exprimunt; | (Elementa ... supponunt;) *erg.* | neqve | satis *gestr.* | situm ... directe *(1)* exhibent *(2)* significant *L* 16 multa ambage investigant. *erg. L* 21 f. adjicere, *(1)* ex qvibus modus figuram delinean *(2)* qvibus *L* 22 satis | certo *gestr.* | cognosci *L* 25–20,1 manifesta *(1)* | eo *nicht gestr.* | ut arbitror consilio, *(2)* tum *(3)* | tum ... tum *erg.* | ut *L*

19 ostendi: Vgl. N. 40834 (40834) vom 19. August 1679.

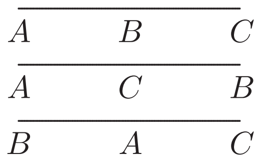
deat sed omnia rationibus transigantur; tum ut figurae ex descriptione delineari, aut si forte amissae sint, restitui possint.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Hoc autem quamvis non satis exacte observent, praebuere tamen nobis Characteristicae Geometricae velut vestigia quaedam ut cum Geometrae dicunt rectang. *ABC* intelligunt factum ex ductu *AB* super *BC* ad angulos rectos. Cum dicunt *AB* aequ. *BC* aequ. *AC* exprimunt Triangulum aequilaterum. Cum dicunt ex tribus *AB*. *BC*. *AC*. duo quaedam aequari tertio designant omnia tria *A*. *B*. *C*. esse in eadem recta.

(5) Ego vero cum animadverterem hoc solo literarum, puncta figurae designantium usu nonnullas figurae proprietates posse designari; cogitare porro coepi, an non omnes punctorum figurae cujusque relationes iisdem literis ita designari possint, ut tota figura characteristice exhibeatur, et quae crebris linearum ductibus, vix ac ne vix quidem praestantur sola harum literarum collocatione ac transpositione inveniantur. Nam plerumque confusio oritur in figura ex multiplicibus linerarum ductibus praesertim cum adhuc tentandum est, cum contra tentamenta characteribus impune fiant. Sed subest aliquid majus nam poterimus characteribus istis veras definitiones omnium exprimere quae sunt Geometricae tractationis, et analysin ad principia usque nempe axiomata et postulata

2–5 possint. *(1)* Habemus ergo *(2)* |Hoc *(a)* tamen *(b)* autem ... nobis *erg.*| Characteristicae *L* 7 aeqvilaterum cum dicunt *(1)* AB + BC aeqv. AC. eo ipso designant puncta A. B. C. esse in eadem recta *(2)* ex tribus *L* 9 animadverterem *(1)* hac sola literarum, puncta figurae designantium *(a)* expressio *(b)* collocatione *(2)* hoc *L* 15 est, *(1)* solida *(2)* tantaqve est considerationum multitudo, ut *(3)* cum *L* 17 tractationis, *(1)* ultimam ana *(2)* et analysin ad *(a)* ultima usqve *(b)* prima *(c)* principia *L* continuare cum Algebra sibi non sufficiat, sed propositionibus per Geometriam inventis uti cogatur; et dum omnia ad duas illas propositiones, quarum una duo quadrata in unum addit, altera vero triangula similia comparat, referre conatur pleraque a naturali ordine detorquere cogatur.

(6) Nos vero ubi semel Elementa characteribus nostris demonstraverimus, facile poterimus modum deprehendere inveniendi problematum solutiones quae statim eadem opera exhibeant constructiones et demonstrationes lineares; cum contra Algebraici inventis valoribus incognitarum de constructionibus adhuc soliciti esse debeant et constructionibus repertis demonstrationes lineares quaerant. Itaque miror homines non considerasse, si demonstrationes et constructiones esse possunt lineares omni calculo exutae, multoque breviores, profecto etiam inventionem dari debere linearem: nam in lineari non minus quam algebraica Synthesi regressum dari necesse est. Causa autem cur analysis linearis nondum deprehensa fuerit haud dubie nulla alia est, quam quod Characteres nondum inventi sunt quibus ipse situs punctorum directe repraesentaretur, nam in magna rerum multitudine et confusione sine characteribus expedire sese difficile est.

(7) Quod si jam semel figuras et corpora literis exacte repraesentare poterimus, non tantum Geometricam mirifice promovebimus, sed et opticen et phoronomicam, et mechanicam, in universum quicquid imaginationi subjectum est, certa methodo et velut analysi tractabimus, efficiemusque arte mirificia ut machinarum inventiones non sint futurae difficiliores quam constructiones problematum Geometriae. Ita etiam nullo negotio sumtuque machinae etiam valde compositae imo et res naturales delineari poterunt sine figuris, ita ut posteritati transmittantur, et quandocunque lubebit figurae ex descriptione summa cum exactitudine formari possint. Cum nunc quidem ob delineandarum figurarum

2 propositiones, *(1)* pythagoricam et *(2)* qvarum *L* 6 problematum *(1)* constructiones *(a)* ita ut postea ex *(b)* ita ut postea *(2)* solutiones *L* 9 f. qvaerant. *(1)* Nos ver *(2)* Nos vero ubicunqve *(3)* | itaqve ... si *erg.* | demonstrationes *L* 10 f. lineares, | omni ... breviores *erg.* | *(1)* etiam inv *(2)* profecto etiam *(a)* inventione ⟨illa⟩ uti potuissemus lineare: qvidni enim in linearibus non minus qvam algebraicis *(b)* inventionem *L* 12 qvam *(1)* algebraico calculo regressus detur *(2)* algebraica *L* 12 est. *(1)* Obstitit tantum *(2)* Causa *L* 14 qvibus *(1)* accurate *(2)* ipse *L* 15 f. est. *(1)* Qvodsi jam semel *(a)* plana solidaqve Geometria char *(b)* qvicqvid planae solidaeqve Geometriae subjectum est, *(2)* (7) Qvod *L* 17 f. tantum *(1)* imaginationem *(2)* Geometriam mirifice *(a)* juvabimus, *(b)* promovebimus, sed et *(aa)* qvicqvid imaginationi subjectum est, nimirum *(bb)* opticen, et *(aaa)* scientiam mot *(bbb)* phoronomicam, et mechanicam, *(aaaa)* et textoriam artem, omnia ⟨—⟩ *(bbbb)* in universum *L* 20–22,4 Geometriae. | ita enim ... compositae *(1)* describi poterunt *(2)* imo ... ob *(a)* taedium *(b)* delineandarum ... patet *erg.* | poterunt *L*

difficultatem, sumtusque multa pereant, hominesque a rerum sibi exploratarum atque reipublicae utilium descriptione deterreantur, verba etiam neque satis exacta neque satis apta hactenus ad descriptiones concinnandas habeantur, quemadmodum vel ex botanicis et armorum insigniumque explicatoribus patet. Poterunt enim caeterae quoque qualitates quibus puncta quae in Geometria, ut similia considerantur inter se differunt facile sub characteres vocari: Ac profecto tum demum aliquando spes erit penetrandi in naturae arcana, cum id omne quod alius vi ingenii atque imanginationis ex datis extorquere potest, nos ex iidem datis certa arte securi et tranquilli educemus.

(8) Cum vero nihil tale cuiquam hominum, quod sciam in mentem venerit, nec ulla uspiam praesidia apparerent, coactus sum rem a primis initiis repetere, quod quam difficile sit nemo credit nisi expertus. Itaque diversis temporibus plus decies rem aggressus sum diversis modis, qui omnes erant tolerabiles et praestabant aliquid, sed scrupulositati meae non satisfaciebant. Tandem multis resectis ad simplicissima me pervenisse agnovi, cum nihil aliunde supponerem, sed ex propriis characteribus omnia ipse demonstrare possem. Diu autem haesi etiam reperta vera characteristicae hujus ratione, quia ab Elementis per se facilibus atque aliunde notis incipiendum mihi videbam, quae tanta scrupulositate ordinare minime gratum esse poterat. Perrexi tamen et molestia hac superata denique ad majora sum eluctatus.

(9) Verum ut omnia ordine tractemus sciendum est primam esse considerationem ipsius s p a t i i, id est Extensi puri absoluti. P u r i inquam a materia et mutatione a b s o l u t i autem, id est illimitati atque omnem extensionem continentis. Itaque omnia puncta sunt in eodem spatio et ad se invicem referri possunt.

An autem spatium hoc a materia distinctum res quaedam sit, an solum apparitio constans seu phaenomenon, nihil refert hoc loco.

7 cum *(1)* efficere arte poterimus, ut *(2)* id *L* 7 datis *(1)*, nos secuta arte velut ludentes conseqvemur *(2)* ⟨—⟩ *(3)* extorqvere *L* 15 qvia *(1)* res faciles *(2)* ab *L* 19 *(1)* Omnia in Geometria punctorum tantum consideratione absolvuntur. Nam et lineae *(a)* proprietas *(b)* natura ex eo constat, *(aa)* ⟨data⟩ qvodcunqve eius *(bb)* punctum eius utcunqve assumtum, certam qvandam ad data aliqvot puncta habet relationem, per qvam ex ipsis determinari sive inveniri potest. Superficies autem vel per lineas, vel immediate per puncta cognosci possunt, et corpora per superficies vel lineas vel puncta. Punctorum autem duorum *(aaa)* considerat *(bbb)* consideratio *(ccc)* simul existentium consideratio nihil aliud qvam situm unius ad alterum sive distantiam continet, vel qvod idem est rectam interceptam *(2)* (9) Verum *L* 20 et *(1)* mobilitate *(2)* mutatione *L* 21 f. omnia *(1)* qvae supponi po *(2)* puncta sunt in eodem *(a)* spatio, Unde intelligi potest impossibile esse *(b)* spatio *L* 23 hoc *(1)* sit *(2)* a materia *(a)* separatum sit *(b)* distinctum *L*

(10) Proxima est consideratio P u n c t i , id est ejus quod inter omnia ad spatium sive extensionem pertinentia simplicissimum est quemadmodum enim Spatium continet extensionem absolutam, ita punctum exprimit id quod in extensione maxime limitatum est, nempe simplicem situm. Unde sequitur punctum esse minimum, et partibus carere et omnia puncta congruere inter se (sive coincidere posse), adeoque et similia atque si ita loqui licet aequalia esse.

(11) Si duo puncta simul existere sive percipi intelligantur, eo ipsa consideranda offertur relatio eorum ad se invicem quae in aliis atque aliis binis punctis diversa est, nempe relatio loci vel situs quem duo puncta ad se invicem habent, in quo intelligitur eorum distantia. Est autem d i s t a n t i a duorum, nihil aliud quam quantitas minimae unius ad alterum viae, et si bina puncta A. B. servato situ inter se binis aliis punctis C. D. etiam situm inter se servantibus simul congruant aut succedere possint utique situs sive distantia horum duorum eadem erit quae distantia illorum duorum. Nam congrua sunt quorum unum alteri coincidere potest, nulla intra alterutrum mutatione facta. Coincidentium autem $A.B.$ itemque $C.D.$ eadem distantia est, ergo et congruorum, quippe quae sine distantiae intra $A.B.$ vel intra $C.D.$ mutatione facta, possunt coincidantia reddi.

(12) V i a autem (qua et distantiam definivimus) nihil aliud est quam locus continuus successivus. Et via puncti dicitur L i n e a . Unde et intelligi potest extrema lineae esse puncta, et quamlibet lineae partem esse lineam, sive punctis terminari. Est autem via continuum quoddam, quia quaelibet ejus pars extrema habet cum alia anteriori atque posteriori parte communia. Unde consequitur, ut hoc obiter addam, si linea quaedam in aliqua superficie ducatur, non posse aliam lineam in eadem superficie continue progredientem inter duo prioris lineae extrema transire, quin priorem secet.

(13) Via lineae ejusmodi ut puncta ejus non semper sibi invicem succedant, s u -

2–4 qvemadmodum ... situm *erg.* *L* 4 f. carere | (pars enim toto minor) *gestr.* | et *L* 5 (sive coincidere posse) *erg.* *L* 11 viae *(1)* . Via autem a puncto ad punctum intelligitur esse *(a)* via alicuius *(b)* locus continuus puncti, | m⟨—⟩ *erg.* | qvod successivus binis primum uni ex binis punctis deinde alteri coincidit congruit, et medio tempore ordine percurrit puncta continui cuiusdam ab uno ex binis illis punctis terminati, qvae puncti vid dicitur L i n e a *(c)* locus *nicht gestr.* *(2)* , et *L* 11 servato situ inter se *erg.* *L* 12 simul *(1)* congruere possint utiqve distantia eorum sibi sit *(2)* congruant *L* 13 f. sunt *(1)* qvae servato situ sine *(2)* qvorum *L* 19 terminari | Via autem minima a puncto ad punctum necessario | via puncti seu *erg.* | linea est, nam utiqve via puncti *(1)* viae rei alterius *(a)* continui *(b)* extensi *(a)* major est *(2)* minor *(a)* est *(b)* sive simplicior est qvam via alterius extensi. *gestr.* | Est *L* 21 ut ... addam *erg.* *L* 22 superficie *(1)* describatur *(2)* ducatur *L* 22 eadem superficie *(1)* indefinite *(2)* continue *L* p e r f i c i e s est; et via superficiei ut puncta ejus non semper sibi invicem succedant, est c o r p u s . Corpus autem moveri non potest, quin omnia ejus puncta sibi succeant (quemadmodum demonstrandum est suo loco), et ideo novam dimensionem non producit. Hinc apparet nullam esse partem corporis cujus ambitus non sit superficies, nullamque esse partem superficiei cujus ambitus non sit linea. Patet etiam extremum superficiei pariter atque corporis in se redire sive esse a m b i t u m quendam.

(14) Assumtis jam duobus punctis eo ipso determinata est via puncti per unum pariter atque alterum simplicissima possibilis: alioqui eorum distantia non esset determinata, adeoque nec situs. Haec autem linea quae a duobus solis punctis per quae transit determinata est nimirum, ut posito eam per duo data punta transire, ipsa sola hinc consideranda offeratur, ea inquam linea dicitur r e c t a , et licet utcunque producatur dicitur una eademque recta. Ex quibus sequitur non posse duo eadem puncta duabus rectis communia esse, nisi ea duae rectae quantum satis est productae conincidant: ac proinde duas recta non habere segmentum commune (alioqui et duo segmenti hujus extrema haberent communia), nec spatium claudere sive componere ambitum in se redeuntem. Alioqui recta una ab altera digressa ad eam rediret, adeoque in binis punctis ei occurreret. Pars quoque rectae est recta nam et ipsa determinatur per duo illa puncta sola, per quae sola determinatur totum. Determinatur inquam, id est omnia ejus puncta consideranda seu percurrenda ex sola duorum punctorum consideratione offeruntur. Ex his patet si $A.B.C.$ et $A.B.D.$ congrua sint, et $A.B.C.$ in una recta esse dicantur, coincidere C et D. Seu si punctum tantum unicum sit quod eam habeat ad duo puncta relationem quam habet, erunt tria puncta in una recta. Contra si plura duobus sint puncta eodem modo se habentia ad tria vel plura puncta data erunt haec quidem in eadem recta, illa extra eam, cujus rei ratio est, quod quae ad determinantia eodem modo se habent, eo ipso ad determinata eodem modo se habent, itaque tria plurave puncta in eadem recta haberi possunt pro duobus. Puncta autem eodem modo se habentia requiro plura duobus. (Nam si sint duo tantum, res procedit modo tria ad quae unumquodque duorum eodem modo

3 (qvemadmodum ... suo loco) *erg. L* 4 cujus *(1)* extremum *(2)* ambitus *L* 7 est | eorum distantia, sive *erg. u. gestr.* | via *(1)* unius ad *(2)* puncti *L* 9 per qvae transit *erg. L* 11 licet *(1)* indefinite *(2)* utcunqve *L* 14 f. (alioqvi ... communia) *erg. L* 15 redeuntem. *(1)* Seqvitur et partem rectae *(2)* alioqvi *L* 17 recta, *(1)* nam et ipsa determinatur | seu consideranda offertur nimirum qvoad omnia sua puncta *erg.* | per duo illa puncta sola, per qvae determinatur totum *(2)* nam *L* 19 punctorum | per qvae transit *gestr.* | consideratione *L* 19–25,1 Ex his ... recta) *erg. L* 22 si *(1)* qvod punctum plu *(2)* plura | duobus *erg.* | sint *L* 27 qvae *(1)* | unius ⟨—⟩ *erg.* | se habent eodem modo neqve sint *(2)* unumqvodqve *L*

se habet, sint in eodem plano, licet non sint in eadem recta.)

Recta quoque uniformis est ob simplicitatem, seu partes habet toti similes. Et omnis recta rectae similis est quia pars unius alteri congrua est, pars autem rectae toti similis. Et in recta distingui non potest concavum a convexo, sive recta non habet duo latera dissimilia, vel quod idem est; si duo puncta sumantur extra rectam, quae eodem modo se habeant ad extrema rectae vel duo quaelibet puncta in recta, ea sese etiam eodem modo habebunt ad totam rectam, seu ad quodlibet punctum in recta; a quocunque demum latera rectae illa duo extra rectam puncta sumantur. Cujus rei ratio est, quia quae ad puncta determinantia aliquod extensum eodem modo se habent modo, ea etiam ad totum extensum eodem modo se habere necesse est. Denique recta a puncto ad punctum minima est ac proinde distantia punctorum nihil aliud est quam quantitas rectae interceptae. Nam via minima utique magnitudine determinata est a solis duobus punctis; sed et positione determinata est neque enim in spatio absolute plures minimae a puncto ad punctum esse possunt (ut in sphaerica superficie plures sunt viae minimae a polo ad polum). Nam si minima est absolute, extrema non possunt diduci manente lineae quantitate ergo nec partium extrema (nam et partes inter sua extrema minimas esse necesse est) salva singularum partium quantitate, ergo nec salva totius quantitate. Jam si lineae duo extrema maneant immota et linea ipsa transformetur, necesse est puncta ejus aliqua a se invicem diduci. Itaque extremis rectae immotis, salva quantitate minima inter duo puncta, in aliam transformari non potest, itaque non dantur plures minimae incongruae dissimiles inter duo puncta. Quare si duae inter duo puncta essent minimae essent congruae inter se. Jam una aliqua minima est recta (ut supra ostendimus), ergo et alia minima erit recta. At duae rectae inter duo puncta coincidunt. Itaque minima inter duo puncta non nisi unica est.

3 qvia ... similis *erg. L* 6 vel ... recta *erg. L* 12 interceptae. *(1)* Nam si determinata est via *(2)* Nam *(a)* viae minimae | qvantitas *erg.* | utiqve *(b)* via minima | utiqve magnitudine *erg.* | determinata *L* 12 f. punctis; *(1)* res plures minimae esse possunt, alioqvi *(a)* novae determinatione discern *(b)* novum determinans accedere deberet qvo una via minima ab alia via minima discerneretur *(2)* sed *L* 14 f. (ut ... polum) *erg. L* 17 est) *(1)* . ergo linea transformari non potest *(a)* salva qvantitate, *(aa)* ergo omnis cur *(bb)* transformatione *(cc)* transformatio enim salva extremorum distantia, sine *(aaa)* partium saltem did *(bbb)* punctorum qvorundam mediorum partim diductione *(b)* salva extremorum distantia *(2)* ergo salva lineae qvantitate puncta media non possunt moveri *(3)* Mutatio ergo partium qvantitate *(4)* salva *L* 18 immota *(1)* moveaturqve punctum eius medium, *(2)* et *L* 21 f. minimae *(1)* ambae essent rectae. Supra autem demonstratum est congruerent inter se seu ambae essent rectae *(2)* essent *L* 23 erit recta. *(1)* Ergo duae erunt rectae inter duo puncta *(2)* At *L*

(15) Modus generandi lineam rectam simplicissimus hic est: Sit corpus aliquod cujus duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescentia incident in rectam quae per duo puncta fixa transit. Manifestum enim est ea puncta locum habere ex datis duobus punctis fixis determinatum seu manentibus duobus punctis fixis et toto solido existente, moveri non posse; cum caetera extra rectam eadem servata ad duo puncta fixa relatione, locum mutare possint. Unum hic incommodum est, quod ea recta hoc modo descripta non est permanens. Aliter generari potest linea recta, si qua detur linea flexilis, sed quae in majorem longitudinem extendi non possit. Nam si extrema ejus diducantur quousque id fieri potest; linea flexilis in rectam erit transmutata. Eodem modo et plani ac Circuli et Trianguli proprietates ex constitutis definitionibus duci possent. Nam de linea recta in speciem tantum disseruimus.

(16) Heac omnia animo consequi non difficile est, etsi neque figurae nisi imaginatione delineentur, neque characteres adhibeantur alii quam verba, sed quia in ratiocinationibus longe productis neque verba ut hactenus concipi solent satis exacta sunt, nec imaginatio satis prompta; ideo figuras hactenus adhibuere Geometrae. Sed praeterquam quod saepe delineantur difficulter, et cum mora quae cogitationes optimas interea effluere sinit; nonnumquam et ob multitudinem punctorum ac linearum schemata confunduntur, praesertim cum tentamus adhuc et inquirimus; ideo characteres sequenti modo cum fructu adhiberi posse putavi.

(17) Spatium ipsum seu extensum (id est continuum cujus partes simul existunt) non aliter hic quidem designari commode posse video quam punctis. Quoniam figurarum delineationes exacte exprimere propositum est, et in his non nisi p u n c t a et t r a c t u s q u i d a m c o n t i n u i ab uno puncto ad aliud spectantur, in quibus puncta infinita pro arbitrio sumi possunt.

1 (15) *(1)* Ex his duos etiam habemus modos *(2)* Modus *L* 1 rectam *(1)* , | hic est *erg.* | unus per simplicem motum *(a)* hoc modo *(b)* corporis cuiuscunqve hoc modo: *(2)* simplicissimus *L* 3 qvae *(1)* duo puncta fixa connectit *(2)* per *L* 4 est *(1)* haec sola *(a)* ex *(b)* ad duo puncta fixa esse determinata, *(aa)* sola *(bb)* nam si et ipsa moverentur, seqvetur diversa eorum loca | eadem *nicht gestr.* | *(2)* ea *L* 4 f. seu ... existente, *(1)* locum mutare *(2)* moveri non posse *erg. L* 6 f. Unum ... permanens *erg. L* 10–12 Eodem ... disseruimus *erg. L* 17 saepe *(1)* difficulter delineantur *nicht gestr.* *(2)* delineantur *L* 17 cum *(1)* taedio *(2)* mora *L* 22 aliter | hic qvidem *erg.* | designari | commode *erg.* | posse *L* 24–27,2 spectantur, *(1)* hinc tractus autem ipsi *(2)* | in ... possunt *erg.* | ideo *L*

fig. 1.

[*Fig. 4*]

Ideo puncta quidem certa exprimemus literis solis ut A, item B fig. 1.

(18) Tractus autem continuos exprimemus per puncta quaedam incerta sive arbitraria, ordine quodam assumta, ita tamen, ut appareat semper alia intra ipsa tum ultra citraque semper posse sumi.

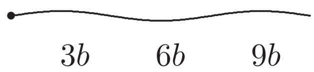


fig. 2

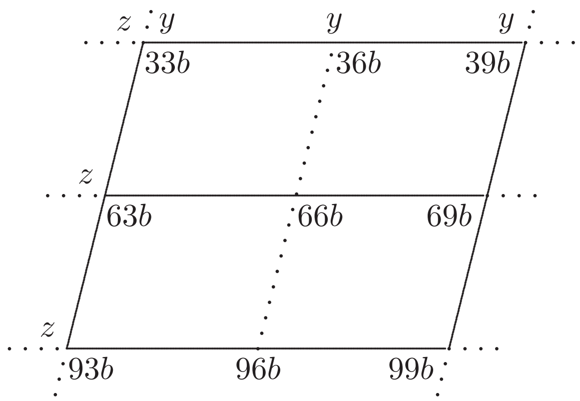
[*Fig. 5*]

Ita $3b\,6b\,9b$ fig 2. significabit nobis totum tractum, cujus quodlibet punctum appellatur b. et in quo pro arbitio assumsimus partes duas, unam cujus extrema sunt puncta $3b$. $6b$, alteram cujus extrema sunt puncta $6b$. $9b$. Unde patet illas duas partes continuas esse, cum habeant commune punctum $6b$. et divisio earum sit facta pro arbitrio. Hic tractus in quo duarum partium commune extremum nullum aliud est quam punctum, dicitur Linea, et repraesentari etiam potest motu puncti, b, quod viam quandam percurrit, sive vestigia tot quot puncta diversa $3b$. $6b$. $9b$. relinquere intelligitur. Hinc linea dici potest via puncti. Via autem est locus puncti continuus successivus. Potest et per compendium designari hoc modo: Linea $\overline{y}b$ designando per literam $\overline{y}$. vel aliam numeros ordinales pro arbitrio sumtos collective. Cum vero scribemus: $y\,b$ sine nota supra y intelligimus, quodcunque lineae $\overline{y}b$ punctum, distributive.

2 qvidem *(1)* determinata *(2)* certa exprimemus literis | simplicibus *gestr.* | solis *(a)* ut A. B. *(b)* ut *L* 2 f. fig. 1. *(1)* Puncta autem incerta, et qvae pro arbitrio assumi possunt, exprimemus adjectis numeris, ut appareat tum haec puncta tum alia qvoqve inter ipsa, et ultra citraqve ipsa posse assumi. ita lineam *(2)* Tractus autem continuos *(3)* (18) Tractus *L* 8 duas, *(1)* qvarum extrema sunt puncta 3b et 6b *(2)* unam *L* 14–28,1 puncti. *(1)* Via autem est locus continuus successivus. *(2)* Via ... puncti | continuus *erg.* | successivus | Potest ... aliam *(a)* puncta pro arbitrio sumta *(b)* numeros ... distributive *erg.* | (18 | bis *erg. Hrsg.* |) Eodem *L*

(18 bis) Eodem modo tractus quidam fingi possunt, quorum partes cohaerent lineis, vel qui describi intelliguntur motu lineae tali ut puncta ejus non succedant sibi sed ad nova deveniant.

fig. 3



[*Fig. 6*]

Hic tractus sive via lineae dicitur superficies, ponamus nimirum in fig. 3 lineam supradictam $3b6b9b$ moveri, ejusque locum unum appellari $33b36b39b$, locum alium sequentem $63b66b69b$ et rursus alium sequentem $93b96b99b$, fiet superficies $33b36b39b$, $63b66b69b$, $93b96b99b$ quam et per compendium sic designabimus, $\overline{zy}b$.

(19) Ubi patet etiam, quemadmodum motu lineae $\overline{y}b$ secundum puncta $\overline{z}\,b$ describitur superficies $\overline{z\,y}\,b$. Ita vicissim motu linea $\overline{z}\,b$ secundum puncta $\overline{y}\,b$ describi eandem superficiem $\overline{y\,z}\,b$. At $y\,z\,b$ significabit unaquaeque loca puncti b, non collective, sed distributive, et $z\,\overline{y}\,b$ significat unam aliquam lineam $\overline{y}\,b$ in superficie $\overline{z\,y}\,b$ sumtam quamcunque etiam non collective sed distributive.

(20) Neque refert cujus figurae sint ipsae lineae quae moventur; aut etiam secundum quas fit motus, sive quas unum ex lineae motae punctis, describit, inspiciatur figura 4.

1 qvorum *(1)* extrema *(2)* partes *L* 2 non *(1)* percurrant *(2)* succedant *L* 5 in fig. 3 *erg. L* 12 $\overline{\mathrm{y\ z}}$ b. *(1)* Neqve referre cuius figurae sint lineae describentes *(2)* At y z b significabit *(a)* omnia puncta *(b)* locum punctorum qvorumcunqve *(c)* unaqvaeqve *L*

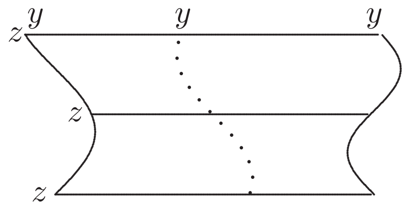
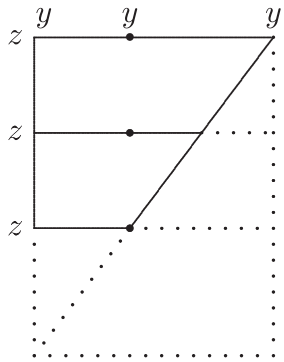


fig. 4

[*Fig. 7*]

Potest etiam fieri ut durante motu, ipsa linea mota figuram mutet, ut linea $\overline{z}b$ in dicta fig. 4. Quod clarius intelligi potest, si quis cogitet quam superficiem descripturus esset arcus, qui durante explosione utcunque moveretur totus, exempli causa si caderet in terram.

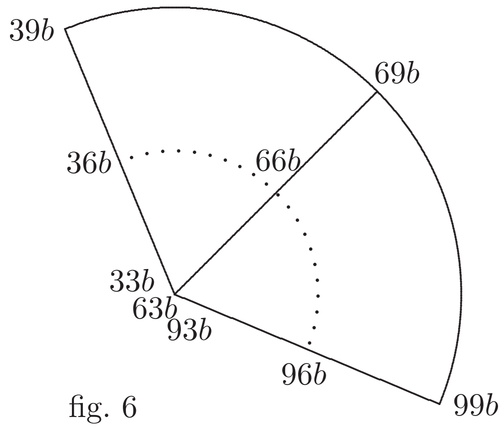
fig. 5.



[*Fig. 8*]

Potest etiam linea mota durante motu partes aliquas amittere, quae ab ea sive re sive animo separantur, ut patet ex fig. 5.

4 totus *(1)*. Fieri etiam potest, ut *(2)*, exempli *L*



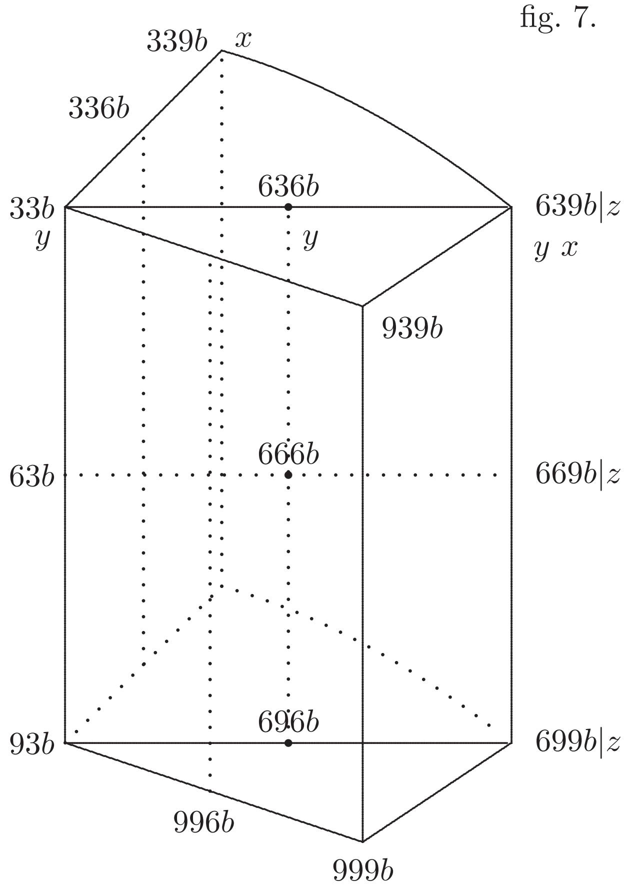
[*Fig. 9*]

Fieri etiam potest, ut punctum unum plurave, exempli gratia 3*b* in linea mota durante motu quiescat, et loca ejus expressa velut plura, exempli gratia 33*b*. 63*b*. 93*b*., inter se coincidant, ut intelligitur inspecta f i g. 6 . Sed hae varietates omnes multaeque aliae plures etiam characteribus designari poterunt, quamadmodum suo loco patebit.

(21) Quemadmodum autem lineae motu describitur Tractus ille quem vocant Superficiem, ita superficiei motu (tali ut partes ejus vel puncta sibi non ubique succedant) describitur Tractus quem vocant solidum sive corpus.

2 punctum *(1)* aliqvod lineae motae *(2)* unum plurave | exempli gratia 3b *erg.* | in *L*

fig. 7.



[*Fig. 10*]

Quod exemplo uno satis intelligi potest f i g. 7., ut si immota manente linea (recta) $\overline{z}3b$ (nempe $33b63b93b$) in superficie (rectangulo) $\overline{yz}b$ (nempe $\left\{\begin{matrix} 33b\ 63b\ 93b \\ 36b\ 66b\ 96b \\ 39b\ 69b\ 99b \end{matrix}\right\}$) moveatur haec ipsa superficies, motu suo describet solidum

2–5 potest | fig. 7 *erg.* | , *(1)* ut si rectanguli seu superficiei *(2)* ut si *(a)* circa | lineam *erg.* | (rectam) z⟨– – –⟩ *(b)* immota manente linea (recta) $\overline{\text{z}}$3b *(aa)* in superficie (rectangulo) $\overline{\text{zy}}$b *(bb)* (nempe *L*

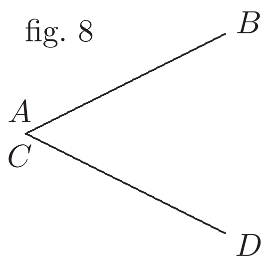
$$\left\{\begin{matrix} 333b\ 336b\ 339b, & 363b\ 366b\ 369b, & 393b\ 396b\ 399b \\ 633b\ 636b\ 639b, & 663b\ 666b\ 669b, & 693b\ 696b\ 699b \\ 933b\ 936b\ 939b, & 963b\ 966b\ 969b, & 993b\ 996b\ 999b \end{matrix}\right\}$$ ubi tamen notandum hoc loco ob rectam $\overline{z}3b$ immotam puncta $333b, 633b, 933b$, ideoque loco omnium in figura reperitur solum $33b$ coincidere itemque puncta $363b, 663b, 963b$, unde etiam in figura habetur tantum $63b$; ac denique cum eodem modo hic coincidant puncta $393b, 693b, 993b$, tamen per $93b$ expressa sint.

Hoc solidum autem per compendium exprimemus hoc modo: $\overline{xyz}b$, et aliquam ejus superficiem seu locum aliquem ipsius $\overline{zy}b$ exprimemus hoc modo $x\overline{zy}b$ (ita exhibetur sectio cylindricae portionis seu solidi hujus facta plano per axem). Potest etiam aliqua ejus superficies assumi hic modo $z\ \overline{xy}b$ (ita exhibetur sectio hujus portionis cylindricae secundum basin seu plano basi parallelo); item hoc modo $y\overline{xz}b$ (ita exhibetur sectio hujus cylindricae portionis per alium cylindrum axem cum isto communem habentem). Aliae quoque sectiones ejusdem Figurae intelligi possunt, quia infiniti etiam fingi possunt modi, eam generandi per motum vel etiam resolvendi in partes secundum certam aliquam legem. Caeterum omnes varietates, quas in superficiei productione vel resolutione paulo ante indicavimus, multo magis in solido locum habere manifestum est. Denique dimensionem aliquam alteriorem solido, seu tractum ipsius solodi motu tali descriptum ut puncta ejus sibi ubique non succedant reperiri non posse, suo loco demonstrandum est.

(22) Porro tractus ipsi seu loca punctorum quorundam indefinitorum, determinantur punctis quibusdam certis, itemque Legibus quibusdam secundum quas ex paucis illis punctis certis caetera puncta indefinita ordine in considerationem venire, et tractus ipsi generari sive describi possint.

Quod antequam exponamus, signa quaedam explicabimus quibus in sequentibus utendum erit. Primum itaque fieri potest ut duo vel plura nomina in speciem diversa non sint revera nisi unius rei sive loci, id est puncti vel lineae alteriusve tractus, atque ita *eadem esse* sive *coincidere* dicentur.

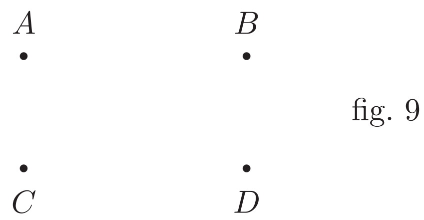
9 f. x$\overline{\text{zy}}$b *(1)* si locum aliqvem ipsius *(2)* ita exhibetur sectio | cylindricae . . . plano *erg.* | per *L* 12 seu . . . parallelo *erg. L* 13 per *(1)* aliam portionem cylindricam *(2)* alium *L* 21 f. certis *(1)* ipsius Tractus productionem *(2)*, itemqve Legibus qvibusdam *(a)* per qvas *(b)* qvas *(c)* secundum . . . illis *(aa)* assumtis *(bb)* punctis *L* 22 indefinita *(1)* ex paucis qvibusdam ut dixi sumtis, *(2)* ordine *L* 23 generari sive *erg. L* 23 f. possint. *(1)* Et qvidem ex uno ⟨—⟩ *(2)* Qvod anteqvam exponamus, | primum *gestr.* | signa *L* 25 in speciem diversa *erg. L* 26 sive loci *erg. L*



[*Fig. 11*]

Ita si sint duae lineae AB et CD, sintque puncta A et C unum idemque hoc ita designabimus: $A \infty C$, id est A et C coincidunt. Hoc maxime usum habebit in designandis punctis aliisque extremis communibus diversorum Tractuum. Idem enim punctum sive extremum suas denominationes habebit, tam secundum unum tractum, quam secundum alterum. Quod si dicatur $A.B \infty C.D.$ sensus erit simul esse $A \infty C$ et $B \infty D$. Idemque est in pluribus. Ab utraque enim enuntiationis parte, idem ordo est observandus.

(23) Quod si duo non quidem coincidant, id est non quidem simul eundem locum occupent, possint tamen sibi applicari, et sine ulla in ipsis per se spectatis mutatione facta alterum in alterius locum substitui queat, tunc duo illa dicentur esse congrua ut AB et CD. in fig. 8.

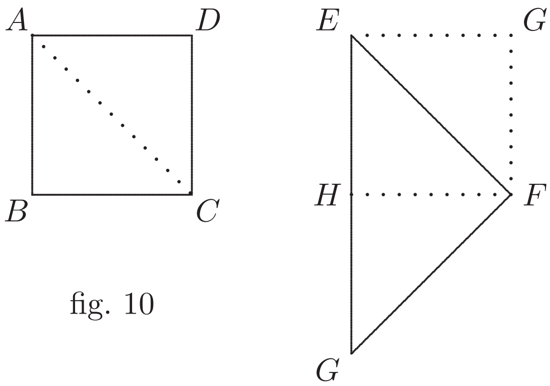


[*Fig. 12*]

3 id est | puncta *gestr.* | A et C *L* 4 communibus *(1)* diversarum figur *(2)* diversorum *L*
6 alterum. *(1)* Qvod si duae res non coincidant qvidem sive eundem locum simul occupent *(2)* Qvod si dicatur *(a)* A. B. coincidere *(b)* A. B ∞ C. D. *L*

Itaque fiet: AB ♉ CD item $A.B$ ♉ $C.D$ in fig. 9. id est servato situ inter A et B, item servato situ inter C. et D. nihilominus $C.D$. applicari poterit ipsi $A.B$ id est simul applicari poterit C ipsi A et D ipsi B.

(24) Si duo extensa non quidem congrua sint, possint tamen congrua reddi, sine ulla mutatione molis sive quantitatis, id est retentis omnibus iisdem punctis; facta tantum quadam si opus est transmutatione, sive transpositione partium vel punctorum; tunc dicentur esse aequalia.



[*Fig. 13*]

Ita in fig. 10 Quadratum $ABCD$ et Triangulum isosceles EFG basin habens EG lateri AB quadrati duplam; aequalia sunt: nam transferatur FHG in EGF quia EGF ♉ FHG. fiet EFG aequ. $EHFG$. Jam $EHFG$ ♉ $ABCD$. ergo EFG aequ. $ABCD$.

Hinc generalius si a ♉ c et b ♉ d erit $a+b \sqcap$ (sive aequ.) $c+d$. Imo amplius: Si a ♉ e, b ♉ f, c ♉ g, d ♉ h fiet: $a+b-c+d \sqcap e+f-g+h$. Sive si duae fiant summae ex quibusdam partibus uno eodemque modo addendo vel subtrahendo; partesque unius sint congruae partibus alterius eodem modo ad totum constituendum concurrentibus, quaelibet unius summae uni alterius summae sibi ordine respondenti; tunc duae summae quae inde fient, non quidem semper congruae erunt, erunt tamen semper aequales.

6 si opus est *erg.* *L* 10 sunt *(1)* sive: qvia ABC aequ. EHF *(a)* et ABC aequ. *(b)* aeqv. ADC aequ. FHG *(2)*: nam *L* 11 ♉ FHG. *(1)* erit *(2)* fiet EHFG ♉ ABCD. Hinc *(3)* fiet *(a)* EHFG aequ. *(b)* EFG *L* 13 sive *(1)* ex congruis qvotcunqve eandem summam *(2)* si *(a)* congrua hinc *(b)* duae fiant summae *(aa)* et partes addendo vel subtrahendo; partesqve illas congruant ordine *(bb)* ex *L* 15 f. concurrentibus *(1)* ordine *(2)* qvaelibet | unius ... alterius summae *erg.* | sibi *L*

Atque ita argumentatio a congruis ab aequalia ipsa aequalium definitione constituetur. Sunt quidem alias aequalia, quorum eadem est magnitudo. Verum ipsa partium congruentium cuidam rei sive mensurae, multitudo, est magnitudo.

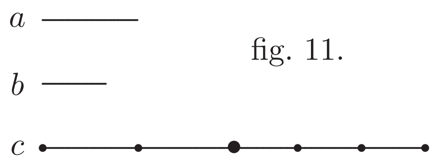


fig. 11.

[*Fig. 14*]

Ut si in fig. 11 sint duo magnitudinem habentia, a et b, et detur res tertia c quae sit bis a + ter b. Patet ejus magnitudinem multitudine partium tum ipsi a tum ipsi b congruentium exprimi. Itaque quae congruae reddi possunt nullo addito vel detracto utique aequalia esse necesse est.

[*Erster Ansatz, gestrichen*]

Cum enim punctum quodvis cuivis congruat, et numerus punctorum in duobur rebus congruis sit idem, hoc est cuilibet puncto in uno respondeat suum proprium in altero, utique aequalia sunt sed quia non satis accurate puncta partes appellantur aut numerum habere dicuntur; et possunt aequalia esse quae nullas habent partes congruentes ut superficies cylindrica et circulus ideo magnitudinem poterimus intelligere generalius esse attributum rei expressum per alias res, ad ipsam pertinentes homogeneas datas manentem etiam harum rerum relatione inter se invicem mutata. Homogeneas intelligo quae in communi aliquo conveniunt, ut punctum, linea, corpus et horum partes. Datas

2 Verum *(1)* magnitudo est *(a)* illud ipsum qvod *(b)* nihil aliud qvam *(2)* ipsa *L* 5 in fig. 11 *erg. L* 7 nullo *(1)* puncto *(2)* addito vel detracto *erg. L* 12 utiqve aeqvalia sunt *erg. L* 13 f. dicuntur; | et ... qvae *(1)* null *(2)* nihil aliud habent congruens qvam pun *(3)* nullas ... circulus *erg.* | ideo *L* 14 poterimus *(1)* definire *(2)* intelligere generalius *(a)* expressionem rei per alias res | ad ipsam pertinentes *erg.* | datas ita determinatas ut nulla qvalibet earum proposita cognosci possit an ad rem pertineat vel non *(b)* esse *L* 17 aliqvo | absoluto ita *gestr.* | conveniunt *L* 17 corpus *(1)* in hoc *(a)* ut situm habeant secund *(b)* spatium pertineant, *(2)* et *L*

id est congruentes certis quibusdam rebus; Determinatas, ita scilicet ut quaelibet earum proposita appareat ex ipsa expressione an ad rem pertineat vel non. Atque ita illud extensi praedicatum per quam determinari potest, an punctum aliquod ad ipsum pertineat, quodque eadem manet mutato punctorum situ inter se ita ut unum alterius vel ambo unius repetitione generari possint, magnitudo extensi appellabitur. Quodsi partes datis quibusdam rebus congruae determinari in re possint, utique et puncta in illis determinari poterunt, adeoque numerus partium rebus quibusdam certis congruentium, cum modum exhibeat omnia rei puncta ita determinandi, ut nihil referat quis sit situs punctorum invicem, utique erit magnitudo.

[*Zweiter Ansatz*]

(25) Verum ut rem istam altius repetamus explicandum est, quid sit pars et totum, quid homogeneum, quid magnitudo, quid ratio. Pars nihil aliud est quam requisitum totius diversum (seu ita ut alterum de altero praedicari nequeat) immediatum, in recto cum correquisitis.

[*Fig. 15*]

Ita AB. requisitum est ipsius AC. id est si non esset AB. neque foret AC. Diversum quoque est, neque enim AC est AB. alioqui enim rationalis est requisitum hominis, sed quia homo est rationalis, ideo rationalis (qui hominis requisitum est,) et homo, idem est, etsi enim expressione differant, re tamen conveniunt. Pars immediatum est requisitum, neque enim connexio interAB et BC pendet a quadam consequentia sive connexione causarum, sed ipsa per se patet, ex hypothesi assumti totius. Est autem in recto cum correquisitis, semper enim convenire debent secundum certum quendam considerandi modum, nam et quae ut Entia tantum, imo et ut cogitabilia spectamus, verbi gratia DEUM,

1 id est | datis *gestr.* | congruentes *L* 2 ex ipsa expressione *erg. L* 3 extensi *(1)* expressio *(2)* praedicatum *L* 4 f. ita ut . . . possint *erg. L* 6 in re *erg. L* 7 partium *(1)* determinatae rei *(2)* dat *(3)* rebus *L* 12 f. reqvisitum | totius . . . nequeat) *erg.* | immediatum *(1)* homogeneum totius *(2)* in recto *L* 21 totius. *(1)* Homogeneum esse intelligo, *(2)* Est *L* 22 qvendam *(1)* assumandi *(2)* considerandi *L*

hominem, virtutem, possumus considerare velut partes unius totius ex ipsis compositi. Excluduntur ergo requisita immediata quidem et diversa ut rationalitas in abstracto quae requisitum est hominis immediatum diversum neque enim homo est rationalitas, attamen non hic spectatur ut conveniens cum homine, sed ut attributum: alioqui sane negari non potest, etiam ex hix duobus: homo et rationalitas fingi posse unum totum, cujus hae partes. At rationalitas hominis pars non erit, requiritur enim ad hominem in obliquo, seu non convenienti quadam ratione, cum aliis quae ad hominem praeterea requiruntur. Sed haec sunt magis metaphysica, nec nisi in eorum gratiam adducuntur, qui notionum intima intelligere desiderant. Simplicus ita definiemus: Partes sunt quae requiruntur ad unum quatenus cum eo conveniunt.

(26) Numerus est cujus ad unitatem relatio est quae inter partem et totum vel totum et partem. Quare fractos etiam et surdos comprehendo.

(27) Magnitudo Rei distincte cognita est numerus (vel compositum ex numeris) partium rei cuidam certae (quae pro mensura assumitur) congruentium. Ut si sciam esse lineam quae bis aequetur lateri ter aequetur diagonali cujusdam quadrati certi mihique satis cogniti, ut ad ipsum cum lubet recurrere possim, ejus lineae magnitudo mihi cognita esse dicetur, quae erit binarius partium lateri congruentium, + ternarius partium diagonali congruentium. Diversis autem licet assumtis mensuris quibus eadem res diversimode exprimitur tamen semper eadem prodit magnitudo, quia ipsis mensuris iterum resolutis ad idem denique semper devenitur; adeoque mensurae diversae illum ipsum numerum eundem resolutione prodeuntem jam involvunt. Quemadmodum unus idemque est numerus tres quartae, ex sex octavae; si quartam iterum in duas partes resolvas. Atque talis

3 hominis *(1)*, |nec *nicht gestr.*| tamen *(2)* |immediatum ... enim *erg.*| homo *L* 4 ut *(1)* homogeneum hominis *(2)* conveniens *L* 7 non *(1)* modo *(2)* ita ut id qvod ex ipsis homogeneum *(3)* ead *(4)* convenienti *L* 9–11 desiderant |Simplicius ... conveniunt *erg.*| (26) *(1)* Magnitudo est *(2)* Numer *(3)* Numerus *(a)* totum est, cuius partes *(aa)* sunt Unitates vel sunt homogeneae unitati *(bb)* exprimuntur per unitates. Itaque sub numero et *(aaa)* fractiones *(bbb)* fractos, et surdos comprehendo *(b)* est *(aa)* inter q *(bb)* cuius *L* 13 Rei distincte cognita *erg.* *L* 16 possim *(1)* eius magnitudinem *(2)* rei *(3)* eius *L* 18 f. qvibus ... exprimitur *erg.* *L* 22–38,11 resolvas. *(1)* Ratio est numerus *(a)* exprimens qvomodo *(aa)* unum r *(bb)* unam rem *(b)* exprimens magnitudinem *(c)* exprimens magnitudinem rei unius *(d)* exprimens rei magnitudinem *(e)* cui *(f)* aeqvalis numero rei unius *(2)* |Atqve ... utrum *(a)* aliqvid propositum *(b)* aliqva ... pars, *(aa)* qvodqve manet et qvidem nulla habita ratione *(bb)* vel aliud ... manentibus *(aaa)* punctis, manet *(bbb)* homogeneis ... puncti *(aaaa)* aut lineae *(bbbb)* repetitione qvadam *(aaaaa)* fit linea, tamet *(bbbbb)* continua ... fit linea |saepe ... congruat *erg.*|. Aliter ... possunt, sive *(aaaaaa)* id potius qvod col *(bbbbbb)* discrimen *(cccccc)* qvod ... recidunt *erg.*| *(28)* Ratio *L*

est Magnitudo distincte cognita. Alioquin magnitudo est attributum rei, per quod cognosci potest, utrum aliqua res proposita sit illius pars, vel aliud homogeneum ad rem pertinens et quidem tale ut maneat licet partium habitudo inter se mutetur. Vel etiam Magnitudo est attributum quod iisdem manentibus homogeneis ad rem pertinentibus aut substitutis congruis, manet idem. Homogenea autem ad rem aliquam pertinentia intelligo non partes solum sed et extrema atque minima sive puncta. Nam puncti repetitione quadam continua, sive motu, fit linea. Saepe autem res ita transmutantur, ut ne unica quidem pars figurae posterioris, prioris parti congruat. Aliter magnitudinem infra definio, ut sit id quo duae res similes discerni possunt, sive quod in rebus sola comperceptione discernitur. Sed omnia haec eodem recidunt.

(28) Ratio ipsius A ad B nihil aliud est quam numerus quo exprimitur magnitudo ipsius A, si magnitudo ipsius B ponatur esse unitas. Unde patet Magnitudinem a ratione differre ut numerum concretum a numero abstracto; est enim magnitudo numerus rerum, nempe partium; ratio vero est numerus unitatum. Patet etiam rei magnitudinem eandem manere, quacunque assumta mensura per quam eam exprimere volumus; rationem vero aliam atque aliam fieri pro alia atque alia mensura assumta. Patet etiam (ex definitione divisionis) si numerus magnitudinem exprimens ipsius A et alius numerus magnitudinem exprimens ipsius B (modo utrobique eadem mensura seu unitas adhibita sit) dividatur, provenire numerum qui est ratio unius ad alterum.

(29) Aequalia sunt quorum eadem est magnitudo, seu quae nullo amisso vel accepto congrua reddi possunt.

Minus dicitur quod alterius parti aequale est, id vero quod partem habet alteri aequalem dicitur Majus. Hinc pars minor toto, quia parti ipsius, nempe sibi, aequalis est. Signis autem his utemur:

$a \sqcap b$	a aequ. b
$a \sqcap b$	a maj. quam b
$a \sqcap b$	a min. quam b

Si pars unius alteri toti aequalis est, reliquae partis in majore magnitudo dicitur differentia. Magnitudo autem totius est summa magnitudinum partium, vel aliorum partibus ejus aequalium.

11 numerus *(1)* qvidem qvo exprimi potest magnitudo *(a)* ⟨rei⟩ *(b)* ipsius A, posito *(2)* qvi ita est ad unitatem ut unit *(3)* qvo *L* 15 assumta *(1)* re, *(a)* per *(b)* vel *(2)* mensura *L* 16–19 patet . . . dividatur *(1)* productum *(2)* provenire . . . alterum *erg. L*

(30) Si duo sint homogenea (sive si in uno partes assumi possint utcunque, partibus alterius aequales, et idem fieri semper possit et in residuis) neque differentia ulla sit inter ipsa, id est si neque a sit majus quam b, neque b majus quam a, necesse est esse aequalia. Transmutentur enim ut congruant quoad licet utique aut in uno eorum supererit aliquid, aut congruent, adeoque erunt aequalia. Itaque in his consequentia haec valebit:

a non $\sqcap$ b, a non $\sqcap$ b. Ergo $a \sqcap b$.

(31) S i m i l i a sunt quae singula per se considerata discerni non possunt.

fig. 12

[*Fig. 16*]

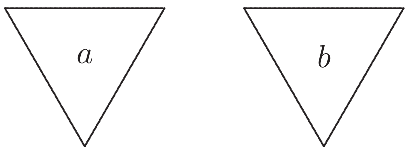
Velut duo triangula aequilatera (in fig. 12). Nullum enim attributum, nullam proprietatem in uno possumus invenire, quam non etiam possimus reperire in altero et unum ex ipsis appellando a, alterum b, s i m i l i t u d i n e m ita notabimus: $a \sim b$. Si tamen simul percipiantur, statim discrimen apparet, unum alio esse majus. Idem fieri potest etsi non simul percipiantur, modo aliquod velut medium assumatur sive mensura quae primum applicetur uni, aut aliquo in ipso, notatoque quomodo prius vel pars ejus cum mensura vel ejus parte congruat, postea eadem mensura etiam applicetur alteri. Itaque dicere soleo s i m i l i a non discerni nisi per comperceptionem. At, inquies, ego etsi successive videam duo triangula aequilatera inaequalia ea nihilominus probe discerno. Sed sciendum est me hoc loco loqui de intelligentia, ut nimirum mens aliquid notare possit in uno, quod non procedat in altero non de sensu et imaginatione. Ratio autem cur oculi duas res similes sed inaequales discernant, manifesta est; nam supersunt nobis rerum prius perceptarum imagines, quae rei nove perceptae imaginibus applicatae discrimen

4 enim *(1)* qvoqve *(2)* qvoad licet donec congruant, utiqve aut in uno eorum *(2)* ut *L* 7 se *(1)* spectata *(2)* considerata *L* 10 f. et unum ... a $\sim$ b *erg. L* 14 f. uni, | aut ... ipso *erg.* | notatoqve *(1)* loco congruendi modo *(2)* | qvomodo ... congruat *erg.* | postea | eadem mensura *erg.* | etiam *L* 19 non ... imaginatione *erg. L*

ipsa comperceptione harum duarum imaginum ostendunt. Et ipse fundus oculi, cujus partem majorem minoremque occupat imago, mensurae cujusdam officium facit. Denique alias res semper simul percipere solemus, quas etiam cum prioribus percepimus, unde rem novissime perceptam ad eas referendo, ut priorem ad easdem retulimus, discrimen non difficulter notamus. Si vero fingeremus, DEUM omnia in nobis ac circa nos in aliquo cubiculo apparentia proportione eadem servata minuere, omnia eodem modo apparerent neque a nobis prior status a posteriore posset discerni, nisi sphaera rerum proportionaliter imminutarum, cubiculo scilicet nostro egrederemur; tunc enim comperceptione illa cum rebus non imminutis oblata discrimen appareret. Hinc manifestum est etiam Magnitudinem esse illud ipsum quod in rebus distingui potest sola comperceptione, id est applicatione vel immediata, sive congruentia actuali sive coincidentia, vel mediata nempe interventu mensurae, quae nunc uni nunc alteri applicatur, unde sufficit res esse congruas, id est actu congruere posse.

(32) Ex his autem intelligi potest similia et aequalia simul esse congrua. Et quia similitudinem hoc signo notare placet: $\sim$ nempe $a \sim b$ id est a est simile ipsi b.

fig. 13



[*Fig. 17*]

Vid. fig. 13. Hinc consequentia erit talis:

$a \sim b$ et $a \sqcap b$. Ergo a ♉ b.

(33) Sunt et aliae consequentiae:

a ♉ b. Ergo $a \sqcap b$.

a ♉ b. Ergo $a \sim b$.

$a \propto b$. Ergo a ♉ b.

. . . . $a \sqcap b$.

. . . . $a \sim b$.

5 f. in aliqvo cubiculo *erg. L* 7 f. proportionaliter *(1)* immutatarum, e *(2)* imminutarum *L* 9 cum . . . oblata *erg. L* 10 f. comperceptione, *(1)* sive applicatione aut congruentia *(2)* id *L* 17 vid. fig. 13 *erg. L* 18 Ergo a ♉ b *(1)* vid. fig. 13. *(2)* (33) *L*

(34) Nam quae reapse coincidunt, utique congrua sunt; quae congrua sunt utique similia, item aequalia sunt. Hinc videmus tres esse modos ac velut gradus res extensione praeditas, neque alias qualitatibus diversas discernendi. Maximus ille est, ut sint dissimiles, ita enim singulae per se spectatae ipsa proprietatum quae in ipsis observantur diversitate facile discernuntur, ita triangulum isosceles facile discernitur a scaleno, etsi non simul videantur. Si quis enim me jubeat videre an triangulum quod offertur sit isosceles an scalenum, nihil forinsecus assumere necesse habeo, sed sola latera ejus comparo inter se. At vero si jubear ex duobus Triangulis aequilateris eligere majus collatione Triangulorum cum aliis opus habeo sive comperceptione, ut explicui, neque notam aliquam discriminis in singulis spectabilem assignare possum. Si vero duae res non tantum sint similes, sed et aequales, id est si sint congruae, etiam simul perceptas non discernere possum, nisi loco, id est nisi adhuc aliud assumam extra ipsas, et observem ipsas diversum habere situm, ad tertium assumtum. Denique si ambo simul in eodem sint loco, jam nihil habere me amplius quo discriminentur. Atque haec est vera cogitationum quam de his rebus habemus Analysis cujus ignoratio fecit, ut characteristica geometriae vera hactenus non sit constituta. Ex his denique intelligitur, ut magnitudo aestimatur dum res congruere aut ad congruitatem reduci posse intelliguntur, ita rationem aestimari similitudine, seu dum res ad similitudinem reducuntur, tunc enim omnia fieri necesse est proportionalia.

(35) Ex his explicationibus coincidentium, congruorum, aequalium ac similium consequentiae quaedam duci possunt. Nempe quae sunt eidem aequalia, similia, congrua, coincidentia, sunt etiam inter se, ideoque

$$\begin{array}{llll}
a \infty b & \text{Et } b \infty c & & \text{Ergo } a \infty c \\
a \text{ ♉ } b & b \text{ ♉ } c & & a \text{ ♉ } c \\
a \sim b & b \sim c & & a \sim c \\
a \sqcap b & b \sqcap c & & a \sqcap c
\end{array}$$

Non tamen consequentia haec valet:

a non ∞ b et b non ∞ c. Ergo a non ∞ c, prorsus ut in Logica ex puris negativis nihil sequitur.

3 neqve ... diversas *erg. L* 16 aestimatur *(1)* congruentibus, qvae vel his qvae ad congr *(2)* dum *L* 21–42,1 qvae ... (36) *erg. L*

(36) Si coincidentibus sive iisdem ascribas coincidentia prodeunt coincidentia, ut

$a \infty c$ et $b \infty d$. Ergo $a.b \infty c.d$.

Sed in congruis hoc non sequitur, exempli causa si $A.B.C.D$. sint puncta, semper verum est esse A ♉ C et B ♉ D. Quodlibet enim punctum cuilibet congruum est. Sed non ideo dici potest $A.B$ ♉ $C.D$. id est simul congruere posse A ipsi C et B ipsi D. servato nimirum tum situ $A.B$ tum situ $C.D$. Quanquam viceversa ex positis $A.B$ ♉ $C.D$ sequatur A ♉ C. et B ♉ D. ex significatione characterum nostrorum, idque etiam verum est, licet $A.B.C.D$. non sint puncta sed magnitudines. At si congrua sibi ascribantur, inde oriuntur aequalia, ita:

$a + b - c \sqcap d + e - f$, posito esse a ♉ d et b ♉ e et c ♉ f, quia congrua semper aequalia sunt.

(37) Verum si congrua congruis similiter addantur, adimanturque, fient congrua. Cujus rei ratio est quia si congrua congruis similiter addantur, similia similibus similiter addentur (quia congrua sunt similia) ergo fient similia, fiunt autem etiam aequalia (nam congrua congruis addita faciunt aequalia). Jam similia et aequalia sunt congrua. Ergo si congrua congruis similiter addantur fient congrua. Idem est si adimantur.

(38) An autem similiter aliqua tractentur intelligi potest ex characteristicis nostris modoque unumquodque describendi aut determinandi. In quo si sigillatim nullum discrimen notari potest, utique semper omnia similia prodire necesse est. Illud quod notandum est si qua sint similia secundum unum determinandi (distincte cognoscendi, describendi) modum eadem fore similia etiam secundum alium modum. Nam unusquisque modus totam rei naturam involvit.

(39) Axiomata autem illa quibus Euclides utitur, si aequalibus addas aequalia fient aequalia, aliaque id genus facile ex eo demonstrantur, quod aequalium eadem est magnitudo, id est quod substitui sibi possunt salva magnitudine. Nam sint

$a \sqcap c$ et $b \sqcap d$, fiet $+a + b \sqcap c + d$,

nam si scribatur $a + b$ et in locum ipsorum $a.b$. substituantur aequalia $c.d$, ea substitutio

1 f. ut *(1)* A ∞ C et B ∞ D. Ergo A.B. ∞ C.D. idem est de congruis, qvia nihil aliud sunt qvam potentia coincidentia, A ♉ C et B ♉ D. Ergo A.B. ♉ C.D. *(2)* a ∞ c *L* 4 qvodlibet ... congruum est *erg. L* 5–8 servato ... magnitudines *erg. L* 8 sibi *(1)* addantur, seqvi *(2)* ascribantur *L* 11 qvia ... sunt *erg. L* 12 (37) *erg. L* 18 (38) *erg. L* 25 (39) *erg. L* 29 substituantur *(1)* qvae singulis aeqvalia sunt *(2)* aeqvalia *L*

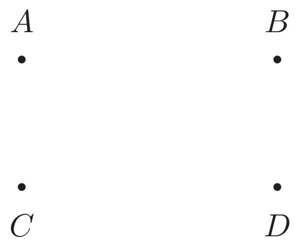
fiet salva magnitudine, ac proinde eorum quae prodibunt $+c+d$ eadem erit magnitudo quae priorum $+a+b$. Sed haec ad calculum Algebraicum potius pertinent, satisque explicata habentur, itaque regulis magnitudinum ac rationum atque proportionum non immorabor; sed ea Maxime explicare nitar, quae situm involvunt.

(40) Redeo nunc ad ea quae §. 22 interrupta sunt, et primum de punctis, inde de Tractibus agam. Omne punctum congruum adeoque aequale (si ita loqui licet) et simile est:

A ♉ B , $A \sqcap B$, $A \sim B$.

(41) $A.B$ ♉ $C.D$ significat simul esse A ♉ C et B ♉ D. manente situ $A.B$ et $C.D$.

fig. 14



[*Fig. 18*]

(42) $A.B$ ♉ $B.A$ est Proposito cujus est sensus, positis duobus punctis $A.B$. ac situm eundem inter se retinentibus posse loca eorum permutari, seu poni A in locum B et contra.

1 f. prodibunt |+c + d *erg.*| eadem erit magnitudo |qvae priorum +a + b *erg.*| *(1)* Hoc solo substituendi artificio etiam *(2)* Sed *L* 9–11 B ♉ D. |manente ... C.D. *erg.*| *(1)* A. B ♉ A. Y. est propositio qvae significat positis duobus punctis A.B. posse reperiri tertium aliqvod Y (qvod ideo qvia indefinitum, hac litera significavi) tale ut *(a)* A.B et A *(b)* servato situ A.Y. et A.B. ipsa A.Y et A.B sibi applicari possint, nempe simul A ipsi A et B ipsi Y. A *(aa)* maneat *(bb)* ipsi A (id est A manente ubi erat) et B ipsi Y. A. B ♉ C. Y *(2)* |(42) *erg.*| A. B ♉ B. A. *L*

fig. 15

[*Fig. 19*]

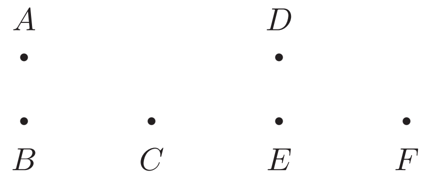
Quod ex eo manifestum est, quia relatio situs quam habent ad ambo eodem modo pertinet, nec nisi externis assumtis discrimen ullum notari potest facta permutatione.

(43) $A.B$ ♉ $X.Y$ est propositio significans datis duobus punctis A et B. posse reperiri alia duo X et Y. quae eundem inter se situm habeant quem illa duo, sive ut haec simul illis duobus servato situ utrobique, congruere possint. Quod ex eo demonstratur, quia $L.M$, $A.B$ moveri possunt servato situ inter se, eaque respondere poterunt primum ipsis $A.B$ deinde ipsis $X.Y.$, nempe $3L.3M$ ♉ $6L.6M$. Sit $A \infty 3L.$, $B \infty 3M$, $X \infty 6L$, $Y \infty 6M$ fiet $A.B$ ♉ $X.Y$ Nihil autem prohibet esse $X \infty A$ unde fiet $A.B$ ♉ $A.Y$. Potest etiam esse $X \infty C$ datae, unde $A.B$ ♉ $C.Y$.

(44) Si $A.B$ ♉ $D.E$ et $B.C$ ♉ $E.F$ et $A.C$ ♉ $D.F$, erit $A.B.C$ ♉ $D.E.F$. Vid. fig. 16.

3 f. permutatione *(1)* A. B. ♉ C. Y. est propositio significans datis tribus punctis A.B.C. inveniri posse qvartum Y. cuius situs ad unum ex ipsis C. idem sit qvi situs reliqvorum duorum | A.B. *erg.* |, inter se *(a)* nempe *(b)* sive ut *(aa)* A.B sunt *(bb)* A ipsi C et B ipsi Y simul servato situ A.B. et C.Y. congruere possint Hinc seqvitur et A. B ♉ A. Y. posito C ∞ A. Ratio autem horum oritur ex natura spatii in qvo nihil *(aaa)* contingere *(bbb)* sumi potest, qvod non iterum sumi possit eodem plane modo, ita ut solum discrimen sit in loco. Idem per motum sic demonstratur, transferantur simul A.B. servato situ, et A qvidem incidat in locum ipsius C, utiqve B in cuiusdam puncti Y locum incidet. Eodem modo demonstratur A. B. ♉ *(aaaa)* X.Y. *(bbbb)* X.Y. *(2)* | (43) *erg.* | A. B ♉ X. Y. *L* 7 L.M *erg. L* 7 f. inter se | eaqve ... ipsis, X.Y. *erg.* |, nempe *(1)* A.B ♉ 3A.3B. sit 3A ∞ X et 3B ∞ Y *(2)* 3L.3M ♉ 6L.6M *L* 12–45,2 ♉ D.E.F vid. fig. 16. *erg.* | *(1)* Eodem modo si A.B ♉ E.F vel A.C ♉ E.G. et A.D. ♉ E.H et B.D ♉ *(2)* Nam *L*

fig. 16.



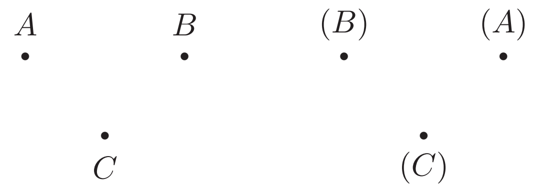
[*Fig. 20*]

Nam nihil aliud significat *A.B* ♉ *D.E* quam simul esse *A* ♉ *D* et *B* ♉ *E*. situ *A.B* et *D.E* servato. Eodem modo ex *B.C* ♉ *E.F* sequitur *B* ♉ *E* et *C* ♉ *F* situ *B.C* et *E.F* servato; et ex *A.C* ♉ *D.F* sequitur *A* ♉ *D* et *C* ♉ *F* situ *A.C* et *D.F* servato. Habemus ergo simul *A.B.C* ♉ *D.E.F* servato situ *A.B* et *B.C* et *A.C*., itemque servato situ *D.E* et *E.F* et *D.F* cum alias ex solis *A.B* ♉ *D.E* et *B.C* ♉ *E.F*. sequatur quidem simul *A* ♉ *D* et *B* ♉ *E* et *C* ♉ *F*. Sed servatis tantum sitibus *A.B* et *B.C* item *D.E* et *E.F* non vero exprimetur servari et situs *A.C* et *D.F*. nisi addatur *A.C* ♉ *D.F*.

Hinc jam principium habemus ratiocinationem ad plura etiam puncta producendi.

(45) Si sint *A.B* ♉ *B.C* ♉ *A.C* erit *A.B.C* ♉ *B.A.C* , vel alio ordine quocunque.

fig. 17

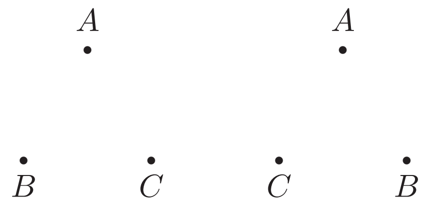


[*Fig. 21*]

2 significat *(1)* A.B.C. ♉ D.E.F qvam simul *(a)* congruere A *(b)* esse A ♉ D et *(2)* A.B. ♉ D.E. *L* 2 f. situ ... servato *erg. L* 3 C ♉ F. *(1)* et ex A.C ♉ D.F seqvitur A ♉ D. C ♉ F *(2)* situ *L* 4 ex A.C. ♉ | D.E. *ändert Hrsg.* | seqvitur *L* 9 f. producendi *(1)* Si A B. ♉ *(a)* B *(b)* C. D erit A. B ∼ C. D patet ex eo qvod congrua sint similia. *(2)* | (45) *erg.* | Si *L* 11–46,1 qvocunqve. *(1)* Nam qvia B.C. ♉ A.B. seu ♉ B.A. ergo simul congruent B.C et B.A. Nam transferatur A.B.C. | in (B).(A).(C). *erg.* | ita ut A.B incidat in locum ipsius (B).(A) qvod fieri potest, qvia A.B ♉ B.A seu A.B. ∞ (B).(A) et qvia B.C ♉ A.C et B ∞ (A) *(2)* Nam *L*

Nam si congruentibus $A.B$ et $(B).(A)$ ascribas congruentia $C.$ et (C). congruenti modo quia $A.C$ ♉ $(B).(C)$ et $B.C$ ♉ $(A).(C)$ fient congruentia $A.B.C$ ♉ $(B).(A).(C)$ sive $A.B.C$ ♉ $B.A.C$ per praecedentem. Parentheses enim tantum confusionis ex repetitione vitandae causa ascripsi. Hinc patet quid sit congruenti modo ascribi, cum scilicet omnes combinationes ab una parte enuntiationis sunt congruentes omnibus ab altera parte.

fig. 18.



[*Fig. 22*]

Unde patet si $A.B$ ♉ $B.C$ ♉ $A.C$ f o r e $A.B.C.$ ♉ $A.C.B$ ♉ $B.C.A$ ♉ $B.A.C$ ♉ $C.A.B$ ♉ $C.B.A.$

(46) S i $A.B.C$ ♉ $A.C.B$ s e q u i t u r (t a n t u m) $A.B$ ♉ $A.C$ [sive triangulum esse isosceles], nam sequitur:

$A.\frown B.\frown C.$ $A.B$ ♉ $A.C$ $B.C$ ♉ $C.B.$ $A.C$ ♉ $A.B$
♉
$A.\smile C.\smile B.$

ex quibus $B.C$ ♉ $C.B$ per se patet, reliqua duo, $A.B$ ♉ $A.C.$ et $A.C.$ ♉ $A.B.$ eodem recidunt, hoc unum ergo inde duximus $A.B.$ ♉ $A.C.$

(47) S i $A.B.C$ ♉ $B.C.A$ s e q u i t u r $A.B$ ♉ $B.C$ ♉ $A.C$ [seu triangulum esse aequilaterum]. Nam fit $A.B$ ♉ $B.C.$ $B.C$ ♉ $C.A.$

(48) S i $A.B.C.$ ♉ $A.C.B$ e t $B.C.A$ ♉ $B.A.C$ f i e t $A.B$ ♉ $B.C$ ♉

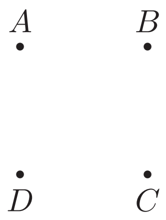
3 per praecedentem *erg. L* 4 scilicet *(1)* omnia simul sumta ab una *(2)* omnes *L* 13 f. A.B. ♉ A.C. *(1)* S i A. B. C. ♉ A. C. B. ♉ B. C. A. f i e t A. B. ♉ A. C. ♉ A. C nam ob A.B.C ♉ A.C.B. fit A.B. ♉ A.C. ob A.B.C. ♉ B.C.A *(2)* (47) S i *L* 14 f. [seu ... aeqvilaterum] *erg. L*

9 f. [...]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz. 14 f. [...]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

$A.C$. Nam ob $A.B.C \between A.C.B$. fit $A.B \between A.C$. eodemque modo ob $B.C.A \between B.A.C$. fit $B.C. \between B.A$. sive $A.B. \between B.C$. [itaque quandocunque in transposito punctorum ordine, unum ex tribus eundem in utroque ordine locum servat situsque posterior priori congruus est, inde tantum probari potest Triangulum esse isosceles, sed si nullum ex punctis servat locum, et nihilominus situs posterior priori congruit, Triangulum est aequilaterum[.

(49) Si sit $A.B \between B.C \between C.D \between D.A$ et $A.C \between B.D$ erit $A.B.C.D \between B.C.D.A \between C.D.A.B \between D.A.B.C \between D.C.B.A \between A.D.C.B \between B.A.D.C \between C.B.A.D$.

fig. 19



[*Fig. 23*]

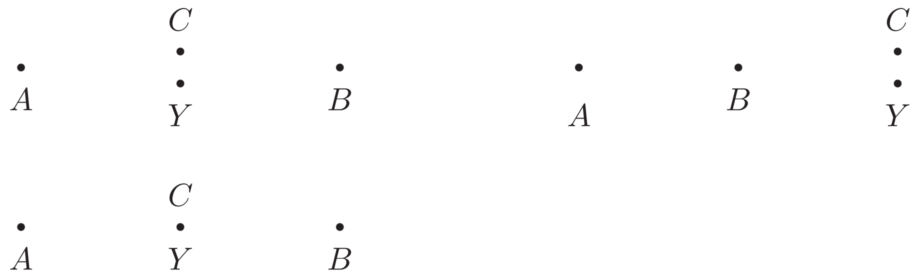
Hoc ex praecedentibus facile demonstratur, multaque alia hujusmodi, quae sufficiet demonstrari cum ipsis indigebimus. Nunc satis habebimus principium dedisse inveniendi haec solo calculo, sine inspectione figurae.

(50) Si tria puncta $A.B.C$ dicantur esse sita in directum tunc posito $A.B.C \between A.B.Y$ erit $C \infty Y$. Haec propositio est definitio punctorum quae in directum sita dicuntur.

3 f. situsqve … congruus est, *erg. L*   13 (50) *erg. L*

2–5 [. . .]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

fig. 20



[*Fig. 24*]

Nimirum inspiciatur fig. 20. ubi C. aliquem situm habet ad A. et B. Sumatur jam aliquod punctum Y eundem ad $A.B$. situm habens, id si diversum ab ipso C. assumi potest puncta, $A.B.C$. non sunt in directum sita, si vero necessario cum ipso C. coincidit, in directum sita dicentur.

(51) Datis punctis duobus semper assumi potest tertium quod cum illis sit in directum, sive si $A.B.Y$ ɣ $A.B.X$ erit $Y \infty X$. Nam datis punctis duobus $A.B$. semper assumi potest tertium Y. quod servato ad ipsa situ moveri potest ipsis immotis. Sed via quam motu suo describit potest esse semper minor ac minor, prout aliter atque aliter assumitur punctum Y. adeoque tandem sumi poterit tale, ut spatium motus evanescat, et tunc tria puncta erunt in directum.

Melius forte sic enuntiabimus: $A.B.3Y$ ɣ $A.B.6Y$ erit $3Y \infty 6Y$ id est aliquod assignari posse Y quod servato situ ad $A.B$. moveri seu locum mutare nequeat.

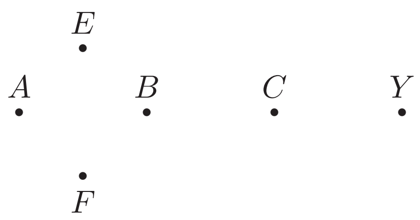
Aliter ista videor demonstrare posse hoc modo: Sit aliquod extensum, quod moveatur servato punctorum ejus situ inter se et duobus in eo sumtis immotis. Nam si quis id neget moveri posse, eo ipso fatetur puncta ejus servato ad puncta duo sumta situ moveri nequire, et adeo cum eo sita esse in directum per definitionem. Sed nulla ratio est cur puncta illa $A.B$. immota durante eodem motu sumi possint haec sola, et non alia etiam sive nulla

9 esse *(1)* major minorve *(2)* semper minor ac minor, *(a)* ac tandem evanescet sive nulla erit, ac tunc *(aa)* ⟨–⟩ *(bb)* pun *(cc)* prout *L* 14 f. Sit *(1)* corpus *(2)* aliqvod | extensum *erg.* | qvod moveatur | servato ... se et *erg.* | duobus *L* 16 fatetur *erg. L* 16 moveri *(1)* neqveant, adeoqve *(2)* neqvire *L* 17 sita *(1)* esset *(2)* esse in directum | per definitionem *erg.* | . *(a)* Sed cum corporis illius magnitudo *(b)* possit esse magnitudo *(c)* extensum illud plane sit indefinitum ex datis punctis A.B. *(d)* Sed *L*

ratio est cur puncta extensi quod his duobus immotis movetur, servent situm ad haec duo solum immota, et non etiam ad alia, nam situs quem ipsa $A.B.$ inter se obtinent, nihil ad rem facit, itaque potuisset sumi aliquod $Y.$ loco ipsius $B.$ alium obtinens situm ad A quam ipsum $B.$ obtinet. Verum quaecunque sumi possunt ut immota, ea manente eodem extensi motu sunt immota. Et quia sumtis duobus $A.B.$ immotis motus extensi est determinatus, seu determinatum est quaenam puncta ejus moveantur aut non moveantur, hinc duobus punctis sumtis immotis, determinata sunt alia plura quae servato ad ipsa situ moveri non possunt, seu quae cum ipsis jacent in directum.

(52) S i s i n t $E.A.B.$ ♉ $F.A.B$ e t $E.B.C.$ ♉ $F.B.C.$ e r i t $E.A.C$ ♉ $F.A.C.$ Vid. fig 21.

fig. 21



[*Fig. 25*]

Nam per $E.A.B$ ♉ $F.B.A$ erit $E.A$ ♉ $F.A$ et per $E.B.C$ ♉ $F.B.C$ erit $E.C$ ♉ $F.C.$ Jam si sit $E.A.$ ♉ $F.A$ et $E.C$ ♉ $F.C$ erit $E. \frown A. \frown C$ ♉ $F. \frown A. \frown C$ per prop. 44 (est enim $E.A$ ♉ $F.A.$ et $E.C$ ♉ $F.C.$ et $A.C$ ♉ $A.C.$) Ergo si sit $E.A.B$ ♉ $F.A.B$ et $E.B.C.$ ♉ $F.B.C.$ erit $E.A.C$ ♉ $F.A.C.$ Quod erat dem.

[*Erster Ansatz, gestrichen*]

(53) Inveniri possunt puncta quotcunque sita in directum cum duobus punctis datis. Sint enim duo puncta $A.B.$ in eadem fig. 21. Sumantur alia duo E et F ita ut sit $E.A.B$ ♉ $F.A.B.$

1 puncta *(1)* corporis *(2)* extensi *L*   3 itaqve *(1)* potuissent sumi *(a)* alia, ut A.C. ali *(b)* B.C. *(c)* loco B. *(2)* potuisset *L*   9 (52) *(1)* Aliter etiam natura | trium *gestr.* | punctorum in directum jacentium explicari posse videtur, hoc modo *(a)* Si sint duo puncta *(b)* praemissa hac propositione: *(aa)* Si datis tribus punctis *(bb)* sint puncta *(aaa)* qvotcunqve A.B.C.D *(bbb)* tria *(aaaa)* A.B.C *(bbbb)* | A.B.C et *nicht gestr.* | sint praeterea puncta duo E.F. sitqve *(2)* S i s i n t *L*   9 f. ♉ F. A. C. *(1)* nam E.A. ♉ F.A. E.B. ♉ F.B. E.C ♉ F.C. *(2)* vid. *L*

(54) Si puncta duo $E.F$ eodem modo se habeant ad puncta quotcunque ut $A.B.C.$ dicentur haec puncta $A.B.C.$ esse sita in directum.

(55) Nimirum in fig. 21. si sit $E.A.B.C$ ♉ $F.A.B.C$ id est $E.A.B$ ♉ $F.A.B.$ $E.A.C.$ ♉ $F.A.C.$ $E.B.C.$ ♉ $F.B.C.$ id est porro $E.A$ ♉ $F.A.$ $E.B.$ ♉ $F.B.$ $E.C.$ ♉ $F.C.$ dicentur puncta $A.B.C.$ esse in directum

[*Zweiter Ansatz*]

(53): Hinc etiam erit $E.A.B.C$ ♉ $F.A.B.C$ posito $E.A.B$ ♉ $F.A.B$ et $E.B.C$ ♉ $F.B.C.$ Nam etiam $E.A.C$ ♉ $F.A.C$ per praeced. habemus ergo: $E.A.B$ ♉ $F.A.B$ et $E.A.C.$ ♉ $F.A.C.$ et $E.B.C$ ♉ $F.B.C$ et $A.B.C$ ♉ $A.B.C$ id est habemus omnia quae ex hoc: $E.A.B.C$ ♉ $F.A.B.C.$ duci possunt; ergo habemus etiam $E.A.B.C.$ ♉ $F.A.B.C.$ [est egregius modus regrediendi, nimirum ex consequentibus omnibus totam naturam antecedentis exhaurientibus ad antecedens.]

(54) Si sit $E.A$ ♉ $F.A$ $E.B$ ♉ $F.B$ $E.C$ ♉ $F.C$ erit $E.\frown A.B.\frown C$ ♉ $F.\frown A.B.\frown C.$ nam quae supersunt combinationes, utrinque comparandae $A.B$ et $B.C$ et $A.C$ utrobique coincidunt.

(55) $A.\,B.\,X$ ♉ $A.\,B.\,Y$ seu datis duobus punctis, $A.B.$ inveniri possunt duo alia $X.Y.$ ita ut X et Y eodem modo se habeant ad $A.B.$ Vid. fig. 22.

---

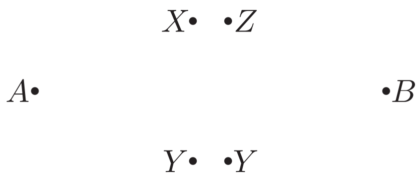
2 *Daneben:* Est definitio

1 f. *(1)* (52) *(2)* (54) Si puncta *(a)* duo *(b)* plura *(c)* duo E.F eodem ... puncta *(aa)* esse *(bb)* A.B.C ... directum |vid. fig. 21. *gestr.*| *L* 15 f. coincidunt *(1)* (55) A. B. C ♉ A. B. Y. seu datis tribus punctis, A.B.C. inveniri potest qvartum qvod sit ad duo A.B. ut tertium C. ad ipsa est. Haec propositio semper vera non est; si scilicet A.B.C. sita sint *(a)* in directu *(b)* in directum, ut postea ostendemus *(2)* (55) Datis duobus punctis *(3)* (55) *L* 17 vid. fig. 22. *erg. L*

---

11 f. [...]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

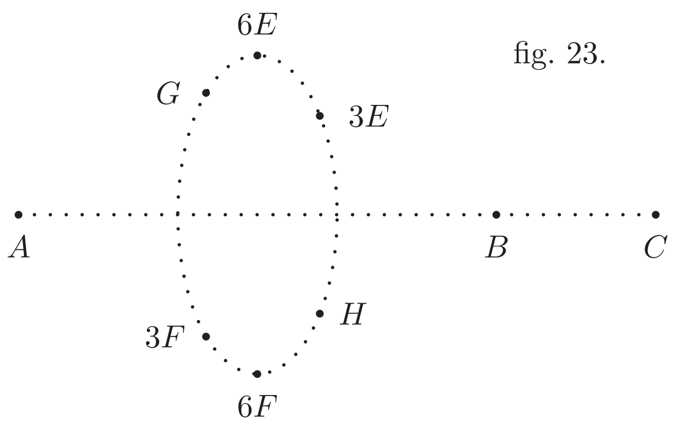
fig. 22



[*Fig. 26*]

Potest enim reperiri $A.X$ ♉ $A.Y$ et $B.Z$ ♉ $B.V$ per prop. 43. Ponatur $Z \infty X$ (hoc enim fieri potest per prop. 43. seu Z potest esse data seu jam assumta X. quia $A.B$ ♉ $A.V$) itemque ponatur $A.X$ ♉ $B.X$. (nam et in $A.X$ ♉ $A.Y$ potest X. esse data quia datur $A.C.$ ♉ $A.Y$ per prop. 43) erit $V.B$ (♉ $B.Z$ ♉ $B.X$ ♉ $A.X$) ♉ $A.Y$. Ergo $V.B.X$ ♉ $Y.A.X$ ♉ $X.B.V$ in quo omnia hactenus determinata continentur. Ergo potest poni $V \infty Y$, nihil enim in hactenus determinatis obstat. Fiet $Y.B.X$ ♉ $Y.A.X$. Ergo $Y.B.$ ♉ $Y.A.$ $B.X.$ ♉ $A.X$. Rursus $Y.B.X$ ♉ $X.B.Y$. Ergo $Y.B.$ ♉ $X.B$. Ergo fit: $Y.B.$ ♉ $X.B.$ ♉ $Y.A.$ ♉ $A.X$. Ergo $A.B.X$ ♉ $A.B.Y$.

fig. 23.



[*Fig. 27*]

4 et *(1)* X potest esse data seu *(2)* in *L* 5 f. ♉ A.Y. *(1)* Ergo V.B.X ♉ Y.A.X ergo *(a)* potest sumi *(b)* sumendo V ∞ Y. fiet A.B.X ♉ A.B.Y. in qvo omnia hactenus determinata continentur. ponatur ⟨— —⟩ *(2)* Ergo *L*

(56) Si tria puncta $E.F.G$ sumta distributive eodem modo se habeant ad tria puncta $A.B.C$ sumta collective, erunt tria priora in eodem arcu circuli, tria posteriora in eadem recta seu jacebunt in directum. Hanc propositionem annotare placuit, ratio patebit ex sequentibus.

(57) Si sit $E.A.B.C$ ♉ $F.A.B.C$ ♉ $G.A.B.C$ et sit E non ∞ F, E non ∞ G, F non ∞ G. dicentur puncta quotcunque $A.B.C$ sita esse in directum, seu esse in eadem recta.

(58) Omisso licet puncto C. Si sit $E.A.B$ ♉ $F.A.B$ ♉ $G.A.B$ erunt puncta $E.F.G$ in eodem plano.

(59) Iisdem positis erunt puncta $E.F.G.$ in eodem arcu circuli.

(60) Inter duo quaevis congrua assumi possunt infinita alia congrua, nam unum in locum alterius servata forma sua transire non posset, nisi per congrua.

(61) Hinc a quolibet puncto ad quodlibet punctum duci potest linea. Nam punctum puncto congruum est.

(62) Hinc et a quolibet puncto per quodlibet punctum duci potest linea.

(63) Linea duci potest quae transeat per puncta quotcunque data.

(64) Eodem modo ostendetur per lineas quotcunque datas transire posse superficiem. Nam si congruae sunt, patet lineam generantem successive in omnibus esse posse. Si congruae non sunt, patet lineam generantem durante motu, ita augeri minui et transformari posse, ut dum illuc venit, congrua fiat.

(65) Unumquod[que] in spatio positum potest, servata forma sua; seu cuilibet in spatio existenti infinita alia congrua assignari possunt.

(66) Unumquodque servata forma sua moveri potest infinitis modis.

(67) Unumquodque ita moveri potest servata forma sua, ut incidat in punctum datum.

Generalius: unumquodque servata forma sua ita moveri potest, ut incidat in aliud cui congruum in ipso designari potest. Nam congruum unum transferri potest in locum

1 *(1)* (56) Datis duobus punctis inveniri possunt alia qvotcunqve cum ipsis in directum jacentia. *(a)* sint duo puncta A.B. *(b)* inspice fig. 21. Sint duo puncta A.B. inveniantur (per prop. 55.) alia duo E.F ita ut sit E.A.B ♉ F.A.B. deniqve per prop. 43. inveniatur punctum *(aa)* C. ita ut sit *(bb)* Y tale ut sit Y.E. ♉ Y.F *(2)* (56) *L* 1 E.F.G sumta *erg. L* 2 A.B.C *erg. L* 3 placuit, *(1)* demonstratio *(2)* ratio *L* 6–8 directum, *(1)* seu cadere in eandem re *(2)* seu ... recta *(a)* (58) iisdempositis erunt puncta E.F.G. in eodem plano. (59) iisdem positis erunt puncta E.F.G in arcu Circuli *(b)* (58) omisso | licet *erg.* | puncto *L* 13 f. Nam ... est *erg. L* 25 f. datum *(1)* | (67) *nicht gestr.* | Unumq *(2)* Generalius *L* 27 ipso *(1)* assumi potest. potest eni *(2)* designari potest. Nam *(a)* hoc congruum transferri potest in locum illius *(b)* congruum *L*

alterius, nec quicquam prohibet id in quo congruum illud est quod transferri debet, simul cum ipso transferri, quia ratio separationis nulla est: et quod uni congruorum aptari potest, poterit et alteri congruorum similiter aptari.

(68) A ♉ B id est assumto puncto quodlibet alid congruum est.

(69) $A.B$ ♉ $B.A$ ut supra.

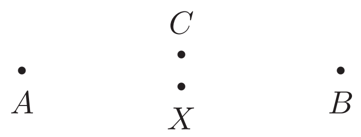
(70) $A.B$ ♉ $X.Y$. Eodem modo $A.B.C$ ♉ $X.Y.Z$ et $A.B.C.D$ ♉ $X.Y.Z.\Omega$. et ita porro. Hoc enim nihil aliud est, quam quotcunque puncta posse moveri servato situ inter se. Situm autem eorum inter se servari intelligi potest, si ponatur esse extrema Lineae cujusdam rigidae qualiscunque.

(71) $A.B$ ♉ $C.X$. $A.B.C$ ♉ $D.X.Y$. etc.

Hoc enim nihil aliud est quam quotcunque puncta, ut $A.B.C$. posse moveri servato situ inter se; ita ut unum ex ipsis A incidat in punctum aliquod datum D. reliquis duobus $B.C$ in alia quaecunque $X.Y$ incidentibus.

(72) Si $A.B.C$ non ♉ $A.B.Y$ nisi $C \propto Y$. tunc puncta $A.B.C$ dicentur s i t a i n d i r e c t u m (vid. fig. 20) seu C. e r i t s i t u m i n d i r e c t u m c u m i p s i s $A.B$. si unicum sit quod eum situm ad $A.B$. habeat.

fig. 20



[*Fig. 28*]

An autem talis punctorum situs reperiatur postea inquirendum erit.

[*Erster Ansatz, gestrichen*]

(73) $A.\ B.\ X$ ♉ $A.\ B.\ Y$. Nam sit $A.X$. ♉ $A.Y$. et $B.X$ ♉ $B.V$. per 71. (Nam $A.B$. ♉ $C.Y$. dicta prop. 71. Pro puncto B dato, ponatur punctum X. aliquod. Et ponatur C datum

7–9 Hoc ... qvam | qvodcunqve *ändert Hrsg.* | puncta ... qvaliscunqve *erg. L*   15 d i r e c t u m *(1)* | cum *nicht gestr.* | A.B.C *(2)* cum relationem *(3)* situm eundem ad A.B. habentium unicum est. *(4)* c u m *L*   21 prop. 71. *(1)* ponatur *(2)* pro | puncto *erg.* | B dato ponatur | punctum *erg.* | aliqvod *L*

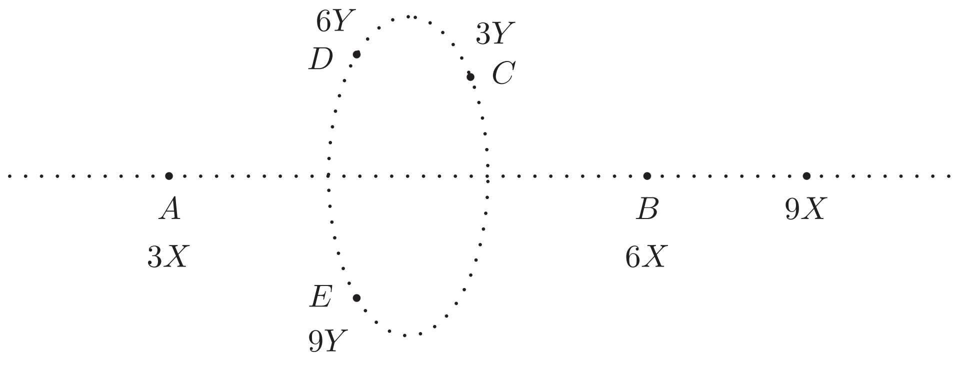
∞A. fiet $A.X$ ♉ $A.Y$. Eodem modo fiet $B.X$ ♉ $B.V$.) Ostendendum fieri posse $V \infty Y$. Ponatur $A.X$. ♉ $B.X$. (Quia X. arbitrarium est) fiet $B.V$ ♉ $A.Y$. (Nam $A.Y$. ♉ $A.X$. ♉ $B.X$. ♉ $B.V$.) Itaque $V.B.X$ ♉ $Y.A.X$ ♉ $X.B.V$ per 44. In quibus continentur omnia quae assumsimus, quibus non repugnat sumi $V \infty Y$ quo posito fiet $Y.B.X$ ♉ $Y.A.X$ ♉ $X.B.Y$. Unde fiet: $A.Y$ ♉ $B.Y$ ♉ $A.X$ ♉ $B.X$. Ac proinde per 44. fiet: $A.B.X$ ♉ $A.B.Y$.

[*Zweiter Ansatz*]

Linea autem cujus omnia puncta sita sunt in directum, dicetur r e c t a . Sit enim $A.B.ZY$ ♉ $A.B.ZX$ atque ideo $ZY \infty ZX$, erit $\overline{Z}Y$ ($\infty \overline{Z}X$) L i n e a r e c t a ; id est si punctum Y ita moveatur, ut situm semper ad puncta $A.B$. servet qui ipsi uni competere possit sive determinatum, minimeque varium ac vagum, describi ab eo lineam rectam.

(73) Si $A.B.C$ ♉ $A.B.D$ erit ♉ $A.B.ZY$, vid. fig. nam erit $C \infty 3Y$. et $D \infty 6Y$ nempe C et D erunt loca ipsius Y moti ita ut servet situm eundem ad $A.B$. inter quae alia necessario erunt indefinita nempe designanda per ZY. Linea autem $\overline{Z}Y$ vocetur C i r c u l a r i s .

fig. 24



[*Fig. 29*]

1 Ostendendum fieri posse V ∞ Y *erg. L* 11 *(1)* (73) Si A.B.3C ♉ A.B.6C. erit A.B.C ♉ A.B.Y *(2)* (73) Si A.B.3C ♉ A.B.6C erit ♉ A.B.ZC *(3)* (73) *L* 11 f. D ∞ 6Y *(1)* non potest autem Y moveri ex 3 in 6 | servato *erg.* | nisi per alia indefinita qvae vocabimus ZY. *(2)* nempe *L*

Notandum autem hanc Lineae circularis descriptionem ea priorem esse quam dedit Euclides. Euclidea enim indiget recta et plano. A nostra procedit qualiscunque assumatur rigida linea, modo in ea duo sumantur puncta quibus immotis ipsa linea vel saltem aliquod ejus punctum moveatur; hoc enim punctum ad puncta duo assumtatu eundem servabit situm, cum omnia sint in linea rigida. Id ergo punctum describit lineam Circularem per hanc definitionem nostram. Si quis vero neget in Linea rigida tale punctum inveniri posse, quod datis duobus immotis moveatur; necesse erit per definitionem praecedentem prop. 72. omnia Lineae rigidae puncta in directum esse sita, sive necesse erit dari Lineam rectam. Alterutrum ergo hoc modo admittere necesse est lineam rectam possibilem esse, vel circularem. Alterutra autem admissa alteram postea inde ducemus. Hic obiter notandum, quia ut suo loco patebit per tria quaelibet data puncta transire potest arcus circularis, hinc tribus datis punctis inveniri unum posse, quod ad tria illa eodem se habeat modo, nempe $X.C.$ ♉ $X.D.$ ♉ $X.E$, idque saepius fieri posse seu diversa reperiri posse X. pro iisdem $C.D.E$ omniaque X in unam rectam cadere quae transeat per circuli centrum, sitque ad planum ejus ad angulos rectos.

(74) Sit Linea quaelibet $\overline{Z}Y$, vid. fig. 24, in ea poterunt sumi quotcunque puncta $3Y.6Y.9Y.12Y$. etc. ita ut sit $3Y.6Y$ ♉ $6Y.9Y$ ♉ $9Y.12Y$ etc. Nam generaliter si qua sit linea parva, cujus unum extremum sit in alia linea, poterit prior ita moveri extremo ejus duabus lineis communi immoto, ut altero quoque extremo posteriori lineae occurrat, itaque hoc motu partem unam abscindet, jamque novo puncto invento immoto manente rursus aliam, et ita porro. Sed jam observo, ne id quidem necesse esse, et sufficere Unam lineam eidem lineae suis extremis applicari saepius quomodocunque ita ut plures ejusdem lineae partes assignentur quarum extrema aliorum extremis sint congrua.

3 linea *(1)* moveatur, qvod si fieri *(2)* vel *L* 8 prop. 72. *erg. L* 15 f. rectos. *(1)* (74) Ostendendum jam est iisdem positis plura puncta haberi posse praeter A et B, qvae ad ZY | (sine ad qvaelibet Y.) *erg.* | eodem se habent modo. Sumantur in ipsa $\overline{Z}$Y. puncta qvotlibet, 3Y. et 6Y. et 9Y. et 12Y. etc. ita ut sit 3Y.6Y ♉ 6Y.9Y. ♉ 9Y.12Y. etc. *(2)* Sit *(3)* (74) *L* 18 moveri *(1)* extremo puncto duarum linearum *(2)* extremo *L* 19 f. extremo *(1)* ⟨—⟩ alteri *(2)* posteriori lineae occurrat *(a)* sive si sit $\overline{Z}$Y. et L in N ⟨—⟩ *(b)* itaqve *L* 21 sufficere *(1)* | in *nicht gestr.* | una linea *(a)* plur *(b)* diversas assumi partes, qvarum ex *(2)* Unam *L*

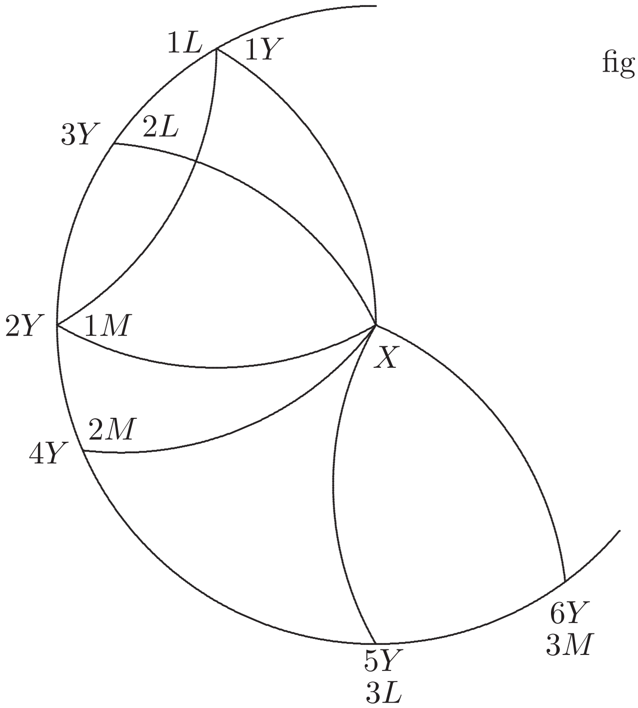


fig. 25

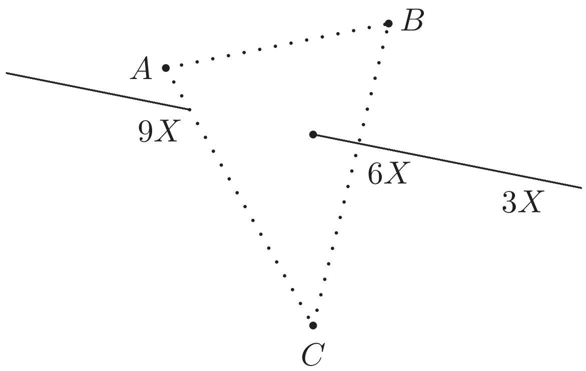
[*Fig. 30*]

Ut in fig. 25. linea rigida LM suis extremis L. et M. ipsi lineae $\overline{Z}Y$ aliquoties in $1Y$. $2Y$. et $3Y$. $4Y$. et $5Y$. $6Y$ quae coincident ipsis $1L$. $1M$. et $2L.2M$. et $3L.3M$. Nam si semel $L.M$ ipsi $\overline{Z}Y$ applicari possit infinitis modis applicari potest, si posteriores applicationibus quantumvis parum distent. Jam tam ex L et M educantur duae lineae congruae eodem modo se habentes ea quae ex L educitur ad L, quo illa quae ex M educitur ad M quae sibi occurrant in X. Sitque $1LX1M$ ♉ $2LX2M$, et ita porro, id est quae ex $1L$ et $1M$ educuntur eousque producantur ut non ante sibi occurrant quam ubi ex $2L2M$ eodem modo eductae sibi occurrunt. Unde patet punctum X. eodem modo se habere ad omnia Y. assignata, et si quidem linea talis est, ut ejusmodi punctum habeat, quod ad omnia ejus puncta eodem sit modo, id hoc modo inveniri. Si autem

5 f. lineae *(1)* ita ut punctum describens unam *(2)* congruae L 11 inveniri. *(1)* In circulari autem *(2)* Si L

circularis sit linea ut hoc loco sufficit punctum aliquod ad tria lineae circularis puncta se eodem modo habens inveniri, id enim eodem modo se habebit ad alia omnia. Cujus rei ratio est, quia ex tribus punctis datis $C.D.E.$ vide fig. 24 posito esse $C.D.$ ♉ $D.E.$ methodo paulo ante dicta ad fig. 25. punctum aliquod certum determinari, ac proinde aliis tribus punctis quibuslibet in circulo assumtis prioribus tribus congruentibus, eodem modo lineas concurrentes congruas ducendo, necesse esse deveniri semper ad idem X. Hinc cum ex tribus datis punctis $D.C.E.$ modo diversa inveniri possint puncta X. prout lineae congruentes aliter atque aliter ducuntur, seu citius tardiusque convergunt, patet etiam alia atque inveniri posse puncta X. eaque omnia in unam lineam cadere.

(75) Sed eadem sine circulo simplicius consequi possumus.



[*Fig. 31*]

Sint tria puncta $A.B.C.$ ita ut sit $A.B.$ ♉ $B.C.$ ♉ $A.C.$ inveniantur que puncta X. ita ut sit $A.X.$ ♉ $B.X.$ ♉ $C.X$ idque quoties libet, sive quod idem est moveatur punctum X. ita ut quivis ejus locus ut ZX eodem modo se habeat ad $A.B.C.$ id est ut sit $A.3X.$ ♉ $B.3X.$ ♉ $C.3X.$ tunc puncta ZX erunt in directum posita, sive $\overline{Z}X$ erit l i n e a r e c t a . Atque ita apparet quid velit Euclides, cum ait Lineam rectam ex aequo sua interjacere puncta, id est non subsultare in ullam partem, seu non aliter ad punctum A quam B vel C durante motu se habere. Hinc autem modus quoque habetur puncta X. rectae $\overline{Z}X$ inveniendi. Nimirum si ex A linea educatur quaecunque eodem modo se habens ad B et C, itemque alia per B priori congruens et congruenter posita, id est, ut punctum hujus puncto illius respondens eodem modo se habent ad $B.A.C$ ut punctum illius ad $A.B.C.$ eaque lineae producantur, donec sibi occurrant, occurrent sibi necessario in puncto X

16 ait: EUKLEIDES, *Elementa*, I, def. 4.

quod se habet eodem modo ad $A.B.C$. Et si per punctum C. etiam talis linea ducta fuisset congrua congruenterque prioribus ea ipsis occurrisset in puncto eodem X. Hinc autem quotvis ejusmodi puncta inveniri possunt, adeoque et Linea recta describi poterit per puncta.

(76) Resumamus aliqua: a puncto quolibet ad quodlibet ducta intelligi potest linea, eaque r i g i d a.

(77) $A.B$. significat situm ipsorum A et B inter se, id est tractum aliquem rigidum per A et B. quem tractum nobis sufficit esse lineam. Ita $A.B.C$. significat tractum alium rigidum per $A.B.C$.

(78) Quicquid in spatio ponitur id moveri potest, sive punctum sit sive linea, sive alius tractus sive cuilibet in extenso assignari potest aliud congruum. Hinc A. ♉ X. $A.B$ ♉ $X.Y$ $A.B.C$ ♉ $X.Y.Z$ vel $A.B.C$ ♉ $w\overline{X.Y.Z}$.

5 aliqva: *(1)* A ♉ B. *(a)* sive *(b)* seu A ita moveri potest, ut incidat in locum ipsius B. *(2)* A significat punctum. *(3)* a puncto *L* 6 f. r i g i d a. | *(1)* id est cuius pars una non possit moveri immota alia *(a)* in qva nullum discrimen *(b)* qva si⟨—⟩ *(2)* id est in qva nihil muta *(3)* cuius partium relatione ad se invicem nulla *(a)* nota *(b)* mutatio fieri potest. *gestr.* | (77) *L* 7 significat *(1)* lineam qvandam rigidam *(2)* situm *L* 7 f. rigidum *(1)* terminatum per A | et *erg.* | B *(2)* per *L* 8 f. lineam. *(1)* (78) Si moveatur linea A.B., incidat in aliam qvamlibet ei congruam X.Y. itaqve dicemus: A.B. ♉ X.Y. | sive cuilibet lineae alia congrua designari potest *erg.* | (79) Moveri potest linea A.B. qviescente puncto A. ponamus hoc motu B. incidere in Y. fiet A.B. ♉ A.Y. | cuius rei ratio est qvia plura congrua se attingere *erg.* | (80) Moveri potest | linea *gestr.* | A.B. ita ut punctum A incidat in punctum datum C et punctum B. in qvodlibet aliud, fiet: A.B. ♉ C.Y. *(2)* ita ... rigidum *(a)* punctis A.B.C. terminatum *(b)* per puncta A.B.C. compositum ex lineis A.B. et B.C. et A.C. et ita porro *(c)* per *L* 11 tractus *(1)*. *(a)* A.B ♉ 3X.3Y ♉ 6X.6Y. A.B.C ♉ X.Y.Z. et ita porro *(b)* Hinc A. ♉ 3Y. ♉ 6Y. ♉ 9Y *(2)* sive cuilibet *(a)* tractui *(b)* in extenso *L* 12 A.B.C ♉ X.Y.Z. *(1)* item: A ♉ 3X. ♉ 6X. ♉ 9X. ♉ ωX A.B ♉ 3X. 3Y ♉ 6X.6Y. etc. ♉ *(a)* ZX *(b)* ω, X.Y A.B.C ♉ 3X.3Y3Z ♉ ω, X.Y.Z Nimirum intellgi potest *(aa)* X *(bb)* punctum moveri ut incidat in A.3X.6X. etc. (79) Omnis tractus ita moveri potest ut punctum eius datum incidat in aliud qvoddam punctum datum *(aaa)* qvia unumqvodqve *(aaaa)* qvi *(bbbb)* punctum alteri per omnia congruum est adeoqve congruis A.B.C. ♉ D.X.Y. *(bbb)* A.B ♉ C.X. A.B.C. ♉ D.X.Y. (80) *(2)* vel *L*

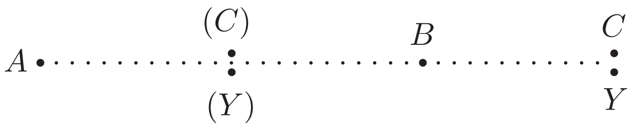
(79) Datis duobus diversis in extenso poni potest unum quiescere, alterum moveri.

(81) Si aliquod eorum quae sunt in tractu rigido moventur, ipse tractus rigidus movetur.

(82) Omnis tractus ita moveri potest ut punctum ejus datum incidat in aliud datum. $A.B.C.$ ♉ $D.X.Y.$

(83) Omnis tractus moveri potest uno ejus puncto manente immoto. $A.B.C$ ♉ $A.X.Y$.

(84) Recta est tractus qui moveri non potest, duobus punctis in eo quiescentibus; sive si quidam tractus moveatur duobus punctis manentibus immotis si alia praeterea in eo puncta ponantur manere quiescentia; omnia ea puncta dicentur in directum sita, sive cadere in tractum qui dicitur recta.



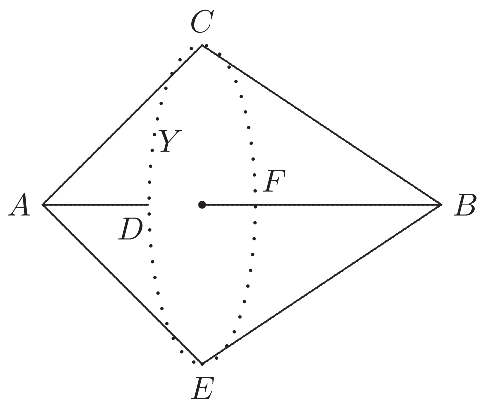
[*Fig. 32*]

1 diversis | tractibus *gestr.* | in *L* 1 f. moveri. *(1)* | A.B.C. D.E.F ♉ *(a)* Z *(b)* $\omega\overline{\text{X}}$.Y.Z *erg.* | (81) Datis duobus tractibus congruis, effici potest ut se contingant in *(aa)* extremis secun *(bb)* punctis *(aaa)* secundum qvae sunt *(bbb)* respondentibus [puncta respondentia in congruis voco, qvae coincidant, si ipsa congrua sibi applicata sive coincidentia ponantur] Nam unus tractus poni potest qviescere alter moveri; per 80. moveatur ergo ita ut punctum in eo datum qvod dictum est, incidat in aliud punctum datum alterius per 79. et factum erit qvod qvaeritur. Hinc A.B.C ♉ A.X.Y. (82) *(2)* (80) Qvotcunqve puncta poni potest moveri situ eodem servato, nam *(a)* tractu rigido *(b)* lineis rigidis connecti intelligantur, isqve ponatur moveri per 76 *(c)* isqve ponatur moveri per 78. et lineae rigidae in ipsis *(d)* tractu rigido connecti intelligantur per 76. isqve moveatur per 78. | Qvicqvid autem in tractu *erg.* | (81) Omnis tractus ita moveri potest, ut punctum eius datum incidat in *(3)* (81) Si *(a)* ea *(b)* aliqvod eorum *L* 3 f. movetur. *(1)* non tamen contra *(a)*] *(b)* per 83.] | Nam tractus rigidus est cuius una pars non potest moveri immota alia. nihil autem in aliqvo moveri potest, ne punctum qvidem aut extremum, nisi parte mota. Qvia *(aa)* puncta per *(bb)* extrema per se sola moveri non possunt *erg.* | *(aaa)* (82) Si tractus rigidus movetur, *(bbb)* Duae qvaelibet lineae rigidae possunt ita sibi apponi ut sese attingant in uno solo puncto. *(2)* (82) *L* 6 f. A.X.Y. *(1)* [verum qvidem est etiam omnem tractum | (praeter unicum, qvi linea recta dicitur) *erg.* | moveri posse duobus | etiam *gestr.* | punctis in eo manentibus immotis. sed hoc demonstrandum est] *(2)* (84) *(a)* Linea *(b)* Recta *L* 8 tractus *(1)* moveri possit *(2)* moveatur *L*

2 (81): (80) wird in der Zählung übersprungen.

Seu si $A.B.C.$ ♉ $A.B.Y.$ necesse est esse $C \infty Y$. hoc est si punctum aliquod reperiatur C. situm in directum cum punctis $A.B$. non potest tractus $A.B.C$ (vel $A.C.B$) ita moveri manentibus $A.B$. immotis, ut C. transferatur in Y. atque ita congruat tractus $A.B.Y$. priori $A.B.C$. Sive quod idem est, non potest praeter punctum C. aliud adhuc reperiri Y, quod ad puncta fixa $A.B$. eundem quem ipsum C. situm habeat, sed necesse est si tale quod Y. assumatur ipsum ipsi C coincidere seu esse $Y \infty C$. Unde dici potest punctum C. sui ad puncta $A.B$. situs esse exemplum unicum. Et punctum quod ita moveatur ut ad duo puncta fixa situm servet in sua specie unicum, movebitur in recta. Nempe si sit: $A.B.Y$ ♉ $A.B.X$ sitque ideo $Y \infty X$ erit $\overline{w}X$ ($\infty\, \overline{w}Y$) linea recta. An autem dentur hujusmodi puncta in directum sita, et an tractum componant, et utrum tractus ille linea sit, non sumendum, sed demonstrandum est. Via autem puncti ita moti, utique l i n e a r e c t a erit, quae quidem si per omnia puncta hujusmodi transit, utique locus omnium punctorum duobus punctis in directum junctorum, non alius tractus quam linea erit.

(85) Si duobus in tractu $A.C.B$. punctis $A.B$ manentibus immotis, moveatur ipse tractus, linea quam punctum ejus motum C describet dicetur c i r c u l a r i s .



[*Fig. 33*]

An autem possit tractus aliquis moveri duobus punctis manentibus immotis, etiam non sumendum, sed demonstratione definiendum est.

3 f. tractus *(1)* ACB *(2)* ABC priori *(3)* A.B.Y. *L* 8 duo *(1)* data *(2)* puncta | fixa *erg.* | situm *L* 8 f. recta. | Nempe ... Y ∞ X *(1)* erit *(a)* Z *(b)* $\overline{\varpi}$Y linea *(2)* erit ... recta *erg.* | An *L* 12 utiqve *(1)* ipsa recta non nisi linea erit *(2)* locus *L*

$A.C.B$ ɣ $A.Y.B$ dicetur $\overline{\varpi}Y$ linea c i r c u l a r i s. Et si sint quotcunque puncta $C.D.E.F.$ sitque $A.B.C$ ɣ $A.B.D$ ɣ $A.B.E$ ɣ $A.B.F$ dicentur esse in una eademque circulari. Haec definitio lineae circularis non praesupponit dari rectam et planum; quod facit Euclidis definitio.

(86.) Locus omnium punctorum quae eodem modo se habent ad A quemadmodum ad B, appellabitur p l a n u m . Sive si sit $A.Y$ ɣ $B.Y$ erit $\overline{Y}$. p l a n u m .

(87) Hinc si sit $A.C.B.$ ɣ $A.Y.B.$ sitque $A.C.$ ɣ $C.B.$ (adeoque et $A.Y.$ ɣ $B.Y.$) erit Linea ωY circularis in plano. An autem omnis circularis sit in plano postea definiendum est.

(88) Si sint $A.B$ ɣ $B.C$ ɣ $A.C$ sitque $A.Y.$ ɣ $B.Y.$ ɣ $C.Y.$ erit $\overline{\omega Y}$ Linea Recta.

(89) Si sit $A.Y$ ɣ $A.(Y)$. erit $\overline{Y}$ superficies s p h a e r i c a .

(90) Si sit $Y.$ ɣ (Y) erit Locus omnium $Y.$ seu $Y.$ extensum absolutum, sive S p a - t i u m . Nam locus omnium punctorum inter se congruentium est locus omnium punctorum in universum. Omnia enim puncta congrua sunt.

(91) Idem est si sit $Y.$ ɣ $A.$ nam (ex characterum significatione) si Y ɣ A erit (Y) ɣ $A.$

---

12 *Darüber:* [ɣ. significat congruitatem. ∞ coincidentiam. Cum dico $A.B$ ɣ $A.Y.$ possem quidem dicere distantiam AB. aequari distantiae AY. Sed quia postea cum tria vel plura adhibentur ut $A.B.C$ ɣ $A.B.Y.$ non hoc tantum volumus triangulum $ABC.$ triangulo ABY aequari, sed praeterea simile esse, id est congruere, ideo signo ɣ. potius utor.]

3 praesupponit *(1)* planum aut lineam rectam *(2)* dari *L* 4 f. definitio *(1)* (86). Si sit B.C ɣ A.C ducere per punctum C. lineam $\overline{\varpi}$Y, ita ut sit Y.B ɣ Y.C. Hoc fit si punctis A.B. immotis per C. describatur Linea circularis. Sed idem fieri potest etiam aliis lineis descriptis. Itaqve *(2)* (86.) *L* 5 ad *(1)* duo puncta dicitur pl *(2)* A. *(a)* B. *(b)* qvemadmodum *L* 7 (87) | Linea circularis est in plano. *gestr.* | Hinc si *(1)* sit $\overline{\varpi}$Y linea circularis descripta a puncto *(2)* sit *L* 10 (88) *(1)* Locus omnium punctorum *(2)* Si sint *(a)* puncta *(b)* AB ɣ BC ɣ AC *L* 11 f. erit *(1)* ω *(2)* $\overline{\mathrm{Y}}$ *(a)* solidum. qvod dicitur sp *(b)* superficies s p h a e r i c a *(aa)* (90) si sit A.Y. ɣ B.Y. *(bb)* (90) *L* 12 Locus *(1)* omnium Y. seu $\overline{\mathrm{Y}}$. solidum interminatum sive S p a t i u m. qvod utiqve est locus *(2)* omnium Y. seu Locus $\overline{\mathrm{Y}}$. id est locus omnium punctorum *(3)* omnium *L* 13 f. Nam ... sunt *erg.* *L* 15 ex *(1)* natura *(2)* characterum *L*

---

4 Euclidis definitio: EUKLEIDES, *Elementa*, I, def. 15. **44**,**16**–**20** [...]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

Ergo Y ♉ (Y). Nimirum locus omnium punctorum Y dato puncto A congruorum, utique est etiam spatium ipsum interminatum, omnia enim puncta cuilibet dato congruunt.

(92) Proximum est: $A.Y$ ♉ $A.(Y)$. Locus omnium Y. seu $\overline{Y}$ dicatur S p h a e r i c a. Quae est locus omnium punctorum ejusdem ad datum punctum situs existentium. Datum autem punctum dicitur C e n t r u m .

(93) Idem est si sit $A.B$ ♉ $A.Y$. Nam ideo erit et $A.B.$ ♉ $A.(Y)$. ac proinde $A.Y$ ♉ $A.Y$. Ubi nota ipsum B. esse ex numerorum Y. seu esse bY. Si enim Y. omnia puncta comprehendit quae eum habent situm ad A, quem B habet, utique ipsum B. comprehendet, quod eum utique situm ad A habet quem habet. Sphaerica est locus omnium punctorum dati ad punctum datum situs (id est dati puncti situi congrui situs) existentium.

(94) Si sit $A.Y$ ♉ $B.Y$. locus omnium Y. seu $\overline{Y}$. dicatur p l a n u m sive locus punctorum ut Y, quorum unumquodque ad unum ex duobus datis punctis A. eodem modo situm est, quemadmodum ad alterum B, est p l a n u m . Notandum est hanc Loci expressionem in aliam converti non posse in qua simul sint Y. et (Y).

(95) Si sit $A.B.$ ♉ $C.Y.$ erit $\overline{Y}$ s p h a e r i c a . Nam erit: $A.B.$ ♉ $C.Y.$ ♉ $C.dY$ sit $dY. \infty D$. fiet: $C.D.$ ♉ $C.Y.$ adeoque locus erit sphaerica per 92.

(95) Y. et (Y) significant quodcunque punctum loci alicuius, et quodcunque aliud praeter prius. $\langle Z\rangle Y$. significat quodlibet punctum loci, seu omnia loci puncta distributive. Idem etiam significat Y absolute positum. dY. significat unum aliquod peculiare punctum loci. $\overline{Y}$ significat omnia puncta loci collective, seu totum locum. Si locus sit Linea hoc ita significo $\overline{\omega Y}$. Si sit superficies ita $\overline{\omega\Psi Y}$. Si solidum ita: $\overline{\omega\Psi\varphi Y}$.

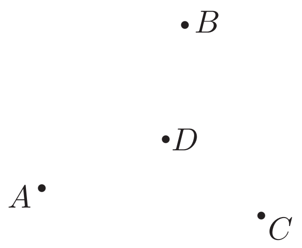
1 f. Nimirum ... congruunt *erg. L* 3 omnium Y. *(1)* dicatur A m b i t u s S p h a e r a e : *(2)* seu $\overline{\mathrm{Y}}$ *L* 4 f. qvae est ... C e n t r u m. *erg. L* 7–10 Ubi ... existentium *erg. L* 11–13 sive locus | unicum *gestr.* | punctorum | ut Y *erg.* |, qvorum unumqvodqve ad *(1)* duo data puncta eodem *(2)* unum ... punctis | A. *erg.* | eodem ... alterum | B. *erg.* |, est p l a n u m. *erg. L* 16 f. per 92. | idem est si sit A.B ♉ B.Y. *erg. u. gestr.* | (95) *(1)* Y. significat | ⟨— —⟩ *erg. u. gestr.* | punctum alicuius loci. ⟨—⟩ Y. vel *(2)* Y. et (Y) significant *(a)* aliud *(b)* unum punctum atqve aliud *(c)* qvodcunqve *L* 18 prius. *(1)* Z *(2)* ωY. significat *(3)* ⟨Z⟩Y. *L* 19 Idem ... positum *erg. L* 20 sit *(1)* punctum hoc significo *(2)* Linea *L*

17 (95): Die Zählung (95) wiederholt sich.

(96) Si sit $A.B.C$ ♉ $A.B.Y$, (sive si sit $A.B.Y$ ♉ $A.B.(Y)$) tunc locus omnium Y. seu $\overline{Y}$ dicetur C i r c u l a r i s . Id est si plurium punctorum idem sit situs (vel datus) ad duo data puncta, L o c u s erit C i r c u l a r i s .

(97) Si sit $A.Y$ ♉ $B.Y$ ♉ $C.Y$ tunc Locus omnium Y. seu $\overline{Y}$ dicetur r e c t a.

(98) Si sit $A.B.C.Y$ ♉ $A.B.D.Y$ erit $\overline{Y}$ P l a n u m seu si $C.D$. duo puncta eodem modo sint ad tria $A.B.Y$. erunt haec tria in eodem plano et si duobus ex his datis $A.B$ quaeratur tertium Y., locus omnium Y. erit planum. Ubi patet ipsa $A.B$. sub Y. comprehendi.



[*Fig. 34*]

Demonstrandum est hunc locum cum altero qui est prop. 94 coincidere. Hoc ita fiet: $C.Y \overset{(1)}{\text{♉}} D.Y$ locus est ad planum per prop. 92. Sint $3Y. \infty A$ et $7Y \infty B$ erit $C.A \overset{(2)}{\text{♉}} D.A$ et $C.B \overset{(3)}{\text{♉}} D.B$. Ergo fiet:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} A. & & B. & & C. & & Y\ \text{♉}\ A. & & B. & & D. & & Y. \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 3 & \\ & & 4 & & 5 & & & & 4 & & 5 & & \\ & & & 6 & & & & & & 6 & & & \end{array}$$

Nam 1 patet per se et 2 per (3) et 3 per (1) et 4 per (2) et 5 per se et 6 per se.

1 A.B.(Y)) *(1)* erit $\overline{\text{Y}}$ linea C i r c u l a r i s *(2)* tunc *L* 2 f. id est . . . erit Circularis *erg. L*
4 A.Y ♉ B.Y ♉ C.Y. *(1)* erit *(a)* Loc *(b)* $\overline{\text{Y}}$ linea r e c t a *(2)* tunc *L* 4 f. r e c t a. *(1)* [necesse est autem esse A.B ♉ B.C ♉ A.C ut jam ostendam] potest et sic exprimi: A.B.C.Y ♉ A.B.C.(Y) (98) Si sit A.D ♉ B.D ♉ C.D. erit A.B. ♉ B.C ♉ A.C. *(a)* Nam A.B.D ♉ A.D.B. ♉ A. *(b)* 99 *(2)* (98) *L* 5–10 erit $\overline{\text{Y}}$ *(1)* R e c t a *(2)* P l a n u m | seu si *(a)* tria *(b)* duo punct *(c)* dati *(d)* C.D duo *(aa)* sint puncta eodem modo ad tria *(bb)* puncta . . . patet *(aaa)* omni *(bbb)* ipsa . . . comprehendi *erg.* | . Demonstrandum *L*
11 planum *(1)* adda *(2)* adscribatur utrobiqve, A.B. fiet A.B. *(3)* per *L*

(99) Si sit $A.Y \between B.Y \between C.Y$ locus $\overline{Y}$ erit p u n c t u m , sive Y satisfaciens non erit nisi unicum sive erit $Y \infty (Y)$. Haec proposito demonstranda est.

(100) Habemus ergo loca ad punctum, ad Rectam, ad Circularem, ad Planum, ad Sphaericam, solis congruentis mira simplicitate expressa sed haec partim vera, partim possibilia esse; et cum aliis definitionibus coincidere nostras demonstrandum est.

(101) Si tractus sive extensum quodcunque moveatur uno puncto existente immoto, aliud quodcunque ejus punctum movebitur in Sphaerica. Pono autem ipsum extensum esse rigidum, seu partes situm eundem servare. Habebimus ergo modum inveniendi sphaericae puncta quotcunque. Potest etiam $A.B. \between A.Y.$ esse data; si tractus transeat per duo puncta $A.B$. Tractum autem aliquem (sive linea sit sive superficies sive solidum) per duo data puncta ducere, et tractum movere uno puncto immoto, utique in potestate est.

(101) Si per duo data puncta transeat duo tractus congrui, c o n g r u e n t e r , id est ita ut puncta respondentia in duobus tractibus situs habeant ad duo puncta data unumquodque ad suum, congruos, moveanturque aut etiam si opus sit crescant etiam congruenter, donec sibi occurrant loca in quibus puncta eorum respondentia sibi occurrent, erunt puncta plani illius, quod ad duo puncta data eodem modo se in quolibet puncto suo habere, definivimus. Posse autem congruenter moveri, posse congrue ac congruenter produci, donec occurrant, postulo.

(102) Si jam sphaericam sphaerica, aut plano secemus, habebimus cicularem, si planum planom, habebimus rectam. Si rectam recta, punctum. Ostendendum autem est has sectiones fieri posse, et punctorum Sphaericae et Sphaericae, vel plano et plano, vel plano et Sphaerica communium, esse tractum. Si Sphaerica planum vel Sphaericam tangat locus, etiam est punctum, cum scilicet circularis fit minima seu evanescit.

(103) Caeterum omnes definitiones rectae communes nondum satis perfectae sunt, nam semper adhuc demonstratione opus est quod talis recta sit possibilis. Quod tamen

---

24–67,11 *Zum eingerahmten Text:* Inclusa omittantur vel aliorsum referantur.

4 mira simplicitate *erg. L* 7 aliud *(1)* eius punctum mo *(2)* aliqvo *(3)* qvodcunqve *L* 14 aut ... crescant *erg. L* 16 erunt *(1)* omnia in eodem plano *(2)* puncta *L* 16 f. in qvolibet puncto suo *erg. L* 18 f. postulo. *(1)* Eodem modo res redit si ex duobus punctis datis *(2)* (103) *(3)* (102) *L* 24 f. sunt, *(1)* | nam dubitari potest, *nicht gestr.* | adhuc *(2)* nam *L*

---

12 (101): Die Zählung (101) wiederholt sich. 24–67,11 (103): Der restliche Text ist von Leibniz umrahmt worden.

videtur ponendum inter facillima. Tali itaque opus definitione, ut statim appareat rectam esse possibilem. Si definias minimum, etiam hoc dubitari potest an detur minima a puncto ad punctum. Si definias eam cujus puncta non magis diduci possunt, praesupponis distantiam, seu viam minimam, diduci enim est majorem distantiam acquirere. Equidem aliud est exhibere rectam materialem, seu ducere eam, aliud est cogitatione complecti.

(104) Quando duo Puncta simul percipiuntur eo ipso percipitur ipsorum situs eorum ad se invicem. Sunt autem duo quilibet situs inter duo puncta similes, adeoque sola comperceptione seu magnitudine distinguuntur. Est ergo situs discrimen magnitudo cujusdam extensi cum duo puncta simul percipiuntur, eo ipso percipitur extensum quoddam.

(105) R e c t a est extensum quod duobus punctis simul perceptis eo ipso percipitur.

(106) Puncto uno percepto, rursumque alio percepto separatim, nulla notari potest varietas.

(107) Si simul percipiantur $A.B.$ rursusque simul percipiantur $C.D.$ discrimen situs est. Id tamen quod percipitur perceptis $A.B.$ et quod percipitur perceptis $C.D.$ similia sunt: patet enim nihil in singulis notari posse, quod non in utrisque notetur, itaque id quod percipitur perceptis $A.B.$ et quod percipitur perceptis $C.D.$, si ex se invicem discerni possunt sola magnitude discernentur, itaque simul perceptis $A.B.$ simul percipitur aliquid magnitudinem habens. Cum duo simul in spatio esse percipiuntur, eo ipso percipitur via ab uno ad aliud. Et cum sunt congrua eo ipso concipitur via unius in alterius locum. Sunt autem duo puncta congrua. Itaque quod percipitur, duobus punctis simul perceptis est Linea seu via puncti. Patet etiam viam hanc talem esse, ut sive ab A ad B, rendas, sive a B ad A. via sit eadem. Idemque sit si simul A tendat versus B. et B versus A. et locus in quo erit A. congruus erit loco in quo erit B. congruenterque positus, id est ut locus puncti venientis ab A erit ad A. ita locus puncti venientis ad B. erit ad B., imo etiam ut locus puncti venientis a B erit ad A. ita locus respondens puncti venientis ab A erit ad B. Punctum erit in quo sibi occurrant quod eodem modo erit a A quo ad B. Cum concipimus duo puncta ut simul existentia, inquirimusque rationem cur

6 percipitur *(1)* Linea qvaedam *(2)* ipsorum *(a)* distantia seu *(b)* situs, *(aa)* seu distantia *(bb)* eorum *L* 15 enim *(1)* ex characteribus *(2)* nihil *L* 16 si *(1)* differunt, discerni possunt, sola magnitudine discernentur *(2)* invicem *(3)* ex se invicem *L* 17 f. aliqvid *(1)* ⟨— —⟩ *(2)* magnitudinem habens, adeoqve et ⟨—⟩ *(3)* magnitudinem in spatio habens, in qvo nihil aliud p⟨—⟩ *(4)* magnitudinem *L* 21 ut *(1)* qvodlibet punctum in ea sum *(2)* sive *L* 24 ut *(1)* ille eria *(a)* ad *(b)* ab A *(2)* punctum venientis *(3)* locus *L* 24 erit ad *(1)* B. ita ille *(2)* A ita *(a)* alter a *(b)* locus *L*

simul existentia dicamus, cogitabimus esse simul percepta, vel certe posse simul percipi. Quando aliquid percipimus velut existens, eo ipso percipimus esse in spatio, id est posse alia existere indefinitis quae ab ipso nullo modo possint discerni. Sive quod idem est posse moveri, sive posse tam in uno loco quam in alio esse, et quia non potest simul esse in pluribus locis, nec moveri in instanti, ideo locum illum percipimus ut continuum. Sed quia indefinitum adhuc est, quorsum moveatur, potest enim moveri multis modis qui inter se discerni non possunt; hinc determinatur animus ad certum aliquem motum, si aliud praeterea ponamus, congruum priori, eo ipso enim cogitatur unum posse pervenire in alterius locum. Idque cum pluribus modis fieri possit, determinatur tamen unicus, ad quem considerandum nullo alio praeterea assumto opus est, quam his duobus positis. Id est ex positis duobus congruis in spatio ponitur via unius ad alterum, ipsa connectens. Simplicissima autem positio est puncti. Nam etsi ponas aliud tamen cum ex motibus diversis unius ad alterum unus determinetur, quo puncta respondentia ad se determinate moventur, patet animum tandem incidere in considerationem duorum punctorum, ea enim congrua esse constat per se.

[*Verworfener Abschnitt*]

Itaque primum cogito: punctum A per se existere potest. Punctum existit in Spatio. Punctum coexistit aliis punctis. Punctum moveri potest. Punctum coexistere potest aliis punctis infinitis.

P u n c t u m est in extenso simplicissimum. Puncta duo per se invicem discerni non possunt. Ergo punctum aliud per se etiam existere potest. Seu quodlibet punctum per se existere potest. Punctum aliquod existit. Quicquid existit existere potest. Ergo punctum aliquod existere. E x t e n s u m existit.

1 f. percipi *(1)* Qvaecunqve simul percipimus, ea percipimus in *(a)* extenso *(b)* spatio, id est percipimus posse alia multa ab iis nullo modo discriminabilia simul percipi. *(aa)* sive qvod idem est praese *(bb)* sive posse id qvod percipi *(2)* qvando *L* 3 indefinitis *erg. L* 10 f. Id est *(1)* determinatur extensum *(2)* ex *L* 11 ponitur *(1)* extensum *(2)* via *L* 11 f. connectens. *(1)* Haec via *(2)* Via autem A. *(3)* simplicissima *L* 14 patet *(1)* continua *(2)* animum *L* 17 punctum | A per se *erg.* | *(1)* existit *(2)* existere *L* 18 punctis. *(1)* Punctum moveri potest. *(2)* Punctum *L* 20 simplicissimum. *(1)* Punctum unum ab alio discerni neqvit, si ipsa duo tantum *(2)* Punctum unum ab alio per *(3)* Puncta *L*

[*Schlussabschnitt*]

E x t e n s u m est continuum. In extenso possunt fieri partes. In extenso possunt fieri partes quae existunt simul. In extenso possunt fieri partes infinitis modis. Extensi pars extensa est. In uno extenso existere possunt multa. In uno extenso existere possunt infinita. In uno extenso existere possunt infinita similia. In uno extenso existere possunt infinita congrua. Si quid in extenso existit, eique congruum est, ei coincidit. Si quid in extenso existit eique congruum non est, possunt infinita existere in eodem extenso, quae priori non coincidunt, sed tamen congrua sunt. Duo mobilia quae un extenso sumuntur, sibi congruere possunt, sive diversis temporibus ita locari possunt, ut prior status a posteriore discerni non possit. Locus ipse extensi extensus est. Locus extensi congruit extenso. Locus est immobilis.

2 est | totum *gestr.* | continuum *L* 4 est. *(1)* Qvae existunt simul sunt *(2)* Si qvae existunt simul erunt in uno extenso. *(3)* In | uno *erg.* | extenso *L* 4 f. In | uno *erg.* | extenso existere possunt *(1)* multa *(2)* infinita. *(a)* In extenso existere possunt similia *(b)* In | uno *erg.* | extenso existere possunt *(aa)* cong *(bb)* multa sim *(cc)* infinita *L* 5 f. possunt *(1)* multa *(2)* infinita congrua *L* 7 eodem *(1)* continuo *(2)* extenso *L* 8 sunt. *(1)* Qvid in extenso | terminato *erg.* | existit, id ei successive congruum est sive *(a)* nullum *(b)* nihil in extenso *(aa)* ass *(bb)* terminato existit, cui congruum aliqvid in alio extenso *(aaa)* mobili *(bbb)* mobili *(ccc)* immobili assumi potest, cui non aliqvid aliqvid congruum in extenso mobili intra datum tempus coexistere possit Si qvotcunqve in eodem extenso immobili *(2)* Duo *(a)* extensa in *(b)* mobilia *L*

7 (40835). DATA BASI, ALTITUDINE ET ANGULO AD VERTICEM INVENIRE TRIANGULUM

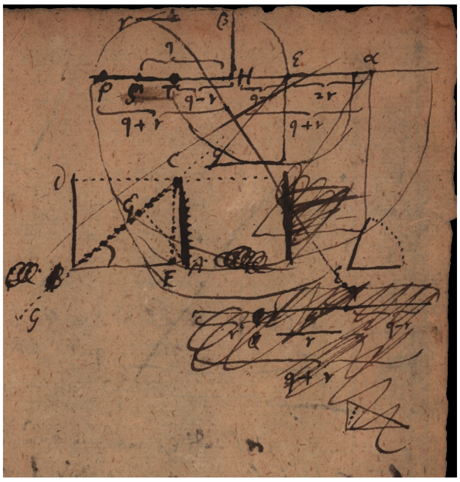
[Ende August 1679]

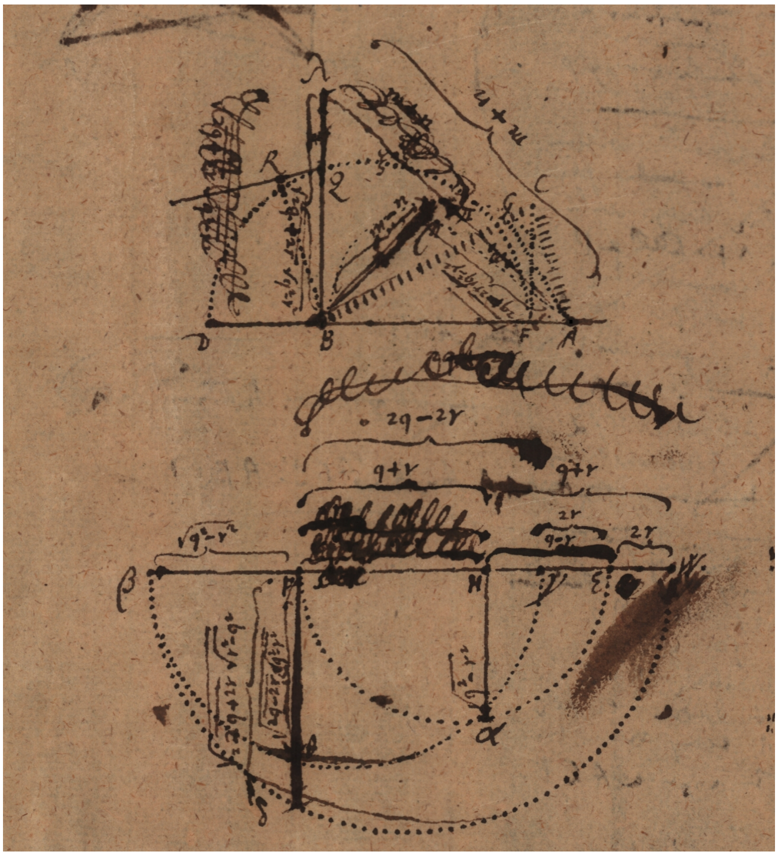
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 18 – 19. 1 Bog. 2°. 4 S. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Math. Schr.* 5, 1858, S. 168–171; 2. Echeverría, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 136 bis 143.

Datierungsgründe: Die vorliegende Studie wurde wohl kurz nach der auf den 9./(19.) August 1679 datierten Untersuchung 40834 verfasst.

Data Basi altitudine et Angulo ad verticem invenire Triangulum.

Hoc problema esse potest specimen discriminis inter constructiones per figurae considerationem et constructiones per algebram inventas.

9–69,2 Triangulum. | Hoc ... inventas. *erg.* | *(1)*  *(a)* Sit data basis AB. altitudo BD *(b)* Sit magnitudine et positione data basis AB. altitudo autem CF data magnitudine seu *(2) Fig. 1* Sit *L*



[*Fig. 1*]

Sit data basis AB altitudo CF aequalis datae BD angulusque ad verticem etiam magnitudine datus, nempe aequalis dato E.

Problema per Algebram ita quaeremus: Ex puncto C. quaesito demissa intelligatur perpendicularis CF ipsi AB basi productae si opus occurrens in F. Similiter ex aliquo extremo baseos A ducatur AG perpendicularis ad latus oppositum BC si opus productum.

Ipsas	AB	BD seu CF	BC	AC	BG	CG	AG	BF
vocabimus:	b	d	m	n	x	z	v	y

Denique quia ob angulum C. datum ratio $\underset{n}{AC}$ ad $\underset{z}{CG}$ data est. Hanc ponamus esse eandem quae q ad r.

Erit $z \overset{(1)}{\text{aequ.}} \frac{r}{q}n$ eritque $\underset{n}{AC}$ ad $\underset{v}{AG}$ ut q ad $\sqrt{q^2-r^2}$ sive erit $v \overset{(2)}{\text{aequ.}} \frac{q}{\sqrt{q^2-r^2}}n$.

Porro ob triangula similia BFC. BGA erit $\underset{b}{AB}$ ad $\underset{v}{AG}$ ut $\underset{m}{CB}$ ad $\underset{d}{\text{CF}}$ ergo erit $v \overset{(3)}{\text{aequ.}} \frac{bd}{m}$ et duos valores aequando fiet: $mn \overset{(3)}{\text{aequ.}} \frac{\sqrt{q^2-r^2}}{q}bd$.

Porro $x+z \overset{(4)}{\text{aequ.}}\ m$ quanquam signa variari possint, prout G cadit intra B et C vel extra in alterutrum latus, quod tamen ut mox patebit nullam producit in calculo varietatem.

Ob triangula rectangula erit: $\frac{b^2d^2}{m^2} \overset{(5)}{\text{aequ.}}\ b^2-x^2$, et $\frac{b^2d^2}{m^2} \overset{(6)}{\text{aequ.}}\ n^2-z^2$.

Ergo aequando duos valores fiet: $b^2-n^2 \overset{(7)}{\text{aequ.}}\ x^2-z^2$ sive per 4 fiet $b^2-n^2 \overset{(8)}{\text{aequ.}}\ \overline{x-z}\,m$ vel $x-z \overset{(9)}{\text{aequ.}} \frac{b^2-n^2}{m}$. Unde aequationes 4 et 9 sibi invicem addendo et a se invicem subtrahendo fiet:

$2x \overset{(10)}{\text{aequ.}} +m+\frac{b^2-n^2}{m}$ et $2z \overset{(11)}{\text{aequ.}} +m+\frac{-b^2+n^2}{m}$ sive $z \overset{(12)}{\text{aequ.}} \frac{m^2-b^2+n^2}{2m}$. Quem valorem aequando valori ex aequ. 1 fiet: $m^2+n^2-\frac{2r}{q}mn \overset{(13)}{\text{aequ.}}\ b^2$ unde ob aequ. 3 fiet:

1 erit z $\overset{(1)}{\text{aeqv}}\ \frac{\text{r}}{\text{q}}\text{n}$ *erg.* *L* 1 erit *(1)* $\frac{\text{v}}{\cancel{\text{n}}} \overset{(1)}{\text{aequ}} \frac{\sqrt{\text{q}^2-\text{r}^2}}{\text{q}}\text{n}$ *(2)* v $\overset{(2)}{\text{aeqv}} \frac{\text{q}}{\sqrt{\text{q}^2-\text{r}^2}}\text{n}$ *L* 2 f. erit v *(1)* $\overset{(2)}{\text{aequ}}$ *(2)* $\overset{(3)}{\text{aequ}}\ \frac{\text{bd}}{\text{m}}$ *(a)* qvam aeqvationem *(b)* et *L* 3 f. $\frac{\sqrt{\text{q}^2-\text{r}^2}}{\text{q}}\text{bd}$ *(1)* Rursus ob eadem triangula similia erit *(2)* Porro *L*

$$m^2 + n^2 - \tfrac{2r}{q}mn \pm 2mn \overset{(14)}{\text{aequ.}}\ b^2 \dagger \frac{2r\sqrt{q^2 - r^2}}{q^2}bd \pm \frac{2\sqrt{q^2 - r^2}}{q}bd$$

$$\text{sive}\quad m + n \overset{(15)}{\text{aequ.}}\ \dagger \sqrt{b^2 + \frac{\overline{2r + 2q}\sqrt{q^2 - r^2}}{q^2}bd}$$

$$\text{et}\quad m - n \overset{(16)}{\text{aequ.}}\ (\dagger) \sqrt{b^2 + \frac{\overline{2r - 2q}\sqrt{q^2 - r^2}}{q^2}bd}$$

et quia nihil refert quaenam sit longitudo ipsius q. modo ratio r ad q sit data, faciamus $q \overset{(17)}{\text{aequ.}} \sqrt{bd}$ et fiet:

$$2m \overset{(18)}{\text{aequ.}}\ \dagger \sqrt{b^2 + \overline{2r + 2q}\sqrt{q^2 - r}}\,(\dagger)\sqrt{b^2 + \overline{2r - 2q}\sqrt{q^2 - r^2}}$$

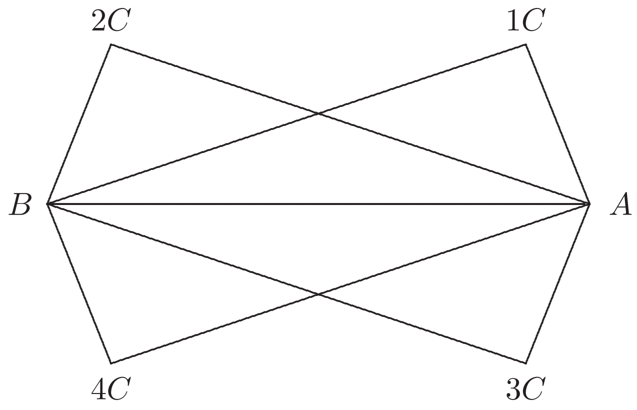
$$2n \overset{(19)}{\text{aequ.}}\ \dagger \sqrt{\phantom{b^2 + \overline{2r + 2q}\sqrt{q^2 - r}}}\,(\ddagger)\sqrt{\phantom{b^2 + \overline{2r - 2q}\sqrt{q^2 - r^2}}}$$

et scribendo per compendium $m \overset{(20)}{\text{aequ.}} \dagger \odot (\dagger)$ ☽ et $n \overset{(21)}{\text{aequ.}} \dagger \odot (\ddagger)$ ☽ faciendoque $+\odot +$ ☽ $\overset{(22)}{\text{aequ.}}$ ♀ itemque $+\odot -$ ☽ $\overset{(23)}{\text{aequ.}}$ ☿ patet fore

vel	m	aequ.	$+\odot$	et	n	aequ.	$+$ ☽
vel	m	aequ.	$+$ ☽	et	n	aequ.	$+\odot$
vel	m	aequ.	$-\odot$	et	n	aequ.	$-$ ☽
vel	m	aequ.	$-$ ☽	et	n	aequ.	$-\odot$

adeoque aequatio quatuor quidem habebit radices, sed tamen non nisi unicum erit triangulum, quod satisfaciet quaestioni, permutatis tantum laterum significationibus, itemque sumendo ab utraque baseos parte. Quatuor itaque Triangula satisfacientia quaestioni super eadem basi positione data collocari possunt, omnia congrua inter se, $AB1C$. $AB2C$. $AB3C$. $AB4C$.

3 f. $(\dagger)\sqrt{\mathrm{b}^2 + \frac{\overline{2\mathrm{r} - 2\mathrm{q}}\sqrt{\mathrm{q}^2 - \mathrm{r}^2}}{\mathrm{q}^2}\mathrm{bd}}$ *(1)* Unde statim habetur tam m. qvam n. sed ut constructio fiat commodior, ponamus q aequ $\sqrt{\mathrm{bd}}$, seu q^2 aequ. bd, id est qvaeratur media proportionalis inter AB. BD. qvae vocetur q. nihil enim refert qvalis sit q. modo ratio ipsius r ad q. sit data q et r. in una ponantur recta HTSP. ita ut HS sit q. *(a)* et SP sit r et *(b)* et SP sit r. itemqve ST erit HT, q − r. et HP, erit *(aa)* q + s *(bb)* q + r *(2)* et qvia *L*



[*Fig. 2*]

Quod clarius patet rudi exemplo in numeris. Sit b basis aequ. 14, altitudo d aequ. $6\dfrac{1}{2}$ erit q seu $\sqrt{bd}$ aequ. circiter $9\frac{1}{3}$ et r sit $2\frac{1}{2}$, fiet $\sqrt{q^2-r^2}$ aequ. 9. $2r+2q$ aequ. $23\dfrac{2}{3}$.

$\overline{2r+2q}\ \sqrt{q^2-r^2}$ sit 213.

$\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ aequ. $14\dfrac{1}{2}$ seu $\sqrt{213}$

$2r-2q$ aequ. $-13\frac{2}{3}$

$\overline{2r-2q}\ \sqrt{q^2-r^2}$ aequ. 123 et

$\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ aequ. 11 seu $\sqrt{213}$

$m+n$ seu $\sqrt{b^2+\overline{2r+2q}\ \sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. † $20\frac{1}{2}$

$m-n$ seu $\sqrt{b^2+\overline{2r-2q}\ \sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. † $8\frac{1}{2}$

Hinc jam, si	†	sit	+	et	(†)	sit	+	erit	m	aequ.	$14\dfrac{1}{2}$,	n	aequ.	6
	†		+		(†)		$-$		m		6	n		$14\dfrac{1}{2}$
	†		$-$		(†)		$-$		m		$-14\dfrac{1}{2}$	n		-6
	†		$-$		(†)		+		m		-6	n		-$14\dfrac{1}{2}$

Constructio ipsa ita absolvetur.

Basi AB producta in D ut sit BD aequalis altitudini describatur semicirculus circa ABD cujus peripheriae ex. B erecta ad angulos rectos BQ occurrat in Q. Erit BQ. q. aequ. $\sqrt{bd}$.

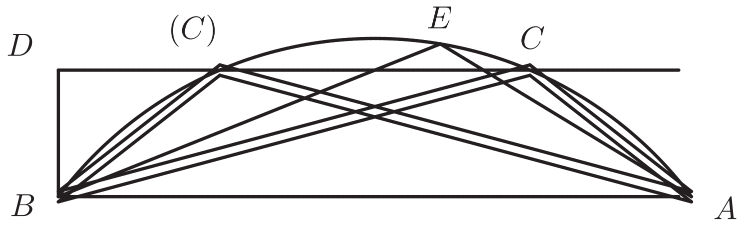
Ponatur jam angulo ad verticem datus esse aequalis BQR et ex B in QR demittatur perpendicularis BR, erit RQ, r. Sit recta in qua hoc ordine designentur puncta $PH\gamma EW$ sitque PH aequ. HW aequ. $q+r$ et HE aequ. $q-r$. Circa diametrum PE describatur semicircumferentia cui ex H normaliter erecta occurrat $H\alpha$ quae erit $\sqrt{q^2-r^2}$ seu media proportionalis inter PH (seu $q+r$) et HE (seu $q-r$). Porro recta WP producatur ultra P usque ad β, ut fiat $P\beta$ aequ. $H\alpha$ seu $\sqrt{q^2-r^2}$. Et cum ex constructione sint PH aequ. $q+r$ et HE aequ. $q-r$, erit PE aequ. $2q$. Unde detrahatur $E\gamma$ aequ. $2r$, restabit $P\gamma$ aequ. $2q-2r$.

Jam rectis $\beta\gamma$ et βW velut diametris imponantur ad easdem partes semicircumferentiae $\beta\theta\gamma$. $\beta\delta W$. quae secabunt rectam $P\theta\delta$ ex P normaliter eductam in punctis θ et δ. Erit $P\theta$ med. prop. inter βP seu $\sqrt{q^2-r^2}$, et $P\gamma$ seu $2q-2r$, id est erit $P\theta$ aequ. $\sqrt{\overline{2q-2r}\sqrt{q^2-r^2}}$ et similiter erit $P\delta$ media prop. inter βP seu $\sqrt{q^2-r^2}$ et PW seu $2q+2r$, id est erit $P\delta$ aequ. $\sqrt{\overline{2q+2r}\sqrt{q^2-r^2}}$. Jam ipsa $P\delta$ transferatur in $B\lambda$ sumtam in BQ si opus producta jungaturque $A\lambda$, quae erit $\sqrt{b^2+\overline{2q+2r}\sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. $m+n$, cujus punctum medium sit π. Rursus basi AB velut diametro imponatur semicircumferentia $A\mu B$. et ejus arcui $A\mu$ subtendatur recta $A\mu$ aequalis ipsi $P\theta$. Jungatur $B\mu$ quae erit $\sqrt{b^2+\overline{2q-2r}\sqrt{q^2-r^2}}$ aequ. $m-n$. Hujus parti dimidiae sumantur in recta $A\lambda$ aequalis $\pi\omega$ versus A, et $\pi\xi$ versus λ eritque $A\xi$ aequ. m et $A\omega$ aequ. n, vel contra habenturque latera Trianguli quaesita m seu BC et n seu AC. Quod faciendum erat.

Atque haec est Constructio, qualem hic Algebra recte atque ordine tractata offert. Satis adhuc commoda prae aliis quae ex Algebra plerumque prodire solent. Sed ipsa

1 f. absolvetur *(1)* positis in directum AB basi, et BD qvae altitudini sit aeqvalis circa *(2)* Rec *(3)* Basi *L* 20 f. jungatur | Pμ *ändert Hrsg.* | qvae *L* 22 Aξ aeqv. m *(1)* vel n et Aω aequ. n vel m *(2)* et *L* 24 Constructio, *(1)* qva meliorem ex Algebra ordine tractata, qvalis hactenus tradita est, erui neqvit. Nam etsi variis aliis modis incognitae qvaeri calculusqve institui *(2)* qvalem *L*

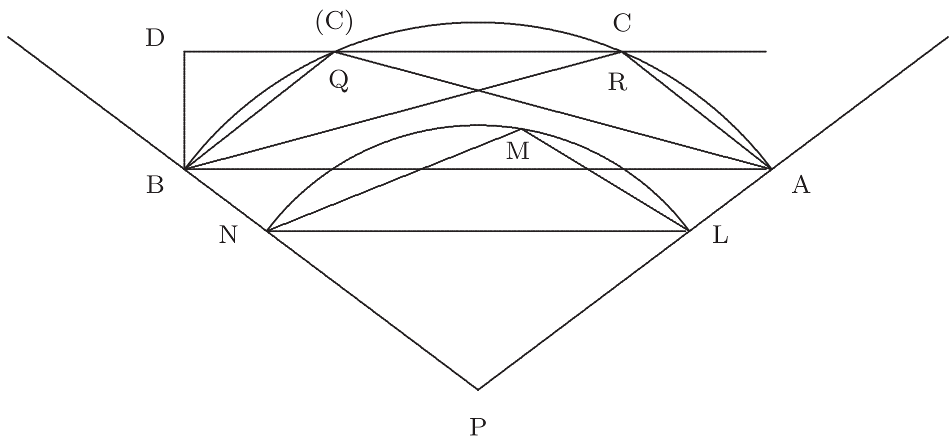
Geometria quae figuris contemplandis immoratur, primo intuitu exhibet constructionem qua simplicior ne quidem optari potest, et cui prior comparari indigna est.



[*Fig. 3*]

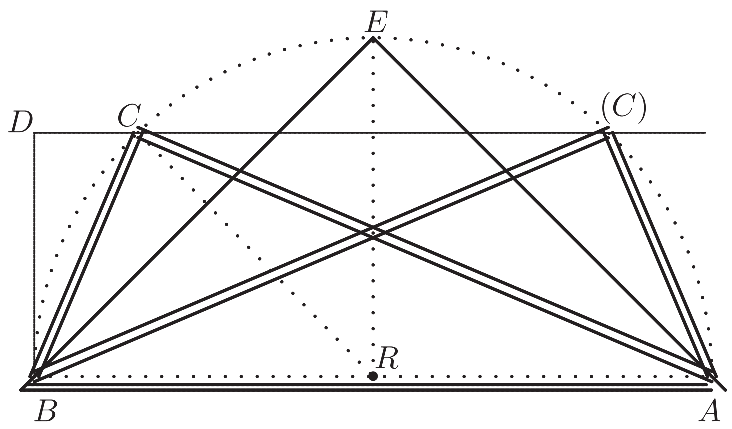
Nimirum Angulo dato E subtendatur basis data AB et per tria puncta A. E. B. describatur arcus circuli. Ex AB educatur normaliter BD ad partes E quae sit altitudo Trianguli quaesiti data, et per D ducatur parallela ipsi BA secans arcum in punctis C et (C) eruntque Triangula ACB, $A(C)B$ quaesita.

1 qvae *(1)* solas | ipsas *erg.* | figuras contemplatur offere nobis nullo negotio *(2)* figuris contemplandis immoratur *(a)* | primo intuitu *erg.* | aliam exhibet | cui prior comparari indigna est *erg.* | multo meliorem, et naturae magis consentaneam.



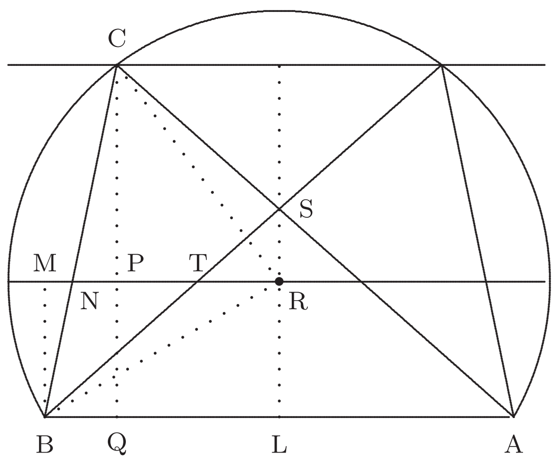
Circa angulum datum LMN describatur segmentum Circuli qvodcunqve NML. qvod eum capiat, sive *(aa)* per similis *(bb)* per tria puncta NML describatur arcus circuli cuius centrum sit P. Jungantur NP. LP et his si opus productis accommodetur recta AB aeqvalis basi datae, parallela ipsi NL centroqve P radio PA describatur segmentum *(aaa)* BQRA *(bbb)* ABC *(ccc)* ACB. simile segmento *(aaaa)* NML. sit B *(bbbb)* LMN. ex B erigatur BD normalis ipsi AB ad partes Q. | qvae BD sit altitudo trianguli qvaesiti data *erg. u. gestr.* | ducaturqve DQR parallela ipsi AB secans arcum segmenti in C et (C) eruntqve triangula *(aaaaa)* BQA. BRA. ARB. *(bbbbb)* ABC. AB(C) qvaesita *(b)* primo *L*

Facile autem praevidere possumus problema si per Algebram tractetur necessario assurgere debere ad gradum quartum; sunt enim quatuor Triangula (etsi omnia congrua inter se) duo ab uno latere rectae AB, totidemque ab altero quae satisfaciunt.



[*Fig. 4*]

1–76,5 Facile ... ducunt *gestr. u. mit* Haec non delenda *wieder gültig gemacht. Darunter Figur mit Nebenrechnungen*



$(\mathrm{BL}^2) + \mathrm{RL}^2 \mathrm{aeqv} \mathrm{RB}^2$

$\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PN}} \sqcap \dfrac{\mathrm{MB} \sqcap \mathrm{RL}}{\mathrm{MN}} \sqcap \dfrac{(\mathrm{CQ})}{\mathrm{BQ}}$

$\mathrm{CP}^2 + \mathrm{NR}^2 \sqcap \mathrm{CR}^2 \sqcap \mathrm{RB}^2$

$\mathrm{RL} \sqcap \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BQ}}(\mathrm{CQ}) \sqcap \sqrt{\mathrm{RB}^2 - (\mathrm{BL}^2)}$

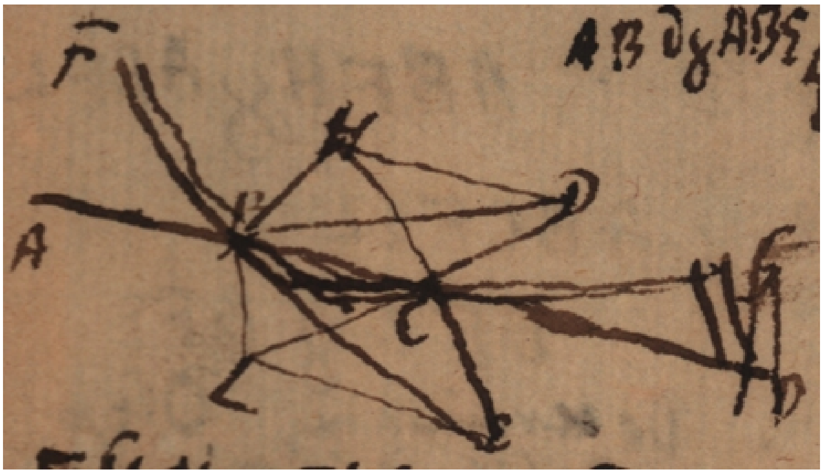
$\mathrm{CP} + \mathrm{PQ} \sqcap (\mathrm{CQ})$ *gestr. L*
MB
RL

At si quis quaereret ipsam $C(C)$ ei nasceretur tantum aequatio quadratica, denique si quis quaerat RC radium Circuli is difficulter quidem ad aequationem perveniet, sed aequatio non nisi unicam habebit radicem pro omnibus quatuor Triangulis, adeoque hoc modo fiet omnium simplicissima. Sed haec omnia tamen ad constructionem nostram recta non ducunt.

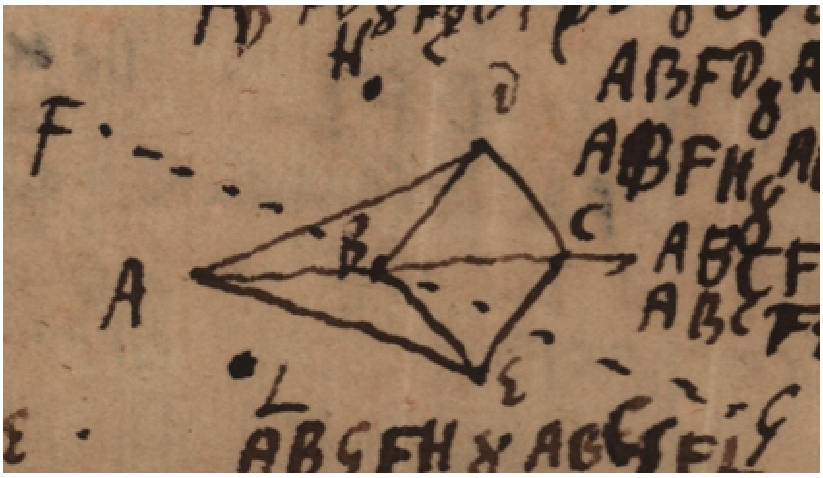
8 (40836). DETERMINATIO EX DATIS
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 21. 1 Bl. 8°. 2 S. Textfolge Bl. 21 v°, 21 r°. — Gedr.: 1. Echeverría, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 246–247.

Datierungsgründe: **[noch]**



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$ABD \text{ ♉ } ABE.$ $\left\{\begin{matrix} AD \text{ ♉ } AE \\ BD \text{ ♉ } BE \end{matrix}\right.$ $\left.\begin{matrix} BH \text{ ♉ } BL \\ BH \text{ ♉ } BL \end{matrix}\right\}.$ $BFH \text{ ♉ } BFL.$ $\left.\begin{matrix} CD \text{ ♉ } CE \\ FD \text{ ♉ } FE \end{matrix}\right\}.$ $BFD \text{ ♉ } BFE.$

$ABFD \text{ ♉ } ABFE$. $ABFH \text{ ♉ } ABFL$. $ABCFD \text{ ♉ } ABCFE$.

$BFGH \text{ ♉ } BFGL$. $ABCFD \text{ ♉ } ABCFE$. $ABGFH \text{ ♉ } ABGFL$.

$ABCFD \text{ ♉ } ABCFE$. $ABFH \text{ ♉ } ABFL$. Ergo $ABCFDH \text{ ♉ } ABCFEL$.

$BCD \text{ ♉ } BCE$. $BFD \text{ ♉ } BFE$. $BFH \text{ ♉ } BFL$. Determinatur D. E ex datis B. C. F, sed H. L determinatur ex BF.

C. est ad D ut ad E et F est ad D ut ad E. Ergo $CFD \text{ ♉ } CFE$. $BFH \text{ ♉ } BFL$. $BCE \text{ ♉ } BCD$.

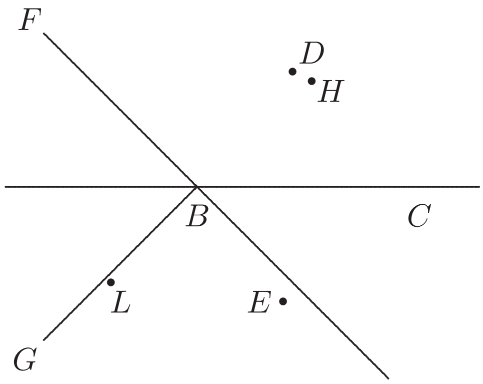
9 (40837). RECTAE PROPRIETATES
[1685 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 22. 1 Bl. 4°. Brieffaltung. 1 S. auf Bl. 22 r°. Überschrift auf Bl. 22 v°. — Gedr.: 1. ECHEVERRÍA, *La caractéristique*, Teil 2, 1979, S. 248 bis 249.

Datierungsgründe: **[noch]**

Rectae proprietates

Duae rectae quae in duobus punctis conveniunt productae omnino conveniunt.



[*Fig. 1*]

Puncta omnia ut B et C aliaque infinita in eandem rectam cadere definio, si assignari possunt duo puncta D. E., et punctum quodlibet quod in rectam cadere dicitur ut B, eodem modo situm est ad D, quo ad E, ita ut BD sit ♉ BE. Eodemque modo sit CD ♉ CE.

10 omnia ... infinita *erg.* *L*   10 definio *(1)* qvae ad duo | bina *erg.* | puncta positio *(2)* si in unoqvoqve *(a)* reperiatur *(b)* ut B. reperiatur, ipsum B eodem mod *(3)* si *L*

Sit jam etiam FD ♉ FE. Ergo $FBCD$ ♉ $FBCE$. Punctis omnibus per lineas rigidas connexis immotisque BC. circumagatur D. E quiescet F quia eodem modo ad D quod ad E. Ponatur idem F esse etiam modo ad H quo ad E itemque B. Ergo quiescere F et B, ergo per dicta quiescente FBC. circumagatur H. E situ servato. Ergo H ad C ut E ad C.

1 FBCE *(1)* situ ipsorum BC manente immoto *(2)* punctis *L*

10 (40848). DE PERFECTIONE CHARACTERISTICAE NOVAE [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 48–49. 1 Bog. 2°, aus dem der Zettel LH 35 I 11 Bl. 39 (40843) oben aus Bl. 48 herausgeschnitten wurde. 4 S. halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: 1. Echeverría, *La Caractéristique*, Teil 2, Paris 1979, S. 264–272; 2. Echeverría / Parmentier, *La caractéristique*, 1995, S. 246–255 (mit frz. Übers.).

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von 1678–1682 belegt. [**noch**]

Ut Characteristica nova pro Situ et Motu exprimendo a me excogitata, perficiatur, quaedam sunt distinctius exponenda, nonnulla etiam demonstranda.

Punctum omne alteri cuicunque puncto congruit sive $A \between B$, seu $Y \between Z$.

Ergo omnia puncta congruunt uni eodemque seu $Y \between A$. Quia pro Z id est quocunque puncto substitui potest propositum punctum A.

Puncta duo quaelibet inter se habent situm, seu inter datur via ab uno ad aliud. Hunc puncti A situm ad aliud punctum B, vocabo $A.B$. Idem est ac si dicas duo puncta proposita posse intelligi extrema cujusdam extensi ipsa connectentis.

Hinc patet omnia puncta intelligi posse in uno eodemque extenso quod est extensum illimitatum seu absolutum, nempe spatium, in quo scilicet nihil aliud quam extensio, et proinde aliorum assignabilis in ipso situs intelligi potest, ipsum autem alicubi situm esse intelligi non potest. Punctum vero contra est id in quo non nisi situs intelligi potest, seu punctum est simplicissimum quod in extenso potest intelligi.

Quia igitur omnia totius universi puncta inter se congruunt, et omnia puncta possibilia sunt in spatio illimitato, hinc spatium illimitatum erit locus omnium punctorum dato puncto congruentium, id est locus omnium punctorum absolute, quod speciose exprimendo, esto congruentia $Y \between A$. et locus omnium Y. erit spatium illimitatum.

Diximus propositis duobus punctis esse aliquem inter ipsa situm. Is autem utique est determinatus. Ita enim definio s i t u m ut sit aliqua duorum relatio quoad extensionem

10 omne *(1)* omni *(2)* alteri *L* 16 omnia | totius mundi *gestr.* | puncta *L* 17 f. extensio, *(1)* et aliorum possibilis *(2)* et proinde *L* 19 f. seu | punctum est *erg.* | simplicissimum *L* 24 f. illimitatum *(1)* Sit *(2)* Cum sit situs aliqvis seu via inter duo qvaelibet puncta *(3)* Diximus *L* 25 situm. *(1)* ⟨Cui⟩ *(2)* cumqve determinatum *(3)* Cum vero *(4)* is *L* 26 duorum *(1)* punctorum relatio ex sola ipsa in Spa *(2)* relatio *L*

ex ipsorum coexistentia determinata. Relatio autem quae determinatur ex sola duarum rerum natura seu coessentia quoad magnitudinem earum est ipsa earum r a t i o .

Nec dubitari potest an horum respectu aliquid sit determinatum, ex omnibus enim determinate assumtis, exempli gratia duobus extensis, et secundum determinatum aliquid cujusque scilicet magnitudinem, vel ⟨coex⟩istentiam, sive positionem, vel aliud quiddam consideratis determinato modo, verbi gratia omnium simplicissimo, necesse est emergere determinatam aliquam considerationem, cujus objectum est illa quae dixi relatio. Vel clarius et brevius: Quia duo nunc existunt, etiam sibi coexistunt; et quia existunt determinato modo, etiam sibi coexistunt determinato modo; isque modus cum sit determinatus omnino, erit et determinatus respectu extensionis determinate assumtae. Is autem modus est situs, ergo determinatus est situs.

Hinc cum in punctis nihil aliud intelligi possit quam eorum existendi modus respectu extensionis determinatus, sive p o s i t i o (s i t u s enim est quasi com-positio plurium) patet in duobus punctos coexistentibus nihil aliud determinatum ex eorum vel coessentia vel coexistentia posse intelligi quam situm inter ipsa. Comparationem enim, aliam, quoniam omnia inter se congruunt non habent. Itaque scribendo $A.B.$ exprimetur relatio puncti A, ad punctum B, quae nulla potest alia utiliter intelligi, quam eorum situs. Proinde $A.B$ erit punctorum A et B inter se situs.

Cum duo proposita puncta sint in uno eodemque spatio illimitato, erunt etiam in uno aliquo spatio limitato. Cum enim eorum coexistentia sit determinata, etiam spatium in quo existunt sufficit esse limitatum, et manifestum est posse coexistentiam eorum intelligi, etsi quaedam in spatio illo illimitato existentia, non considerentur. Unde intelligi potest duo puncta quaelibet extenso aliquo connecti per quod scilicet continue ab uno ad alterum veniri potest; sive esse ab uno ad alterum viam.

Potest differens esse diversorum punctorum inter se situs seu potest $A.B.$ diferre a $C.D.$ Seu datis punctis duobus situm inter se habentibus $A.B$ dari possunt duo aliqua situm alium inter se habentia $Y.Z.$ Alioqui enim necesse erit omnia puncta coincidere

2 natura *(1)* qvoad coextensionem *(2)* seu *L* 4 duobus *(1)* punctis *(2)* extensis *L* 8 duo *(1)* extensa *(2)* nunc *L* 11 f. situs *(1)* Sed via a puncto ad punctum non *(2)* Hinc *L* 12 eorum *(1)* existentia *(2)* existendi *L* 14 patet *(1)* in puncto nihil aliud prius intelli *(2)* in *L* 14 f. vel coessentia vel *erg.* *L* 22 qvaedam *(1)* spatii remo *(2)* puncta aut partes, removeam *(3)* in *L* 24 f. viam. *(1)* Est enim punctum Mobile seu cum situs eius ad alium punctum possit esse alius atqve alius *(2)* Potest *(a)* diversus *(b)* differens *L* 26 C.D. *(1)* Imo *(2)* p⟨r⟩ *(3)* necesse est *(4)* seu *L* 26 possunt *erg.* *L* 27 puncta *(1)* congruere *(2)* coincidere *L*

inter se, seu omnia puncta esse unum et idem. Nam quod unum punctum A alteri alicui C non coincidat, non potest aliter demonstrari, quam quod aliud quoddam punctum datur, B, cujus respectu diversum habent situm, ita ut $A.B.$ non ♉ $C.B.$

Potest puncti ad punctum situs mutari patet ex praecedenti. Potest enim alterius puncti alius esse situs, quam hujus, ergo et hujus ipsius alius quam nunc est, quia ab altero nulla in re differt, itaque quod alteri possibile est, etiam ipsi possibile est.

Locus rei est in quo ipsa sita est, res autem in alia esse intelligitur hoc loco, si omne extremum ejus extremo parti alterius congruit. Est autem omne extremum puncti, lineae superficiei, ipsum punctum linea superficies.

Puncta Extensi determinati habent inter se situm determinatum. Ergo duo puncta determinato extenso connexa habent inter se situm determinatum.

Dari possunt duo puncta eum habentia situm inter se, quem habent duo alia inter se, ut $A.B$ ♉ $C.D$. Alioqui poterit demonstrari ipsa coincidere: sed hoc admisso quaero utrum demonstretur hinc A ♉ C et B ♉ D an A ♉ D et B ♉ C. Nulla enim reddi potest ratio cur unum potius quam alterum. Ergo vel non sequitur inde coincidentia, vel sequitur omnia quatuor sibi coincidere. Verum ex una congruentia quatuor rerum congruentiae concludi non possunt. Assertio haec nihil aliud significat, quam extensum aliquod posse moveri seu extensum ex loco cujus termini A et B posse transferri in locum cujus termini C et D. idque ex eo etiam ostendi potest quod spatium illimitatum est indifferens respectu extensi propositi. Eodem modo probatur mille dari posse puncta, eum habentia situm inter se,

1 f. punctum | A *erg.* | alteri *(1)* B *(a)* no⟨n⟩ *(b)* alicui *(2)* alicui C non *(a)* congruat *(b)* coincidat *L* 6 f. possibile est. *(1)* itaqve possibile est: A.B non ♉ (A).B *(2)* Locus *(a)* est situs *(b)* rei *L* **7** sita est, *(1)* seu qvae alicuius rei pars, aut partis extremum est *(2)* res *L* 11 f. determinatum *(1)* Dari possunt plura puncta eundem situm habentia ad unum eundemqve, seu AB ♉ AC. possunt duo *(a)* pun *(b)* qvaedam puncta eum habere situm inter se, qvem habent duo qvaedam alia inter se, ut A.B ♉ C.D. Cum enim nulla in illis possit reddi ratio diversitatis duo enim puncta solo numero differunt, seu sunt per se indiscernibilia. *(2)* itaqve | etiam *gestr.* | dari possunt duo puncta eundem *(a)* inter se *(b)* situm | datum *erg.* | habentia, ad unum idemqve punctum | datum *erg.* |, ut B potest eum situm habere ad A, qvem C habet ad A, licet B et C non coincidant. Nam compatibilia sunt hae duo, *(aa)* A habere *(bb)* A habere eundem situm et ad B et ad C. sed D habere diversum situm ad B qvam ad C Qvod satis est ut B et C non coincidant. Hoc idem est ac si dicam posse moveri extensum uno licet puncto manente immoto. Alioqvi ex hac veritate A.B ♉ A.C. demonstrari poterit B ♉ C. seu B.C ♉ A.A *(aaa)* Cuius demonstrationis *(bbb)* qvalis demonstratio *(aaaa)* esse non *(bbbb)* principium nullum habet. *(3)* dari *L* 18 extensum *(1)* cuius termini A.C. posse transferri *(a)* in ali *(b)* in locum B.C. seu ter *(2)* ex *L*

quem habent milla alia inter se. Itaque sic scribi potest: $A.B.C.D.$ etc. ♉ $(A).(B).(C).(D).$ (etc) vel $A.B.C.D$ etc. ♉ $yA.yB.yC.yD.$

Dari potest punctum A, quod ad duo puncta data $B.C$ situm habet eundem datum. Item dari potest punctum C quod ad punctum datum A eum habeat situm (datum), quem punctum datum B habet ad punctum A. Seu si sit: $A.B$ ♉ $D.C$ (quod possibile est per praecedentem sine coincidentia) et A ♉ D (sive $A.A$ ♉ $A.D$) non ideo sequitur esse B ♉ C. sive B et C coincidere. Alioqui sequeretur ex hoc uno $A.B.C.D.$ etc. ♉ $L.M.N.O.$ etc. et A ♉ L. fore B ♉ M. et C ♉ N. et D ♉ O, etc.; par enim omnium ratio est seu fore $A.B.C.D$ etc. ♉ $L.M.N.O$ etc.

Ex motu hoc potest demonstrari. Sint enim duo corpora congrua quidem sed non coincidentia, $ABCD$. $LMNO$. eaque ita moveantur donec puncta L. et A. coincidant (porro autem L. et A. esse homologa seu respondentia quod patet ex ipsa dispositione literarum) seu ut fiat A ♉ L. Patet hoc fieri posse corporibus sese tangentibus in A et L tantum, licet non coincidentibus. Sine motu res patet ex solo tactu, si ponamus duo corpora congrua nullam partem coincidentem habentia se in puncto aliquo tangere, et duo puncta contactus esse respondentia. Potest etiam intelligi corpus unum ab alio multo majore tangi, et ex majore rejectis superfluis exsculpi aliquod congruum minori et congrue positum ad punctum contactus. Sed analytica et generalissima harum possibilitatum demonstratio ex eo satis habetur, si analysi sufficiente facta, patet demonstrari contrarium non posse.

Via puncti est linea. Via est locus continuus successivus. Ex his patet duarum linearum concursum esse punctum cum scilicet duo puncta mota sibi occurrunt. Potest tamen fieri, ut duae lineae habeant partem communem, et tunc sunt eatenus una linea. Sed haec suo loco discutiemus accuratius.

Recta est linea ex duobus punctis determinata.

Sphaerae centrum esse unicum ostendendum est. Ostendetur autem vel ex eo quod quatuor punctorum centrum est unicum; seu quatuor sphaerarum intersectio est punctum unicum. Hoc vero ex eo ostendemus, quod duarum rectarum intersectio est punctum unicum. Ex quo patet etiam, ex datis quatuor punctis determinatam esse sphaeram. Seu

8 par ... est *erg.* L 14 tantum, *(1)* non vero *(2)* licet L 18 generalissima *(1)* horum demonstratio *(2)* harum *(a)* negativarum *(b)* possibilitatum L

datis quatuor punctis, quorum tria non sunt sita in eandem recta, posse sphaeram reperiri cujus superficies per ipsa transit.

Ex definitione lineae rectae, quae sit AB. seu determinatum ex duobus punctis A. et B. demonstratur etiam rectae quodlibet punctum ad tria aliqua puncta C, D, E eodem modo se habere, posito illa A eodem modo se habere ad C et D et E, itemque B quoque ad ea se habere eodem modo. Nam et hoc quod ex his duobus determinatur eodem modo se ad haec tria habet. Similis demonstratio pro plano. Nam cum sit determinatum ex tribus punctis A et B et C et horum trium quodlibet eodem modo se ad duo puncta data habere possit (non ad tria, nisi $A.B.C.$ cadant in unam rectam) etiam quod ex his determinatur.

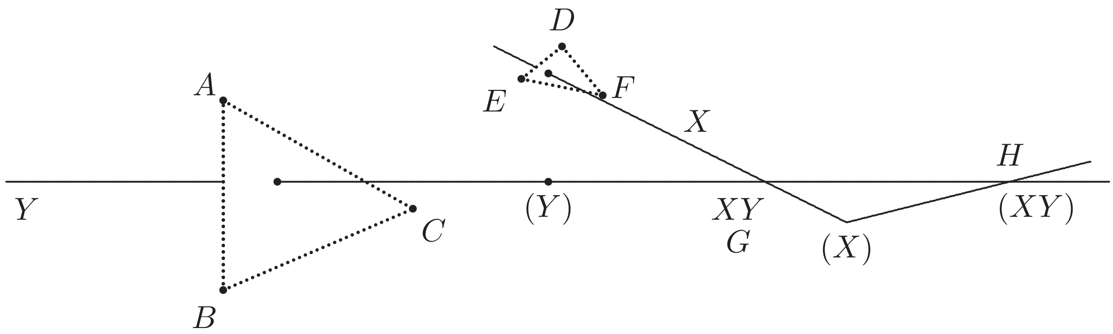
3–6 *Dazu am Rand:* NB.

1 punctis, *(1)* qvae non sunt sita in plano eodem ead *(2)* qvorum *L*

11 (40849). DE COINCIDENTIA ET SITUS DETERMINATIONE [1679 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 11 Bl. 51–52. 1 Bog. 2°, von dem die rechte Hälfte von Bl. 52 abgetrennt wurde. 1 S. auf Bl. 51 r°, untere zwei Drittel halbbrüchig beschrieben. — Gedr.: ECHEVERRÍA, *La Caractéristique*, Teil 2, Paris 1979, S. 250–254.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von 1678–1682 belegt. [**noch**]



[*Fig. 1*]

Duae rectae quae duo puncta habent communia productae coincidunt:

$A.Y \overset{(1)}{\mathrel{\text{♉}}} B.Y. \mathrel{\text{♉}} C.Y \qquad D.X \overset{(2)}{\mathrel{\text{♉}}} E.X \mathrel{\text{♉}} F.X.$

$(A.XY \mathrel{\text{♉}} B.XY \mathrel{\text{♉}} C.XY \quad D.XY \mathrel{\text{♉}} E.XY \mathrel{\text{♉}} F.XY.)$

$AG \overset{(3)}{\mathrel{\text{♉}}} BG \mathrel{\text{♉}} CG. \qquad DG \overset{(4)}{\mathrel{\text{♉}}} EG \mathrel{\text{♉}} FG$

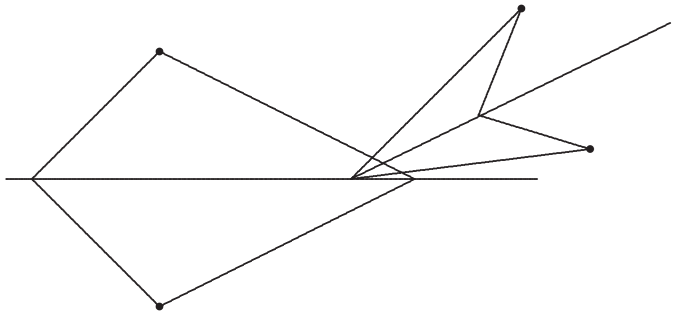
$AH \overset{(5)}{\mathrel{\text{♉}}} BH \mathrel{\text{♉}} CH \qquad DH \overset{(6)}{\mathrel{\text{♉}}} EH \mathrel{\text{♉}} FH$

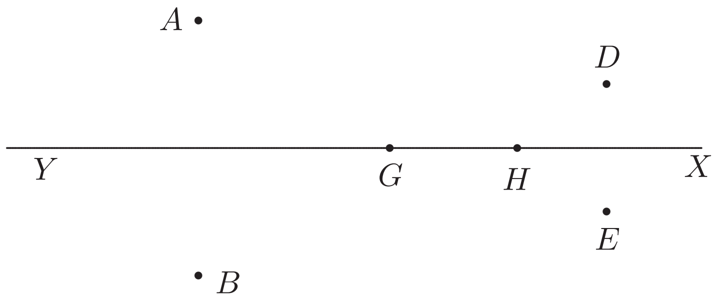
Hinc probari debet, esse,

$AX \mathrel{\text{♉}} BX \mathrel{\text{♉}} CX$ et esse $DY \mathrel{\text{♉}} EY \mathrel{\text{♉}} FY$

Ex 3 et 5 fit: $AGH \overset{(7)}{\mathrel{\text{♉}}} BGH \mathrel{\text{♉}} CGH$

Ex 4 et 6 fit: $DGH \overset{(8)}{\mathrel{\text{♉}}} EGH \mathrel{\text{♉}} FGH$





[*Fig. 2*]

EH ♉ DH EG ♉ DG
EGH ♉ DHG
AGH ♉ BGH
AH ♉ BH AG ♉ BG
HD ♉ HE GD ♉ GE
Ergo AD ♉ BE quia $D.E$ determinatu⟨r⟩ per priora

$$GD.HD$$
$$GE.HE$$

et quae per congrua determinantur congrua sunt.
Ergo $AGHD$ ♉ $BGHE$.

Nam si modus determinandi situm D ad A. congruit modo determinandi situm E ad B, tunc DA erit ♉ BE. Haec regula pulcherrima est summique usus. Nam situi eae congruunt et earum extrema congruunt. Hinc quia quaelibet puncta ad data duo puncta in eodem plano eodem modo se habentia cadunt in eandem rectam Hinc sequitur puncta quaelibet eodem modo se habentia ad $D.E.$ etiam eodem modo se habere ad $A.B.$ adeoque omnia cadere in unam rectam. Sed demonstrandum prius duas rectas datas cadere in idem planum; si habeant punctum commune.

Ex hoc quod duae rectae non habent nisi unum punctum commune, demonstratur quod intersectio rectarum sit punctum, seu quod si sit AY ♉ BY ♉ CY ♉ DY, Y est unicum. Eodem modo erit etiam punctum unicum si intersectio quaeratur trium planorum. Item si quaeratur intersectio trium sphaerarum, item sphaerarum duarum et unius plani, item planorum duorum et unius sphaerae. Id est intersectio circuli et rectae dat punctum, licet duplex. Quod intersectio duorum circulorum determinet unum punctum hoc videtur natura prius eo, quod intersectio rectarum id faciat; ideo et punctum D. ex puncto A determinari per circulares $G.D$ et $H.D$ quae in plano se intersecantes dant unum punctum. Demonstrandum ergo prius esse aliquod centrum in circulo ex quo in plano is describatur. Et necesse est id facere antequam sermo sit de recta. Quia hoc ipsum probandum quod determinatum sit punctum D ex duobus sitibus GD. HD ab uno latere in eodem plano.

12 (40852). DE ANALYSI SITUS [1693 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 12 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 3 S. — Gedr.: GERHARDT, *Math. Schr.* 5, 1858, S. 178–183.

Datierungsgründe: [noch]

De Analysi Situs

Quae vulgo celebratur Analysis mathematica, est magnitudinis, non situs; atque adeo directe quidem et immediate ad Arithmeticam pertinet, ad Geometriam autem per circuitum quendam applicatur. Unde fit ut multa ex consideratione situs facile pateant, quae calculus Algebraicus aegrius ostendit. Problemata Geometrica ad Algebram, id est quae figuris determinantur ad aequationes revocare res non raro satis prolixa est, et rursus alia prolixitate difficultateque opus est, ut ab aequatione ad constructionem, ab Algebra ad Geometriam redeatur, saepeque hac via non admodum aptae prodeunt constructiones nisi feliciter in quasdam non praevisas suppositiones assumtionesve incidamus. Hoc ipse Cartesius tacite fassus est, cum lib. 3. Geometriae suae problema quoddam Pappi resolvit. Et sane Algebra sive numerica sive speciosa, addit, subtrahit, multiplicat, dividit, radices extrahit, quod utique arithmeticum est. Nam ipsa Logistica, seu scientia magnitudinis proportionisve in universum, nihil aliud tractat quam numerum generalem seu indeterminatum, et has in eo species operandi quoniam Magnitudo revera determinatarum partium multitudine aestimatur, quae tamen manente re variat, prout alia aut alia Mensura vel Unitas assumitur. Unde mirum non est, Scientiam Magnitudinis in universum esse Arithmeticae genus, cum agat de numero incerto.

Habebant Veteres aliud Analyseos genus, ab Algebra diversum, quod magis ad situs considerationem accedit, tractans de Datis et de Sedibus quaesitorum seu Locis. Et huc tendit Euclidis libellus de *Datis*, in quem Marini Commentarius extat. De Locis vero planis, solidis, Linearibus actum est cum ab aliis, tum ab Apollonio, cujus propositiones Pappus conservavit, unde recentiores Loca plana solidaque restituerunt. Sed ita, ut veritatem magis quam fontem doctrinae veteris ostendisse videantur. Hoc tamen Analyseos genus neque ad calculum rem revocat, neque etiam producitur usque ad prima principia atque Elementa situs, quod ad perfectam Analysin necesse est.

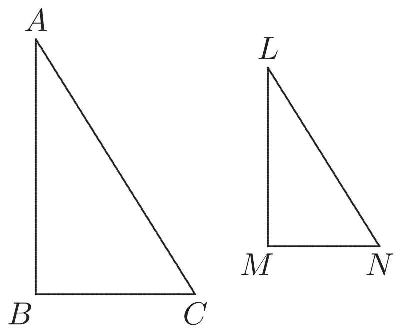
Vera igitur Situs Analysis adhuc supplenda est, idque vel ex eo constat, quod omnes Analytici, sive Algebram exerceant novo more, sive data et quaesita ad veterem formam tractent, multa ex Geometria elementari assumere debent, quae non ex magnitudinis sed figurae consideratione deducuntur neque determinata quadam via hactenus patent. Euclides ipse quaedam axiomata satis obscura sine probatione assumere coactus est, ut caetera procederent. Et Theorematum Demonstratio solutioque problematum in Elementis magis aliquando apparet, laboris opus quam methodi et artis, quanquam et interdum artificium processus suppressum videatur.

Figura in universum praeter quantitatem continet qualitatem seu formam; et quemadmodum a e q u a l i a sunt quorum eadem est magnitudo, ita s i m i l i a sunt quorum eadem est forma. Et similitudinum quidem seu formarum consideratio latius patet quam mathesis, et ex Metaphysica reperitur, sed tamen in Mathesi quoque multiplicem usum habet, inque ipso Calculo Algebraico prodest, sed omnium maxime similitudo spectatur in sitibus seu figuris Geometriae. Itaque Analysis vere Geometrica non tantum aequalitates spectat et proportionalitates, quae revera ad aequalitates reducuntur; sed similitudines etiam, et ex aequalitate ac similitudine conjunctis natas congruentias adhibere debet.

Causam vero cur similitudinis consideratione non satis usi sunt Geometrae, hanc esse arbitror, quod nullam ejus notionem generalem haberent satis distinctam aut ad Mathematicas disquisitiones accommodatam, vitio philosophorum, qui definitionibus vagis et definito obscuritate paribus, in prima praesertim philosophia contenti esse solent, unde mirum non est sterilem esse solere doctrinam illam et verbosam. Itaque non sufficit similia dicere, quorum eadem forma est, nisi f o r m a e rursus generalis notio habeatur. Comperi autem, instituta qualitatis vel formae explicatione rem tandem eo devenire, ut s i m i l i a sint, quae singulatim observata discerni non possunt. Quantitas enim sola rerum compraesentia seu applicatione actuali interveniente deprehendi potest, qualitas aliquid menti objicit, quod in re separatim agnoscas et ad comparationem duarum rerum adhibere possis, actuali licet applicatione non interveniente, qua res rei vel immediate vel mediante tertio tanquam mensura confertur. Fingamus duo templa vel aedificia exstructa haberi, ea lege, ut nihil in uno deprehendi queat, quod non et in alio observes: nempe materiam ubique eandem esse, marmor Parium candidum, si placet; parietum, columnarum, caeterorumque omnium easdem utrobique esse proportiones; angulos utrobique eosdem, seu ejusdem rationis ad rectum; itaque qui in haec bina templa ducetur clausis oculis, sed post ingressum apertis, et nunc in uno, nunc in altero versabitur, nullum indicium ex ipsis inveniet, unde alterum ab altero discernat. Et tamen magnitudine differre possunt, atque adeo discerni poterunt si simul spectentur, ex loco eodem; vel etiam (licet remota sint invicem) si tertium aliquod translatum nunc cum uno, nunc cum altero comparetur, veluti si mensura aliqua, qualis ulna aut pes aut aliud quiddam ad metiendum aptum, nunc uni nunc alteri accommodetur, nam tum demum discernendi ratio dabitur inaequalitate deprehensa. Idem est, si ipsum spectatoris corpus, aut membrum, quod utique cum ipso de loco in locum transit mensuraeque officium praestat, his templis applicetur; tunc enim magnitudo diversa, et per hanc discernendi modus apparebit. Sed si spectatorem non nisi ut mentem oculatam consideres, tanquam in puncto constitutam, nec ullas secum magnitudines aut re aut imaginatione afferentem, eaque sola in rebus considerantem, quae intellectu consequi licet, velut numeros, proportiones, angulos, discrimen nullum occurret. Similia igitur dicentur haec templa, quia non nisi hac coobservatione vel inter se, vel cum tertio, minime autem sigillatim et per se spectata discerni potuere.

Haec evidens et practica, et generalis similitudinis descriptio nobis ad demonstrationes Geometricas proderit, ut mox patebit. Nam duas figuras oblatas, similes dicemus, si aliquid in una singulatim spectata notari nequeat; quod in altera non aeque deprehendatur. Itaque eandem utrobique ingredientium rationem sive proportionem esse debere consequitur, alioqui per se sigillatim, seu nulla licet amborum coobservatione instituta, discrimen apparebit. At Geometrae cum generali similitudinis notione carerent, figuras similes ex aequalibus respondentibus angulis definierunt, quod speciale est, non ipsam naturam similitudinis in universum aperit. Itaque circuitu opus fuit, ut demonstrarentur, quae ex nostra notione primo intuitu patent. Sed ad exempla veniamus.

Ostenditur in *Elementis*, Triangula similia seu aequiangula latera habere proportionalia, et vicissim; sed hoc multis ambagibus Euclides quinto demum libro conficit, cum primo statim ostendere potuisset *Elemento*, si nostram notionem fuisset secutus. Demonstrabimus primum, triangula aequiangula esse similia.

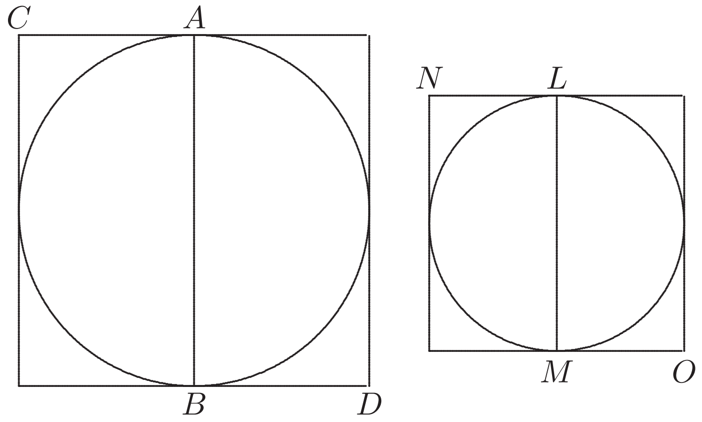


[*Fig. 1*]

Esto triangulum ABC, et aliud rursus LMN, sintque anguli A, B, C ipsis L, M, N respective aequales; dico triangula esse similia. Utor autem hoc Axiomate novo: Quae ex determinantibus (seu datis sufficientibus) discerni non possunt, ea omnino discerni non posse, cum ex determinantibus caetera omnia oriantur. Jam data basi BC, datisque angulis B, et C (adeoque et angulo A) datum est triangulum ABC; itemque data basi MN, datisque angulis M, N, (adeoque et angulo L) datum est triangulum LMN. Sed ex his datis sufficientibus singulatim discerni triangula non possunt. Nam in uno quoque data sunt basis, et duo ad basin anguli; jam basis angulis conferri nequit; nihil aliud ergo superest quod in triangulo alterutro ex determinantibus sigillatim spectato examinari possit, quam ratio anguli cujusque dati ad rectum vel duos rectos, id est anguli ipsius magnitudo. Quae ipsa cum utrobique eadem reperiantur, necesse est triangula sigillatim discerni non posse, adeoque similia esse. Nam ut hoc in Scholii modum addam, etsi magnitudine triangula discerni possint, tamen magnitudo nisi per coobservationem vel triangulorum amborum simul, vel utriusque cum aliqua mensura, agnosci non potest, sed ita jam non tantum spectarentur singulatim, quod postulatur.

Vicissim manifestum est, Triangula similia etiam aequiangula esse, alioqui si esset angulus aliquis ut A, in triangulo ABC, cui nullus reperiretur aequalis angulus in triangulo LMN, utique daretur angulus in ABC, habens rationem ad duos rectos (seu ad omnium trianguli angulorum summam), quam non habet ullus in LMN, quod sufficit ad triangulum ABC, a triangulo LMN singulatim distinguendum. Constat etiam Triangula similia habere latera proportionalia. Nam si dentur duo aliqua latera, velut AB, BC, habentia rationem inter se, quam nulla trianguli LMN latera inter se habeant, jam poterit alterum triangulum ab altero singulatim discerni. Denique si latera proportionalia sint, triangula similia erunt. Quoniam enim datis lateribus data sunt triangula, sufficit (per axioma nostrum) ex laterum ratione discrimen haberi non posse, ut ex nullo in Triangulis his singulatim spectatis alio haberi posse judicemus. Ex his vero etiam patet, Triangula aequiangula habere latera proportionalia, et vicissim.

Eodem modo primo statim Mentis obtutu ex nostra similitudinis notione directe ostenditur, circulos esse ut quadrata diametrorum, quod Euclides demum decimo libro ostendit, et quidem per inscripta et circumscripta, rem reducendo ad absurdum, cum tamen nullis ambagibus esset opus.



[*Fig. 2*]

Diametro AB descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum CD: Eodemque modo diametro LM descriptus sit circulus eique circumscriptum diametri quadratum NO. Determinatio utrobique est similis, circulus circulo, quadratum quadrato, et accommodatio quadrati ad circulum, itaque (per Axioma supradictum) figurae $ABCD$, et $LMNO$ sunt similes. Ergo (per definitionem similitudinis) erit circulus AB ad quadratum CD, ut circulus LM ad quadratum NO, ergo etiam circulus AB ad circulum LM, est ut quadratum CD ad quadratum NO. Quod affirmabatur. Pari ratione s p h a e r a e ostendentur esse u t c u b i d i a m e t r o r u m . Et in universum in similibus, lineae, superficies, solida, homologa erunt respective ut longitudines, quadrata, cubi laterum homologorum. Quod hactenus generaliter assumtum magis quam demonstratum est.

Porro haec consideratio, quae tantam praebet facilitatem demonstrandi veritates alia ratione difficulter demonstrandas; etiam novum calculi genus nobis aperuit, a calculo Algebraico toto coelo diversum, notisque pariter, et usu notarum operationibusve novum. Itaque Analysin situs appellare placet, quod ea situm recta et immediate explicat; ita ut figurae etiam non delineatae per notas in animo depingantur, et quicquid ex figuris imaginatio intelligit empirica, id ex notis calculus certa demonstratione derivet, caeteraque etiam omnia consequatur, ad quae imaginandi vis pertingere non potest. Imaginationis ergo supplementum, et ut ita dicam perfectio in hoc, quem proposui, calculo situs continetur, neque tantum ad Geometriam, sed etiam ad Machinarum inventiones, ipsasque machinarum naturae descriptiones usum hactenus incognitum habebit.

13 (40881). CIRCA GEOMETRICA GENERALIA ET CALCULUM SITUS [Sommer 1683 – 1684 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 1–8. 4 Bog. 4°. 12 $\frac{1}{2}$ S. halbbrüchig beschrieben. Bl. 7 v° u. Bl. 8 leer. — Gedr.: 1. Echeverría, *Calculos geometricos*, 1991, S. 55–66; 2. Mugnai, *Leibniz' Theory of Relations*, 1992, S. 139–147.

Datierungsgründe: Die Wasserzeichen der verwendeten Papiere sind von 1677–1684 belegt. Das gestrichene *dicto* im Verweis auf das *Symbolum Athanasii* am Ende des Textes könnte darauf hindeuten, dass das vorliegende Stück nach dem entsprechenden Verweis in den *Notationes generales* (VI, 4 N. 131 S. 552) entstanden ist. **[noch]**

Circa geometrica generalia et calculum situs seu picturam characteristicam
O b s e r v a t i o n e s m i s c e l l a e
constituendae analysi geometricae plane novae praeludentes

(1) Punctum eorum quae in extenso sunt simplicissimum est. Hinc:

((1)) Punctum puncto simile est, $a \sim b$.

(2) Punctum puncto aequale est $a = b$.

(3) Punctum puncto congruit $a \simeq b$. Haec usum habebunt ad aliorum quae per certa puncta determinantur similitudines, aequalitates aut congruentias demonstrandas. Adde infra § 60.

(4) Punctum puncto, in quo assumitur coincidit, seu si sit b in a erit $a \infty b$. Ad hos paragraphos 1. 2. 3. 4. adde § 60 infra.

((4)) Imo generaliter quicquid in puncto situm est cum ipso puncto coincidit. Si plura puncta aliquam communem proprietatem habeant, et ideo unum quodque ex ipsis communi nomine appelletur x, tunc locum omnibus communem et solis proprium appellabimus $\overline{x}$. Sive $\overline{x}$ significabit:

10–12 *(1)* Pictura characteristica seu de Repraesentatione figurarum per notas, observationes miscellae et Geometrica Generalia *(2)* Circa ... M i s c e l l a e *(a)* ad constituendam Analysin Geometricam, plane novam *(b)* constituendae ... praeludentes. *erg. L* 13 f. (1) Punctum ... Hinc: *erg. (1)* (1) *(2)* ((1)) *L* 16 f. a $\simeq$ b *(1)* Qvicqvid in puncto est puncto *(a)* congruet *(b)* coincidet seu si B sit in A erit A ∞ B *(2)* Haec ... demonstrandas *(a)* qvid punctum addit *(b)* adde *L* 19–21 ad hos ... coincidit *erg. L*

(5) Omne punctum x esse in $\overline{x}$, et

(6) omne punctum in $\overline{x}$ esse x.

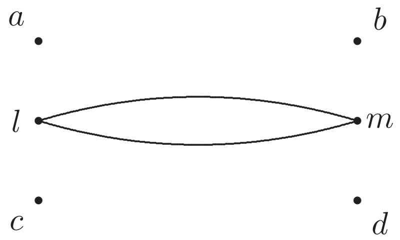
(7) Si omne x est y, erit $\overline{x}$ in $\overline{y}$.

(8) Si $\overline{x}$ est in $\overline{y}$ omne x erit y.

(9) Si $\overline{x}$ sit in $\overline{y}$ et $\overline{y}$ sit in $\overline{x}$, tunc $\overline{x}$ et $\overline{y}$ coincident.

(10) Si $\overline{x}$ et $\overline{y}$ coincidunt, $\overline{x}$ erit in $\overline{y}$ et $\overline{y}$ erit in $\overline{x}$.

(11) Si A est in $\overline{x}$ et $\overline{x}$ in $\overline{y}$ erit A in $\overline{y}$. Hoc ita demonstratur. Si A est in $\overline{x}$ utique A est x (per artic. 6.) Jam cum $\overline{x}$ sit in $\overline{y}$ ex hypothesi omne x erit y (per 8). Ergo (per Logicam communem) etiam A erit y. Ergo (per 5) A erit in $\overline{y}$. Quod erat demonstrandum. Posset ita enuntiari haec propositio, continens continentis est continens contenti.



[*Fig. 1*]

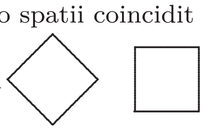
(12) Si idem est situs punctorum a et b inter se, qui punctorum c et d, tunc corporis rigidi puncta l et m, quae possunt applicari ipsis a et b, poterunt etiam applicari ipsis c et d.

(13) Et contra, si hoc fieri potest, idem erit situs punctorum.

(14) Idem est situs puncti a ad b, qui puncti b ad a.

---

12 *Zu* (12): Add. §. 46

2 f. esse x *(1)* Si | omne *erg.* | x ∞ y erit $\overline{\mathrm{x}} \infty \overline{\mathrm{y}}$ hoc est unumqvodqve punctum alicuius extensi coincidat alicui puncto Si omne x est y et omne y est x erit $\overline{\mathrm{x}} \infty \overline{\mathrm{y}}$. et si $\overline{\mathrm{x}} \infty$ y, omne x est y, et omne y est x *(2)* (7) Si *L* 3 est y, *(1)* et unum qviddam y non est x, *(2)* erit *L* 8 est x *(1)* (seu punctum A est aliqvod ex punctis qvae vocantur x.) Iam omne x est y. (qvia $\overline{\mathrm{x}}$ est in $\overline{\mathrm{y}}$) ergo A est y. | (ex Logica communi) *erg.* | Ergo A est in $\overline{\mathrm{y}}$. *(2)* Iam *L* 10–12 contenti. *(1)* Si sumto qvocunqve x sumi potest aliqvod y respondens, *(2)* Si $\overline{\mathrm{x}}$ et $\overline{\mathrm{y}}$ sint similia, *(3)* Punctum spatii est immobile punctum corporis est mobile. Omne punctum corporis alicui puncto spatii coincidit congrua sunt *(a)* $\overline{\mathrm{x}}$ et $\overline{\mathrm{y}}$ *(b)* qvae non nisi respectu ad aliqvid aliud discerni possunt. A  B Transformatio est *(4)* | (12) *erg.* | Si *L* 12 c et d *(1)* tunc eadem puncta corporis rigidi et *(2)* tunc *L*

(15) Si corporis rigidi puncta l et m possunt applicari punctis a et b, et quidem l ipsi a, et m ipsi b, poterunt etiam vicissim applicari l ipsi b, et m ipsi a. Nam idem est situs puncti a ad punctum b, qui puncti b ad punctum a (per 14). Ergo (per 12) fieri potest quod dictum est.

(16) Si determinata sint puncta corporis rigidi, determinati, quae data puncta simul attingere possunt, determinatus erit punctorum datorum situs inter se. De determinato adde § 25. 65.

(17) $a.b$ significat situm punctorum a et b inter se. Et $a.b.c.$ significat situm trium punctorum a et b et c inter se.

(18) Si datur $a.b.c.$ datur $a.b.$

(19) Si datur $a.b.$ et $a.c.$ et $b.c.$, datur $a.b.c.$

(20) $a.b. \simeq c.d.$ significat eundem esse situm inter puncta a et b, qui inter puncta c et d, seu rigidum aliquod intelligi posse cujus extrema sint a et b, congruum rigido cujus extrema sint c et d. Seu puncta a et b posse congruere punctis c et d, salvo situ quem a et b habent inter se.

(21) Si $a.b \simeq l.m.$, et $a.c. \simeq l.n.$ et $b.c. \simeq m.n.$, erit $a.b.c. \sim l.m.n.$

(22) Si $a.b.c. \simeq l.m.n.$ erit $a.b \simeq l.m.$ et ita porro, bina binis respondentibus.

(23) Si $a.b.c. \simeq l.m.n.$ et $a.b.d. \simeq l.m.p.$ et $a.c.d. \simeq l.n.p.$ erit $a.b.c.d. \simeq l.m.n.p.$

(24) Si duorum Extensorum communem aliquam naturam habentium puncta, quae sufficientis sint numeri pro hac natura ad certum individuum determinanda, et illa puncta eundem inter se situm habeant, in uno, quem totidem in altero; duo illa extensa inter se congrua erunt. Sit communis natura $\odot$ et ponamus determinatis quatuor punctis in $\odot$, determinatum esse individuum ipsius $\odot$, seu non nisi unicum esse $\odot$ quod eadem quatuor puncta habent, et sint duo F, et G, ex quibus tam F sit $\odot$ quam G sit $\odot$ et sint assumta quatuor puncta in F ut a, b, c, d, itemque quatuor puncta in G, ut l, m, n, p

1 a et b, *(1)* illud illi, istud isti, poterunt vicissim jo *(2)* ne *(3)* et *L* 5 (16) *(1)* determinatus est situs *(2)* si *(a)* determinatum sit corporus rigidum, qvod duo puncta simul *(b)* determinata *L* 6 f. de ... 65. *erg. L* 19 f. duorum *(1)* commune qvid *(2)* Extensorum ... naturam *(a)* puncta determina *(b)* deter *(c)* hanc naturam ad unum *(d)* habentium puncta, *(aa)* hanc naturam *(bb)* | qvae *erg.* | sufficientis | sint *erg.* | numeri *L* 20 et illa puncta *erg. L* 21 in uno ... altero; *erg. L* 21 extensa *erg. L* 22 erunt | , seu si congrua sint determinantia, congrua erunt determinata *erg. u. gestr.* |. Sit *L* 22 determinatis *(1)* tribus *(2)* qvatuor *L* 23 individuum ipsius *erg. L* 23 f. eadem *(1)* tria *(2)* qvatuor *L* 24 duo, *(1)* A et B, ex qvibus tam A sit $\odot$ qvam B sit $\odot$ et sint tria puncta in A, ut a,b,c, ac tria puncta in B, ut l, m, n, *(2)* F, et G *L*

sitque $a.b.c.d \simeq l.m.n.p.$ erit $F \simeq G$. Exempli causa si sint duae circumferentiae Ellipticae et quatuor puncta in una eodem modo inter se sita sint, quo quatuor puncta in altera, tunc congruae erunt haec duae circumferentiae Ellipticae. Quia datis quatuor punctis datur ellipsis. De determinatione adde infra §. 65.

(25) Similia sunt quae separatim considerata discerni non possunt seu in quibus per se consideratis nullum notari potest attributum discriminans, sed opus est vel ambo inter se, vel tertium aliquod utrique comparari. Ita si duae figurae sint similes nulla propositio (quae nihil forinsecus assumat) potest enuntiari de una, quae non enuntiari possit et de altera. Ut si oculus successive collocetur in duobus conclavibus ex eadem materia factis, si dissimilia sunt, notabit aliquam diversitatem, in situ atque ordine, vel etiam proportionibus partium aut linearum inter se, et angulorum cum recto comparatorum. Sed si nihil tale notari possit, tunc non habebit oculus unde alterum ab altero discernat, nisi vel ambo forinsecus simul spectet atque conferat vel aliquam mensuram (qualis mensura naturalis in homine sunt membra; imo si notabile magnitudinis discrimen sit etiam fundus oculi) secum deferat. Hinc ex. gr. duo Circuli sunt similes unumquemque enim examina separatim, duc rectas quas voles, considera angulorum rationes ad rectum et linearum rectarum rationes inter se; nihil notabis in uno quod non et in altero sis notaturus. At si duas Ellipses conferas facile notabis diversitatem. Educ enim ex centro rectam usque ad circumferentiam angulo aliquo ad axem assumto, et nota ejus rectae rationem ad axem Ellipseos, idem fac in alia Ellipsi eodem angulo, saepissime deprehendes aliam rationem; et ita facile unam ab alia discernes.

(26) Si similia sint determinantia, ipseque determinandi modus similis, etiam similia erunt determinata. De determinatione infra §. 65. 75.

1 F ≃ G. | seu brevius exprimendo, si sit a.b.c.d.F un. (hoc est unicum F ex datis a.b.c.d.F et situ ipsius F ad a, b, c, d) et itidem l.m.n.p.G un. et sit a.b.c.d ≃ l.m.n.p. erit F ≃ G *erg. u. gestr.* | Exempli causa *(1)* si tria puncta *(2)* Si sint duae *(a)* Ellip⟨ses⟩ *(b)* circum *(c)* circumferentiae *nicht gestr.* *(d)* circumferentiae *L* 4 de ... §. 65. *erg. L* 5 f. seu ... discriminans *erg. L* 7 si *(1)* duo triangula sint similia *(2)* duae *L* 7 similes *(1)* nulla *(2)* proprietas nulla *(3)* nullum attrib *(4)* nulla *L* 9–22 altera. *(1)* Hinc statim demonstrandum triangula similia *(2)* | Ut ... discernes *erg.* | (26) *L* 10 diversitatem, *(1)* vel in ⟨— — — — —⟩ situ *(2)* in *L* 11 linearum *(1)* vel angulorum *(2)* inter *L* 13 atqve conferat *erg. L* 14 membra *(1)*) ab uno in alterum secum deferat *(2)*; imo *L* 16 duc *(1)* lineas *(2)* rectas *L* 17 nihil *(1)* reperies in uno qvod non reperturus sis *(2)* notabis *L* 18 Ellipses | (inaeqvales) *gestr.* | conferas *L* 18 centro *(1)* | unius *erg.* | duos medios ad circumferentiam, angulo aliqvo dato | certo tum *nicht gestr.* | et nota qvam proportionem habeant ii radii inter se, idem fac in alia *(2)* rectam *L* 19 circumferentiam *(1)* et nota eius *(2)* angulo aliqvo | ad axem *erg.* | assumto, et nota eius | rectae *erg.* | rationem *L*

(27) Hinc triangula aequiangula sunt similia, nam dato uno latere et duobus (adeoque et tribus) angulis determinatum est triangulum; si ergo anguli utrobique iidem, cum latus lateri simile sit, recta scilicet rectae, nihil apparet in determinantibus unde attributum pro uno elici possit, quod non et elici possit pro altero.

(28) Similia autem triangula habent latera proportionalia, alioqui notari posset aliqua laterum proportio in uno, quae non notari posset in altero. Ergo per praecedentem Triangula aequiangula habent latera proportionalia.

(29) Contra triangula quorum latera proportionalia, sunt aequiangula. Nam datis tribus lateribus triangulum est determinatum; si jam latera sint proportionalia, nullum in determinantibus, nempe lateribus, discriminans attributum reperiri potest. Ergo sunt similia; ergo utrobique eadem ratio angulorum ejusdem trianguli tum inter se, tum cum summa; summa autem angulorum utrobique eadem (facit enim duos rectos) ergo et anguli (eandem rationem utrobique habentes ad hanc summam, alioqui discrimen notari posset) utrobique iidem erunt.

(30) Quae sunt similia secundum unum determinandi modum, etiam sunt similia quoad alium determinandi modum, ita duo triangula si sint similia respectu laterum, seu habeant eandem utrobique rationem singulorum laterum ad summam laterum; erunt et similia respectu angulorum, seu habebunt eandem utrobique rationem singulorum angulorum ad summam angulorum.

(31) H o m o g e n e a sunt, quae vel sunt similia, vel transformatione possunt similia reddi, ut linea recta et circularis, superficies gibba et plana. Cum enim omnis linea extendi possit in rectam, omnis superficies explanari convertique in quadratum, omne solidum converti in cubum, sintque recta similis rectae, quadratum quadrato, cubus cubo, patet omnes lineas, superficies, solida inter se homogenea esse. Nam definitio Homogeneorum qua Euclides utitur huc accommodari non potest, quia ne minima quidem portio congrua potest reperiri, adeoque nec communis mensura quantumlibet exacta appropinquans.

3 sit, *(1)* nulla *(2)* nihil appareat in determinantibus qvo *(3)* null *(4)* recta *L* 3 f. determinantibus *(1)* qvod non utrobiqve possit eodem modo notari, recta enim rectae similis est, anguli autem cum recta conferri non possunt. unde sumi possit diversitas *(2)* unde *(a)* diversum *(b)* attributum *(aa)* unum *(bb)* unius *(cc)* pro *L* 17 eandem | utrobiqve *erg.* | rationem | singulorum *erg.* | laterum ... laterum *(1)* ⟨id⟩ unoqvoqve *(2)*; erunt *L* 21–24 Cum ... esse *erg.* *L*

25 utitur: EUKLEIDES, *Elementa*, V, def. 11.

Videntur et comparari posse a causa generante, nam si duo puncta moveantur aequali celeritate, et tempore, lineae descriptae licet dissimiles, tamen erunt aequales; sin eadem sit celeritas, tempus inaequale, erunt ut tempora atque ita homogenea erunt quorum ratio est. Poterit tamen Euclidaea quoque definitio huc accommodari, si curva et gibba considerentur ut polygona aut polyedra infinitangula. Adde infra §. 38.

⟨(31)⟩ Transformatio est mutatio quae ita fit ut simplicissima quae insunt utrobique eadem sint. Quanquam enim aliquando partes maneant, ut si quadratum mutetur in triangulum rectangulum isosceles, aliquando tamen nulla pars manet, sed puncta tantum, ut si circulus mutetur in quadratum aequale.

(32) A e q u a l i a sunt, quae vel congrua sunt vel transformatione possunt congrua reddi.

(33) M a j u s est cujus pars alteri (minori) toti aequalis est.

(34) M i n u s est quod alterius (majoris) parti aequale est.

(35) Hinc demonstratur partem esse minorem toto, seu totum esse majus parte. Nam pars est aequalis parti totius (nempe sibi), ergo minor toto.

(36) Si A sit $\sqcap$ B erit B $\sqcap$ A.

(37) Si quid nec majus sit nec minus, et tamen homogeneum, erit aequale. Nam cum homogeneum sit, simile reddi potest, fiat ergo simile, cumque omnia similia possunt intelligi ex se invicem fieri continuato incremento vel decremento, seu communem habere generationem, utique id quod prius generabitur crescendo (descrescendo) minus (majus) erit. Quae vero simul generabuntur erunt a e q u a l i a , quae propositio haberi poterit pro nova definitione aequalitatis. Idem tamen demonstrari poterit et ex definitione superiore, cum duo illa proposita sint similia, applicentur sibi respondentia respondentibus, tunc vel congruent et erunt aequalia, vel unum ubique excedet, alioqui non erunt similia; si enim non ubique excedet, termini eorum alicubi se se secabunt, alicubi non secabunt, quod est absurdum, nam respondentia tantum coincidere debent, sed haec, si opus est,

1 si *(1)* punctum moveatur *(a)* data ac *(b)* aeqva *(2)* duo *L* 2 f. sin ... tempora *erg. L* 5 Adde ... §. 38 *erg. L* 6–9 ⟨(31)⟩ ... qvae *(1)* fit iisdem manentibus *(2)* ita fit *(a)* qvae *(b)* ut ... sint. *(aa)* ita *(bb)* qvanqvam ... ut si *(aaa)* triangulum mute *(bbb)* qvadratum ... aeqvale. *erg. L* 13 f. aeqvale est. *(1)* Hinc si A $\sqcap$ B erit B $\sqcap$ A *(2)* (35) *L* 15–17 toto. *(1)* (36) *(2)* | (36) ... B $\sqcap$ A *erg.* | (37) *L* 21 erit. *(1)* Transibitur scilicet a majore ad minus per omnia intermedia, ergo per aeqvale. *(a)* vel etiam si similia simi *(b)* Sint A et B, sitqve A nec maius qvam B, nec minus dico esse aeqvale, nam transformetur, ita ut A fiat simile ipsi B. *(aa)* jam sumatur aliud simile ipsi B, *(bb)* sumantur alia duo ipsi B similia, unum C majus qvam B, alterum D minus, erit utiqve C majus qvam A, et D minus qvam A transeatur a *(2)* Qvae *L*

accuratius demonstrari poterunt. Breviter quae similia sunt, non nisi magnitudine possunt discerni. Hinc concludo: si sit A non $\sqcap$ B et A non $\sqcap$ B et A Homog. B, erit $A = B$.

(38) Si B sit in A et ambo sint homogenea nec tamen coincidant, erit A *totum*, B *pars*, Homogenea autem ita definienda sunt, quemadodum supra a nobis factum est § 31, ne scilicet eorum notio totum et partem praesupponat, alioqui fit circulus.

((38)) *Partes* eiusdem totius *incommunicantes* voco, quae nullam habent partem communem. *Communicantes* quae habent.

(39) Totum et summa omnium partium incommunicantium aequantur inter se, conjungendo enim has partes inde fit totum, vel dividendo totum inde fiunt hae partes. Ergo fieri possunt coincidentia. Ergo et congrua multo magis (nam omnia coincidentia multo magis sunt congrua, sive unumquodque congruit sibi). Quae autem congrua fieri possunt, aequalia sunt.

(40) Duo coincidentia sunt congrua seu unumquodque congruit sibi. Vel in notis si $A \infty B$ erit $A \simeq B$.

(41) Quae congrua sunt, etiam aequalia sunt, si $A \simeq B$ erit $A = B$.

(42) Quae congrua sunt etiam similia sunt, si $A \simeq B$ erit $A \sim B$.

(43) Quae simul similia et aequalia sunt, congrua sunt. Si $A \sim B$ et $A = B$ erit $A \simeq B$.

((43)) *Congrua* definio quae discerni etiam collata non possunt, nisi aliis forinsecus assumtis, ut duo ova aequalia et similia non nisi situ ad externa discernentur. Hinc utique sequitur §. 41 et 43. At §. 43 ita probatur; quae aequalia sunt, congrua sunt aut talia transformatione reddi possunt §. 32. Quae vero et similia sunt transformatione opus non habent.

(44) Quae similia sunt, Homogenea sunt, seu si $A \sim B$ erit A Homog. B. Patet ex §. 31.

(45) *Distantia* est minimae ab uno ad aliud lineae magnitudo, ut distantia duorum punctorum est recta; puncti a recta est perpendicularis. Eam ita exprimo: AB.

(46) Si puncta A et B magis distant quam puncta C et D, tunc in qualibet linea ab A ad B ducta sumi potest punctum cujus idem est situs ad A (vel B), qui est situs

2 discerni. *(1)* itaqve *(2)* Hinc concludo: *(a)* si *(b)* (37) Qvae similia et aeqvalia sunt *(c)* si *L*
3–7 A = B. *(1)* (37) *(2)* (38) *(3)* | (38) ... coincidant *(a)* erit B pars, A totum. *(b)* erit ... circulus *erg.* | ((38)) *L* 20–24 ((43)) ... habent *erg. L* 30 (vel B) *erg. L*

ipsius C ad D. Quid situs, vide supra §. 12. Posset ita enuntiari, si $AB \sqcap CD$, et sit linea AXB erit aliquod punctum E, tale, ut E sit X et $AE \simeq CD$. Hoc demonstrari potest. Quia tendendo a puncto ad punctum, non potest pervenire ad majorem distantiam nisi per minorem. Nempe generaliter:

(47) In omni continua mutatione a minori variatione pervenitur ad majorem per omnes intermedias.

(48) Omne extensum, quod partim intra partim extra aliud est, extremum ejus secat, alicubi enim incipiet in eo esse, cum paulo ante extra esset.

(49) Secari enim intelligitur extremum vel ambitus aliquis, ab aliquo extenso si duo puncta in extenso si duo puncta in extenso assumi possunt a communi concursu intervallo quantumlibet parvo distantia, quorum unum extra, alterum intra ambitum, cadit.

(50) Tangit quod cum ad aliquod tendat, ubi ad ipsum pervenit, iterum ab eo recedit. Itaque quod tangit aequiparari potest bis secanti, quod ubi ingressum est, rursus egreditur; et proinde secat tam in ingressu quam in egressu; momentum autem ingressus et egressus coincidere intelliguntur in conctactu, et portio immersa intra ambitum censetur infinite parva.

(51) Omnis linea in se rediens, a superficie in qua ducitur partem abscindit, seu superficiem dividit in duas partes, ita ut a puncto in una parte posito, non possit duci linea ad punctum in altera positum quin lineam illam secet. Nimirum si sumatur aliqua pars extensi, et divisio sive separatio a reliquo incommunicante (seu nullam partem communem, sed tantum communem terminum habente), in ipso communi termino instituatur, necesse est separatorem ad punctum redire unde inceperat, quia punctum initiale separationis, finit cohaesionem et incipit separationem, punctum vero finale separationis finit separationem et incipit cohaesionem, seu separandum; donec scilicet initiale et finale separationis punctum coincidant.

(52) Omnis superficies integra alicujus corporis finiti, ita ipsum claudit, ut non possit

2 punctum E, *(1)* qvod sit X, *(a)* et erit AE *(b)* et er *(c)* ita, ut *(2)* tale *L* 7 Omne *(1)* continuum *(2)* extensum, qvod partim *(a)* intus *(b)* intra *L* 8 alicubi ... esset *erg. L* 9 (49) *(1)* Secare intelligitur qvod *(2)* Secari | enim *erg.* | intelligitur | extremum vel *erg.* | ambitus *L* 9 f. si *(1)* ultra sumtis duobus punctis *(2)* duo puncta | in extenso *erg.* | assumi *L* 18 abscindit, *(1)* et similiter omnis superficie *(2)* seu *L* 20–26 nimirum ... separatio a *(1)* partibus reliqvis in communi termino cis *(2)* reliqvo ... initiale | et finale *gestr.* | separationis, *(a)* comm *(b)* incipit *(c)* finit ... donec *(aa)* finale *(bb)* scilicet ... coincidant *erg. L*

a puncto extra corpus ad punctum intra corpus linea duci, quin superficiem illam secet.

(53) Linea est via puncti, ut si punctum mobile sit X, locus ejus successivus erit linea $\overline{X}$.

(54) Superficies erit via lineae $\overline{X}$ vel $L\overline{X}M$, in priora vestigia non incidentis. Poterit designari per; $\overline{\overline{X}}$, vel per $L\overline{\overline{X}}M$.

(55) Corpus est via superficiei in priora vestigia non incidentis. Poterit designari per $\overline{\overline{\overline{X}}}$ vel per $\overline{\overline{L\overline{X}M}}$.

(56) Corpus moveri non potest, quin in priora vestigia incidat et ideo non datur alia dimensio super lineam, superficiem et corpus; scilicet in extenso, nam si praeter molem addatur potentia, ascendi potest in infinitum quod tamen nihil variat in extensione, nec novas figuras producit.

((56)) Extensum est in quo assumi possunt numero indefinita quae situm habent.

(((56))) Ea est *situs* natura, ut omnia quae habent situm ad aliqua habeant etiam situm inter se.

(57) *Punctum* est terminus lineae.

(58) *Linea* est terminus superficiei.

(59) *Superficies* est terminus corporis.

(60) *Punctum* est eorum quae in extenso sunt, seu situm habent minimum seu quod situm habet, extensionem non habet. Adde § 1. 2. 3. 4.

(61) *Spatium* est in quo per se spectato nihil aliud considerari potest quam extensio, ut locus qui manet intra vas, aqua sublata et vino substituto.

((61)) Spatium continuatur in infinitum neque enim ratio finium reddi potest, cum ubique uniforme sit. Spatium autem generale seu locus omnium rerum nihil aliud est quam extensum purum absolutum, seu extensum maximum, ut punctum est minimum.

(62) Omnia puncta sunt in eodem spatio. Seu dari potest corpus quotcunque data puncta comprehendens.

((62)) Puncta quaelibet situm habent inter se.

4 $\overline{\mathrm{X}}$ vel $\mathrm{L}\overline{\mathrm{X}}\mathrm{M}$ *erg. L* 5 vel per $\overline{\mathrm{L}\overline{\mathrm{X}}\mathrm{M}}$ *erg. L* 9 si *(1)* potentia addatur *(2)* motus addatur, ascendi potest in infi *(3)* praeter *L* 12–14 ((56)) … inter se *erg. L* 18 est *(1)* qvod in Extenso est simplicissimum *(2)* eorum *L* 19 situm habet, *(1)* longitudinem *(2)* extensionem non habet. *(a)* Ex hoc seqvuntur *(aa)* § *(bb)* articuli 1. 2. 3. 4 *(b)* Adde *L* 20 est *(1)* extensum absolutum seu maximum, sive qvod extensionem habet situm vero non habet *(2)* in *L* 22–24 ((61)) Spatium *(1)* infinitum est *(2)* continuatur … minimum *erg. L*

(63) A quolibet puncto ad quolibet duci potest linea.

((63)) Per quolibet puncta numero finita ejusdem corporis continui duci potest linea quae ex illo corpore non egreditur.

(64) Duci potest linea transiens per puncta data quotcunque et evitans puncta data quotcunque. Quod sic demonstro. Sit corpus continens simul omnia puncta data tam attingenda quam evitanda, ex eo eximantur partes continentes puncta evitanda, tam exiguae quantum satis est ne puncta reliqua retinenda seu attingenda laedantur seu simul eximantur; cum ergo exemtis illis partibus, corpus nihilominus maneat continuum, ergo (ex §. 63) in eo per omnia puncta residua attingenda, duci potest linea, eaque in corpore manens, adeoque exemta ex corpore evitans. Quod erat faciendum.

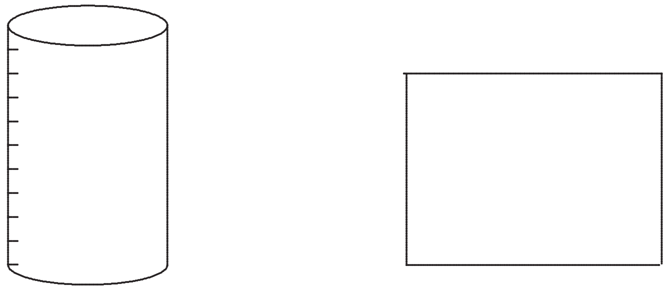
(65) D e t e r m i n a t u m est, quod ex quibusdam suis conditionibus positis non nisi unicum est (adde §. 16. 24. 26). Exempli causa ex datis sitibus $A.B$ (seu ipsius A ad B), $A.C, A.D, A.E$ punctum A dicetur esse determinatum, si impossibile est dari aliud punctum, quod eundem ad puncta B, C, D, E situm habeat. Hoc est si posito $A.B.C.D.E. \simeq F.B.C.D.E.$, sit $A \infty F$, erit A ex istis determinatum idque poterit exprimi: A determ. per $A.B.C.D.E.$ Ita circulus determinatus est plano et centro positione datis et radio magnitudine.

(66) Si punctum A sit determinatum ex suo situ ad aliqua alia puncta, ut B, C, D, E tunc aliquod ex ipsis ut B similiter erit determinatum ex situ suo ad puncta A, C, D, E. Vel si aliquot puncta relationem inter se habeant talem, ut unum ex situ suo ad reliqua determinetur; etiam quodlibet aliud ex situ suo ad reliqua praeter ipsum, determinabitur.

(67) Hinc sufficit relationem determinantem punctorum ita scribere $\overline{A.B.C.D.E}$ Un. seu relationem hanc esse unicam. Quod significat unumquodque horum ex situ suo ad reliqua determinari, seu si posito $A.B.C.D.E. \simeq F.B.C.D.E.$ est $A \infty F$ etiam posito $A.B.C.D.E. \simeq A.G.C.D.E.$ erit $B \infty G$. Et ita porro de C, D, E idem locum habebit.

(68) Si determinantia sint congrua, etiam congrua erunt determinata eodem existente determinandi modo. Adde supr. artic. 24. ex. gr. duo radii circuli, ellipses generantes, duos circulos, sphaeras, sphaeroides.

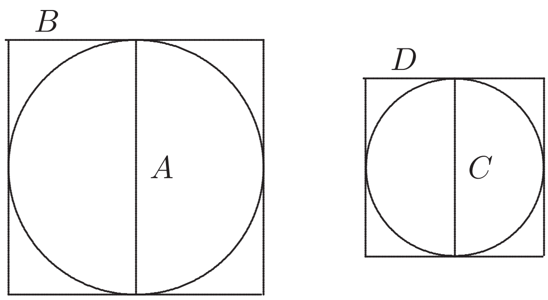
2 f. ((63)) ... egreditur *erg. L* 4 (64) *(1)* A puncto qvolibet *(2)* Dat *(3)* Datis qvotcunqve *(4)* Duci *L* 7 f. seu simul eximantur *erg. L* 8 f. continuum, *(1)* et per omnia pu *(2)* in eo *(3)* ergo (ex § 63) *(4)* ergo *L* 9 puncta | in corpore *gestr.* | residua *L* 10 ex corpore *erg. L* 16 f. ita ... magnitudine *erg. L* 23 seu ... unicam *erg. L* 26 f. eodem ... modo *erg. L* 27 f. radii *(1)* generatores duorum circulorum, ita *(2)* circuli, ellipses, generantes *(a)* rotatione circa duos radios, *(b)* duos *L*



[*Fig. 2*]

(69) Imo si idem sit determinandi modus, et determinantia sint aequalia, etiam aequalia erunt determinata; ita superficies cylindrica aequalis erit rectangulo ejusdem cum cylindro altitudinis, si basis rectanguli sit aequalis circumferentiae circuli cylindrum generantis. Nam eodem modo ex ductu rectae in altitudinem generatur rectangulum, quo ex ductu circumferentiae circuli in eandem altitudinem generatur superficies cylindrica.

(70) Falsum est determinata esse proportionalia determinantibus, etiamsi sit idem determinandi modus, nisi determinata sint determinantibus homogenea. Alioqui sequeretur circulos esse inter se ut radios, dato enim centro et radio determinatur circulus.



[*Fig. 3*]

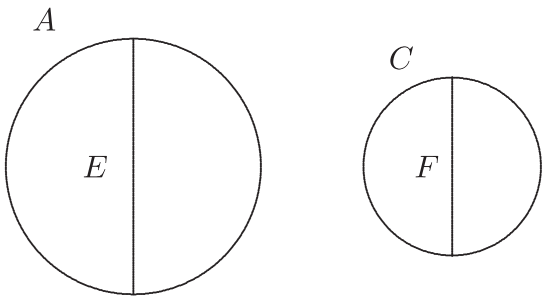
(71) At circulos esse ut quadrata diametrorum, quod multis ambagibus Euclides ostendit libro 12, *Elementorum*, id mihi ex definitione similitudinis primo statim obtutu

3 f. erit *(1)* superficiei sphaericae parallelogrammo *(2)* rectangulo eiusdem *(a)* altitudinis *(b)* cum *L* 6 f. cylindrica *(1)* (70) Si idem sit determinandi modus erunt determinata proportionalia determinantibus, ita statim demonstratur Circulos esse ut quadrata diametrorum *(2)* (70) *L* 8 nisi . . . homogenea. *erg. L* 9 radio *(1)* circuli determinatur circumferen *(2)* determinatur *L* 12 libro | 10, *ändert Hrsg.* | elementorum *L*

12 ostendit: Eukleides, *Elementa*, XII, 2.

patet. Nam circulus A cum quadrato circumscripto B constituit figuram similem circulo C cum quadrato circumscripto D, est enim circulus circulo similis, quadratum quadrato simile, et modus applicandi circuli ad quadratum etiam similis utrobique. Ergo ea est ratio A ad B quae C ad D (alioqui in $A.B$ per se spectato observari posset aliquod discriminans a $C.D$ per se spectato; nam subtrahendo A a B, et residuum ab A quoties fieri potest, et residuum secundum a primo residuo rursus quoties fieri potest, et ita porro, discrimen in numeris substractionum possibilium observaretur operando circa figuram $A.B$ ab eo quod eveniret operando circa figuram $C.D$). Ergo invertendo eadem quoque ratio erit A ad C quae B ad D. Quod erat dem. Eadem methodo demonstratur[:]

(72) Omnes superficies esse ut quadrata rectarum determinantium et similiter[:]



[*Fig. 4*]

(73) Sphaeras vel alias figuras solidas similes esse ut cubos rectarum determinantium. Non autem licet dicere circulos A et C esse ut diametros E et F, licet circuli cum diametris suis etiam similes figuras utrobique constituant, cum enim nulla detur ratio circuli (superficiei) ad diametrum (lineam) quia homogenea non sunt, non potest dici esse A ad E, ut C ad F, ergo nec invertendo esse A ad C ut E ad F.

(74) Si determinantia sint similia idemque determinandi modus, etiam determinata erunt similia, adde supra §. 26. Hinc omnes circuli sunt similes inter se, item omnia qua-

2 f. est enim ... utrobiqve *erg. L* 11 omnes *(1)* figuras similes *(2)* superficies *L* 17 f. qvia ... sunt *erg. L* 21 adde supra §. 26 *erg. L* 21–106,1 qvadrata: *(1)* At parabola parabolae (eo sensu qvo ego similitudinem definivi) similis non est neqve enim modo qvodam in qvo discrimen notari non possit generantur, nec | ulla *erg.* | *(2)* et *L*

drata: et parabola parabolae, et Ellipsis ellipsi similis est, cum latus rectum et tranversum proportionalia. At linea parallela Ellipsi non est Ellipsis, et linea parallela parabolae non est parabola. Quaenam autem lineae parallelae sint, dicemus suo loco.

(75) Si determinantia sint coincidentia idemque determinandi modus, etiam determinata erunt coincidentia. Ita si planum et in eo centrum sint positione data, et radius magnitudine, circulus est determinatus. Si ergo in eodem plano vel in planis opinione duobus re coincidentibus duo circuli esse dicantur quorum radii aequales sint, et reperiatur eorum centra coincidere, ipsi circuli coincident.

(76) Si A sit simile, aequale, congruum, coincidens, ipsi B, et B ipsi C, erit et A ipsi C.

(77) Aequalia possunt substitui in locum aequalium salva aequalitate, seu si aequalibus addas adimasve aequalia, vel aequalia multiplices aut dividas per aequalia, prodeunt aequalia. Illud vero non sequitur, neque ex hoc nostro axiomate demonstrari potest, quaecunque in se ipsa ducta producunt aequalia, sunt inter se aequalia, nam $+3$ et -3 singula per se ipsa multiplicata, producunt 9, quae tamen aequalia non sunt, cum differentia eorum sit 6; non ergo potentiis existentibus aequalibus radices sunt aequales, etsi radicibus existentibus aequalibus potentiae sint aequales.

(78) Coincidentia possunt substitui pro his quibus coincidunt, salvis omnibus, sunt enim revera eadem, et *Eadem* definio quae sibi ubique subsituti possunt salva veritate, in propositionibus scilicet quae directae sunt nec in ipsum considerandi modum reflectuntur. Arcus circuli et curva uniformis in plano ubique sibi substitui possunt exceptis propositionibus reflexivis, qualis ista est, si quis dicat: arcus circuli concipi potest, sine ullo respectu ad planum, quanquam si quis rigorosius agere velit, defendi possit haec substitutio etiam in reflexivis.

(79) Si B sit A, et C sit A, et vero B et C coincidant, seu sit $B \infty C$, dicetur esse *unum* A.

(80) Si B sit A, et C sit A, et B non sit C, nec C sit B, dicentur esse *duo* A. Sin B sit A, et C sit A et D sit A; et B non sit C neque D et C neque sit B neque D, et D

1 f. ellipsi. *(1)* Hinc etiam *(2)* | similis est, *(a)* nisi aeqvales adeoqve congruae sint *(b)* cum ... At *erg.* | linea *L* 6 f. in eodem ... coincidentibus *erg. L* 8 f. coincident *(1)*, idem est si reperiatur et plana et *(2)* (76) *L* 13 neqve ... potest *erg. L* 15 singula ... multiplicata *erg. L* 17 f. aeqvales. *(1)* (78) *(a)* Cong *(b)* Congrua possunt substitui in coinci *(2)* (78) *L* 20 f. reflectuntur *(1)* ita circulus et planum *(2)* arcus *L* 21 uniformis *(1)* ⟨—⟩ *(2)* in plano *L* 22 dicat: *(1)* circulus *(2)* arcus *L* 25 f. esse *(1)* non nisi *(2)* non duo A, sed *(3)* *unum* *L*

non sit B neque C, dicentur esse t r i a A. Et ita porro. Et universum cum non tantum unum est A, dicuntur esse p l u r a . Atque haec origo est N u m e r o r u m ; et haec ipsa expressio in *Symbolo* Athanasii observatur, quanquam ibi usus ejus huic definitioni videatur contradicere, sed tollitur contradictio distinctione.

3 Athanasii | dicto *gestr.* | observatur *L*

---

3 expressio in *Symbolo* Athanasii: PSEUDO-ANTHANASIUS, *Interpretatio in symbolum* (*PG* 26, Sp. 1232); vgl. *Notationes generales* (VI, 4 N. 131 S. 552).

14 (40944). DEFINITIONES PER SECTIONEM AUT MOTUM [1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 73–74. 1 Bog. 2°. $2\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 74 r°, 74 v° u. 73 r°. Darüber auf Bl. 74 r° N. 15 (40945). Bl. 73 v° leer. — Gedr.: 1. (tlw., mit frz. Übers.) ECHEVERRÍA / PARMENTIER, *La caractéristique*, 1995, S. 300–309 (= S. 113 Z. 7 – S. 117 Z. 8 unseres Textes); 2. (span. Teilübers. nach 1.) MORA CHARLES, *Obras filosóficas y científicas*, Vol. 7B: *Escritos matemáticos*, 2015, S. 505–509.

Datierungsgründe: Vgl. VI, 4 N. 234 [**noch**].

C o i n c i d u n t A et B, si A sit in B, et B sit in A.

C o e x h a u r e n t i a ipsius A, sunt plura B, C, D, si nihil sit in A, quod non sit in aliquo ex ipsis B, C, D.

C o n t i n u u m est A, in quo utcunque sumta bina exhaurentia B et C, habent aliquid commune.

P a r s est D quod est in A et est commune duobus exhaurientibus B et C, ejusdem totius A si possit detrahi ab ipso B, ita ut non addatur ad C, nec tamen aliquid detrahatur ipsi A.

I n c o m m u n i c a n t i a sunt cum neutrius pars alteri inest.

C o i n t e g r a n t i a sunt Exhaurentia quae nullum habent partem communem.

S e c t i o est commune duobus cointegrantibus ejusdem continui, idque alterutrius est Terminus.

14–16 *Dazu am Rand:* Potius p a r s est quod per se solum ab eo cui inest detrahi potest, seu alio sicut non distincto.

9 *(1)* Pun *(2)* Si A sit in *(3)* c o i n c i d u n t *L* 9 f. in A Si B sit in A et inde sequatur B coincidere ipsi A | et situm habeat A *erg.* | erit A punctum *(2)* E x h a u r i e n t i a *(3)* co E x h a u r i e n t i a *L* 13 f. commune. *(1)* C o i n t e g r a n t i a sunt *(2)* P a r s est D | qvod ... et est *erg.* | commune L 15 totius A *(1)* si detractum uni, *(2)* si abjectum ab *(3)* si possit *(a)* abjici *(b)* detrahi *L* 17 i n c o m m u n i c a n t i a ... inest *erg.* *L* **1**,**22** distincto | Congrua sunt, *(1)* qvorum puncta homologa assignari *(2)* qvibus coinci *(3)* qvorum *(4)* qvae determinata ex iis eodem modo *gestr.*, | *L*

Extensum est continuum ex coexistentibus.

Situs est determinatio ejus quod est in extenso.

Spatium est extensum absolutum, in quo est quicquid extensum est. Itaque omnia duo quaevis extensa per extensum connecti possunt. Et spatium ubique uniforme est adeoque cuilibet extenso congruum ubilibet in eo assumi potest.

Punctum est quod inest extenso, et cui nihil aliud inest, seu quod inest extenso, et non est extensum. Si in extenso sit A, cui insit B [non extensum], et ideo B coincidat ipsi A, dicetur A punctum.

Latitudinem habet extensum cujus sectio aliqua est extensum. Quod si sectio extensi omnis sit punctum, longitudinem habebit sine latitudine, idque extensum dicitur Linea.

Profunditatem habet, seu Corpus est, in quo inest aliquid quod terminus non est.

Congrua sunt cum assignabilibus quibuscunque in uno, respondentia in alio as-

---

12 f. *Dazu am Rand:* Quod habet longitudinem et latitudinem sed non profunditatem dicitur superficies. Hinc terminus corporis seu profundi, cum profundus non sit, est superficies. Ostendendum est sectionem superficiei esse lineam.

1 continuum *(1)* in cujus qvocunqve inexistente punctum inest *(2)* in qvo qvicqvid inest situm habet *(3)* in qvo qvae sunt *(3)* ex *L* 2 est *(1)* rela *(2)* existentia *(3)* determi *(4)* coexistentia *(5)* est relatio *(a)* coexis *(b)* per qvod *(6)* | qvid *nicht gestr.* | in extenso determinatur *(7)* determinatio *L* 3 absolutum, *(1)* seu continuum ex omnibus coëxistentibus *(2)* in *L* 3–6 est. | itaqve omnia *(1)* extensa per exten *(2)* duo ... adeoqve *(a)* qvodlibet extensum *(b)* cuilibet ... potest *erg.* | Punctum est, *(aa)* in qvo *(aaa)* qvicqvid *(bbb)* nihil aliud est praeter ipsum seu in qvicqvid *(aaaa)* est *(bbbb)* idem est, *(bb)* qvod *(aaa)* in extenso *(bbb)* inest *L* 7 extensum *(1)* Si B sit in A, et ideo B coincidat cum A, erit A *(2)* Si *L* 9 habet *(1)* cuius sectio *(2)* continuum *(3)* extensum *L* 12 f. habet, *(1)* cuius pars *(2)* in qvo sumi potest, *(a)* qvod nulli alteri commune est, nisi partem *(aa)* qvod sectio eius communis cum alio esse non potest *(bb)* qvod terminus non est alterius *(cc)* qvod in alio nisi *(dd)* qvod terminus *(ee)* qvod terminus no *(ff)* qvod non ubiqve *(3)* in qvo sumi potest, qvod ab alio incommunicante neqvit attingi seu in qvo pars sumi potest cuius termino nihil inest, qvod insit termino totius. idem dicitur et corpus. *(4)* seu ... aliqvid *(a)* qvod communis cum alio terminus *(b)* qvod nulli alteri incommunicanti inest. *(c)* qvod terminus | alterius incommunicantis *gestr.* | non *L* 14–110,1 sunt *(1)* qvae solo situ ad externa discerni possunt *(2)* cum ... possunt, *(a)* eandem ad ipsa inter se relationem *(b)* eundem *L* **2**,**17** lineam | *(1)* seu superficiem *(2)* seu duas sectiones ejusdem superficiei *(a)* non nisi punctum commune habere posse *(b)* extensum commune habere non posse *(aa)* partem ⟨—⟩ *(bb)* incommunicantes, ⟨—⟩ extensum commune non habere *gestr.* | *L*

signari possunt eundem situm habentia eodem quo illa se modo inter se habentia.

M a g n i t u d o est numerus partium congruentium. Non est autem necesse ut omnes congruant inter se, sed sufficit quaedam congruere quibusdam: Ut si sint duo congruentia, deinde quatuor horum dimidio congruentia, tum octo rursus eorum dimidio.

A e q u a l i a quorum eadem magnitudo.

M i n u s est quod alterius (M a j o r i s) parti aequale est.

H o m o g e n e a sunt quorum alterutrum repetitum excedit alterum. Ostendendum partem esse homogeneam toti. Seu partem esse homogeneum inexistens non exhauriens.

Si spatium in duo coexhaurientia secetur, quorum alterum sit finitum, id erit corpus. Hoc poterit ex priori definitione corporis demonstrari, nam duorum coexhaurientium unum habet quod in altero non est. Est ergo in finito coexhauriente, quod in altero non est, ergo quod terminus non est.

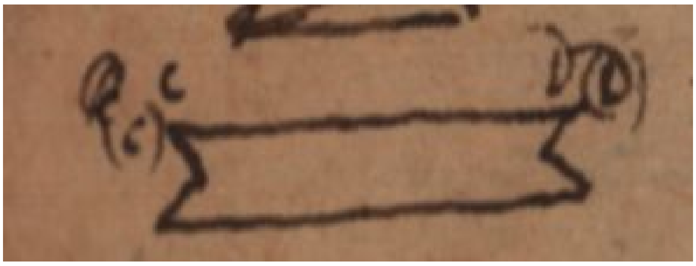
Superficies tota est terminus respectu corporis. Sed tamen respectu alterius superficiei terminum habet. Similiter linea est tota terminus respectu superficiei, sed tamen respectu alterius lineae terminum habet. Corpus autem et superficies hoc habent quod ab alio corpore, vel alia superficie disterminantur per a m b i t u m seu continuum omnem terminum continens. Et habent aliquid praeter hunc terminum adeoque f i g u r a e dicuntur. Itaque a m b i t u s est terminus continuus totus ab homogeneo separans. F i g u r a est extensum quod ambitum habet. C o r p u s s e u s o l i d u m est extensum clausum absolute. F i g u r a est extensum clausum respectu compartis cointegrantis. Itaque et superficiem includit. S u p e r f i c i e s est figura terminans. Linea est extensum terminans, quod figura non est. Corpus habet profunditatem, quia est aliquid in ipso quod terminus non est. Superficies habet latitudinem, quia extenso secari potest, profunditatem non habet. Linea habet solam longitudinem, cum enim ambitu careat, etiam pars ejus ambitu carebit, ergo secari non potest per ambitum seu per extensum. Tantum ostendendum esset, quaecunque habent latitudinem, seu extenso secari possunt, nec tamen habent profunditatem esse homogenea inter se. Ita constabit iterum esse tres solum dimensiones.

2–4 Non . . . dimidio *erg. L* 9 spatium | absolutum *gestr.* | in duo *(1)* exhaurientia *(2)* coexhaurientia *L* 10 nam *(1)* duorum *(2)* duo exhaurientia habent al *(3)* duorum *L* 11 finito *(1)* exhauriente *(2)* coexhauriente *L* 12 f. est. *(1)* | Si *nicht gestr.* | plura *(a)* corpus *(b)* corpora exhauriant, duorum *(2)* Ambitus est totus terminus continuus cum alio communis *(3)* Superficies *L* 20 clausum *(1)* res *(2)* erga id cum qvo alterius partem constituit *(2)* respectu *(a)* comp *(b)* cointeg *(c)* compartis *L* 24 longitudinem, *(1)* qvia enim extenso secari *(2)* cum *L*

Planum est sectio corporis in duas partes congruas. (Seu quod potest esse sectio communis duobus corporibus congruis inter se.) Recta est sectio plani in duas partes congruas.

Rectius: Planum est Sectio corporis utrinque in secando se habens eodem modo. Et Recta est sectio plani utrinque in secando se habens eodem modo. Unde sequitur corporis interminati sectionem utrinque eodem modo habentem esse planum, quia tunc praeter ipsam sectionem nihil designatum est. Et si corpus in partes duas congruas secetur sectionem esse planum, quia id quod praeter sectionem designatum, est utrobique eodem modo, et sectio nullam attulit differentiam (alioqui non essent congrua). Ergo sectio utrinque eodem modo se habuit in secando.

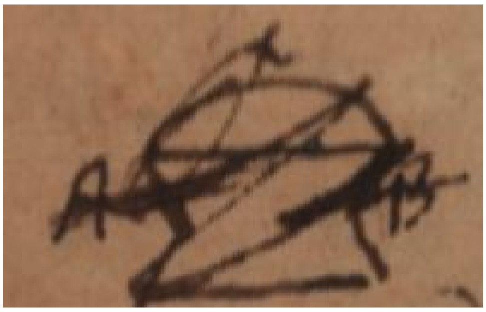
Agemus autem initio de iis quae in plano fiunt.



[*Fig. 1*]

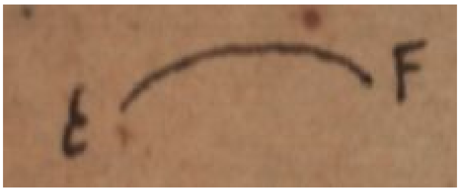
4 *Dazu am Rand:* NB.

1 sectio *(1)* solidi *(a)* utrinqve se habens eodem *(b)*, qvatenus si nulla ad terminum relatio fiat in duas partes utrinqve *(c)* utrinqve *(2)* corporis *L* 4 Rectius: *erg. L* 9 nullam *(1)* varietatem *(2)* attulit differentiam *(a)* manent *(b)* ergo omnia utrinqve eodem mo *(c)* (alioqvi *L* 11–112,1 fiunt *(1)*



(a) Si A *(b)* si eo in qvo *(b)* in recta congruunt AB et BA, seu si regulam examinare | velimus *nicht gestr.* | *(2)* recta *L*

Recta CD congruit sibi, si D transferas in C et vicissim. Itaque si ope regulae CD lineam ducas $(C)(D)$ et deinde regulam transferas, C in (D) et D in (C) si regula congruet lineae, ait Clavius in scholio ad def. rectae apud Euclidem, dubitari non debere, quin regula sit recta.



[*Fig. 2*]

Sed dico hoc signum non esse indubitatum nam et arcus circularis hoc habet. Si enim lineam ducas secundum arcum EF, congruet ei arcus FE translato F in E, et E in F.

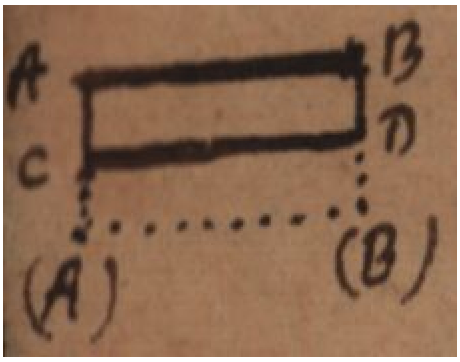
[*Fig. 3*]

Imo et posset regula falsa, constare ex duabus rectis, ut CGD, modo utrinque se eodem modo habentibus, posset esse arcus Ellipsis, vel alia curva, et tamen satisfaceret. Illud itaque addendum est, ut non possit collocari quin congruat, sed CGD, et $(D)(G)C$ potest non congruere. Hinc patet non se habere utrinque eodem modo in plano. Nam CGD se aliter habet ad ea quae supra quam quae infra.

2 ducas *(1)* D et C transferasqve D in *(2)* inde regulam *(3)* transferasqve C in (D) et *(4)* (C)(D) et *L* 8–10 in F. *(1)* Tunc ergo signum est indubitatum, cum *(2)* imo *L*

---

3 ait: CLAVIUS, *Opera* I, S. 14.



[*Fig. 4*]

Et quia conversio dextri cum sinistro non sufficit sed sola inferioris cum superiori sufficit, et ex definitione nostra rectae sequitur prior rectius omittetur.

Ex nostra definitione rectae ostendendum rectam in ea moveri posse utcunque. Talis erit quae fit descriptione rectae per rectas.

Planum est superficies minima omnium ejusdem ambitus.

Videamus annon commodius sit Motum adhibere, quam sectiones; cum revera sectiones sint moti generantis vestigia. Et ita poterimus nihilominus abstinere a consideratione similitudinis; adhibita sola consideratione congruentiae.

Linea est extensum quod describitur motu puncti.

Recta est linea eodem modo se habens ad duo puncta in eodem plano. Sed ita supponitur planum.

Spatium est locus cujuscunque puncti eodem modo se habentis ad A. ut ad A. id est spatium est locus omnium punctorum.

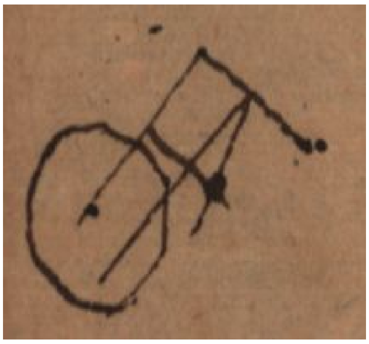
Planum est locus cujuscunque puncti eodem modo se habentis ad A, quo ad B. Hoc demonstratur ex definitione plani per sectionem corporis.

Recta est locus cujuscunque puncti eodem modo se habentis ad A, quo se habet ad B et quo se habet ad C. Hoc itidem demonstrari potest ex definitione rectae per sectionem plani. Pertinetque ad doctrinam de solidis.

Punctum est locus cujuscunque puncti eodem modo se habentis ad A, ad B, ad

9 f. congruentiae *(1)* spatium est cui omne extensum *(2)* Linea *L* 13 locus *(1)* omnium punctorum eodem modo se habentium *(2)* cujuscunqve *L* 15 locus *(1)* omnium punctorum eodem modo se habentium *(2)* cujuscunqve *L* 17 locus *(1)* omnium punctorum *(2)* cujuscunqve *L* 18 f. Hoc ... solidis *erg. L*

C et ad D. Id enim est unicum, sive determinatum, seu quatuor sphaerarum aequalium circa A, B, C et D descriptarum superficies se secant in eodem puncto, quaecunque assumatur magnitudo sphaerarum. Videndum an idem sit in sphaeris inaequalibus, si proportione augeantur. Quoad aequales sphaeras patet hoc punctum esse ipsum centrum sphaerae per 4 puncta A, B, C, D transeuntis. Ut in plano omnes circuli aequales circa tria puncta descripti secant se in centro circuli per tria illa puncta transeuntis.



[*Fig. 5*]

Videndum an omnes circuli inaequales ex datis tribus punctis descripti possint se secare in eodem puncto, id enim punctum tantum assumatur pro arbitrio. Si jam proportione eadem augeantur omnes circuli; necesse est figuram posteriorem esse similem priori quod non video quomodo fieri possit, idem maneat punctum intersectionis. Quod si enim dicamus id esse nullum, non erit figura posterior similis priori. Et ita video esse nempe rem non succedere, nisi et distantiae punctorum A, B, C, eadem proportione augeantur, qua aucti sunt radii circulorum. Idem de sphaeris.

Spatium est continuum in ordine coexistendi, secundum quem data relatione praesente coexistendi, et lege mutationis; definiri potest relatio coexistendi ad tempus datum. Est igitur continuum non rerum, sed ordinis, ita ut cuivis suus in ordine locus ad datum tempus possit assignari.

2 puncto, *(1)* qvicunqve assumatur radius sph *(2)* qvaecunqve *L* 15 est *(1)* extensum continuum secundum ordinem existendi *(2)* continuum *L* 15 f. praesente *(1)* coexistentium *(2)* coexistendi *L*

4 f. hoc punctum . . . transeuntis: Vgl. M. MERSENNE, *Universae geometriae mixtaeque mathematicae synopsis*, 1644, S. 384 f. u. P. de FERMAT, *Varia opera*, 1679, S. 74 f. (*FO* I S. 52–54). 5 f. Ut . . . transeuntis: Vgl. EUKLEIDES, *Elementa*, IV, 5; Fr. VIÈTE, *Apollonius Gallus*, 1600, probl. I, Bl. 1 v° (*VO* S. 325 f.); CLAVIUS, *Opera* I, S. 153.

Itaque breviter S p a t i u m est continuum in ordine coexistendi, ita ut in eo quid cuique, ad datum tempus respondeat (seu l o c u s) possit ex datis sufficientibus assignari.

E x t e n s u m est continuum in spatio ordinatum.

Spatium sepositis limitibus ubique eodem modo se habet.

Omnia extensa sunt in eodem extenso finito.

S i t u s est relatio unius ad aliud secundum locum.

M o t u s est mutatio situs continua.

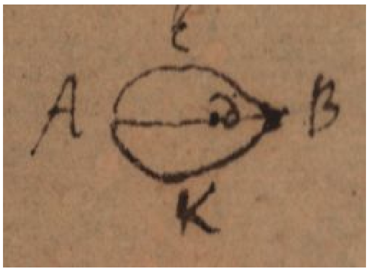
Si spatium duo coexhauriant, eorumque alterum sit finitum, id dicetur c o r p u s seu solidum et quae ipsi cum reliquo commune est, sectio vel pars ejus, erit superficies. Si superficies dicatur commune duobus cointegrantibus ejusdem corporis, objici potest de composito ex duobus globis se in puncto tangentibus vel duobus corporibus per communem aciem conjunctis, quae an revera sint unum corpus dubitari potest; seu an corpus trajici possit ab eo quod non nisi punctum cum eo commune habet. Ubi explicandum quid sit t r a j i c i. Nempe si trajiciens amoveri non possit, nisi secando. Quod secus est in tangente. Linea proprie non trajicitur, sed superficies et corpus trajici possunt. Linea potest a linea statim amoveri, quod fit in t a n g e n t i b u s. At quod t r a j i c i t , etiamsi non nisi punctum commune habeat, (ut recta per superficiem transiens) statim amoveri non potest.

Videndum an ut in calculo Algebraico universalis est demonstratio abstrahendo animum a signis plus et minus; ita idem fieri possit in speciosa situs, ne opus sit casibus diversis ut apud Euclidem.

Videndum an non rectam per congruentias definire liceat, sine plani consideratione, ex eo quod omnia ejus latera eodem modo se habent:

17–19 *Dazu am Rand:* NB.

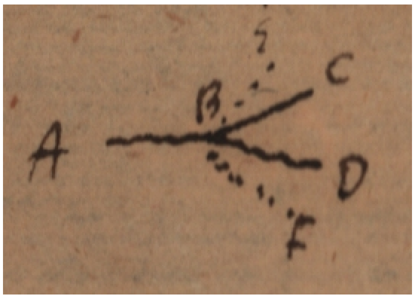
1–3 itaqve ... assignari *erg. L* 4 f. continuum *(1)* in spatio *(2)* spatio congruens *(3)* in spatio ordinatum. *(a)* Spatium per se ubiqve eodem modo se habet, et qvaecunqve extensa coexistunt, sunt in eodem continuo finito *(b)* Spatium *L* 8 f. continua *(1)* planum est se *(2)* Si *L* 10 est, *(1)* erit *(2)* sectio *(a)* erit superficies *(b)* vel *L* 10 superficies *(1)* superficies est commune duobus corpor *(2)* si *L* 12 ex *(1)* duabus par *(2)* duobus *(a)* conis sibi *(b)* globis *L*



[*Fig. 6*]

Nempe sit recta AB, et eam in punctis duobus A et B attingat extensum quodcunque ACB, et aliud ei congruens et respondenter positum AKB, ita ut duo puncta A et B se congruenter habeant ad ACB et ad AKB, dico et aliud quodvis rectae punctum D se congruenter habere ad ACB et ad AKB, veluti si C et et K sibi respondeant erit $C.D$ ∞ $D.K$ seu extensum quod poni potest inter C et D, etiam poni poterit inter K et D. Haec autem intelligenda sunt, etsi duo illa extensa ACB, et AKB, non sint in eodem plano; res enim universaliter vera est.

In iis quae affert Clavius, ex Proclo potissimum ad ostendendum duas rectas non habere segmentum commune, nec spatium comprehendere, quaedam desidero. Nempe supponit illas duas rectas esse in eodem plano, quod necesse esse, nuspiam demonstravit. Quemadmodum etiam passim cum superpositionibus utuntur supponitur duo plana congruere quorum ambitus congruunt; quod in gibbis non est.



[*Fig. 7*]

13 qvorum *(1)* termi *(2)* ambitus *L*

9 affert: Vgl. CLAVIUS, *Opera* I, S. 24–26. Leibniz hat in seinem Handexemplar, Chr. CLAVIUS, *Euclidis elementorum libri XV*, 1607, S. 28–30, Anstreichungen und Anmerkungen hinzugefügt.

Ex nostra definitione sequitur duas rectas non habere segmentum commune; nec spatium claudere. Nempe segmentum AB commune sit rectis BC et BD; cum rectam ABC attingat BD poterit assumi BE recta ipsi BD congruens et congruenter posita ad ABC, congruunt ergo $A.B.C.D$ et $A.B.C.E$. Similiter cum rectam ABC attingat recta BC poterit assumi BF recta ipsi BC congruens et congruenter posita ad ABD. Congruunt ergo $A.B.D.C$ et $A.B.D.F$. Ergo congruunt $ABCE$, $ABCD$, $ABFD$ et similiter tractari potest recta ABE, semper enim invenietur nova, et similiter ad BE. Praestat prius generari planum, et in hoc quaesitum ostendi.

2 Nempe sit *(1)* recta AB, *(2)* segmentum *L* 2 et BD; *(1)* erit BC ipsi BD congruum et congruenter positum |ad AB *erg.*|, vel *(a)* poterit aliud assumi, *(b)* poterit assumi BE, congruens et congruenter sed ipsi poterit *(2)* cum *L* 6 congruunt *(1)* ABEC, ABCD, ABDF *(2)* ABCE, ABCD, ABFD *(a)* ergo et ABCDE et *(b)* jam si congruentibus ABCD et ABFD addatur respondenter ABCE, fietqve congruentia *(aa)* ABC *(bb)* AABBCC *(2)* et *L*

15 (40945). EUCLIDIS OPUS DE DIVISIONIBUS [1682 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 14 Bl. 73–74. 1 Bog. 2°. 9 Z. auf Bl. 74 r° oben. Darunter und auf Bl. 74 v° u. 73 r° N. 14 (40944). Bl. 73 v° leer.

Datierungsgründe: Vgl. VI, 4 N. 234 sowie N. 39571 (39571) **[noch]**.

Inter Euclidis opera recensetur Opus de divisionibus, quod nonnulli esse suspicantur libellum illum acutissimum *de superficierum divisionibus* Mahumeti Bagdedino ascriptum, qui nuper Joh. Dee Londinensis, et Federici Commandini Urbinatis opera in lucem est editus. Ita Clavius in prolegomenis ad Euclidem.

Ex elementorum libris 13 priores omnium consensu sunt Euclidis, posteriores vero duo a nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur. Ibid. Quaedam propositiones Mathematicae non videntur commode demonstrari posse nisi per scientificam quandam inductionem. Ex. gr. quod in omni corpore regulari ejusdem sphaerae majore existente corpore major etiam sit superficies, sed minus latus.

6 divisionibus *(1)* qvod qvidam putant esse *(2)* qvod *L*

---

7 libellum: Muḥammad al Baġdādī, *De superficierum divisionibus*, 1570. 9 in prolegomenis: Vgl. Clavius, *Opera* I, S. 6. 11 Ibid.: *a. a. O.*, S. 8. 13 f. quod ... latus: Vgl. *a. a. O.*, S. 633 f.

16 (40982). DE CALCULO SITUUM
[Dezember 1715 – 10. August 1716]

Überlieferung: *l* Reinschrift in der Hand von A.-T. Overbeck: LH 35 I 15 Bl. 1–8. 4 Bog. 4°. 8 S. Rückseiten leer. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 548–556.

Datierungsgründe: Vgl. H.-J. Höppner, *Zur Datierung des Stückes ‚De Calculo situum'*, in: *Studia Leibnitiana*, II/3, 1970, S. 233–235.

De Calculo Situum.

§ 1. Ut in Calculo Magnitudinum cum ipsas Magnitudines formamus dum addimus, multiplicamus, in se ducimus et horum reciproca peragimus, tum etiam conferimus per rationes, aliasve relationes progressiones ac denique Majoritates, Minoritates et Aequationes. Ita in Situ formamus Extensa per Sectiones et Motus, deinde conferimus, spectamusque in eis praeter Magnitudines Similitudinem, Congruentiam (ubi concurrunt Aequalitas et Similitudo) Coincidentiam, adeoque Determinationem. Determinatum enim est cui aliquid, iisdem positis conditionibus, coincidere debet.

§ 2. Et ut doctrina Magnitudinis sua habet Axiomata, veluti Totum sua parte majus est. Quod majus est majore majus est minore. Si aequalibus aequalia addas proveniunt aequalia, aliaque id genus. Ita Doctrina Situs Axiomata propria habet qualia sunt:

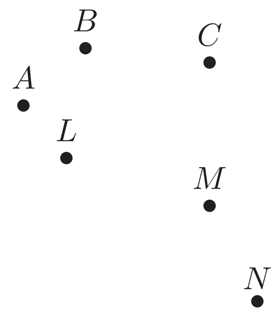
Si Similitudo, Congruentia, Coincidentia sint in Determinantibus, esse etiam in determinatis, et vicissim, si ea sint in Determinatis erunt quoque in Determinantibus simplicissimis.

Exempli causa. Ponamus non nisi unicam Rectam a puncto ad punctum duci posse, sequetur omnes Rectas esse inter se similes, quia ad determinandam Rectam ab A. ad B. nihil aliud opus est quam assumi A, B. et ad aliam LM, saltem assumi situm punctorum L, M. Situs vero duorum punctorum situi aliorum duorum semper similis est quia nihil differentiae praeter solam magnitudinem distantiae totius assignari potest, sed magnitudo jam est aliquid ad tertium relatum. Non tamen Situs punctorum duorum Situi punctorum aliorum duorum plane congruus erit nisi ita ponantur ut quodlibet Extensum continuum quod applicari potest inter Terminos unius situs possit etiam applicari inter Terminos situs alterius.

Similia vero sunt quae ambo seorsim spectata sunt indiscernibilia ita ut nihil sumi possit in uno cui simile sumi nequeat in altero, abstrahendo ubique ab aliqua determinata Magnitudine nisi excipias magnitudinem Angulorum, quae ad doctrinam situum, non vero ad doctrinam Magnitudinum referri debet.

Cum ergo probaverimus omnes situs binorum punctorum esse similes, etiam determinata, seu omnes Lineae Rectae erunt Similes.

§ 3. Contra non omnia Triangula per situm trium punctorum determinata sunt similia inter se.



[*Fig. 1*]

Neque enim ABC similiter se habent ut LMN. Potest enim Distantia AB ad Distantiam BC aliam rationem habere quam Distantia LM ad distantiam MN, ita ut in determinantibus sit dissimilitudo. Ex quo patet etiam in duabus Rectis lineis tria puncta tribus aliis dissimiliter sita eligi posse.

Nam similitudo a determinato reciproce tantum valet ad pure determinantia, non etiam ad ea quae sunt plus quam determinantia.

Sic, etiamsi Circulus determinetur per tria puncta peripheriae data, et omnes Circulos inter se similes esse minime sit negandum, tamen hic Consequentia non valet a determinatorum similitudine ad determinantium similitudinem, quia Peripheriae tria puncta data plus determinant, quam ipsum Circulum, scilicet etiam certum Angulum in segmento, et tres partes peripheriae determinatam ad totum Circulum rationem habentes.

At contra si Circuli duo determinentur per datas duas Chordas et per aequales Angulos in segmentis super Chordas factis, tum demum Circuli non solum similes erunt, sed etiam similiter determinati. Hic autem quaestio nec de tali quidem determinatione est, sed saltem de primis et simplicissimis determinantibus, quae ubi determinata fiunt similia, etiam similia esse debent.

Si vero contingeret, dissimilia determinantia nihilominus dare similia determinata, id ipsum certo indicio est hanc determinationem non esse simplicissimam, sed aliam dari simpliciorem.

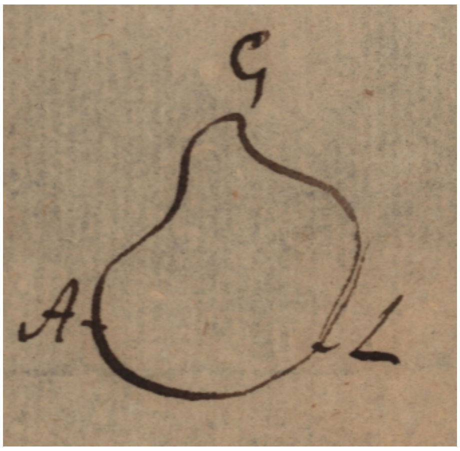
§ 4. Uti Magnitudinum Logisticam seu Mathesin generalem ad calculum reducimus, utimurque imprimis rationibus et aequationibus, ita calculus quidam in situ institui potest per similitudines et congruentias.

Literae autem in Calculo Magnitudinis designare solent ipsas Magnitudines. In Calculo Situs possunt designare puncta et loca. Hinc si $Y.A. \simeq B.A.$ locus omnium Y est superficies Sphaerae.

In hac Consignatione $B.A.$ significat situm puncti $B.$ ad punctum A, sed $\simeq$ est signum congruitatis. Sensus ergo illius Consignationis talis est. Quodlibet indeterminatum Y eum situm habere ad punctum determinatum A quem habet B ad $A.$ unde intelligitur ipsum B quoque inter ea Y seu in eadem superficie sphaerae esse. Sed si posuissem $Y.A. \simeq B.C.$ non opus fuerit B in superficie sphaerae poni. Sed jam maneat $Y.A. \simeq B.A.$

§ 5. Jam posita alia adhuc sphaera $ZL. \simeq ML.$ et considerando has duas superficies sphaericas se intersecare et loca communium concursuum vocari V; unumquodque $V.$ erit simul $Y.$ et $Z.$ ut scribere possim $V.A. \simeq BA$ et $V.L. \simeq ML.$ Potest autem B assumi coincidens ipsi M (quod ita signatur $B \infty M$) quod vocetur $F.$ determinatum ex ipsis $V.$ fietque $V.A. \simeq F.A.$ et $V.L. \simeq F.L.$ unde componendo fit $V.A.L. \simeq F.A.L.$ unde sequitur, Lineam in qua se secant duae superficies sphaericae ejus esse naturae ut quodvis ejus punctum V habeat ad duo data $A.L.$ situm eundem quem constans $F.$ (quae proinde una est ex ipsis V) ad eadem puncta $A.L.$

§ 6. Idem etiam sic enuntiari poterat:



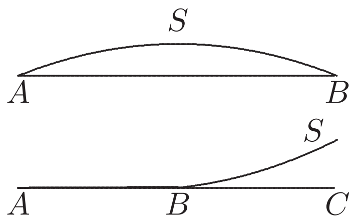
[*Fig. 2*]

Quodvis extensum $A.G.L.$ cujus duo puncta $A.$ et $L.$ quiescunt, motu suo talem

22 Qvodvis | punctum *ändert Hrsg.* | A.G.L. *l*

lineam $V.V.V.$ describet qualem formant duae superficies sphaericae sua intersectione, id est Circularem, quia cum Extensum ponatur rigidum adeoque punctum quodvis ut $G.$ suum situm servet ad puncta $A.$ $L.$ durante motu extensi continuo quiescentia, inde quodlibet Vestigium ipsius $G.$ circumvoluti situm eundem ad duo puncta fixa $A.$ et $L.$ retinebit non aliter ac supra scripsimus $V.A.L \simeq F.A.L.$

§ 7. Puncta vero quaevis quae dicto Motu durante una cum punctis A et L quiescunt, eo ipso quia quiescunt, oportet esse situs sui ad $A.$ et $L.$ unica. Nam si moverentur pluribus locis eundem situm ad A et $L.$ exhibere possent, siquidem omnia eorum vestigia eundem situm ad $A.$ et $L.$ haberent. Jam vero ea puncta sunt sua ipsorum vestigia, id est describent Circulos indefinite parvos sive evanescentes in puncta. Ita prodit Linea Recta cujus Expressio haec erit. Posito puncto quovis ejus indeterminato $R.$ dicetur $R.A.L.$ Unicum seu si $R.AL \simeq (R)A.L$ erit $R \infty (R)$.

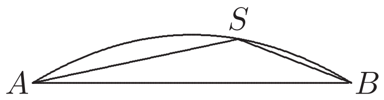


[*Fig. 3*]

§ 8. Hinc patet duas Rectas non transire per eadem duo puncta ut ABC et ABS. Nam si in Rotatione Plani punctis $A.$ et $B.$ fixis totum planum moveatur, illa rotatio efficiet ut quicquid semel fuit altero superius seu propius externo initio rotationis id facie versa fiat postea inferius seu remotius ab initio rotationis externo. At, si tam Lineae ASB quam ACB essent Rectae, facta rotatione ad Fixa puncta $A.$ et $B.$ oporteret ambas quiescere ex natura Lineae Rectae modo ostensa. Si ambae quiescerent, S semper maneret supra extensum ABC et nunquam caderet infra, quod est contra Naturam Rotationis.

§ 9. Hinc statim colligimus Rectas inter se similes esse, habere partem toti similem, quin etiam Rectam Lineam esse simplicissimam, cum nihil aliud quam extrema ad totam suam determinationem requirat, adeoque et minimam inter extrema, et pro distantia punctorum in posterum sumi posse. Pro distantia sumetur, quia Terminis immotis, distantiam Terminorum oportet esse immotam. Si ergo alia Linea inter $A.$ et $B.$ praeter Rectam assumeretur pro distantia, etiam illa punctis $A.$ et $B.$ Fixis in rotatione Plani maneret immota, preater Rectam $AB.$ etiam immotam in eadem rotatione per § 7. Ergo darentur duae diversae Lineae simul immotae in hac rotatione, quod absurdum per § 7.

Brevissima erit, quia si alia brevior ab $A.$ ad $B.$ pertingit, Linea seu extensum assequetur distantiam se ipso majorem quod absurdum.



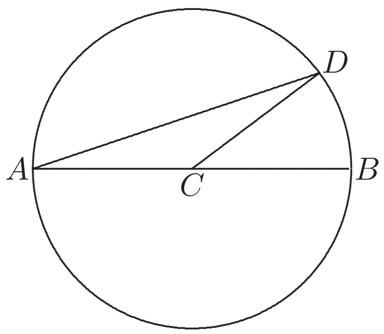
[*Fig. 4*]

Si alia aequalis datur, ut si esset ASB non quidem Recta, aequalis tamen rectae ABC, oporteret distantias $AS+SB$. non esse majores quam AB. quia non possunt esse majores conterminis curvis $AS + SB$ (quae ponuntur ipsi AB aequales) ex natura brevissimi.

Sed Euclides demonstravit esse $AS + SB$ majores quam AB. nullis principiis huic (Brevissima duo inter eosdem terminos non dantur) innitentibus implicite assumtis, sed ex puris angulorum sitibus ratiocinando. Ergo patet quoque nostri asserti veritas, quod duo brevissima inter eosdem Terminos non dentur.

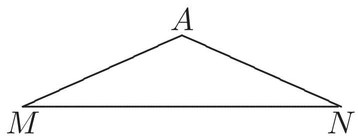
§ 10. Fortasse tamen illud Euclideum ex paucioribus etiam demonstrari potest. Scilicet[:]

Dissimiles Arcus in eodem Circulo a Chordis aequalibus abscindi nequeunt. Id quod ex natura similium per se constare censendum est.



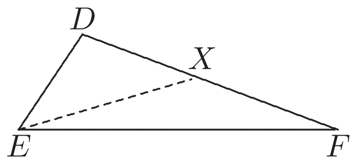
[*Fig. 5*]

Itaque Diametrus AB major est Chorda AD. Nam Chorda AD abscindit Arcum dissimilem dimidio Circuli AB (alias ab A ad B rediret contra § 8). Ergo per positum principium non erit $AD = AB$. Sed nec $AD \sqcap AB$, quia $CA + CD = AB$ duplum Radii duplo Radii. Ergo hoc pacto esset $AD \sqcap CA + CD$ Brevissimum majus altero iisdem Terminis interjecto quod absurdum. Cum ergo Chorda AD nec aequalis sit Diametro nec major, patet Diametrum quavis Chorda majorem esse.



[*Fig. 6*]

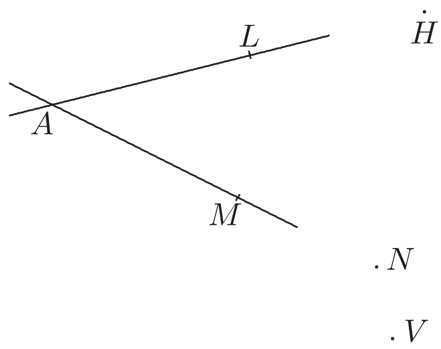
Hinc sequitur tertium Trianguli Isoscelis AMN duo latera tertio sunt majora. Nam Circulum Centro A, per M et N ducendo $AM+AN$ aequantur Diametro seu duplo Radii sed MN modo fiet Chorda ejus Circuli. Ergo ut paulo ante probatum $AM+AN \sqcap MN$.



[*Fig. 7*]

Denique Dico in quocunque Triangulo duo latera reliquo esse majora $DE+DF \sqcap EF$. Nam abscindo $DX = DE$, Ergo $DE+DX \sqcap EX$, ut de Triangulo Isoscele ostensum. Addo utrinque XF. Ergo $DE+DX+XF \sqcap EX+XF$. Id est $DE+DF \sqcap EX+XF$ ($\aleph$).

Aut igitur $DE+DF$ minus erit brevissimo EF, quod absurdum per § 9. aut aequale (et sic per ea quae ad literam $\aleph$ probavi erit $EF \sqcap EX+XF$ Brevissimum alio cointerjecto absurdum) aut denique $DE+DF$ majus erit quam EF quod erat demonstrandum.



[*Fig. 8*]

§ 11. Ut Linea Recta est locus omnium punctorum sui situs ad duo puncta unicorum, ita Planum est locus omnium punctorum sui situs ad tria puncta unicorum, unde patet, etiam assumtis duabus rectis se intersecantibus haberi Planum. Esto enim Recta per A. L. et alia per A. M. Habemus tria puncta A. L. M. nec tantum determinata sunt puncta omnia Rectae per AL et omnia Rectae per AM sed et omnes distantiae a quovis puncto unius Rectae ad quodvis punctum alterius rectae, adeoque quodvis punctum in quavis harum distantiarum (quae etiam sunt Lineae Rectae) determinatum est seu sui situs ad $A.L.M.$ unicum.

§ 12. Jam Rectae per $A.L.$ omnia puncta vocentur Y et Rectae per $A.M.$ omnia puncta appellentur $Z.$ erit ita $A.L.Y.$ unicum et $A.M.Z.$ unicum. Ex ipsis Y unum sit H, et ex ipsis Z unum sit N erit $A.L.H.$ unicum et $A.M.N.$ unicum. Sumatur alius locus cujus quodvis punctum V sit unicum sui situs ad $H.N.$ Sed ipsum $H.$ est unicum ad $A.L.$ et ipsum $N.$ est unicum ad $A.M.$ Ergo $V.$ erit unicum ad $A.L.A.M.$ Nam in Determinationibus pro Determinato substitui possunt Determinantia. Cum ergo sit $V.$ ad $A.L.A.M.$ unicum et repetitio ejusdem $A.$ supervacanea sit, saltem inde inferetur esse $V.$ ad $A.L.M.$ unicum. Id est omnia puncta $V.$ esse in eodem plano cum $A.L.M.$ quia Planum est locus omnium punctorum sui situs ad tria puncta Fixa Unicorum.

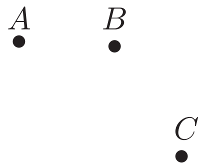
§ 13. Sequetur etiam Duo Plana sese secare in Linea Recta. Sit $X.$ Unicum ad $A.B.C.$ et $Y.$ unicum ad $L.M.N.$ Puncta vero utriusque Plani communia omnia vocentur $Z.$ ita ut puncta Z sint unica sui situs tam ad $A.B.C.$ quam ad $L.M.N.$ Ergo omnia Z tam $X.$ erunt quam $Y.$ Producantur Distantiae $LM.LN.$ et $MN.$ dum Plano per $A.B.C.$ occurrat in $\lambda.$ $\mu.$ et $\nu.$ quod fieri necesse est quia planum quodvis secat totum spatium et sectio communis procedit in Infinitum. Item, omnis Recta procedet in infinitum. Necesse igitur est ut ad aliud Planum seu ad sectionem communem perveniat.

§ 14. Sed ne moveatur objectio, forsan unam inter Distantias $L.M.N.$ esse sectioni Parallelam, duo nobis puncta $\lambda.$ et $\nu.$ sufficiunt. Quodsi vero omnia tria in sectionem cadant nihilominus ex duobus eorum determinatis determinatum erit tertium, alioqui si tria essent indeterminata inter se determinarent Planum in ipsa intersectione Planorum, quod absurdum, quia sic ipsa quoque intersectio Planum foret. Itaque fiet $Z.\lambda.\nu.$ unicum id est omnia puncta $Z.$ cadent in Lineam Rectam. Hinc quia duae Rectae se mutuo non nisi in unico puncto secare possunt, trium Planorum Intersectio punctum erit.

§ 15. Videndum etiam quid fiat, si tres superficies sphaericae se secent, ubi locus Intersectionis extensum esse nequit. Neque enim duarum Linearum sectio Extensum est. Facile autem ostendi potest, per duo puncta innumeros transire circulos, etsi possit etiam aliquando Ciculus circulum attingere saltem in uno puncto, etiam tum, quando non sunt in eodem Plano, etsi se non tangant. Circulum vero ex tribus punctis determinari

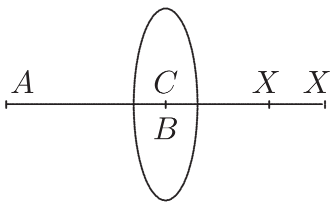
26 f. Hinc . . . erit: Die Schlussfolgerung setzt voraus, dass die beiden Geraden nicht zusammenfallen. Ist dies jedoch der Fall, bildet diese Gerade den Schnitt der drei Ebenen.

manifestum est.



[*Fig. 9*]

Nam ex duobus punctis A. et B. determinatur Recta cujus omnia puncta ad duo puncta haec se habent eodem modo, inter quae etiam est Centrum Circuli. Similis locus punctorum ad B et C eodem modo se habentium (inter quae idem Centrum esse debet) extat in Recta punctis B et C. determinata. Ergo Centrum Circuli est in ambabus iis Rectis, id est in earum Intersectione sive: Ergo intersectio ambarum Rectarum est punctum ejusdem relationis ad ($B.C.B.A.$ et cum B repetere supervacaneum sit ad) $B.C.A.$ quod punctum omnino debet esse Centrum Circuli per $A.B.C.$



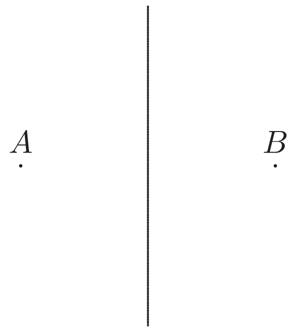
[*Fig. 10*]

Sed nos supra definivimus Circumferentiam Circuli, locum punctorum eodem modo se habentium ad duo puncta Fixa. Hinc Circulus erit Locus punctorum eodem modo se habentium ad quodvis punctum X. Rectae per AB, determinatae substituendo pro Determinantibus.

§ 16. Sumantur tria puncta in Circumferentia hujus Circuli et Planum per ea transiens, cui occurrat Recta per AB. in Puncto quod sit C. Ergo Circumferentia est locus punctorum eodem modo se habentium ad C. ostendendumque erit omnia puncta Peripheriae cadere in hoc Planum per tria puncta Peripheriae ipsius ductum. Quod fiet si ostendatur Planum esse locum omnium punctorum ad duo quaedam puncta eodem modo se habentium. Rectam vero esse locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad tria quaedam puncta.

5 f. debet) | extrat *ändert Hrsg.* | in *l*

[*Fig. 11*]



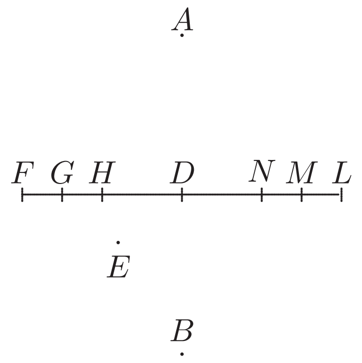
[*Fig. 12*]

Sint puncta A. B. C. Duarum jam quarumcunque Sphaerarum circa A et circa B. intersectiones, cadent in Planum. Idem est de duabus quibuscunque sphaeris circa A et C. Inde, quia hoc sufficit ad determinandum, Consequens est, Planum ex intersectionibus sphaerarum circa A et B et Planum ex intersectionibus sphaerarum circa B. et C. aut circa A. et C. eandem determinare Rectam ad quaevis puncta hujus Plani eodem modo se habentem; ad quae illisio Rectae in illud planum eodem modo se habet.

§ 17. In Plano quoque possumus concipere Rectam ut locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad duo tantum puncta A. et B. Adeoque omnes Circumferentiae aequales circa A. et B. se secabunt in hoc loco seu in hac Linea Recta. Hic modus locum determinandi diversus est a priore. Aliud enim est dicere, locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad duo puncta A. et B. esse Rectam. Aliud locum omnium punctorum eodem modo se habentium ad A. ut ad B. esse Planum. Nam prior proprietas sic exprimitur: $A.B.C. \simeq A.B.Y.$ in solido. Locus omnium Y. Recta sed posterior proprietas sic exprimitur: $A.Y. \simeq B.Y.$ erit locus omnium Y. Planum. Sed, si omnia Y. sint in eodem Plano cum AB et inter se posito $A.Y \simeq B.Y.$ erit locus omnium Y. Linea Recta.

Ex $A.B.C. \simeq A.B.Y.$ sequitur $A.C. \simeq A.Y.$ et $B.C. \simeq B.Y.$ unde constat Y. cadere in Sphaeram Centro A. Radio AC. et in Sphaeram centro B. radio $B.C.$

§ 18. Ex Contactibus etiam Sphaerarum in uno puncto sequitur dari locum Unicorum ad duo puncta, vel vicissim ex hoc sequitur Contactus Sphaerarum in uno puncto. Idem est in Plano de Contactibus Circulorum.



[*Fig. 13*]

$FA \simeq FB \simeq LA \simeq LB$. sic $GA \simeq GB \simeq MA \simeq MB$. Nempe circulus centro A radio AE descriptus cum sit E infra Rectam et A. supra Rectam, secabit eam bis in F et L, quae sectionum puncta sibi continuo appropinquant, F. transeundo in G. H. etc.: et L in M. N. etc.: Ubi autem sibi occurrent, ibi in unum coalescent in D. eritque ibi duorum Circulorum Contactus. Hinc si A et B sint ea ad quae omne punctum rectae FL eodem modo se habet, erit D sui situs ad ea unicum et in Rectam per $A.B$. cadet. Videtur etiam sequi has Rectas se non nisi in uno puncto secare.

17 (41009). DE ANGULIS LINEARUM PLANE NOVA
5. Juni 1683

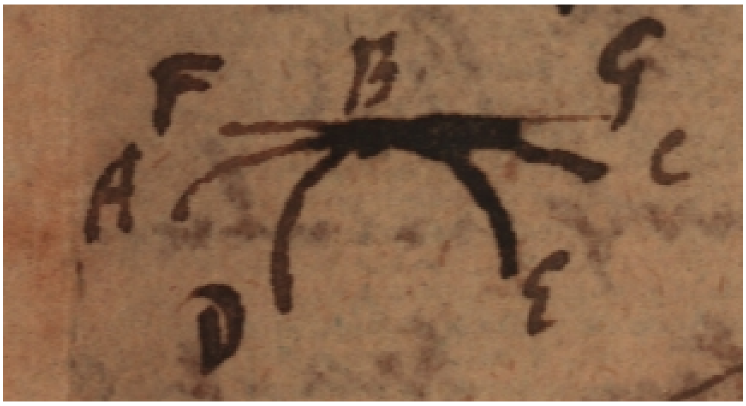
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 19 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S.

26 Maji 1683

De Angulis Linearum plane nova

Curvarum linearum naturam nondum satis explicatam haberi indicio est, quod nondum regula habetur ex qua cognoscatur an duo arcus sibi occurrentes, angulum faciant, an vero unam curvam componant.

Neque enim unitas curvae sumi potest ex uniformitate generationis, nam possunt excogitari motus eandem semper legem servantes, in quibus punctum aliquod describens duarum diversum curvarum arcus successive efficit angulumque suo motu facit.



[*Fig. 1*]

Item neque etiam ex solis tangentibus dijudicari potest quaestio, quasi eae curvae ut AB, EB pro una continuata AB haberi debeant, quarum tangentes angulum non faciunt; Id enim non sufficere ex eo patet, quo duae curvae se tangentes ABC, DBE habent rectam tangentem communem. Et ideo tangentes arcuum AB et EB nempe rectae FB et GB nullum faciunt angulum, et tamen arcus isti $ABBE$ non componunt

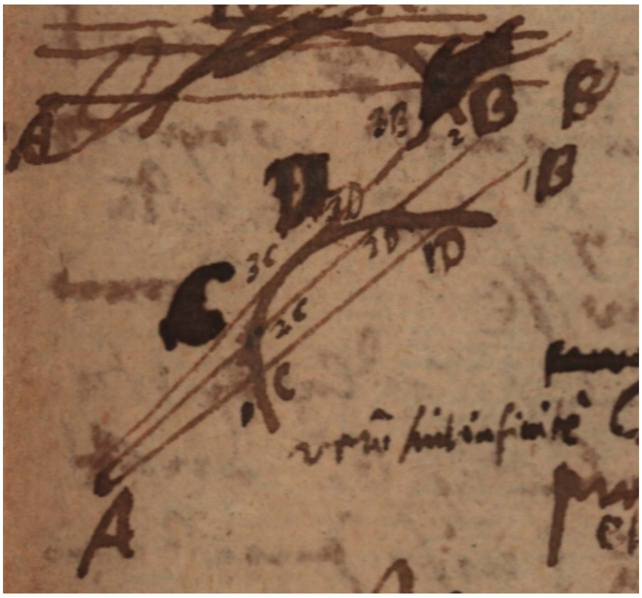
---

6 *Am Rand:* Hoc schediasmate satis rem plane et compendiose complexus sum.

unam curvam sed angulum ABE aliquem sane licet minime comparabilem cum angulo duarum rectarum, qui dicitur angulus contactus.

Sciendum est autem angulos curvarum habere infinitos gradus, ut nunc ostendam, et dari angulum quem voco osculi, qui est ad angulum contactus, ut angulus contactus ad rectilineum. Et curvae quae sese osculantur in puncto osculi habent non tantum eandem directionem, ut eae quae sese simpliciter tangunt sed et eandem flexionem seu primam directionis mutationem nec faciunt angulum contactus comparabilem cum Angulo contactus circulorum, et tamen eandem lineam non componunt.

Sunt enim tres occursuum gradus: Nodus, contactus et osculum. Nodus cum curva curvam attingit, seu cum habent punctum commune. Contactus cum in puncto communi eandem habent directionem seu rectam tangentem sive arctissime stringentem, recta enim tangens non nisi una est. Osculum cum in puncto contactus eandem habent flexionem seu eundem circulum arctissime stringentem sive omnium intus tangentium circulorum maximum. Osculi autem ipsis rursum gradus sunt infiniti, et quae eandem habent circulum arctissime stringentem, possunt diversas habere Ellipses arctissime stringentes.



[*Fig. 2*]

Haec omnia ut distinctius intelligantur considerandum est directionem curvae pendere a duobus punctis in ea sumtis C. et D intervallo infinite parvo dissitis seu coincidentibus, per quae transiens recta est tangens. Finge enim rectam secantem AB

tamdiu moveri ex $A1B$ in $A2B$. $A3B$, donec e curva exeat, manifestum est duo puncta sectionis C et D sibi magis magisque accedere primum $1C$. $1D$ deinde $2C$. $2D$ et tandem in contactu coincidere $3C$. $3D$. Unde tangens repraesentat inclinationem vel declivitatem quam curva in puncto contactus habet. Considerando enim curvam velut polygonum infinitorum laterum ut si polygonum sit $1C2C3CD$ cujus latera ut $1C2C, 2C3C, 3C3D$, sint numero infinita, quantitate vero sint infinite parva, patet unum tale latus ut $3C3D$ esse portionem tangentis $A3C3D3B$ et latus curvae, ut $3D3C$ productum incidere in A seu esse tangentem.

[*Fig. 3*]

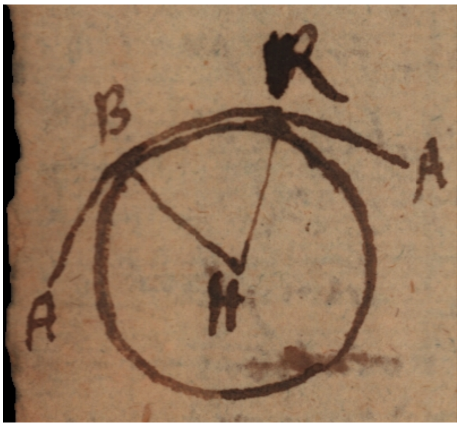
Verum ad curvam a recta discernendam praeter directionem opus est aliqua flexione seu prima directionis mutatione, vel duarum directionum angulo ad se invicem; ac proinde ut directio duobus tantum indiget curvae punctis coincidentibus; ita flexio indiget minimum tribus curvae punctis, C. D. E indefinite propinquis, seu duobus polygoni infinitanguli curvam repraesentantis lateribus CD et DE. Et quemadmodum directionem determinavimus per rectam tangentem, quia datis duobus punctis datur recta per ea transiens; ita flexionem metiemur circulo per tria puncta C. D. E transeunte, qui semper est determinatus. Et centrum hujus circuli semper est a concava parte curvae; et ut recta transiens per C. D seu tangens est eadem ita et recta arctissime stringens; ita circulus transiens per tria puncta C D E, est circulus ibi curvam arctissime stringens, quem appello osculantem.

Sed dubitabit aliquis quomodo inveniri queat is circulus, cum tria puncta coincidunt seu distantiam habent inassignabilem sive infinite parvam. Respondeo id fieri eodem modo, quo invenitur recta curvam tangens id est in duobus punctis coincidentibus secans. Ut enim problema quo invenitur punctum Contactus seu quo recta vel alia linea curvam propositam tangit duas habet radices aequales; ita problema quo invenitur punctum in quo circulus (vel alia curva nam rectae hic locus non est) curvam propositam osculatur minimum, tres (imo quatuor) habet radices seu valores aequales. Unde vicissim puncto contactus vel osculi dato inveniri potest recta tangens vel circulus.

Et quidem curvam unam in uno puncto non nisi una (proprie) tangit recta, verum circuli infiniti curvam in quovis puncto tangere possunt, quoniam cum unus tantum sit osculans videamus quomodo a caeteris distinguatur.

[*Fig. 4*]

Sit ergo curva AB, quam tangat recta CD in B et sit BE ad tangentem perpendicularis ducta intra concavitatem curvae. Manifestum est quemvis circulum centro in hac recta sumto per B descriptum tangere curvam in B. Ex his circulis tangentibus quidam minores cadunt intra curvam, ut descripti centris F. G. H, alii vero majores descripti centris L. M. N, statim post contactum cadunt extra curvam. Necesse est ergo dari quendam omnium intra curvam cadentium seu in concavo tangentium maximum seu ultimum, qualis sit descriptus centro H radio BH, cujus radius si vel tantillum augeretur, ut si pro BH sumeretur BL, statim circulus caderet extra curvam, seu a parte convexa tangeret isque circulus curvam arctissimum stringet, quia nullus alius circulus ibidem tangens inter ipsum et curvam poterit describi. Et quidem si ponatur AB esse sectio conica quaecunque cujus vertex sit B, erit HB dimidium latus rectum, seu, quod memorabile satis theorema est, in omni sectione conica circulus circa latus rectum descriptus est omnium curvam in vertice intus seu a concava parte tangentium maximus, vel quod eodem redit eandem cum ipsa flexionem habet, sive ipsam in vertice osculatur et, si alius tantillo major assumatur, is extra conicam curvam cadet. Manifestum est etiam, circulum illum osculantem inter omnes circulos tangentes maxime ad curvam quam osculatur accedere, et licet revera non nisi in uno puncto congruere possit, tamen longissimo tractu cum curva congruere videri, et ab ea difficillime discerni posse. Porro si paululum augeatur radius, tunc circulus cadens extra curvam utcunque vicinus osculanti, necessario (nisi punctum B sit ipsum punctum flexus curvae, ubi etiam recta tangens curvam in tribus punctis coincidentibus secat) curvam praeter punctum contactus B adhuc in aliis duobus punctis Q. Q secabit quae puncta Q. Q in circulo osculante coincidunt cum puncto osculi B. Et ita circulus osculans curvam secare intelligendus est in quatuor punctis coincidentibus, nempe in duobus eo ipso quia est tangens, quemadmodum caeteri circuli tangentes omnes; et adhuc in duobus Q. Q. qui in casu osculi inter se, et cum contactus punctis coincidunt.



[*Fig. 5*]

Unde etiam centrum H circuli curvam in puncto dato B osculantis quaerere, idem est ac quaerere centrum circuli curvam tangentis tam in puncto dato B, quam in puncto adhuc alio, R, sed priori B coincidente; seu quaerere concursum duarum rectarum BH,

RH, curvam ABR in punctis B et R coincidentibus seu infinite parvo intervallo dissitis, ad angulos rectos secantium.

[*Fig. 6*]

Et licet regulariter non sit in potestate circulum invenire qui transeat per quatuor puncta, C. D. E. F, si scilicet perpendiculares ad CD et DE (ex punctis mediis eductae) coincidant in H, at ex mediis DE et EF eductae coincidant in K. Hoc loco tamen sufficit nos quaerere concursum perpendicularium ad CD et EF, in S, ut circulus centro S radio SC descriptus transeat per puncta C. D. E. F, nam SC, et SD inter se aequales sunt ex constructione, item SE et SF inter se; at SD et SE, aequales sunt ex natura casus hujus specialis, quia intervallum inter D et E est inassignabile sive infinite parvum. Unde fit ut problema etsi tres tantum radices aequales prima fronte habere videatur, revera tamen deprehendatur habere radices quatuor. Et, si circulus minor osculante curvae alibi quam in contactu non occurrat, necesse est duas radices, pro punctis Q et Q esse impossibiles. Manifestum est denique si curvae $CDEFG$ quam polygoni infinitanguli instar consideramus, perpendiculares (ex mediis lateribus CD. DE. EF. FG. etc. eductae) intelligantur ordine concurrere (quaevis cum vicina in punctis H. K. L etc.) puncta ista concursuum incidere in novam curvam HKL, et quidem perpendiculares curvae $CDEF$ fore tangentes curvae HKL, et si filum $CHKL$ a C ad H recta extensum, et deinde curvae HKL circumligatum, evolvatur, seu continue tensum moveatur ex $CHKL$ in $DHKL$ ex $DHKL$ in EKL ex EK in FKL, ex FL in GL etc. (quem evolvendi modum uberius explicuit clarissimus pendulorum horologiorum inventor) tunc punctum C ordine incidet in puncta $DEFG$, et ita evolutione curvae HKL, describetur curva $CDEF$ et curva quae evolutione sui generat aliam curvam, est locus centrorum omnium circulorum curvam generatam osculantium, seu flexiones ejus ordinatim metientium.

Ex his etiam patet non omnem circulum intra curvam aliquam propositam provolvi posse, sed eum demum qui non est major minimo circulo osculante. Ita in parabola concava nullus circulus ubique provolvi potest, nisi sit aequalis aut minor eo cujus diameter est latus rectum. Et memini me hac occasione olim, cum trochoeides considerarem, quae circulis intra curvas provolutis generantur, in has cogitationes primum incidisse.

Cum ergo circuli aliarum linearum flexiones commodissime metiantur, ut rectae metiuntur directiones, (sunt enim hae duae lineae simplicissimae omnium, et ubique uniformes) consequens est, ut quemadmodum curvarum se se secantium seu in concursu diversas directiones habentium angulos sectionis metimur, angulis rectilineis rectarum tangentium; ita curvarum se tangentium, seu easdem directiones habentium angulos contactus seu flexionis metiamur angulis circularibus circulorum osculantium. Et quemadmodum angulus contactus rectae ad curvam quam tangit vel duarum curvarum tangentium inter se, habetur pro nullo vel infinite parvo respectu anguli vulgaris seu rectilinei, quia est quovis angulo rectlineo minor: ita angulus osculi seu circuli ad curvam quam osculatur habetur pro nullo respectu anguli contactus vulgaris seu circularis, cum sit quovis angulo contactus duorum circulorum, minor. Sic angulus contactus parabolico-circularis SBA quem circulus BSE parabolam in vertice B tangens, cum ipsa parabola AB facit, aequalis censetur angulo contactus circulari SBP, quem facit circulus BSE, cum circulo BPM parabolam in vertice osculante, cujus diameter est latus rectum.

Nam si alius circulus quilibet loco circuli osculantis assumatur, poterit semper alius assumi parabolae propior; sed i n t e r s o l u m c i r c u l u m o s c u l a n t e m e t c u r v a m a l i u s c i r c u l u s d e s c r i b i n o n p o t e s t ; prorsus quemadmodum inter rectam tangentem et curvam alia recta duci non potest. Et proinde angulus osculi est minor quovis angulo contactus circulari et proinde minor etiam quovis angulo contactus duarum aliarum curvarum se non osculantium. Circulos autem duos sese osculari tam impossibile est, quam duas rectas se tangere nisi coincidant.

Quemadmodum autem circulus ex puncto curvae generatricis tanquam centro, per punctum correspondens curvae evolutione prioris generatae descriptus curvam generatam ibi osculatur, ita etiam Ellipsis ex punctis duarum curva[ru]m congeneratricium tanquam focis per punctum respondens curvae coevolutione priorum generatae descriptus ibi curvam generatam osculatur, ita ut nullus circulus inter hanc Ellipsin et curvam tangendo cadere possit.

5 olim: Vgl. VII, 3 N. 38_{11} S. 482 f.

Ipsos angulos contactus circulorum ultra metiri nihil necesse est, sufficit enim eos determinatos ese per radios circulorum, si quis tamen curiosius ista scrutari volet haec reperiet: primum, contactum duorum circulorum per omnia similem esse contactui duorum aliorum circulorum eandem inter se rationem habentium. Exempli causa sit BM ad BN ut BT ad BE, omnia utrobique similiter seu proportione intelligi posse necesse est. Hinc si sint quatuor diametri circulorum continue proportionales BM. BN. BT. BE erunt tres anguli contactus circulares etiam continue proportionales, PBQ. QBR. RBA. Ergo si tres isti anguli contactus continue sibi appositi essent aequales, forent diametri quatuor continue proportionales; et sumendo angulos contactuum cum circulo primo, PBQ, PBR, PBA etc. progressionis Arithmeticae; forent diametri BM, BN, BT, BE progressionis geometricae, et proinde si diametri crescerent aequabiliter seu ut numeri, progressione arithmetica, tunc anguli contactuum crescent ut Logarithmi. Unde cum recta ipsa haberi possit pro circulo cujus diameter est infinita, sequitur angulum contactus quem facit recta cum circulo esse ad angulum contactus duorum circulorum, ut logarithmus numeri infiniti, ad logarithmum numeri finiti. Caeterum posito logarithmum unitatis esse 0. logarithmus infiniti est quantitas infinita, non quidem absoluta, qualis est ipsum infinitum, cujus est logarithmus, sed media quadam proportione inter finitum et infinitum. Nam si Numerus infinitus ponatur esse: $1+1+1+1$ etc. in infinitum, logarithmus ejus erit $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ etc. in infinitum ut alibi ostensum est. Et proinde si angulus rectilineus ponatur esse $1+1+1+1+1$ etc. erit angulus contactus rectilineo-circularis ut $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc. et angulus contactus circularis ut numerus finitus.

Prorsus ut in Tabula Trianguli Harmonici ubi

1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	*s*
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	*e*
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	*r*
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	*i*
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$	*e*
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	*s*
infinitum	$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	summae

Quae animi gratia adjicere placuit. Ut his probe consideratis controversiae inter Geometras de hoc argumento non sine scientiae opprobrio agitatae finiantur. Nam si metaphysico rigore loqui vellemus, perinde imaginaria sunt talia ut numerus infinitus ac quantitates infinite parvae, et radices impossibiles $\sqrt[2]{-1}$, et focus alter parabolae infinito hinc distans intervallo, quae tamen omnia tanquam instrumenta inveniendi merito recipiuntur, quoniam quae inde deducuntur demonstrari possunt reductione ad absurdum.

Sed redeamus in viam, et quoniam ad angulos osculi pervenimus, eosque non possumus metiri contactibus circulorum, (quemadmodum angulos contactuum non poteramus metiri sectionibus rectarum) progrediendum est ad alias curvas altiores, licet nullae occurrant uniformes.

Annotavimus supra Circuli qui sectionem conicam in vertice osculatur, diametrum esse latus rectum. Itaque duae sectiones conicae, quae idem habent latus rectum ita positae ut convexitas unius tangat concavitatem alterius in vertice communi, sese osculabuntur, id est nullus describi poterit circulus eas in vertice tangens, qui inter ipsas cadat. Hunc ergo angulum osculi ut metiamur poterimus uti Ellipsi eodem modo ut antea usi sumus circulo.

[*Fig. 7*]

Sit sectio conica velut parabola ABA, ejus verticem verticibus suis osculari possunt Ellipses innumerae HBG, FBE, LBC; omnes scilicet quae idem habent latus rectum cum proposita sectione cum tamen non congruant inter se, ideo quaedam Ellipsium osculantium statim post osculum cadent extra curvam ut CDB, quaedam intra ut GHB. Sed omnium intra curvam cadentium Ellipsium erit quaedam maxima EFB, quae si vel tantillum (manente latere recto) augeretur statim (salvo licet osculo) extra caderet, eaque intus cadentium maxima, quae sit EFB tam arcte curvam AB stringet, ut nulla Ellipsis (osculans) inter ipsam et curvam describi possit. Et haec Ellipsis secundum curvedinis gradum, seu ipsam mutationem flexionis metietur, perinde ac Circulus supra primum curvedinis gradum seu mutationem directionis id est flexionem metiebatur. Et quemadmodum ad directionem curvae cognoscendam duo, et ad flexionem tria puncta inassignabiliter distantia (seu coincidentia) unum aliquid efficientia adhibentur. Ita ad flexionem flexionis, seu secundum curvedinis gradum minimum requiruntur puncta quatuor, coincidentia.

Et quemadmodum problema invenire punctum arctissimi contactus, seu punctum osculi; est ad minimum trium, revera quatuor radicum aequalium, ita inveniri punctum arctissimi osculi, seu punctum strictionis est minimum quatuor imo sex radicum aequalium. Unde vicissim Ellipseos stringentis foci inveniri poterunt. Vel latus transversum (ob datum jam rectum) inveniri poterit, quod magnitudine sua ipsum osculi arctitudinem, seu secundum curvedinis gradum definit.

Sex autem revera radices aequales fiunt, quia Ellipsis CDB eo ipso quia osculatur, secat in quatuor punctis coincidentibus per superiora; at eadem si extra osculatur, secat adhuc in duobus, L. L. quae in Ellipsi stringente EFB coeunt in punctum B. Ergo in B sunt sex puncta coincidentia, vel poni potest curvam ab Ellipsi ter tangi tribusve tactuum punctis coincidentibus.

Eodem modo si duae curvae ne ullum quidem angulum osculi (primi gradus) facerent, sive si eandem haberent Ellipsin stringentem hoc est arctissime osculantem; nihilo minus quia non congruerent sed angulum novum facerent infinities licet minorem angulo osculi, ascendendum esset ad tertium curvedinis, sive secundum angulorum osculi gradum adhibitis curvis altioribus, quae in octo punctis coincidentibus curvae occurrere possint. Atque ita in infinitum. Et tum demum curva curvam continuare. Hoc est nullum cum ea angulum ullius gradus facere sed unam lineam componere intelligetur; cum in puncto communi eadem semper curva osculans quotcunque assumtis ⟨pu⟩nctis coincidentibus reperietur.

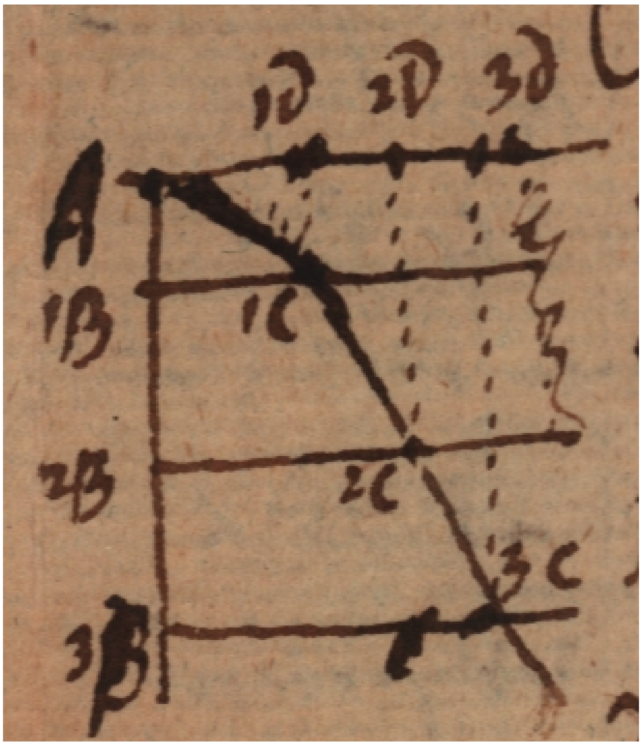
22 *Dahinter:* Tantum

18 (41010). DE ANGULIS CURVARUM [1682–1684 (?)]

Überlieferung: *L* Überarbeitetes Konzept: LH 35 I 19 Bl. 3–6. 2 Bog. 2°. 7 S. Bl. 6 v° leer.

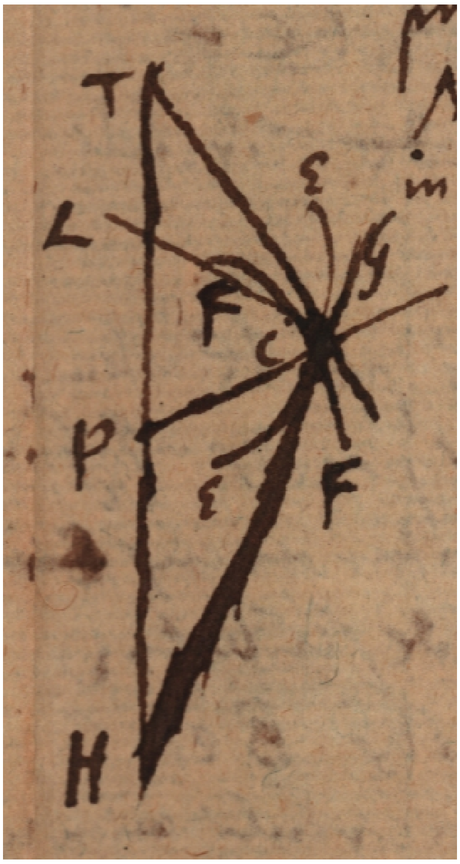
Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1682–1684 belegt. **[noch]**

De Angulis curvarum



[*Fig. 1*]

Omnis linea intelligi potest generata motu duplici rectilineo, punctum aliquod feratur in recta BC, et recta ipsa BC deferens feratur per aliam rectam AB, seu axem eodem semper ad eam angulo ABC: Et quidem si velocitas puncti et rectae deferentis eadem proportione crescant linea CC descripta erit recta, nempe si sit $1B2B$ ad $2B3B$ ut $1D2D$ ad $2D3D$. sin minus curva. Et quidem si ratio qua crescit velocitas puncti, sit major quam ratio qua crescit velocitas rectae punctum deferentis (seu si sit ratio $1D2D$ ad $2D3D$, major quam $1B2B$ ad $2B3B$) tunc curva obvertet concavitatem ; sin minus c o n v e x i t a t e m . Si vero causa quae velocitatem mutat cessaret vel suspenderetur, ita ut tam punctum in recta deferente quam recta deferens in axe retinerent velocitatem quam nunc in praesenti curvae puncto habent, nec per vim externam eam mutare cogerentur, tunc punctum curvam describens pergeret in recta, eaque curvam tangente quae causa est cur omne punctum in linea curva motum conetur procedere per ejus tangentem, si sibi relinquatur, seu libertatem nanciscatur. Nempe si sit $1B2B$ aequ. $2B3B$ et $1D2D$ aequ. $2D3D$ procedet punctum C. in recta $1C2C3C$ curvam AC tangente in puncto C.



[*Fig. 2*]

Eadem ergo censetur esse directio vel inclinatio sive declivitas curvae quae rectae tangentis seu eadem est directio curvae FF in punto C, quae rectae tangentis TC. vel curvae EE quae rectae tangentis HC. Et si recta curvam secat intelligetur angulus rectae ad curvam is esse qui est rectae ad curvae tangentem in puncto occursus, seu angulus PC ad FF, qui PC ad TC. et recta perpendicularis ad tangentem curvae in loco occursus, ipsam curvam ad angulos rectos secare censetur. Et si duae curvae se secent, angulum eundem facere censentur, quem earum tangentes, ut angulus FCE idem qui TCG.

Ergo si recta curvam tangat, tunc nullum omnino ad eam angulum facere censetur eo ipso quia angulus alterius rectae ad ipsam, idem censetur qui ad curvam. Et proinde cum angulus rectae GC ad curvam FC idem intelligatur, qui angulus GC ad rectam TC, seu si angulus TCG aequivalere censetur angulo FCG utique necesse est angulum contactus FCT haberi pro nullo, sive nullam rationem assignabilem habere ad angulum rectilineum TCG quod eadem methodo demonstrari potest de quavis curva qua Euclides in circulo, semper enim portio curvae quantum satis est parva FC cadet inter LC et TC rectas, unde angulus LCF rectilineus quamtumlibet parvus, semper tamen angulo contactus major erit. Quae causa proinde est, cur rectarum tangentium anguli pro angulis curvarum habeantur. Et hoc sensu duae curvae se tangentes, nullum omnino angulum facere censentur.

Verum licet Angulus contactus sit ad angulum rectilineum, ut linea ad superficiem, tamen ut lineae inter se, ita et anguli contactus inter se conferri possunt, et eatenus censebuntur habere quantitatem. Itaque si curva curvam tangat, nulla quidem censebitur esse quantitas anguli quem faciunt, si ea conferatur cum angulo linearum se secantium; sed si duo anguli contactus conferantur, dici potest, uter sit major. Idque usum habet ad definiendum utra curva intra alteram cadat.

[*Fig. 3*]

Verbi gratia si sint recta TT, curvae FF et EE sese tangentes in C, ut si FF sit circulus descriptus centro P. radio PC, EE autem sit alia curva verbi gratia parabola, quaeri potest an circulus cadat extra parabolam, seu an angulus contactus TCF sit major angulo contactus TCE, vel quaeritur utrius curvae major sit curvedo. Cujus a curvae directione discriminem est explicandum.

[*Fig. 4*]

Equidem inclinatio seu declivitas seu directio curvae ECE in puncto C eadem esse intelligitur quae rectae tangentis LCM id est quae chordae seu rectae in duobus punctis A, B curvam secantis $RABS$, posito eorum punctorum intervallum AB esse indefinite parvum seu nullum. Unde etiam quaerere rectam quae curvam in puncto dato tangat, est illud ipsum problema quo quaeritur recta RS curvam secans in duobus punctis A. B, tantummodo determinatum ad duas radices aequales, seu ita ut A et B tandem coincidant; verum curvedo curvae a recta tangente mensurari non potest, rectae enim curvedo nulla est. Et curvedo requirit duarum inclinationum seu declivitatum AB et BC collationem inter se, sine qua etiam judicari non potest, utrum curva sit concava vel convexa ab aliquo latere proposito. Hinc ad curvedinem tria curvae puncta (licet intervallo infinite parvo dissita) requiruntur itaque ut prius rectam adhibuimus ad directionem designandam, quia semper dari potest recta secans curvam in duobis punctis, ita simplicissimum est ad curvedinem designandam adhiberi, alteram linearum uniformium, nempe Circulum, quia semper circulus repereri potest transiens per tria data puncta, quoties ea non cadunt in unam rectam. Invenire ergo curvedinem, est invenire circulum qui curvam propositam secat in tribus punctis, ea tamen lege ut tria puncta coincidant; seu ut problema habeat tres radices aequales. Is nimirum eandem cum curva proposita curvedinem habere censebitur.

[*Erster Ansatz, verworfen*]

Et proinde si duae curvae se tangant, dicemus angulum contactus eundem esse qui duorum circulorum eandem curvedinem habentium. Quae ut intelligantur clarius Circulorum prius curvedines et anguli contactus sunt explicandi. Et quidem constat magis circulum accedere ad rectam, seu eo minorem habere curvedinem quo est major, adeo ut recta haberi possit pro circulo cujus radius est infinitus. Sed ut sciatur qua proportione decrescant curvedines, crescentibus radiis, considerandum est curvedines seu flexiones intelligi posse non tantum in circulis, sed et in polygonis regularibus. Quoniam curvedo circulorum in parte utcunque parva reperitur, consideremus prius partes assignabiles.

[*Fig. 4a*]

Centro A radio AC describatur arcus BDC et centro E, radio majore EB, describatur arcus BFC secans priorem in punctis B et C patet arcum circuli minoris inter puncta B. C interceptum esse majorem quam arcum circuli majoris intra eadem; cadit enim hoc intra illum, et majore existente curvedine; majorem etiam esse arcum. Porro arcus BDC est ad arcum BFC in ratione composita angulorum A ad E, et radiorum AB ad EB ut constat (unde semper ratio radiorum major quam angulorum)

[*Zweiter Ansatz, verworfen*]

Et proinde si duae curvae se tangant, dicemus angulum contactus eundem esse qui duorum circulorum eandem curvedinem habentium. Quae ut intelligantur clarius prius circulorum curvedines et anguli contactus erunt explicandi. Et quidem cum circuli sint similes inter se, et quilibet circulus sit uniformis, seu arcus habeat etiam similes inter se. Constet autem arcum esse rectae similiorem seu minus flexionis habere qui est portio circuli majoris; et curvedo considerari possit in portione indefinite parva, seu arcu quantumlibet exiguo, comprehenso duabus rectis ABC coincidentibus, commode curvedinem metiri poterimus magnitudine arcuum ejusdem similium duorum circulorum cumque ar-cubus crescentibus curvedines decrescant, poterimus assumere curvedines esse reciproce ut arcus similes, seu reciproce ut radios circulorumăquae hypothesis nec opus quidem habet probatione, potest enim fieri pro arbitrio, modo mensura semel sumta constanter servitur, in nostra enim potestate est dicere, quid per curvedinem circulorum intelligere velimus.

[*Fig. 4b*]

Si circulorum ALB, ACM, HND, ATS major minorem comprehendat et tangat, sintque diametri AB, AC, AD, AS continue proportionales, erunt anguli LAM, MAN, NAT, etiam continue proportionales, nam sive [*bricht ab*]

[*Dritter Ansatz*]

Et proinde si duae curvae se tangant, dicemus angulum contactus eundem esse qui duorum circulorum eandem cum curvis propositis curvedinem habentium. Circulorum autem curvedines metior radiis, ita ut sint reciproce velut radii, quia crescente radio vel circumferentia decrescit curvedo et quidem cum uniformiter crescant circumferentiae et decrescant curvedines ita ut omnia semper maneant similia, necesse est curvedines crescere in ratione radiorum decrescentium vel simplice, vel duplicata aut subduplicata, triplicata aut subtriplicata, quadruplicata aut subquadruplicata. Id est vel curvedines vel eorum quadrata aut cubos, aut quadrato-quadrata, etc., esse radiis aut eorum quadratis aut cubis, aut quadrato-quadratis, reciproce proportionales. Pono jam curvedines crescere verbi gratia ut quadrata decrescentium radiorum. Quid tunc vetabit me vocare curvedinem, id quod tu vocares curvedinis (numeris expressae) quadratum; neque enim hactenus illud nomen determinatam aliam habet significationem, quam quod secundum ipsam intelligimus curvam ipsam plus minusque differre a recta et in circulo quidem eam ubique eandem esse, et radiis uniformiter crescentibus, etiam uniformiter decrescere. Itaque radii apte pro curvedinis mensura sumi possunt.

[*Fig. 5*]

Videamus jam quomodo metiri possimus curvedinem in aliis curvis per curvedinem circulorum, idque exemplo declaremus. Exempli gratia sit parabola AC, quaeritur quae sit curvedo ejus in ipso vertice A, sit AB axis parabolae seu recta ad eam in vertice perpendicularis, constat quemlibet circulum cujus centrum sit in axe, circumferentia vero transit per verticem, ibi parabolam tangere sed alii quidem circuli quorum radii sunt majores cadunt extra parabolam, ut cirulus CAD centro B, et FAG centro E alii vero quarum radii minores cadunt intra parabolam, ut LAM centro H, quaeritur ergo centrum radii omnium intra curvam cadentium maximi, quod utique reperiri debet alicubi inter H et E. Id sit N, et centro N radio NA descriptus circulus PAQ, si vel minimum augeretur casurus esset extra curvam, cumque alii omnes majores minorem quam parabola, minores vero majorem habere curvedinem intelligantur, ipse habebit aequalem, curvedini parabolae, vel saltem ab ea inassignabiliter differentem, eodem modo quo angulus rectae ad curvam ab angulo rectae ad rectam tangentem differt quantitate quae minor est angulo quovis rectilineo assignabili, quae proinde habetur pro nulla. Ubi notandum est porro cum circulus quivis extra parabolam cadens, centrum in axe habens et per verticem ductus necessario curvam secet adhuc in duobus punctis, R et S et ita problema quo punctum occursus invenitur, quatuor habeat radices duas quidem aequales, in puncto contactus, et duas praeterea pro punctis R et S.

Patet in circulo PAQ intra curvam descriptibilium maximo, qui haberi potest pro omnium extra curvam pro parte cadentium minimo; intervallum AR vel AS fit infinite parvum, seu puncta R et S incidunt in punctum A. Quaeramus ergo punctum R quo circulus centro E radio EA descriptus parabolae occurrat extra verticem; perinde ac si radius EA esset datus; sed aequationem inventam accommodemus ad duas radices aequales, quia coincidere debent R et A, eoque ipso inveniemus pro minimo EA, radium NA desideratum.

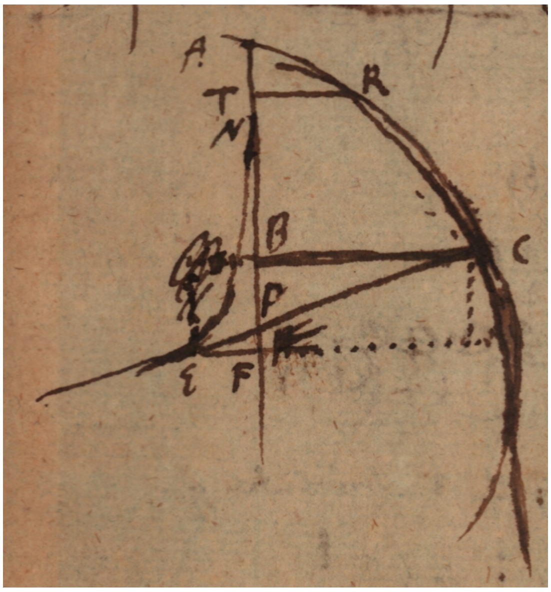
Sit in axem perpendicularis RT, quam vocemus y, et AT, x et AE radius circuli quaesitus sit e, parabolae autem semilatus rectum sit a. Ex natura circuli erit yy aequ. $2xe - xx$. Ex natura parabolae $2ax$ aequ. yy. Ergo per methodum tangentium meam erit $y : e - x :: y : a$ seu $e - x$ aequ. a. Seu quia in nostro casu, ubi R incidit in A, etiam T incidit in A, seu AT sive x evanescit, erit e aequ. a id est AN erit semilatus rectum parabolae. Quod etiam sine calculo praevideri potuisset, ex nota parabolae proprietate, quod VR ex axe educta in V, parabolam secante ad angulos rectos in R sit TV semper dimidio lateri recti aequalis unde cum tam R quam T incidet in A, V incidit in N posito NA esse semilatus rectum.

Generaliter sectionis conicae curvedinem in vertice ita reperiemus: $2ax \mp \frac{a}{q}xx$ aequ. yy et yy aequ. $2xe - xx$. Prioris aequatio differentialis est $adx \mp \frac{a}{q}xdx$ aequ. ydy seu $dx : dy :: y : a \mp \frac{a}{q}x$. Posterioris aequatio differentialis: ydy aequ. $edx - xdx$ seu $dx : dy :: y : e - x$. Ergo fit $a \mp \frac{a}{q}x$ aequ. $e - x$. Est autem x aequ. 0 in nostro casu; ergo erit a aequ. e. Seu in omni Sectione Conica ea est curvedo ad verticem quae est circuli cujus diameter est latus rectum. Isque circulus est circulorum sectionem conicam in vertice a parte concava tangentium maximus.

---

1 *Am Rand:* Nota placuit circulos ejusdem curvedinis vocari osculantes et angulus duarum curvarum ejusdem flexionis seu curvedinis dicetur non tantum angulus contactus, sed angulus o s c u l i . NB. revera sunt quatuor radices aequales in puncto osculi, ponimus enim circulum tangere curvam, dum aequamus curvarum differentiales. Et quia aequationem unde resultantem rursus ad duas radices aequales determinamus, eo ipso facimus eum bis tangere curvam, puncta autem contactuum coincidere.

Unde habemus theorema memorabile, si duarum Sectionum conicarum (XAY et RAS) cujuscunque speciei una alteram intus tangat in vertice communi A ea intra alteram cadet, cujus latus rectum est minus; nec refert an sint ejusdem naturae et speciei an vero diversae et nulla omnino hic ratio habetur lateris transversi. Quod fiat cum latus rectum duarum Sectionum Conicarum aequale est, postea dicemus.



[*Fig. 6*]

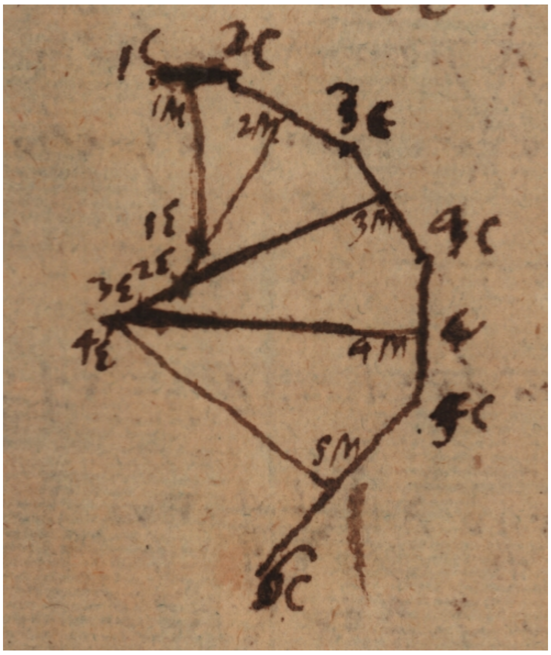
In genere quomodo curvedo puncti dati inveniri possit exemplo docebimus. Sit parabola AC quaeritur curvedo puncti dati C. id est E centrum circuli omnium, qui parabolam intus in puncto C tangere possunt, maximi. Ponatur circulus ille curvam non tantum tangere in C, sed et secare in R quaeraturque punctum intersectionis R. Quod cum incidat in C, in casu nostro, ideo problemate determinato ad duas radices aequales habebitur punctum E. Sint perpendiculares ad axem AB, nempe RT, CB, EF, et AT vel AB vocemus x, TR, vel $BC, y.$, AF $z.$ EF $v.$, EC, e parabolae latus rectum sit $2a$. Si ergo circulus centro E descriptus parabolam tangit EC secabit axem in P, ita ut fiat BP aequ. a. ut constat.

Ob triangula similia PBC, PFE erit EF seu v ad PF seu $z - x - a$, ut BC seu y ad BP seu a. Et x est aequ. $\dfrac{yy}{2a}$ ex natura parabolae. Erit ergo va aequ. $zy - \dfrac{y^3}{2a} - ya$

quam aequationem determinando ad duas radices aequales erit z aequ. $\dfrac{3yy}{2a}+a$ seu z aequ. $\dfrac{3}{2}\,x+a$. Ergo PF aequatur dimidiae AB vel AT, si quidem T et B seu R et C coincidunt. Ergo erit $v:\dfrac{1}{2}\,x::y:a$ seu v aequ. $\dfrac{xy}{2a}$.

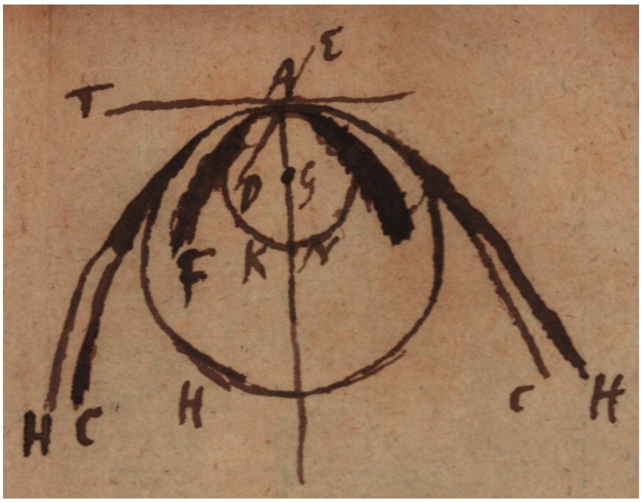
Et habetur constructio facilis, tantum enim in producta AP sumendo PF dimidiam ipsius AB et ex F educendo perpendicularem FE occurrentem ipsi CP in E, centro E radio EC descriptus circulus erit maximus tangentium in puncto C parabolae inscriptibilium, seu curvedinem ejus metietur. Quaeritur jam linea seu locus omnium centrorum curvedinis, seu punctorum E, nempe curva EE. Nempe pro $z-a$ sumatur r. erit x aequ. $\dfrac{2}{3}r$ et y aeq. $\dfrac{3av}{r}$ substituendo valores in aequatione ad parabolam $2ax$ aequ. yy ut tollantur x et y fiet $\dfrac{2}{3}ar$ aequ. $9\dfrac{aavv}{rr}$ seu $2r^3$ aequ. $27avv$. Et pro $\dfrac{27}{2}a$ sumendo b erit r^3 aequ. bvv quae est aequatio ad paraboloeidem cubico subquadraticam, seu ubi ordinatae EF sive v sunt inter se ut cuborum: ab abscissis NF (posito AN esse a) radices quadraticae, et latus rectum hujus paraboloidis erit $\dfrac{27}{2}a$.

1–3 z aequ. $\dfrac{3}{2}\,x+a$ … v aequ. $\dfrac{xy}{2a}$: Leibniz hat irrtümlich y^2 durch ax ersetzt statt durch $2ax$. Für z müsste sich $3x+a$ ergeben, PF ist gleich dem Doppelten von AB, also $v:2x::y:a$ und damit $v=\dfrac{2xy}{a}$. 7–13 Quaeritur … $\dfrac{27}{2}a$: Ausgehend von $z=x-a$, d. h. $r=3x$ u. $v=\dfrac{2xy}{a}$, erhält man aus $2ax=y^2$ die Gleichung $2a\dfrac{r}{3}=\dfrac{9a^2v^2}{4r^2}$ und somit $av^2=\dfrac{27}{8}r^3$ für die Orte der Mittelpunkte der Krümmungskreise.



[*Fig. 7*]

Facile etiam patet consideranti rectam CE perpendicularem ad curvam AC esse tangentem lineae centrorum EE. Cum enim supra dictum sit circulum centro $1E$ descriptum transire debere per tria curvae puncta inassignabiliter distantia $1C$. $2C$. $3C$. ideo tantum opus est ut ex rectarum $1C2C$; et $2C3C$. punctis mediis educantur perpendiculares, quae conccurrent in puncto $1E$, eodem modo invenietur punctum $2E$, et $3E$ et $4E$. Et ob distantias inassignabiles, erunt $1C2C$, et $2C3C$, et $3C4C$, etc. tangentes curvae CC. ad quae perpendiculares sunt $1M1E$, $2M2E$, $3M3E$, etc. et $1E2E$, $2E3E$, $3E4E$, tangentes curvae EE continuatae sunt ipsissimae $2M2E$, $3M3E$ etc. Ergo perpendiculares curvae CC sunt tangentes curvae EE. Et proinde linea centrorum curvedinis, est illa ipsa cujus evolutione describitur curva; ita si filum NAE rectum ab A ad N, inde flexum circa paraboloeidem rigidam supradictam EE, in eodem semper plano manens evolvatur, sive continue tensum moveatur ab ANE ad CE, curva a puncto A descripta erit parabola, et differentia rectarum CE et AN aequabitur arcui paraboloeidis cubico-subquadraticae NE.



[*Fig. 8*]

Caeterum circulus centro N in axe sumto radio AN dimidio latere recto descriptus quem ex praecedenti definitione pro mensura Curvedinis parabolae in vertice, sumsimus licet longo tractu parabola osculari videatur, longe majore scilicet, quam ullus alius circulus illic tangens revera tamen eam, non contingit nisi in uno puncto, neque enim ulla pars parabolae ulli arcui circulari congruere potest. Et quemadmodum directio curvae CA eadem censetur in A quae rectae tangentis TA. et curva CA aliam lineam DE secans eandem facere angulum censetur CAD quem recta tangens, nempe angulum TAD, neglecto angulo contactus TAC tanquam infinite parvo respectu anguli TAD. Ita curvedo seu flexio curvae CA in puncto A eadem censetur quae circuli HA centro N per A descripti intus tangentium maximi, et flexio curvae FA eadem quae circuli KA et angulus contactus duarum curvarum, nempe CAF, idem censebitur, qui duorum circulorum, nempe ang. HAK neglectis angulis contactuum, quos curvae faciunt cum circulis eandem flexinem habentibus tanquam infinite parvis. Nam angulus contactus CAH, curvae CA, cum suo circulo osculante HA, est infinite parvus respectu alterius anguli contactus ordinarii ut CAF vel CAK, quem curva cum alia linea ut FA vel KA facit quia est minor quovis angulo contactus circulari; si enim circuli HA radius AN utcunque parva accessione augeatur, circulus statim cadet extra curvam CA. Itaque angulus osculi, seu contactus CAH curvae cum circulo osculante sive eandem flexionem habente; est ad angulum contactus communem duorum circulorum ut HAK, quemadmodum angulus contactus rectae eandem cum curva directionem habentis seu tangentis, se habet ad angulum rectilineum. Et, si duae curvae sese osculentur, sive eandem in puncto contactus flexionem habeant, ut HA et CA, eundem habentes circulum maximum intus tangentem angulus osculi HAC etiam infinite parvus erit comparatione anguli contactus communis, ut CAF.

[*Fig. 9*]

Et quando hoc contingit, ut duae curvae sese osculentur, tunc lineae earum generatrices, quarum evolutione describuntur, sese tangunt ita ponamus curvas HA, et CA se osculari, seu eadem cum curvedine contingere in A, et CA generari evolutione curvae CPQ, HA evolutione curvae HPR et PA esse radium circuli centro P descripti, eandem cum duabus curvis curvedinem habentis, is utique erit perpendicularis ad curvas HA, et CA, et tangens ad curvas CPQ, HPR, ergo hae duae curvae sese etiam tangent. Quod si lineae CPQ et HPQ non sese tantum tangerent, sed et oscularentur, tunc lineae HA et CA sese plusquam oscularentur, seu quaerere punctum occursus A esset problema adhuc plures quam ante habens radices aequales. Et ita Anguli contactus varios habent gradus in infinitum, ita ut semper sequens sit inassignabilis respectu praecedentis, et proinde negligendus. Et pro puncto A (si osculum esset in P) posset quaeri Ellipsis (vel alia Conica aut etiam altior) secans curvam propositam pluribus punctis, quam in quibus circulus eam secare posset. Tandemque ponendo omnia puncta intersectionum coincidere, haberetur quasitae parabolae positio. Sed curvae illae altiores non habent uniformem flexionem ut Circulus; nec opus est, ut his nunc immoremur, sufficit enim aditum rei plane novae aperuisse. Utra autem curvarum sese osculantium cadat extra alteram invento contactu curvarum evolutione generantium et curvedinibus, quas habent, facile determinatur.

19 (41011). DE ANGULO CONTACTUS ET CURVEDINE ET DE NATURA QUANTITATIS
[1682 – 1684 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 19 Bl. 7–8. 1 Bog. 2°. 4 S.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1682–1684 belegt. **[noch]**

De Angulo Contactus et curvedine et de natura quantitatis

[*Fig. 1*]

Ut appareat quam parum perspecta sit ipsa natura quantitatis in universum controversiam (rem inter Geometras raram) ex ejus ignoratione profectam consideremus. De Angulis curvarum linearum disceptatum saepe est inter Geometras, occasionem praebente Euclide, qui dixit (recta AB circulum CDE tangente in puncto C) angulum contactus (BCE vel ACD) quem circulus facit cum recta tangente esse quovis rectilineo acuto minorem id est si ad idem punctum C rectae eidem AB occurrant circulus CDE rectam tangens, et alia recta CF fore angulum contactus ACD, minorem rectilineo ACF, quia recta necessario circulum secat in D et ita arcus CD cadit inter duas rectas. Idem Euclides notavit, angulum GCD quem recta GC per centrum circuli transiens facit cum arcu circuli CD, esse quovis angulo acuto GCF majorem. Quia scilicet recta CF cadit inter arcum DC, et rectam GC. Inde jam quaeri coeptum est an angulus contactus sit quantitas, et quomodo possit mensurari, aliaque multa quae in scriptis contrariis Jacobi Pelletarii et Christophori Clavii legi possunt.

Sed mirum non est haec illorum temporibus fuisse obscuriora, cum ne nunc quidem, ubi generales linearum proprietates magis innotuerunt, satis in clara luce posita sint. Cum vero res magni sit momenti ad ipsam curvedinis naturam intelligendam, operae pretium visum est eam rimari profundius.

Primum ergo definiam, non tam quid sit angulus, utrum scilicet sit inclinatio linearum, an quantitas puncti; quam quando duae lineae angulum facere dicantur, scilicet quando sibi occurrunt, nec tamen coincidunt. Et dicam angulum angulo majorem intelligi, exempli gratia angulum ACF, quem recta FC facit ad rectam AC angulo $AC[H]$ quem arcus HC facit ad rectam AC; quando sumtis punctis L in recta FC, et K in arcu HC utcunque seu indefinite propinquis puncto concursus C. semper reperitur portio KC cadere inter AC et LC. Jam cum quaeritur an angulus contactus quem curva facit cum recta tangente sit quantitas, prius explicandum est quid hic quantitas esse dicatur.

Et quidem si quantitas, illud esse dicitur, quod aliquo sensu dici potest esse alio minus, vel majus utique erit quantitas, secundum definitionem, quam attulimus, quam negare esset litigare de voce.

Sed ita punctum etiam erit quantitas respectu lineae, est enim utique in linea, et eodem jure quo angulum contactus diximus rectilineo minorem, poterit dici minus linea; unde etiam solet punctum dici in extensione minimum. Et, si omne quod alio minus est, quantitas est, etiam punctum quantitas erit. Potest etiam dici duo puncta esse aequalia inter se, congruunt enim. Verum cum alio sensu arctiore negetur punctum esse quantitatem, id unde fiat videamus, nimirum quia punctum caret partibus. Recte: An ergo angulus contactus habet partes? Videamus.

Duo circuli tangant rectam AB in C, unus minor CEH, alter major CMG. Videtur dici posse angulum contactus BCE componi ex duabus partibus, angulo contactus BCM (rectae cum circulo majore) et angulo contactus MCE (circulorum inter se). Largiamur haec sane, sed videamus etiam an non reperiatur strictior adhuc notio quantitatis, qua negata solet negari quantitas. Dico ergo ut dicatur aliqua res esse quantitas, seu habere quantitatem, non sufficere ut habeat partes eo quo diximus modo, sed etiam ut possit habere partem dimidiam, partem tertiam, etc. seu ut partes habeant rationem aliquam ad totum.

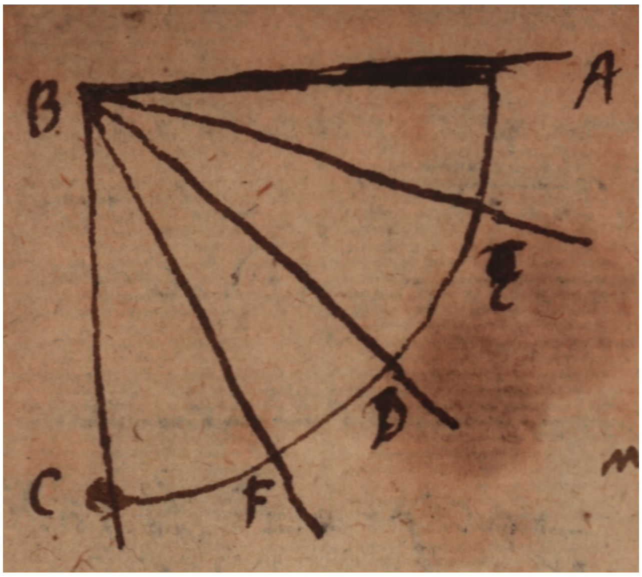
Quaero ergo quam rationem inter se habeant duo anguli contactus, circulorum cum recta, nempe *BCM* et *BCE*, et quonam ex principio possint mensurari? Quodsi nulla talis mensura possit reperiri, tunc dicemus etiam nec angulum contactus circuli cum recta (hoc quidem sensu) esse quantitatem. Ex quo apparet Andabatarum more hic pugnasse, qui ne notionem quidem quantitatis satis perspectam habebant.

Nimirum quaecunque ita quantitatem habere dicuntur, ut possint mensurari, ea debent esse homogenea inter se. Sed hic in novam incidimus difficultatem, nemo enim explicuit, quid sit duas quantitates homogeneas esse inter se. Dico ergo Homogenea esse, quae vel sunt similia, vel transformari possunt in similia. Ita linea recta et curva homogeneae sunt, et mensurabiles, ac comparabiles quoad mensuram, nam si curva extendatur in rectam, facta est rectae similis, et duae curvae in rectas extensae, similes inter se fiunt. Sed nunquam linea et superficies poterunt similes reddi; Nec angulus rectilineus transformari potest in angulum contactus.

[*Fig. 2*]

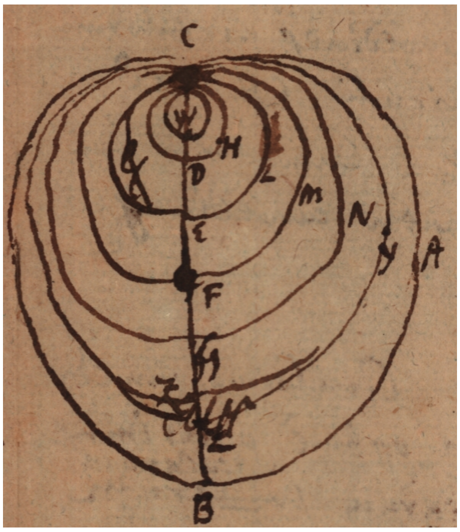
Hinc jam quod componitur ex partibus, quae non sunt homogeneae inter se, non dicitur quantitas exempli gratia extensum *GHDCEH* compositum area sphaerae *HDCE* et longitudine rectae *GH*, seu si pomum aliquod fingatur, cujus pediculus (μίσχος) *HG* sit linea, sive careat omni latitudine et crassitie; tale compositum ex stylo et pomo, non poterit dici quantitas. Tale plane compositum esset angulus *DHG* constans ex angulo recto PHG et angulo contactus DHP, qui si hi duo omnino inter se sunt heterogenei. At linea $GHEC$ est quantitas, nam partes rectae GH, et arcus HEC homogenea sunt.

Euclides aliam attulit notionem qua explicat an duae quantitates sint homogeneae, nimirum quando minus a majore auferendo quoties fieri potest, et residuum rursus a minore, et residuum secundum a primo, et tertium a secundo, et ita porro, tandem vel restat nihil; (quando scilicet duae quantitates habent mensuram communem) vel devenitur ad quantitatem data quavis minorem, quae proinde nihilo aequiparari potest. Quod perinde est ac si dixisset homogenea esse quae inter se rationem habent. Ita enim omnis ratio explicari potest, si ad congruentias revocetur. Sed simplicior est meus explicandi modus, ut enim congruentia est principium aequalitatis (aequalia enim sunt quae reddi possunt congrua) ita similitudo est principium homogeneitatis, seu comparabilitatis, ut comparabilia sint quae reddi possint similia. Similia autem esse inter se homogenea tam per se manifestum esse, quam congrua esse aequalia.



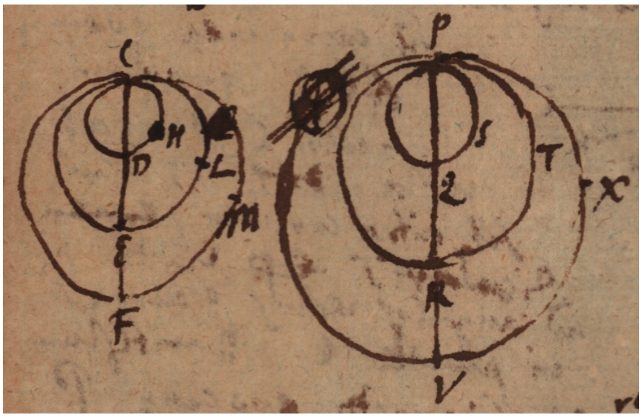
[*Fig. 3*]

Hinc patet jam angulos rectilineos posse haberi pro quantitatibus. Sunt enim semper similes, et cum generentur uniformiter ut arcus circulorum, hinc arcus inter se sunt ut anguli, et anguli ABE quantitatem metimur ratione arcus AE ad quadrantem AEC quae eadem est in magno aut parvo circulo.



[*Fig. 4*]

Addo et angulos contactuum circulares posse certo modo haberi pro quantitatibus. Sint circuli CDH, CLE, CMF, CNG, se tangentes in C et sint diametri CD. CE. CF. CG. Intelligi potest duos quosdam angulos contactus inaequales esse similes inter se; nempe sit CD ad CE ut CE ad CG erit angulus HCL similis angulo LCN, neque enim discerni possunt, nisi compraesentia.



[*Fig. 5*]

Et generaliter si circulus CHD et CLE se tangant, rursus PSQ et PTR et sint diametri CD, CE, inter se, ut diametri PQ, PR inter se erunt anguli HCL, et SPT similes. Et proinde crescentibus proportionaliter diametris etiam proportionaliter crescent anguli, sive si tres circuli circa CD. CE. CF descripti se tangant, et tres alii circa PQ.

PR. PV, sintque CD. CE. CF ipsis PQ. PR. PV proportionales, dictum est angulos HCL, HCM, LCM, respondentibus SPT, SPX, TPX esse similes, ergo erit HCL ad LCM ut SPT ad TPX.

Hinc si sint quatuor radii circulorum se tangentium continue proportionales CD, CE, CF, CG erunt tres anguli contactuum, circuli cujusque cum proximo, etiam continue proportionales, nempe HCL, LCM, MCN. et quinque assumtis radiis continue proportionalibus erunt quatuor anguli continue proportionales et ita porro. Possumus ergo radiorum incrementa assumere pro angulorum mensuris.

At inquies sunt tamen in hac aestimatione imperfectiones quaedam, nam nunquam ostendi potest unum angulum contactus duorum circulorum esse aequalem vel determinatae rationis, ad angulum contactus duorum aliorum circulorum prioribus inaequalium; nec unus angulus contactus, alteri dissimilis, ita transformari potest, ut fiat ei similis; neque ulla hic locum habet congruentia, sed solum similitudo inaequalium.

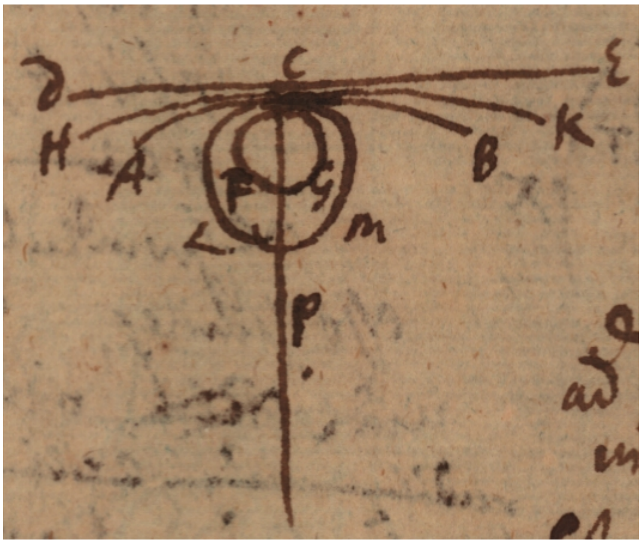
Huic imperfectioni occurremus deductione ad absurdum, eadem methodo qua utitur Archimedes in transformatione curvilineorum demonstranda; licet enim in angulis contactus nulla realis locum habeat transformatio locum tamen habet demonstratio, saltem ex hypothesi, quod detur angulo contactus circulari alius proximus aequalis.

17–159,1 alius | proximus *erg.* | aeqvalis *(1)* dissimilis. *(a)* Datur enim major *(b)* Hinc enim posito aliqvam in angulis istis concipi vel fingi posse aequalitatem seqvitur *(aa)* angulos *(aaa)* duos *(bbb)* duorum circulorum con *(ccc)* esse aeqvales *(ddd)* circuli cum proximo esse aeqvales si tres radii sint proportionales. *(aaaa)* Sit enim *(bbbb)* seu si circulorum CNG, CYZ, CAB radii CG, CZ, CB sint proportionales fore angulos NCY, YCA aeqvales *(bb)* duos angulos contactus *(aaa)* esse inter se *(aaaa)* ut radiorum *(aaaaa)* differentias et ideo si GZ, ZB sint aeqvales *(bbbbb)* differentias, *(aaaaaa)* seu si *(bbbbbb)* et ideo *(bbbb)* ut est GZ ad ZB ita *(aaaaa)* fore *(bbbbb)* fore inter se angulos proximos *(aaaaaa)* trium circu *(bbbbbb)* quos tres circuli faciunt primus ad secundum et secundus ad tertium sint proportionales fore *(bbb)* nempe angulos NCY YCA | fore *erg.* | aeqvales. Qvod sic demonstro, sit angulus WCH quantumlibet parvus, eique ex hypothesi possibile sit assumere alium aequalem continuum, HCL *(aaaa)* fiat ut radius CW ad radium CD, ita radius CD ad radium DE cumqve per supra demonstrata sit radius WCH ad radium *(bbbb)* ang. WCH ad ang. HCL, ut HCL ad LCM, *(aaaaa)* erunt ergo et hi aeqvales *(bbbbb)* erunt *(ccccc)* fiant jam radii innumeri continue proportionales, CW. CD. CE. CF etc. erunt erunt anguli *(aaaaaa)* aeqvales *(bbbbbb)* proportionales (per supra demonstrata) WCH, HCL, LCM, etc. Ergo *(aaaaaaa)* per *(bbbbbbb)* (ex hypothesi duorum primorum aeqvalium) aeqvales. Si jam sint CG, CZ, CB, proportionales tunc continuando progressionem CW. CD. CE. etc. | vel *erg.* | tot inscribentur inter GZ, quot inter Z et B. *(aaaaaaaa)* vel differentia ni *(bbbbbbbb)* nisi qvod unus vel duo *(cccccccc)* adeoqve *(aaaaaaaaa)* tam mult *(bbbbbbbbb)* angulus NCY, ex tot componetur angulis aeqvalibus, ex quot componitur angulus YCA, vel si paulo plures in uno qvam in altero, differentia non esse potest major angulo WCH semel aut bis sumto, ut consideranti patebit. Cumqve angulus WCH possit esse minor quovis dato, etiam differentia minor erit data, qvod est absurdum, nulla ergo inter arcus NCY et YCA differentia assignari potest, qvod erat demonstrandum *(2)* inde *L*

Inde enim theorema mirabile sequitur, quod si radii vel diametri sunt progressionis Geometricae, posito angulos contactuum esse progressionis Arithmeticae, et, si diametri sint ut numeri, angulos contactuum circularium fore ut logarithmos. Et cum recta haberi possit pro circulo diametri infinitae, erit angulus contactus rectae et circuli, ad angulum contactus duorum circulorum, ut logarithmus numeri infiniti (qui ipse infinitus est, certo tamen modo, nempe ut $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc.) ad logarithmum numeri finiti.

Quod autem diametri sint progressionis Geometricae, sint angulis existentibus progressionis arithmeticae, sic ostendo: sint anguli aequales tres WCH, HCL, LCM erunt quatuor radii CW, CD, CE, CF proportionis Geometricae continuae per demonstrata, continuetur progressio utcunque, ut sint radii CW, CD, CE, CF, CG, CZ, CB, etc. quotcunque, erunt etiam anguli WCH, HCL, LCM, MCN, NCY, YCA, etc. aequales. Cumque idem etiam verum sit utcunque exiguus assumtus sit angulus WCH, manifestum est omnes alios ex eo tanquam communi mensura conflatos intelligi posse, errore existente minore, quam ipse est angulus WCH, seu minore quovis dato. Si quis autem neget hypothesin, nempe angulo contactus dato, WCH apponi posse aequalem HCL. Erit ergo vel necessario major vel necessario minor; nam ob uniformitatem processionis, quia radiis proportione geometrica crescentibus, etiam anguli proportione geometrica procedunt necesse est, vel radiis crescentibus angulos semper crescere, et ita angulus HCL necessarie foret major angulo WCH; vel radiis crescentibus angulos semper decrescere, et ita HCL necessario foret minor quam WCH; vel denique posse esse aequales. Si angulus quivis WCH est major quam HCL, sequitur angulum WCH esse infinituplum radii. Nam indefiniti numero novi anguli contactus describi possunt inter WCH et HCL, quorum quilibet est major ipso WCH ex hypothesi, et aggregatum omnium aequatur ipsi HCL, ergo HCL majorem habebit ad WCH, rationem quavis data. Contra si WCH necessario major est quam HCL sequetur WCH infinituplum esse ipsius HCL. Utrumque est absurdum. Superest ergo ut possit angulo alius apponi aequalis, unde sequitur diametris crescentibus progressione Geometrica, angulos prioribus apponi aequales, seu totos angulos, (additis prioribus) crescere proportione Arithmetica.

Intelligi etiam hinc potest, etsi curvedines circulorum et anguli contactuum cognatam habeant naturam, tamen aliam esse rationem angulorum, quam curvedinum; sunt enim curvedines circulorum reciproce ut radii vel diametri, seu curvedo circuli CHD ad curvedinem circuli CLE est ut CE ad CD. Cum enim similis per omnia sit generatio duorum circulorum utique alia comparatio curvedinum esse non potest.



[*Fig. 6*]

Porro quoniam Circulorum curvedo ubique est uniformis, ea optime poterimus metiri curvedines aliarum linearum. Sit curva linea quaecunque ACB, quam in puncto C tangat recta DE, cui intra curvam ducta PC ad angulos rectos occurrat in puncto C. Manifestum est si puncto quocunque P tanquam centro in recta PC sumto, radio vero PC describatur circulus eum tangere curvam ACB in C. Unde circuli infiniti eandem curvam in eodem puncto tangere possunt, quaeritur ergo quisnam ex his eandem cum curva proposita curvedinem habere intelligi possit, seu ad mensurandam ejus curvedinem serviat. Quod ut inveniamus considerandum est, prout radius sumitur magnus circulum tangentem aut cadere intra curvam, ut FCG, aut extra curvam ut HCK et potest dici curvedo illius esse minor quam curvae, hujus vero major. Necesse est ergo dari unicum aliquem eorum, qui intra curvam describi possunt ultimum seu maximum, LCM cujus curvedo intelligi potest eadem quae curvae ipsius, quia si vel minimum augeatur, major fit. Itaque vel eadem erit, vel certe innassignabiliter (seu minore differentia quam quavis data) ab ea differet, quod pro eodem haberi potest. Cumque circulum quaerere qui curvam tangit, sit problema duas (minimum) habens radices aequales; ideo circulum tangentem quaerere maximum intra curvam erit problema tres habens radices aequales; si autem duae curvae sese tangant angulus contactus eorum idem intelligi potest cum quo angulos duorum circulorum eandem quam curvae, curvedinem habentium.

---

19 *Darunter:* Tantum

20 (41016). INITIA MATHEMATICA. DE QUANTITATE
[1680 – 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 22 Bl. 1–4. Bl. 1+4 1 Bog. 2°, Bl. 2 u. 3 bildeten ursprünglich einen zusammenhängenden Teil eines Bog. 2°, aus dem Bl. 2 (ca 1 Bl. 2°) u. Bl. 3 (ca oberes Viertel eines Bl. 2°) unregelmäßig herausgeschnitten wurden. Ca 6 S. Bl. 3 v° leer. Textfolge Bl. 1 r°, 2 v°, 3 r°, 1 v°, 4 r°, Text auf Bl. 2 r° u. 4 v° verworfen. Partieller Textverlust durch Papierabbrüche am unteren Rand, ergänzt nach Druck bei Gerhardt (= S. 168 Z. 20–22 unseres Textes). — Gedr.: Gerhardt, *Math. Schr.* 7, 1863, S. 29–35.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1680–1682 belegt. **[noch]**

Initia Mathematica

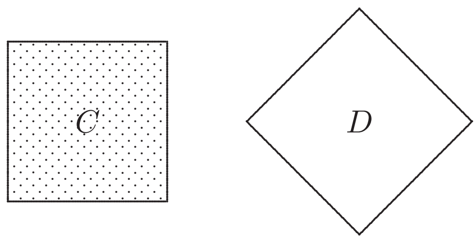
De quantitate

Determinantia sunt quae simul non nisi uni soli competunt.

[*Fig. 1*]

Ut duo extrema A. B. non nisi uni competunt rectae.

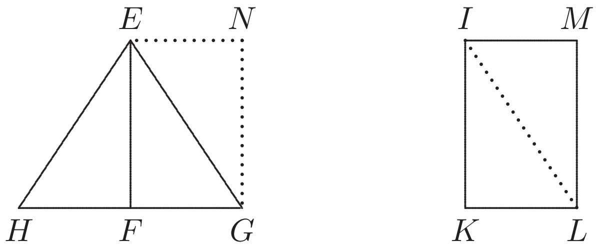
Coincidentia sunt; quae plane eadem sunt, tantumque denominatione differunt, ut via ab A ad B. a via a B ad A.



[*Fig. 2*]

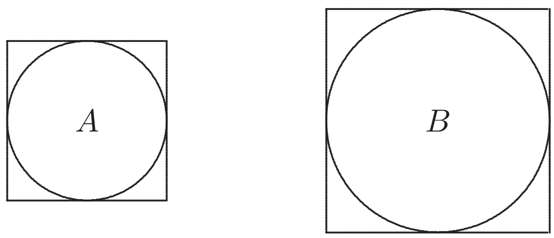
11 f. qvantitate | et Ratione *gestr.* | *(1)* Homogenea erunt *(2)* Congrua *(3)* Determinantia *L* 15–162,2 coincidentia sunt congrua *am Rand erg. u. gestr. L* 15 f. eadem sunt, *(1)* soloqve respectu *(2)* tantumqve denominatione *(a)* a respectu aliqvo *(b)* differunt *L*

C o n g r u a sunt, quae si diversa sunt, non nisi respectu ad externa discerni possunt, ut quadrata C et D. Nempe quod eodem tempore sunt in diverso loco vel situ; vel quod unum C est in materia aurea, alterum D in argentea. Ita congruunt libra auri et libra plumbi. Dies hodiernus et hesternus. Punctum quodlibet congruit cuilibet alteri; ut et instans instanti.



[*Fig. 3*]

A e q u a l i a sunt quae vel congruunt (exempli gratia triangula EFH. EFG. IKL. LMI. GNE item rectangula $EFGN$ et $IKLM$) vel per transformationem congrua reddi possunt. (Ut triangulum HEG rectangulo $IKLM$. quia parte ipsius HEG nempe EFH transposita in GNE, quod fieri potest quia congruunt, tunc HEG transformatum erit in $FGEN$ congruum ipsi $IKLM$. Itaque HEG et $IKLM$ aequalia dicentur.) Itaque definiri possunt A e q u a l i a , quae resolvi possunt in suas partes diversas singula singulis alterius congruentes.



[*Fig. 4*]

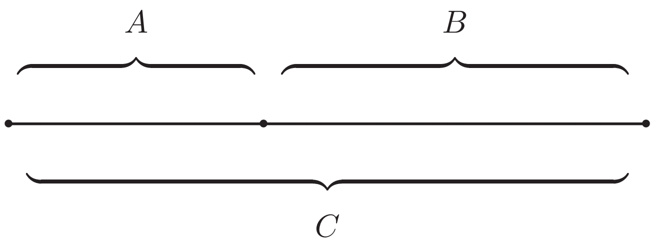
1–5 qvorum determinantia congruunt ipsa congruunt, et contra *am Rand erg. u. gestr. L*
4 plumbi. *(1)* Hora hodierna est *(2)* Dies *L* 7–11 Aeqvalia aeqvalibus eodem modo tractata exhibent aeqvalia. Non contra *am Rand erg. u. gestr. L* 8 item ... IKLM) *erg. L* 11–163,1 dicentur | *(1)* generalius *(2)* itaqve ... congruentes *erg.* | *(a)* Hom *(b)* |) *erg. Hrsg.* | S i m i l i a *L*

Similia sunt in quibus per se singulatim consideratis inveniri non potest quo discernantur ut duo sphaerae vel circuli (vel duo cubi aut duo quadrata perfecta) A. et B. Ut si solus oculus sine aliis membris fingatur nunc esse intra sphaeram A nunc intra sphaeram B. non poterit eas discernere; sed poterit si ambas simul spectet, vel si secum membra alia corporis aliamve mensuram introrsum afferat, quam nunc uni nunc alteri applicet. Itaque ad similia discernenda opus est vel compraesentia eorum inter se, vel tertii cum singulis successive. [At in dissimilibus aliqua partium proportio notata in uno, quae non notatur in altero sufficit ad discernendum sigillatim. De quo postea pluribus.]

Homogenea sunt, quae aut similia sunt aut similia transformatione reddi possunt.

[*Fig. 5*]

Duae rectae sunt homogeneae, quia similes; sed et recta et arcus circuli homogeneae res sunt, quia circulus in rectam extendi potest.



[*Fig. 6*]

1–6 similia similiter tractata (1) sunt (2) exhibent similia. qvae similiter determinantur similia sunt *am Rand erg. u. gestr. L* 1 singulatim *(1)* spectatis *(2)* consideratis *L* 2 discernantur, *(1)* ut si *(a)* qvis sit intra *(b)* modo *(c)* nunc intra sphaeram A nunc intra sphaeram B ducatur, ⟨sed⟩ non | ut *nicht gestr.* | duo *(2)* | ut duo sphaerae vel *erg.* | circuli (vel duo | cubi aut duo *erg.* | qvadrata *L* 3 sine … fingatur *erg. L* 6–8 itaqve … pluribus] *erg. L* 9 f. Aeqvalia sunt homogenea *am Rand erg. u. gestr. L* 12 f. homogeneae *(1)* sunt *(a)* linea *(b)* qvantitat *(c)* res *(2)* res *L* 13–164,1 potest. | *(1)* Genera *(2)* itaqve possumus etiam definire homogenea qvae conveniunt in re per se infinita cuius conceptus *erg. u. gestr.* | Si *L*

7 f. […]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

Si plura sint ut A vel B. et unum ut C. sintque in aliquo convenientia, et in his homogeneum insit ipsis A et B commune, omnia vero in ipsis homogenea, sint ipsi C communia; tunc illa plura dicentur partes integrantes unum illud dicetur totum.

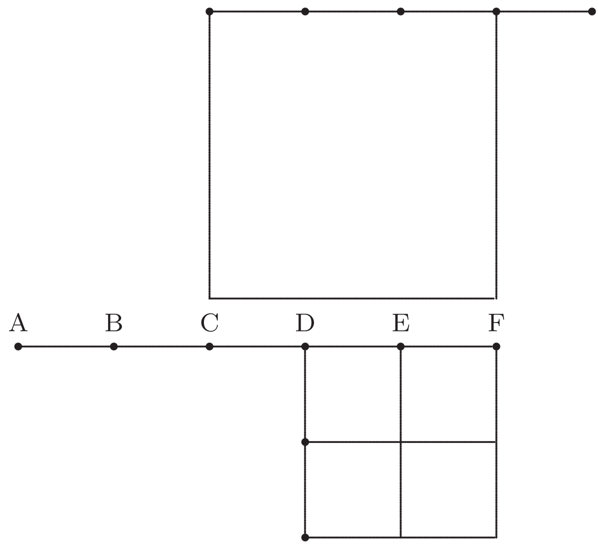
Homogenea etiam definire possumus, quae in aliquo conveniunt, et in quo conveniunt alia quae in uno quoque eorum indefinite assumi possunt.

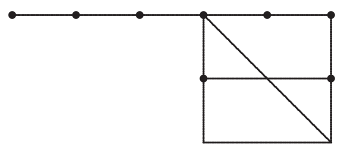
Minus est quod alterius (Majoris) parti aequale est. Quantitas est id quod rei competit, quatenus habet omnes suas partes, sive ob quod alteri (homogeneae cuicunque) aequalis major aut minor dici, sive comparari potest.

---

8 *Dazu, am unteren Rand:* [insere huc schedam adjectam aliunde abscissam sub signo ⊕

1 sintqve *(1)* A B C homogenea, et nihil homogeneum *(a)* ipsis sit *(aa)* in C *(bb)* in uno qvod non sit *(aaa)* vel in A vel in *(bbb)* in pluribus, plura autem ista nihil homogeneum ipsis commune habeant *(b)* tum plura inter se, tum cum uno Et rursus in uno qvoqve indefinitis modis *(2)* in aliqvo *L* 3–6 pars et totum homogenea sunt totum aeqvale omnibus partibus integrantibus, nam in totum transformantur conjunctione ergo coincidentia reddi possunt ergo congrua Homogenea qvorum unum altero nec maius nec minus est, ei aeqvalia sunt Maius majore est maius minore totum maius parte *am Rand erg. u. gestr. L* 6 aeqvale est *(1)* Numerus est homogeneum Unitatis.





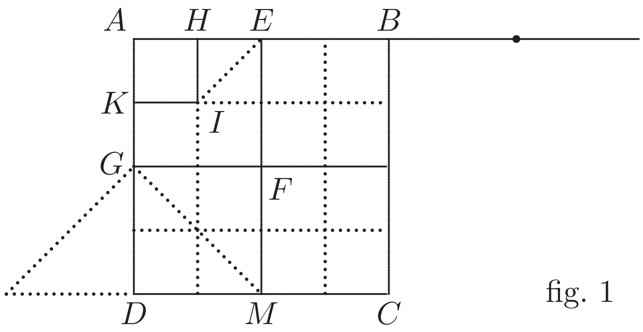


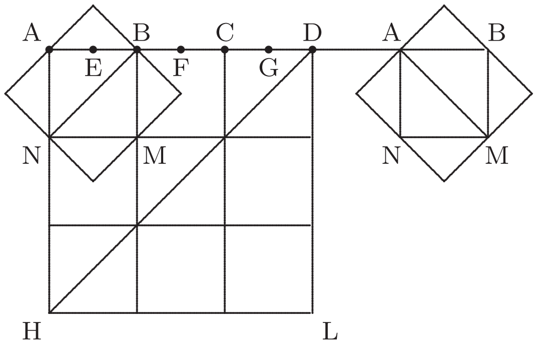
fig. 1

[*Fig. 7*]

Q u a n t i t a s rei, ex. gr. fig. 1. areae *ABCD* exprimitur per numerum ex. gr. quaternarium posito aliam rem, ut pedem quadratum *AEFG* sumtum esse pro Mensura

---

2 *Dazu am Rand Einfügungszeichen:* ⊕



Ut si AB sit unitas seu unus pes, erunt AC. BD. AD. numeri integri scilicet duo pedes, tres pedes. At AE erit numerus dimidius $(\frac{1}{2})$. *(a)* | et *nicht gestr.* | *(b)* Et AF $\frac{3}{2}$ et AG $\frac{5}{2}$ | similiter si qvadratum ABMN sit unitas nempe unus pes qvadratus erit *(aa)* triangulum ADH *(bb)* qvadratum ADLH, 9. et triangulum AHD erit $\frac{9}{2}$ seu 4 et $\frac{1}{2}$ *erg.* | eruntqve hi numeri fracti. Sed si ducatur recta *(aaa)* HD. diagonalis qvadrati AHLD *(bbb)* BN diagonalis qvadrati ABMN ei utiqve etiam respondebit numerus posito AB esse unum pedem [transferantur huc qvae alibi jam de hac numeri definitione scripsi.] Q v a n t i t a s est numerus indefinitus rem exprimens, | qvi definietur *erg.* | posito aliam qvandam ei homogeneam sumtam esse pro unitate seu Mensura primaria [vide de hac definitione qvae etiam alibi notavimus] *(2)* Q v a n t i t a s *L* 2 f. numerum | ex. gr. qvaternarium *erg.* | posito *L*

---

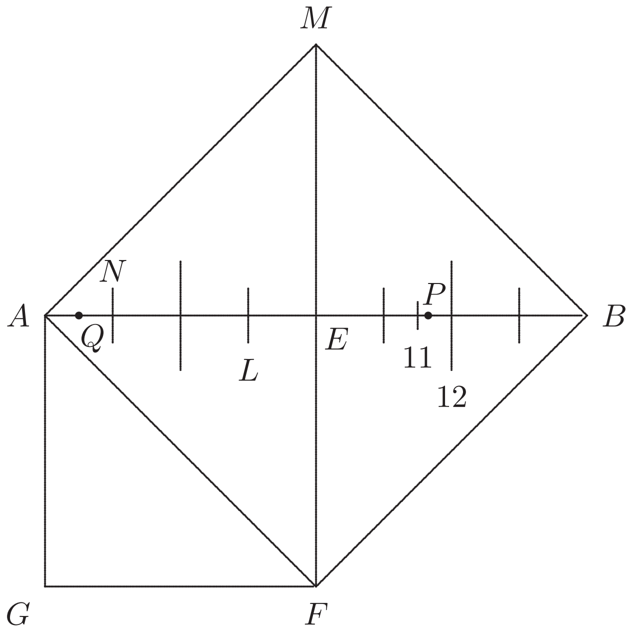
2 fig. 1.: Fig. 7.

primaria seu Unitate reali. Est enim $ABCD$ quatuor pedum quadratorum. Si vero alia assumeretur unitas AHIK quae est quadratum semipedis AH, quantitas areae $ABCD$ esset 16. Itaque pro eadem quantitate diversus proveniet numerus prout assumitur unitas. Et proinde quantitas non est numerus definitus, sed materiale numeri seu numerus indefinitus, assumta certa mensura definiendus. Quantitates ergo exprimuntur vel numeris definitis, ut 1. 2. vel indefinitis seu literis aliisve characteribus. $a. b. \odot.$ ☽.

Numerus est homogeneum Unitatis. Adeoque comparari cum unitate eique addi adimique potest. Estque vel aggregatum unitatum qui dicitur *integer*, ut 2. (seu $1 + 1$.), item 3. 4. (seu $2 + 1$ sive $1 + 1 + 1$) vel aggregatum partium aliquotarum unitatis, qui dicitur *Fractus*, ut si unitas ex. gr. pes AB sit divisus in quatuor partes quartas, tunc res ut linea BH quae habet tres quartas pedis seu ter $\frac{1}{4}$ ita exprimetur $\frac{3}{4}$ isque fractus interdum reduci potest ad integrum, ut AB sive 2 est quater AH seu 4 dimidiae sive $\frac{4}{2}$; vel denique numerus est alio quodam modo per relationem ad unitatem determinatus; quae quidem relationes possunt esse infinitae sed maxime solennes sunt per radices. Nempe sit numerus 4 (pro quadrato $ABCD$ fig. 1.) quaeritur ejus radix quadrata (seu latus AB.) id est numerus qui per se multiplicatus facit 4. Is numerus erit 2. Itaque cum 2.2 sive aa sit 4. $\sqrt{4}$ ($\sqrt{aa}$) est 2 (a). Atque hoc casu radix reduci potest ad numerum communem seu *rationalem*. Sed interdum haec reductio non succedit. Ex. gr. quaeritur numerus qui per se ipsum multiplicatus faciat 2. Is neque est integer, (alioqui enim cum necessario sit minor quam 2 foret, unitas, at unitas per se multiplicata facit 1.) neque est fractus, quia omnis fractus per se ipsum multiplicatus producit alium fractum, ut

1 primaria *erg. L* 1 Est ... qvadratorum *erg. L* 6 f. a. b. $\odot$. ☽. *(1)* Hinc aeqvalia sunt *(2)* Numerus *L* 9 f. qvi dicitur *Fractus* *erg. L* 10 in *(1)* tres partes tertias, *(a)* tunc et res alicuius qvantitatis *(b)* tunc res, qvae foret duas tertias *(2)* qvatuor *L* 11 ut ... habet *erg. L* 11 f. isqve | fractus *erg.* | interdum ... integrum, *(1)* ut $\frac{6}{3}$ ($\frac{8}{4}$) idem est qvod a seu 2. qvoniam a.3 est 6 seu ab est e. *(2)* ut AB *(aa)* est 4 AH *(bb)* siue 2 ... siue $\frac{4}{2}$ *erg. L* 13 est *(1)* aliqvid homogeneum unitati alio qvodam modo determinatum *(2)* alio *L* 14 per *(1)* signa radicalia *(2)* radices *L* 15 numerus 4 *(1)* (ABCD) *(2)* | (pro ... fig. 1.) *erg.* | qvaeritur *L* 16 f. cum ... sit 4. *erg. L*

$\frac{3}{2}$ producit $\frac{9}{4}$ sive $2+\frac{1}{4}$. Itaque non est numerus nisi irrationalis ut vocant, sive potius ineffabilis, ἄλογος surdus, qui sic scribitur $\sqrt{2}$ vel $\sqrt{q}$, 2. vel $\sqrt[2]{2}$ id est radix quadratica de 2. Posito enim hunc numerum esse, y: tunc ejus quadratum yy sive y^2 erit 2.



[*Fig. 8*]

Et ut appareat hunc numerum esse in rerum natura, in fig. 2. ducatur AF diagonalis quadrati $AEFG$. Sit AG 1. nempe unus pes, cujus quadratum est 1 (nempe ipsum spatium $AEFG$ seu unus pes quadratus,) tunc ipsa AF quam vocabimus y erit $\sqrt{2}$. Nam ejus quadratum yy. $AFBM$ est 2, (nempe duplus pes quadratus). Est enim quadratum $AFBM$ duplum quadrati $AEFG$. Nam dimidium ejus triangulum AFB. toti

2 ἄλογος surdus, *erg. L* 5 in fig. 2 *erg. L* 9 qvadratum | AFLM *ändert Hrsg.* | duplum *L*

1 Itaque: Die Folgerung ist nicht ausreichend begründet, es müsste noch (wie im antiken Widerspruchsbeweis, vgl. ARISTOTELES, *Analytica priora*, 41a, 26–27, sowie EUKLEIDES, *Elementa*, X, 117) gezeigt werden, dass es keinen solchen Bruch gibt, dessen Quadrat auf die Zahl 2 reduziert werden kann.
5 fig. 2.: Fig. 8.

$AEFG$ aequale est. Cum ergo numerum definierimus homogeneum unitati, utique debet aliquis esse numerus cujus ea sit relatio ad unitatem, quae est rectae AF ad rectam AG, sive posito AG esse 1. debet esse numerus quo exprimatur quantitas ipsius AF qui dicetur esse $\sqrt{2}$. AB autem erit 2.

Itaque si sit S c a l a AB. fig. 2 divisa in partes aequales duas, quatuor, octo, sedecim etc. atque ita porro subdivisa quantum libuerit, huic scalae utique recta quaelibet ipsa scala minor applicari, adeoque numeris explicari potest, et quidem vel exacte vel propemodum E x a c t e quidem, quando scilicet incipiens ab initio scalae A, incidit in aliquod punctum divisionis L ut AL cujus proinde numerus in partibus scalae habetur ex. gr. AE existente 1. tunc AL erit $\dfrac{3}{4}$ et tunc recta AL est scalae commensurabilis; id est datur earum mensura communis seu recta AN $\left(\dfrac{1}{4}\right)$ quae repetita tam scalam AB quam rectam AL efficit seu m e t i t u r. P r o p e m o d u m vero numeris recta scalae applicata explicari potest, quando non incidit in punctum divisionis, quantum vis scala subdividatur et quocunque modo instituatur divisio. Et talis recta ut AF est cum scala incommensurabilis, adeoque numeris rationalibus sine effabilibus explicari nequit, nisi propemodum. Quoniam tamen necesse est, ut AF scalae applicata seu translata in AP. incidat saltem inter duo divisionis puncta uti certe incidit inter 11 et 12, posito scalam AB in sedecim partes aequales esse divisam, quarum quaelibet est pars octava unitatis vel pedis AE. Hinc si AG vel AE latus quadrati sit pes, tunc diagonalis AF vel AP incidet inter $\dfrac{12}{8}$ (sive $\dfrac{3}{2}$) et $\dfrac{11}{8}$ pedis, adeoque si ⟨ipsi AF sive $\sqrt{2}$ vel y attribuas $\dfrac{3}{2}$, nimium, si $\dfrac{11}{8}$, parum tribues (nam quadratum a $\dfrac{3}{2}$ est $\dfrac{9}{4}$ id est plus quam $\dfrac{8}{4}$ seu 2 seu yy, et quadratum ab $\dfrac{11}{8}$ est $\dfrac{121}{64}$ quod est minus quam $\dfrac{128}{64}$ seu 2), error tamen semper⟩ minor una parte minima, in quam hoc loco unitas in scala divisa est, id est minor quam $\dfrac{1}{8}$. Et

4 esse $\sqrt{2}$. *(1)* Eodem modo AL autem erit 2. Prodeunt Quantitates (ut et numeri) vel ex simplicioribus compositae per Genesin vel contra ex compositis simpliciores per analysin. *(2)* AB autem *L*
5 fig. 2 *erg. L* 7 f. vel propemodum E x a c t e qvidem *erg. L* 14 et ... divisio *erg. L* 16 ut *(1)* cadat scalae applicata |tum *erg.*| *(2)* AF scalae applicata *(a)* tum, A manente F incidat inter duo puncta divisionis *(b)* seu *L* 19 diagonalis *erg. L* 23 unitas in *erg. L*

$\frac{1}{8}$ sive AQ erit propemodum mensura communis unitatis sive etiam scalae, et ipsius AF. Et quanto magis subdivisa erit scala eo minor erit error adeoque erit tam parvus quam quis velit, sive minor reddi potest quovis errore assignabili. Itaque AF et AG etsi sint incommensurabiles, sunt tamen homogeneae, seu comparabiles, et inveniri potest mensura communis tam prope exacta ut error seu residuum sit minus data quantitate. Atque hoc est fundamentum appropinquationum, et computandarum Tabularum, itemque Logisticae binariae vel sexagenariae vel etiam decimalis, si quidem scala in decem partes dividatur, et harum quaelibet in alias decem subdividatur, idque quantumlibet continuetur. Etsi enim scalae instrumentis satis subdividi non semper possint, mente tamen sive calculo ad summam exactitudinem, quae quidem in praxi optari possit, procedi potest. Quod quomodo fiat infra apparebit.

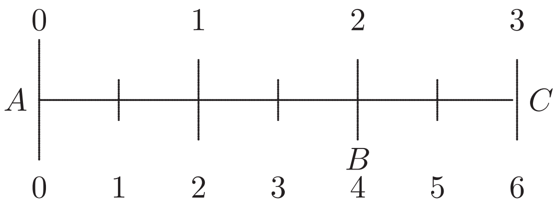
[*Verworfener Abschnitt*]

Ratio est homogeneum aequalitatis, adeoque si aequalitas spectetur ut unitas, quia tunc consequens in antecedente non nisi semel continetur, ratio erit numerus qui oritur ex divisione antecedentis per consequens, vel numerus quo exprimeretur antecedens, si consequens esset mensura primaria per quam caetera exprimi deberent sive Unitas. Etsi fortasse alia nunc unitas seu mensura primaria assumta sit. Ita ratio trium pedum ad pedem est tripla rationis quam habet pes unus ad seipsum, seu tripla unitatis; id est ternarius. Nam et si pes sit 1. tres pedes erunt 3. Unitas autem est ratio rei ad seipsam vel ad aequalem, cum una quantitais in altera non nisi semel contineatur. Sed Ratio unius pedis ad tres, id est ad unum tripodem (sumtis tribus pedibus pro unitate) est subtripla, seu tertia pars rationis quam habet tripus ad seipsum, seu tetia pars unitatis. Nam et si tripus esset 1. pes foret $\frac{1}{3}$ scilicet unitatis nempe tripodis. Ratio pedis ad dipodem est subdupla seu dimidia rationis quam habet dipus ad seipsum, id est unitatis. Ergo est

3 reddi potest *erg. L* 4 homogeneae, *(1)* id est *(2)* | seu comparabiles, et *erg.* | inveniri *L*
13 *(1)* Ratio Rei *(a)* ad aliam *(b)* (Antecedentis) ad aliam Homogeneam (conseqventem) est numerus qvo exprimeretur antecedens; posito conseqvens esse unitatem. | Etsi fortasse alia nunc unitas assumta sit *erg.* | [*(2)* Ratio *(3)* Ratio *L* 14 qvia ... continetur, *erg. L* 17 seu mensura primaria *erg. L* 19 f. Nam ... cum *(1)* una contineri in altera non nisi semel *(2)* una ... contineatur *erg. L*
22 f. Nam ... tripodis *erg. L*

$\frac{1}{2}$. Nam et si dipus esset 1. pes foret $\frac{1}{2}$ scilicet unitatis nempe dipodis. Et ratio trium pedum ad dipodem seu 3 ad 2 est ter ratio unius pedis ad dipodem seu tripla subdupla, sive tres dimidiae sive $\frac{3}{2}$. Adeoque si dipus esset 1. tunc tres pedes forent tres dimidiae seu $\frac{3}{2}$ unius dipodis.

Proportionalia sunt quorum eadem est ratio.



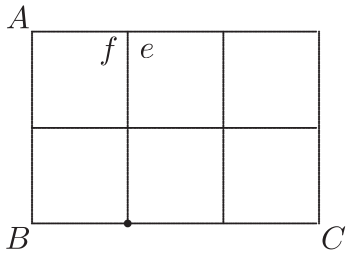
[*Fig. 8a*]

Ut numeri 3 ad 2 eadem est quae numeri 6 ad 4. Est enim rectae AC ad rectam BC eadem semper ratio, adeoque et numerorum quibus AC et BC exprimuntur eadem erit ratio licet diversa assumta sit unitas.

[*Fortsetzung des gültigen Textes*]

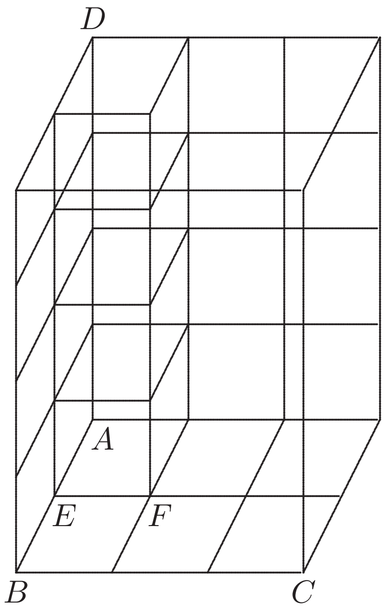
Dimensiones sunt quantitates diversae (interdum heterogeneae[)], quae in se invicem duci intelliguntur, ita scilicet ut una tota applicetur cuilibet parti alterius.

1 Nam ... dipodis *erg. L* 3–5 sive $\frac{3}{2}$. | adeoqve ... dipodis *erg.* | *(1)* Unde patet rationem esse | qvantitatem seu *erg.* | numerum seu antecedentem divisum per conseqventem.] Qvae omnia constant, modo ponamus rationem qvantitatis ad seipsam, seu rationem aeqvalium esse unitatem, qvia idem in seipso continetur semel, et eodem posito *(2)* Proportionalia *L* 12 duci *(1)*, *(a)* id est ita sibi applicari *(b)* id *(2)* intelliguntur *L* 13–171,2 alterius. *(1)* ita ex ductu latitudinis AB in longitudinem BC fit area (servato eodem semper angulo *(2)* Exempli *L*



[*Fig. 9*]

Exempli causa ex ductu latitudinis AB duorum pollicum in longitudinem BC trium pollicum linearium (ita ut anguli A. B. C. e. f semper congruant seu iidem sint, qui dicuntur recti, qui est simplicissimus lineam rectam in rectam ducendi modus) fit rectangulum ABC. quod est duarum dimensionum, et sex pollicum sed quadratorum.



[*Fig. 10*]

Ex ductu longitudinis CB, 2. latitudinis BA, 3 altitudinis AD, 4 in se invicem fit rectangulum solidum $CBAD$ quod est trium dimensionum, seu viginti quatuor pollicum cubicorum ($2 \frown$ in $3 \frown$ in 4). Cuilibet enim ex baseos ABC sex quadratillis seu pollicibus

5 qvod ... sex *(1)* pedum *(2)* pollicum sed qvadratorum *erg.* *L* 7 in se invicem *erg.* *L* 8 qvatuor *(1)* pedum *(2)* pollicum *L* 9–172,1 seu *(1)* pedibus *(2)* pollicibus qvadratis, *(a)* insistunt qvatuor cubuli *(b)* (ut *L*

quadratis, (ut quadratillo AEF) insistunt quatuor cubuli seu unitates cubicae sive pollices cubici (nempe columna seu prisma $FEAD$ ex quatuor pollicibus cubicis sibi impositis constans[)].

Nec vero putandum ut hactenus crediderunt, dimensionem spectari in solis figuris, adeoque rem altioris gradus seu plurium dimensionum quam trium dimensionum esse imaginariam. Etsi enim spatium per se habeat tantum tres dimensiones, corpus tamen potest habere multo plures, ex. g. duo corpora unum aureum alterum argenteum habent praeter considerationem molis seu spatii, quod occupant, etiam considerationem gravitatis specificae, quae in qualibet parte molis spectatur. Ita gravitate specifica pollici cubici argenti posita ut 55 auri ut 99 unciarum (ea enim fere proportio est) erit pondus solidi $CBAD$ si aureum sit $2 \frown 3 \frown 4 \frown 99$ (seu $24 \frown 99$ sive) 2376 unciarum; sin argenteum sit solidum erit unciarum $2 \frown 3 \frown 4 \frown 55$ seu $(24 \frown 55)$ 1320 unciarum. Itaque pondera ista sunt quatuor dimensionum; ex ductu scilicet molis seu spatii tridimensi, in corpus ipsum seu pondus. Potest etiam praeter pondus mortuum accedere impetus ex descensu gravis aliquamdiu continuatus; unde nascitur percussio quae est quinque dimensionum, ex mole tridimensa, corporis ponderositate et tempore lapsus in se invicem ductis. Ita si una ulna quadrata panni valeat tres nummos imperiales duae ulnae valebunt bis tres imperiales seu sex. Et pretium hoc est duarum dimensionum, quod si idem pannus sit quatuor ulnas latus, erit pretium ejus 2.3.4 seu 24 imperialium, adeoque trium dimensionum ex ductu in se invicem longitudinis, latitudinis, pretiositatis id est pretiositatis seu bonitatis intrinsecae in quantitatem seu bonitatem extrinsecam. Ita pretium aggeris est quatuor dimensionum, spectatur enim in eo longitudo quae sit pedum 100. latitudo 12. altitudo 20, et firmitas seu bonitas intrinseca sit talis, ut pes cubicus valeat decem nummos. Erit valor ejus $100. \frown 12. \frown 20. \frown 10.$ nummorum seu 24000[0] ut proinde ductus dimensionis in dimensionem, sit exhibitio realis, multiplicationis mentalis.

Ex his definitionibus sequentia Axiomata duci possunt.

Quae iisdem (vel coincidentibus) determinantur (eodem scilicet modo) coincidunt. Ut coincidunt duae rectae, quarum duo extrema coincidunt.

1 f. sive *(1)* pedes *(2)* pollices *L* 2 quatuor | pedibus *ändert Hrsg.* | cubicis *L* 5 altioris gradus seu *erg. L* 9 f. ita *(1)* | si *nicht gestr.* | pes cubicus auri esset *(2)* gravitate specifica | pollici cubici *erg.* | argenti posita *(a)* 99 *(aa)* argenti *(bb)* auri 55 Habe *(b)* ut 55 *L* 10 unciarum *(1)* Et ita pondus pedis vel pollicis cubici aurei sit 99. | vel unciarum *erg.* | argentei 55, erit *(2)* (ea enim fere *(a)* proport *(b)* ratio est *(c)* proportio *L* 16 tridimensa, *(1)* pondere *(2)* corporis *L* 23 firmitas seu *erg. L* 27 f. Qvae iisdem ... extrema coincidunt *erg. L*

Quae coincidunt ea multo magis congruunt. Seu idem congruit sibi.

Quae congruentibus determinantur (eodem scilicet modo) congrua sunt. Ut quia triangulum datur, datis tribus lateribus, hinc si tria trianguli latera respondentia respondentibus congruant congruent triangula.

Quae congruunt ea multo magis aequalia sunt.

Aequalia eadem sumta mensura eodem numero exprimuntur; sive ejusdem sunt quantitatis, cum enim inter se congrua reddi possint, eidem mensurae primariae seu unitati eodem modo repetitae, eodem modo congruere poterunt. Unde idem prodit numerus.

Aequalia eodem modo secundum quantitatem tractata exhibent aequalia.

Similia similiter tractata exhibent similia, ideo Quae similiter similibus determinantur similia sunt. Determinari autem intelligo iis conditionibus designari quae simul non nisi in unum cadere possunt: Itaque quod ita determinatur, id plane exhibetur.

Similia et aequalia simul, sunt congrua. Nihil enim superest quo discerni possint, sive sigillatim sive simul spectentur nisi referantur ad externa; ut locum et tempus aliaque accidentia.

Ratio non est nisi inter homogenea. Patet ex definitione.

Quorum unum altero majus minus aut aequale est homogenea sunt. De aequalibus manifestum est, possunt enim congrua reddi, adeoque et similia. Minus quoque majori homogeneum, quia ejus parti aequale adeoque homogeneum est, pars autem est homogenea toti. Atque ideo non dicemus lineam minorem superficie, aut ejus partem, nec angulum contactus, partem rectilinei aut eo minorem. Si quis tamen partem latius sumat, pro omni quod quantitatem habet, et quantitatem habenti inest, poterit dicere lineam esse superficie minorem.

Pars minor est toto. Est enim aequalis parti ejus, nempe sibi ipsi.

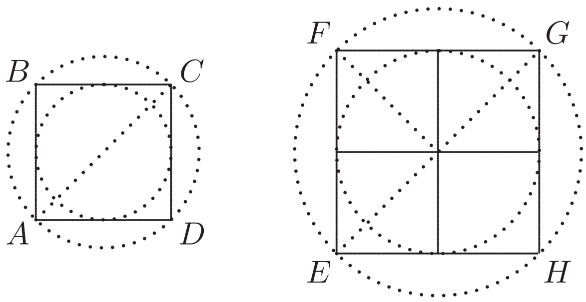
Totum est aequale omnibus partibus cointegrantibus. Coincidunt enim; vel certe si conjungantur quia totum componunt coincidentia reddentur. Adeoque et congruent.

1–4 Seu ... triangula *erg.* *L* 5 f. sunt *(1)* Aeqvalia eodem modo | secundum qvantitatem *erg.* | tractata exhibent aeqvalia *(2)* Aeqvalia *L* 7 primariae seu unitati *erg.* *L* 8 modo *(1)* congruent *(2)* repetitae *L* 11 sunt *(1)*; seqvitur ex praecedenti *(2)*. Determinari *L* 14–17 spectentur | nisi ... accidentia *erg.* | . | Ratio ... definitione *erg.* | Qvorum *L* 22 dicere *(1)* partem. *(2)* angulum contactus rectilineo minorem. *(3)* lineam *L* 25 partibus *(1)* integrantibus *(2)* cointegrantibus *L*
26 conjungantur | qvia totum componunt *erg.* | coincidentia *(1)* reddi possunt *(2)* reddentur *L*
26–174,1 congruent *(1)* Maius majore est ⟨nam⟩ *(2)* pars *L*

Pars partis est pars totius. Adeoque minus minore est minus majore. Nam parti minoris aequale est; ergo et parti majoris, parti scilicet partis majoris.

[*Verworfener Abschnitt*]

Homologorum pro uno similium assumtorum eadem inter se ratione.

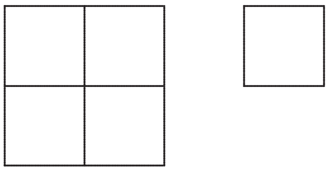


[*Fig. 10a*]

Exempli gratia similia sunt quadrata $ABCD$ et $EFGH$. In priore quadrato habemus latus AB. Ambitum $ABCDA$ diagonalem AC. Circulum inscriptum. Circuli circumscripti circumferentiam. Aream quadrati. Aream circuli. In altero quadrato habemus respondentia: Latus EF. Diagonalem EG. Ambitum $EFGHE$. Circulum circumscriptum. Ejus aream. Quadrati ipsius aream. Possemus et utrobique Circulos inscribere, aliaque multa peragere. Hinc dico esse latus in uno ad suum diagonalem, in ea ratione in qua latus alterum etiam est ad suum diagonalem. Nam alioqui is qui in uno quadrato erit, et postea sigillatim in altero posset ea discernere, notans in uno rationem illam lateris et diagonalis esse ab ea quae est in alio diversam. Nos autem definivimus similia, quae sigillatim spectata discerni non possunt. Eandem ob causam peripheria circuli unius est ad suam diametrum, ut peripheria Circuli alterius est ad suam. Item area circuli unius est ad suae diametri quadratum; ut area circuli alterius etiam est ad suae diametri quadratum. Hinc inferre statim possemus peripherias esse inter se ut diametros;

2–4 majoris. *(1)* Qvae in similibus homologa sunt siue sibi respondentia ea sunt proportionalia *(2)* Homologorum pro uno *(a)* simili inter se, eadem est qvae homologorum seu respondentium pro alio simili *(b)* similium *L* 6 f. EFGH *(1)* itaqve ⟨—⟩ sunt ab una parte *(2)* In priore qvadrato *(a)* habentur: *(aa)* AB *(bb)* latus AB *(aaa)* peripheria qvad *(bbb)* ambitus ABCDA diagonalis *(b)* habemus *L* 8 f. habemus *(1)* eadem omnia *(2)* respondentia *L* 13 f. illam |lateris et diagonalis *erg.*| esse *(1)* diversam qvam in alio *(2)* ab *L* et circulos ut quadrata diametrorum. Et eodem modo Sphaeras ut diametrorum Cubos et triangulorum similium latera homologa esse proportionalia, si demonstratum jam esset rationum permutatio. Itaque ope hujus axiomatis pleraque theoremata Geometrica ab aliis magno molimine comprobata, nullo negotio demonstrantur, et novum habemus principium inveniendi. Cum alias circulos esse ut quadrata diametrorum, et sphaeras ut cubos, Euclides per deductionem ad absurdum demonstrare sit coactus Archimedes autem sine demonstratione assumserit, similium figurarum centra gravitatis esse similiter posita. Quae omnia ex nostra definitione similitudinis, quae hactenus nulli quod sciam in mentem venit sponte nascuntur. Idem principium valet non in Geometria tantum, sed et in aliis omnibus, ubi quantitas et qualitas conjunguntur.

Heterogenea autem non debent comparari inter se, neque enim ratio nisi inter homogenea est; alioqui oriretur absurdum. Exempli causa si latus AB esset ad sui quadrati $ABCD$ aream, ut alterum latus EF est ad aream quadrati sui $EFGH$, tunc (per ea quae suo loco demonstrabuntur) permutando forent latera AB et EF, inter se, ut quadrata $ABCD$, et $EFGH$.



[*Fig. 10b*]

1 Et ... Cubos *erg. L* 3–10 itaqve ... principium *(1)* demonstrandi *(2)* inveniendi ... principium *(a)* non in Geometria tantum, sed et in aliis omnibus, ubi qvantitas et forma spectantur, usum habet *(b)* valet ... qvalitas conjunguntur *erg. L*

6–8 Euclides ... posita: Vgl. EUKLEIDES, *Elementa*, XII, 2 u. 18; ARCHIMEDES, *De planorum aequilibriis*, I, post. 5.

Quod est absurdum, nam si exempli causa EF est duplum ipsius AB tunc quadratum ab EF est quadrati ab AB non duplum sed quadruplum. Et cubus cubi duplo longioris non duplus sed octuplus. Idem est in circulis et sphaeris, quod in quadratis et cubis.

Aequimultiplorum eadem ratio est quae simplorum, patet ex his quae diximus ad definitionem proportionalium. Nam sex pedum ad tres eadem ratio quae duorum tripodum ad unum. Quoniam idem est tripus quod tres pedes. Eorundem autem eadem ratio est, et si diversimode enuntientur, prout alia atque alia unitas seu Mensura primaria assumitur.

Aequidivisorum eadem ratio est, quae integrorum. Nam integra sunt aequimultipla aequidivisorum.

Hinc simul aequimultiplorum et aequidivisorum eadem ratio est. Sint duo A et B. erit dupli A ad duplum B eadem ratio quae A ad B. Item tertiae partis A ad tertiam partem B, eadem ratio quae A ad B, et duarum tertiarum partis A ad duas tertias ipsius B eadem ratio quae A ad B.

Ratio rationi componitur, si, antecedens ducatur in antecedentem, consequens in consequentem, ratio factorum dicitur composita simplicium, ita ratio areae rectangulae unius ad aliam est in ratione composita longitudinum et latitudinum. Hinc rationum compositio est rationis per rationem multiplicatio.

R a t i o c o m p o s i t a dicitur A ad C ex ratione A ad B et B ad C. Hinc ratio facti ex ductu A in B, ad factum ex ductu B in C, composita est ex rationibus A ad B et B ad C. Nam ratio facti ex A in B est ad factum ex B in C, ut A ad C (quia aequimultipla sunt, A in B et B in C ergo eandem habent rationem quam simpla A et C. per praecedentem) et ratio composita ex A ad B et B ad C etiam est A ad C.

Hinc rationes ex iisdem compositae eaedem sunt. Sint rationes A ad B et B ad C. et ratio L ad M et M ad N. Sitque ratio L ad M eadem rationi A ad B ratio vero M

3 f. cubis *(1)* Si qvis qvantitatem et rationem non revocet ad numeros, poterit Qvantitatem def *(2)* Ratio A ad C composita dicetur ex ratione A ad B et B ad C. *(a)* Ratio *(b)* hinc demonstratur statim permutatio rationum; qvoniam enim ex aeqvalibus *(c)* Ex aeqvalibus rationibus compositae rationes sunt aeqvales inter se (3) Ratio AB ad CD c o m p o s i t a *(a)* est *(b)* dicitur ex ratione A ad C et C ad D *(4)* Ratio facta ex ductu A in B et ex *(5)* Factum *(6)* Qvia Aeqvimultiplicata eadem *(a)* fiet priore qvidem modo A in B ad B in C aeqvalis *(b)* componendo fiet A in B ad B in C et L in M ad M in *(7)* Nam priore qvidem modo fit *(8)* Aeqvimultiplorum *L* 4 qvae simplorum *erg. L* 5 proportionalium *(1)* ubi 6 ad 3 ut 4 ad 2 vel ut 2 ad 1. qvia *(2)* Nam *L* 22 ex A | et *ändert Hrsg.* | B et *L* 23 ex *(1)* aeqvalibus compositae aeqvales *(2)* iisdem *L* 24 sitqve ratio L ad M *(1)* aeqvalis *(2)* eadem *L* 24–177,1 vero M ad N *(1)* aeqvalis *(2)* eadem *L*

ad N eadem rationi B ad C. Ergo erit ratio A ad C eadem rationi L ad N. Quia quae iisdem vel coincidentibus iisdem eodem modo determinantur coincidunt. Hinc sequitur etiamsi alius in una compositione esset rationum coincidentium ordo quam in alia tamen compositos coincidere.

[*Fortsetzung des gültigen Textes*]

Duo homogenea habent communem mensuram quantumvis exacte propinquam. Ostendimus supra cum scalam explicaremus. Si duorum homogeneorum unum altero neque majus neque minus est, erit aequale. In scala supra posita, comparentur AG et AE. appliceturque AG ipsi scalae et puncto A manente incidet punctum G inter B et A posito AG esse minus quam AB. Ponamus jam demonstrari posse quod recta AG translata in AB, manente puncto A punctum G neque incidat intra E et B, neque inter A et E id est quod AG nec sit major nec minor quam AE. Utique punctum G incidet in ipsum punctum E. adeoque AG erit ipsi AE aequalis. Quod de duabus rectis, idem demonstrari potest de omnibus homogeneis nam omnia possunt reddi similia, et ubi similia reddita sunt, si nec magnitudine differunt nullo modo per se discerni poterunt, sed congrua erunt, adeoque cum congrua reddi possint, aequalia sunt.

1 A ad C *(1)* aeqvalis *(2)* eadem rationi L ad N. *(a)* Nam AB aeqv BC *(b)* AB aeqv *(c)* ratio A in B ad B in C aeqv *(aa)* A ad C *(bb)* rationi A ad C ⟨—⟩ et ratio L in M ad M in C aeqvalis rationi L ad C. Est autem A in B ad B in C aeqvalis L in M ad M in N. *(d)* Qvia *L* 3 etiamsi *(1)* transpositae essent rati *(2)* alius *L* 4 coincidere | , sit enim A ad B eadem ipsi M ad N, et B ad C eadem ipsi L ad M. nihilominus ut ante componendo fiet tamen utraqve modo A in B ad B in C, et L in M ad M in N *gestr.* | *L* 10 qvod *(1)* punctum G nec incidit inter *(2)* recta *L* 13 ipsi | AG *ändert Hrsg.* | aeqvalis *L* 15 sunt, *(1)* | possunt *nicht gestr.* | repraesentari per rectas, aut *(2)* si *L* 15 modo *(1)* different, sed congrua erunt *(2)* per *L*

7 supra: s. o. Fig. 8.

21 (57631). SUMMA SERIEI BINARIAE
[1677 – 1716 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2a Bl. 64. 1 Zettel ca $12,9 \times 3,6$ cm. Risskante unten. 1 S.

Datierungsgründe: **[noch]**

$\odot = 2^e + 2^{e-1} + 2^{e-2} +$ etc. usque ad 2^{e-e} seu $+1 = 2^{e+1} - 1$. Mirum hanc aequalitatem non apparere directe sed per ambages. Nam oportet $\odot = 2^e + 2^{e-1} + 2^{e-2} +$ etc. $+1$ multiplicare per $2-1$ et prodit $2-1.\ \odot = 2^{e+1} - 1$, sed $2-1 = 1$ et $1.\ \odot = \odot$ ergo $2^{e+1} - 1 = \odot$. Cui autem facile in mentem veniet uti hoc artificio? Unde patet quam sit interdum difficilis inventio rationum per analysin quandam determinatam, et quae sit in potestate.

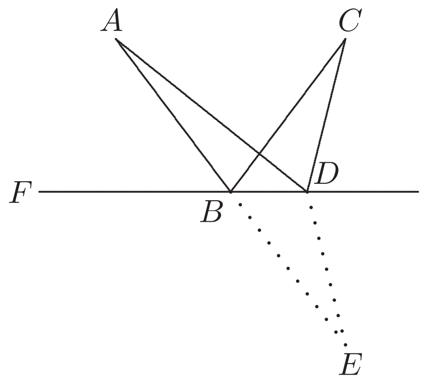
7 ambages *(1)* Nam si *(2)* Nam *L*

22 (58285). ELEGANS DEMONSTRANDI MODUS IN LINEIS
[Erste Hälfte 1682 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 181. 1 Bl. ca 8°. 1 S. Unten Risskante.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1682 belegt. Der Text dürfte vor der Publikation von *Unicum opticae, catoptricae, et dioptricae principium, Acta eruditorum*, Juni 1682, S. 185–190, entstanden sein.

Elegans demonstrandi modus in lineis



[*Fig. 1*]

Angulum incidentiae ABF, et reflexionis CBD esse aequales ostendit Ptolemaeus, quia aggregatum rectarum $AB + BC$ est omnium possibilium minimum, seu minus aliis quibuscunque inter eadem puncta AB. BC ut $AD + DC$. Consentaneum enim naturam ex A in C egisse per brevissimam viam nempe per B. Demonstrandum est ergo $AB+BC$ esse minores quam $AD+DC$. Jungatur$AB+BC$ in unam rectam AE, ita ut BE aequetur ipsi BC. Ideo autem jungi utile est, quia ductu linearum aliquid de toto hoc demonstrare volumus. Exhibendum est ergo hoc totum. Rursus quia volumus ostendere duas quasdam ut $AD+DC$, esse tertia AE majores, idem est ac si diceremus fieri posse Triangulum cujus basis sit AE, crura AD et DC. Neque enim alia commodiore ratione in lineis exprimere possumus duas quasdam rectas simul esse tertia majores. Tantum ergo quaeritur an focis

---

9 ostendit: Leibniz bezieht sich auf die damals Ptolemaios zugeschriebene Katoptrik, als deren Autor jetzt Heron von Alexandria gilt (vgl. HERON, *Opera*, II,1, 1900, S. 316–365, insbesondere S. 324 bis 328).

A. E. filo cujus longitudo $AE + AD + AC$ ellipsis describi possit. Sed hic feliciter evenire apparet, ut tam longe iri necesse non sit, nam feliciter evenit ut ipso situ ipsarum AB, AD retento juncta DE, sit aequalis ipsi DC, nam triangula DBE, et DBC latus habent commune BD, aequalia BE, BC, et angulos aequales DBC, et DBE, ergo et reliquum latus DE reliquo DC aequale erit. Est autem semper in Triangulo AE minus quam $AD + DE$, ergo et $AB + BC$ minus quam $AD + DC$. Quod erat dem.

23 (58312). DE QUADRATURAE ANALYTICAE COMMUNIS CIRCULI ET HYPERBOLAE IMPOSSIBILITATE

Januar 1679

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 7. 1 Bl. 8°. 1 S.

Januar. 1679

De quadraturae analyticae communis Circuli et Hyperbolae impossibilitate

Duae supersunt viae ad inveniendam Circuli et Hyperbolae ejusve partis alicujus definitae quadraturam analyticam communem aut demonstrandam ejus impossibilitatem. Una est si inveniatur ejus valor analyticus in terminis ordinariis vel transcendentibus ope alicujus numeri rationis effabilis aut ineffabilis exponentem ingredientis, quod unum mihi quaerendum potissimum superesse videtur ad absolvendum problema (verbi gratia si res reducatur ad quantitatem, qualis est: $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$).

Altera via est ut videamus ex quibus causis obtingere vel demonstrari possunt quadraturae particulares, sunt enim eae causae finitae et enumerabiles, ex exclusis omnibus a circulo, utique demonstratam habebimus quadraturae partis ejus cujuscunque impossibilitatem.

24 (59023). NOTAE AD ARITHMETICAM ET DYADICAM [1677 – 1716 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 12 Bl. 3. 1 Zettel ca 16, 6 × 7, 3 cm. Risskante unten. $1\frac{1}{2}$ S.

Datierungsgründe: **[noch]**

Non sequitur $bx = by$, ergo $x = y$, nisi constat b non esse 0. Exempli causa in dyadicis talis mihi aliquando calculus venit $m = qu(\varphi - p)$ ubi m, ϕ, p sunt notae dyadicae, quarum quaelibet valet 1 vel 0. Esto jam $n = pm = \varphi\varphi - 2\varphi p + pp, p$ hoc est in dyadicis $pm = \varphi + p - 2\varphi p, p = \varphi p + p - 2\varphi p = p - \varphi p = p, 1 - \varphi = n$ fit ergo $p, 1 - \varphi = p, \varphi + p - 2\varphi p = p.qu(\varphi - p)$. Non tamen inde sequitur esse $1 - \varphi = qu(\varphi - p)$, nisi cum constat p non esse 0. Nam si p est 0 fit utiq. $p, 1 - \varphi = p, qu(\varphi - p)$ nam utrumque est aequale nihilo. Sed si p sit 1 (nam utique p est vel 1 vel 0 cum sit nota dyadica) fiet utique $1 - \varphi = qu(\varphi - p) = qu(\varphi - 1)$. Nam si si φ sit 0, fiet $1 = qu(-1)$ et si φ sit 1 fiet $0 = qu(0)$.

6 seqvitur *(1)* $\mathrm{b}, 1 - \mathrm{c} = \mathrm{bff}$ *(2)* $\mathrm{bx} = \mathrm{by}$ *L* 8 n = *(1)* p, mpm *(2)* $\mathrm{pm} = \varphi\varphi - 2\varphi\mathrm{p} + \mathrm{pp}$ *L* 9 $\mathrm{pm} = \varphi + \mathrm{p} - 2\varphi\mathrm{p}, \mathrm{p}$ *(1)* et pm = *(2)* = *L*

[*Auf der Rückseite, quer geschrieben:*]

1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1
1.	2.	3	4.	5.	6.	7.	8.	9
1.	3.	6	10.	15.	21.	28.	36.	45
1.	4.	10	20.	35.	56.	84.	120.	165
1.	5.	15	35.	70.	126.	210.	330	
1.	6.	21	56.	126.	252.	462		
1.	7.	28	84.	210.	462			
1.	8.	36	120.	330.	792			
1.	9.	45	165.	495.	1287			
1.	10.	55	220.	715.	2002			
1.	11.	66	286.	1001.	3001			
1.	12.	78						
1.	13.	91						
1.	14.	105						
1.	15.	120						
1.	16.	136						
1.	17.	153						
1.	18.	171						
1.	19.	190						
1.	20.	210						

25 (59123). DIOPHANTEA SEU ARITHMETICA FIGURATA ABSOLUTA METHODO DYADICA [1677 – 1716 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 16 Bl. 27. 1 Zettel ca 20,4 × 6,2 cm. Risskante unten. 1 S.

Datierungsgründe: [**noch**]

NB. NB. NB. NB. Diophantea seu Arithmetica figurata absoluta methodo dyadica

Mirabilis succurrit usus dyadicae pro dioφanteis; quibus videtur praestari quicquid in eo genere possible est. Semper res reducenda est prius eo, ut opus sit numeris integris quod semper possum, unde numeri assumantur per dyadicas formulas indefinitas, ubi illud egregium quod ad nullas assurgitur potentias.

26 (59166a). APPROPINQUATIO CIRCULI PER RADICES DYADICE EXPRESSAS
[1683 – 1685 (?)]

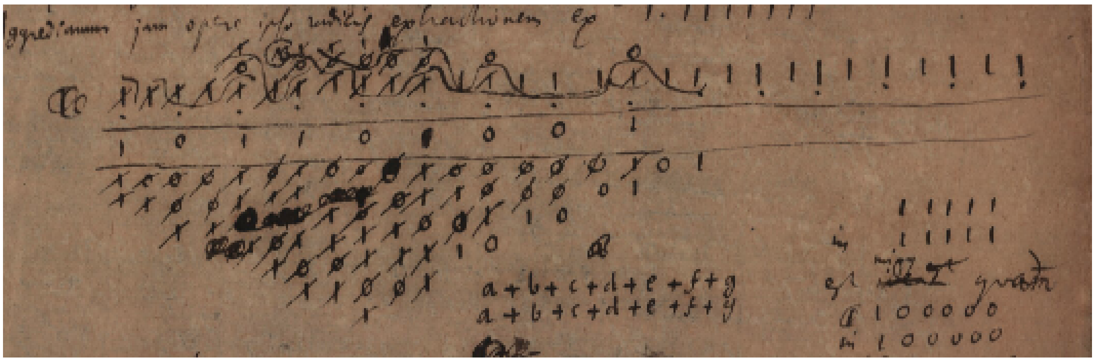
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 25 Bl. 11. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 11 r°. Auf Bl. 11 v° Aufzeichnung zur Zahlentheorie.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1683 und 1685 belegt.

$4\sqrt{2}$ est ambitus quadrati circulo inscripti, $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ octanguli, $16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ sedecanguli, et $32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ est ambitus 32^{anguli}, et ita porro, vel brevius exprimendo Ambitus quadrati, 8^{guli}, 16^{guli} erit $4\sqrt{2-\text{0}}$ $8\sqrt{2-\text{1}}$ $16\sqrt{2-\text{2}}$ et generaliter $2^v\sqrt{2-\text{v.2}}$ aeq. ☽. Ergo $2^{2v}.\overline{2-\text{v.2}}$ aeq. ☽^{2}.

Quoniam autem in progressione notarum numericarum dyadica, multiplicatio per potentias ipsius 2 fit sola adjectione nullarum seu zero, hinc tantum opus erit ad progressionem inveniendam, qua continue ad ambitum circuli accedatur ut extrahatur radix ex 2, ex $2+\sqrt{2}$ ex $2+\sqrt{2+\sqrt{2}}$, etc. radixque illa quaevis detrahatur ex 2, residuum continue accedet ipsi quadrato circumferentiae. Ut autem subtractio sit facilior tantum pro 2 seu 10.00.000 ponitur 1.11111111. Aggrediamur jam opere ipso radicis extractionem ex 1.1111111[:]

8 porro, *(1)* et generaliter Ambitus polygoni numero laterum ex progressione dupla Circulo inscripti est *(2)* vel *L*   10 Ergo *(1)* $2^{2\text{v}}$ aequ. $2^{2\text{v}+1}$ *(2)* $2^{2\text{v}}$ *L*   13 ex *(1)* $\sqrt{2}$ ex $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ *(2)* 2 *L*
15 autem *(1)* extractio sit *(2)* subtractio *L*



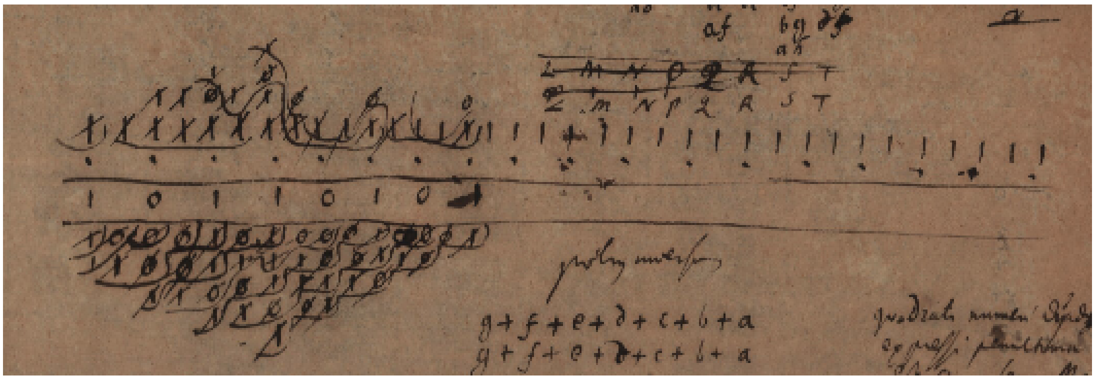
[*Fig. 1*]

a	+	b	+	c	+	d	+	e	+	f	+	g
a	+	b	+	c	+	d	+	e	+	f	+	g
a^2	+	$2ab$	+	$2ac$	+	$2ad$	+	$2ae$	+	$2af$	+	$2ag$
			+	b^2	+	$2bc$	+	$2bd$	+	$2be$	+	$2bf$
							+	c^2	+	$2cd$	+	$2ce$
											+	d^2

ab		ad	bd	af	bf	ah	bb
		bc	bd	fe	ce	bg	cg
				ed		ef	df
						de	et
a	ac	b	ac	c	ag	d	ai
ab		bc	bd	cd	bf	de	bh
		ad		be	ce	cf	cg
				af		bg	dg
						ah	
L	M	N	P	Q	R	S	T

2 *Am Rand:* 11111 in 11111 est minus quam 100000 in 100000 sed 111111 est maximus in suo gradu. Ergo characteres nunquam magis quin duplicantur multiplicando in seipsum uno ad summum maximi

3 a *Am Rand:* L aequ. 1 et a aeq. 1 ergo b aeq. 0 ergo *gestr.* *L*



[*Fig. 2*]

potius inversum

						$g\ +$	$f\ +$	$e\ +$	$d\ +$	$c\ +$	$b\ +$	a
						$g\ +$	$f\ +$	$e\ +$	$d\ +$	$c\ +$	$b\ +$	a
gg												
gf	ge	gd	gc	gb	ga	fa	ea	da	ca	ba	$*$	a
g		fe	fd	fc	fb	eb	db	cb		b		
		f		ed	ec	dc		c				
				e		d						
Z	Y	X	W	U	T	S	R	Q	P	N	M	L

a aeq. L. Si N sit 1 tunc A aeq. 0.

Quadrati numeri dyadice expressi penultima litera est 0, seu M aeq. 0. $ba+b$ aeq. N sed a aeq. L. Ergo $bL+b$ aeq. N, et b aeq. $N.\overline{1+L}$ seu b aeq. $N+NL$, si N aeq. 1 seu N aeq. $ba+b$ vel 0 si b sit 1 et a sit 1, N est 0 item si b sit 0 et a sit 0 hinc ita si $b-a$ aeq. 0 tunc N est 0, sin $b^2-2ba+a^2$ aeq. 1. seu $b-2ba+a$ aeq. 1 tunc N est 1. Ambo casus habebuntur $b-2ba+a-1$ aeq. 0 ducas in $b-a$ aeq. 0 et fiet $b\boxed{-3ba+3ba}-a-b+a$ aeq. 0 sed ita omnia evanescunt.

---

16 *Daneben:* N aeq. $ba+b$ cum aeq. 1 vel N aequ. $b-a$ cum aeq. 0 sed priore casu est b aeq. $\overline{1-a}\ \overline{1-2a}$. Ergo priore casu fiet N aeq $1-a$ in $1+a$ in $1-2a$ seu, manet $1-a$ in $1-2a$ Ergo priore casu quo N est 1 fit N aeq. $1-3a+2a$ seu $1-a$ ergo cum N est 1 a est 0.

14 L *(1)* et N aeq. 0 vel N − 1 aeq. 0 Ergo N^2-N aeq. 0 *(2)* Ergo *L* 14 1 *(1)* C aeq. LP *(2)* seu *L* 15 ba + b *(1)* d aeq. LQ *(2)* vel *L* 16 sin *(1)* b − a aeq. *(2)* $b^2-2ba+a^2$ *L*

27 (59308). ZU CLAVIUS, EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBRI XV [1677 – 1716]

Überlieferung: *LiH* Marginalien, Korrekturen, An- und Unterstreichungen in: Chr. Clavius, *Euclidis Elementorum Libri XV; Accessit liber XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione*, Frankfurt 1607: Hannover *GWLB* Leibn. Marg. 226. — Clavius' Text ist die Bogen- bzw. Seitenzählung der Ausgabe von 1607 in eckigen Klammern vorangestellt, gedruckte Marginalien werden in die Fußnoten zum Text eingefügt. Nicht wiedergegeben werden die zusätzliche Nummerierung der Propositionen in römischen Ziffern am Rand, Hervorhebungen und Akzente des Druckes sowie Marginalien und Unterstreichungen in den *Prolegomena*, die einem Vorbesitzer zuzurechnen sind. Marginalien von Leibniz erscheinen als Fußnoten zum Text bzw. zu den Figuren, ebenso Anstreichungen am Rand, Unterstreichungen werden durch Sperrung der entsprechenden Passagen hervorgehoben. Texteingriffe von Leibniz werden im Variantenapparat dokumentiert.

Datierungsgründe: Das Buch war ursprünglich im Besitz des Fürstlich Braunschweig-Lüneburgischen Bauverwalters Caspar Dauthendey († 1639 oder 1644). **[noch]**

[a^* r^o]

Propositiones omnium XVI. librorum, qvarum eas, qvae in lib. 5. 14. 15. & 16. Euclidis non sunt, quamuis in numerum propositionum relatae sint, alio charactere expressimus.

Primi libri.

1 Svper data recta linea terminata triangulum aequilaterum constituere.

2 Ad datum punctum, datae rectae lineae aequalem rectam lineam ponere.

3 Dvabvs datis rectis lineis inaequalibus, de maiore aequalem minori rectam lineam detrahere.

. . .

---

22 •

23 • per 1

24 f. • per 2

7 Svper eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliae duae rectae lineae aequales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

8 Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, aequalia; habuerint vero & basim basi aequalem: Angulum quoque sub aequalibus rectis lineis contentum angulo aequalem habebunt.

9 Datvm angulum rectilineum bifariam secare.

10 Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

11 Data recta linea, a puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 Super datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

[a^* v°]

. . .

16 Cvivscvnqve trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

. . .

20 Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

1–3 per 4

4–6 per 7

7 • per 3, 1, 8

8 • per 9, 4

9 • per 3, 1, 8

10 f. • per 10, 8

14 f. Hinc infertur Circulum et rectam non posse sibi occurrere in plus quam duobus punctis ad p. 65.

17 5. 19. vel 9. 16. 19

2,21 per | 1, *gestr.* | 9, 4 *L*

. . .

22 Ex tribus rectis lineis, quae sunt tribus datis rectis lineis aequales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

23 Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo aequalem angulum rectilineum constituere.

. . .

[a^* *2r*^{o}]

. . .

31 A dato puncto, datae rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.

32 Cvivscvnqve trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est aequalis: Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis aequales.

. . .

36 Parallelogramma super aequalibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt aequalia.

. . .

42 Dato triangulo aequale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

43 In omni parallelogrammo, complementa eorum, quae circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt aequalia.

2–4 per 3.

5 f. per 22, 8.

10 • per 23, 27

11 f. • datis duobus angulis trianguli tertium invenire per 31, 29, 13

14 f. 34, 29, 4

17 • 10, 23, 35, 41, 38

3,24 34, | 33, 35 *erg. u. gestr.* | 29, 4 *L*

44 Ad datam rectam lineam, dato triangulo aequale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

45 Ad datam rectam lineam, dato rectilineo aequale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data recta linea quadratum describere.

47 In triangulis rectangulis, quadratum, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, aequale est eis, quae a lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

...

[a^* *3* r^o]

Tertii libri.

...

[a^* *3* v^o]

...

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quae datum tanget circulum.

...

[c^* *4* v^o]

---

1 f. • 42, 31, 15, 43

3 f. • 44, 29, 14, 34, 30

5 11, 28, 33, 34

6–8 • datis duobus quadratis tertium aequale exhibere
46, 31, 14, 4, 41
Aliter 34, 29, 26, 28, 33, 34, 33, 35
Aliter 41
Aliter 29, 26, 33, 35

15 Oportet autem ut punctum non sit intra Circulum.

Index problematvm ac theorematvm, qvae praeter propositiones in sexdecim libris Euclidis contentas in hisce commentariis demonstrantur.

...

[d* 5 v$^{\text{o}}$]

In sexto libro.

...

[[*d* * *7* *v*^{o}]]

...

39 Propositis tribus terminis Geometrice proportionalibus siue aequalibus, siue inaequalibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo & tertio semel; ac tertius semel, sunt Geometrice proportionales. Ad propos. 17.

[*1*]

Evclidis Elementvm primvm.

Definitiones.

...

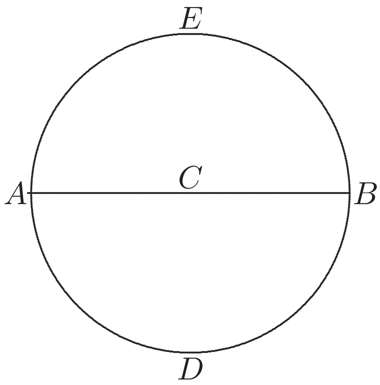
[*14*]

9–12

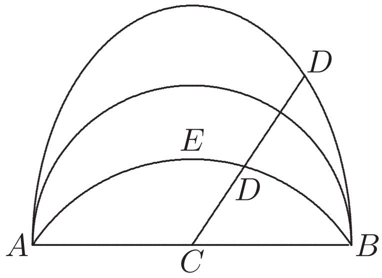
$$\left\{\begin{array}{cccccccc} & & & A. & B. & C & & \\ 1 & 2 & 1 & 1A & + & 2B & + & 1C \\ & 1 & 1 & & & 1B & + & 1C \\ & & 1 & & & & & 1C \\ & & \multicolumn{5}{c}{AC+2BC+CC} & \\ & & \multicolumn{5}{c}{\text{aequ.}} & \\ & & \multicolumn{5}{c}{BB+2BC+CC} & \\ & & \multicolumn{5}{c}{\text{quia } AC=BB} & \end{array}\right.$$

XVII.

Diameter autem circuli, est recta quaedam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, q u a e c i r c u l u m b i f a r i a m s e c a t.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Si in circulo ducatur recta linea AB, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quae per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam secari a diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinque aequales circumferentiae abscindantur. Quod tamen T h a l e t e m M i l e s i u m hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem ADB, accommodari, & coaptari portioni reliquae AEB, i t a v t d i a m e t e r AB , c o m m u n i s s i t v t r i q u e p o r t i o n i : Si igitur circumferentia ADB, congruat penitus circumferentiae AEB, manifestum est, duas illas portiones a diametro factas, esse inter se aequales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circumferentia ADB, non omni ex parte cadere dicatur super circumferentiam AEB, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro C, secante circumferentiam ADB, in D, & circumfernetiam AEB, in E, erunt duae recta CD, CE, ductae ex centro ad

11–194,4 Hinc ... proponebatur: *Am Rand durch senkrechten Strich hervorgehoben.*

circumferentiam eiusdem circuli aequales, per circuli definitionem, cum tamen vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circumferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambae inter se aptabuntur, ideoque aequales erunt, quod demonstrandum proponebatur.

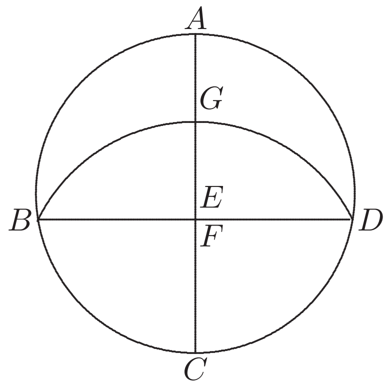
Ex hac demonstratione constat, diametrum non solum circumferentiam, verum etiam totam aream circuli secare bifariam. Cum enim semicircumferentiae sibi mutuo congruant, vt ostensum est, congruent etiam superficies ipsae inter diametrum, & vtramque circumferentiam comprehensae, cum neutra alteram excedat. Quare aequales inter se erunt.

XVIII.

Semicirculus vero est figura, quae continetur sub diametro, & sub ea linea, quae de circuli peripheria aufertur.

[*15*]

Exempli gratia, in superiori circulo figura ADB, contenta sub diametro AB, & peripheria ADB, dicitur semicirculus, quia, vt in praecedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura AEB, semicirculus. Idem autem punctum C diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.



[*Fig. 3*]

Qvod si recta linea BD, non transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas portiones inaequales BAD, BCD, quarum ea, in qua centrum circuli existit, cuiusmodi est portio BAD, maior est, quam alia BCD, extra quam centrum E, reperitur. Esse autem portiones BAD, BCD, inaequales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam BD, perpendicularis AG. Si igitur dictae portiones dicantur esse aequales, & portio BCD, intelligatur m o u e r i c i r c a r e c t a m B D , v t super portionem BAD, cadat, congruet illa portio huic, & recta FC, rectae FA, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter se aequales sunt ex defin. 10. cum sint sibi mutuo deinceps. Recta ergo FC, quae nunc eadem est, quae FA, maior erit, quam EA, pars ipsius FA. Cum ergo ipsi EA, sit aequalis EC, quod ambae ducantur e centro ad circumferentiam, erit quoque FC, maior quam EC, pars quam totum, quod est aburdum. Non igitur portio BCD, portioni BAD, congruet, se dintra eam cadet, cuiusmodi est portio BGD, vt recta FG, eadem tunc existens, quae FC, minor possit esse quam EA, vel EC. Si namque diceretur cadere extra, vt si circulus esset $BCDG$, cuius centrum E, & portio BCD, caderet extra BGD, qualis est portio BAD, esset rursus FA, eadem tunc existens, qua FC, maior quam EG, hoc est, quam EC, atque ita pars FC, maior rursum foret toto EC. quod absurdum est. Ex quo patet, portionem BAD, in qua centrum E, existit, maiorem esse reliqua portione BCD, cum haec aequalis sit portioni BGD, quae pars est portionis BAD. Cum enim ostensum sit, portionem BCD, circa rectam BD, circumductam non posse congruere portioni BAD, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis est BGD.

...

[*24*]

...

Commvnes notiones sive Axiomata, quae & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

...

[*27*]

...

---

5 f. *Über* quae: EA. *Am Rand:* Non sequitur si aequales sunt ergo ut congruae sunt.

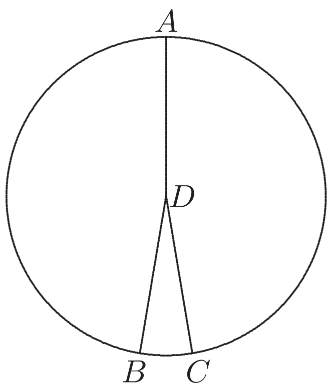
8,25 *Leibniz hat zunächst FA in FG geändert und wieder rückgängig gemacht, über EA ein G ergänzt und wieder gestrichen.*

X.

Dvae lineae rectae non habent vnum & idem segmentum commune.

[*28*]

Non est difficile istud axioma, si perfecte intelligatur natura rectae lineae. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duae lineae rectae habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, praeter unicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breviter P r o c l u s i t a d e m o n s t r a t.



[*Fig. 4*]

Habeant, si fieri potest, duae rectae AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA, [a] describatur circulus s e c a n s duas rectas propositas in punctis B, & C; [b] Erunt igitur duae circumferentiae AB, ABC, inter se aequales, (Sunt enim circumferentiae semicirculorum aequalium, cum ADB, ADC, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duae rectae habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

. . .

XI.

Dvae rectae in vno puncto concurrentes, si producantur ambae, necessario se mutuo

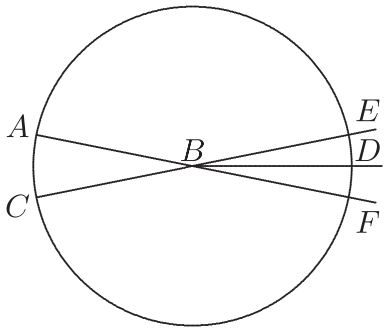
11 *Anmerkung im Druck:* a 5. petit

12 *Anmerkung im Druck:* b 17. def

18–197,1 Dvae . . . intersecabunt: *Am Rand durch senkrechten Strich hervorgehoben.*

in eo puncto intersecabunt.

Hoc etiam axioma ex natura lineae rectae pendet. Quod tamen ita demonstrabimus.



[*Fig. 5*]

Coeant duae rectae AB, CB, in B. Dico illas productas se mutuo secare in B, nempe CB, productam cadere in E, supra rectam AB, productam. Nam si CB, producta non cadit supra AB, productam, vel congruet cum AB, producta, ita vt transeat per D, atque ita duae rectae ABC, CBD, habebunt idem segmentum commune BD, quod in antecedente axiomate ostensum est fieri non posse: vel certe infra AB, productam cadet, ita vt CB, producta cadat in F, sitque vna recta linea CBF. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus $ACFD$, secans rectas AB, CB, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quam CF, semicirculus, per defin. 18. ac proinde aequales erunt circumferentiae ACD, CF. vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.

...

[*29*]

...

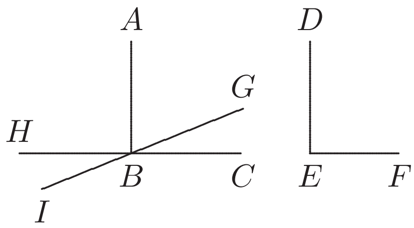
XII.

Item, omnes anguli recti sunt inter se aequales.

Hoc axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus

6 vel *LiH*   18 inaequales *H, ändert LiH*

describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuiue nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, quae quidem alteri lineae rectae ita superstat, vt faciat vtrobique angulos aequales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos aequales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineae sint inaequales interdum. Conatur tamen P r o c l u s ex 10. definitione id demonstrare hac ratione.



[*Fig. 6*]

Sint duo anguli recti ABC, DEF, quos dico esse inter se aequales. Si enim fieri potest, sint inaequales, sitque ABC maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam DE, rectae AB, cadet recta EF, inter rectas AB, BC, qualis est BG, propterea quod angulus DEF, minor ponitur angulo ABC. [a] Producatur CB, in rectum & continuum vsque ad H. Cum igitur angulus ABC, sit rectus, [b] erit angulus ABH, illi deinceps aequalis, & rectus quoque: quare maior etiam angulo ABG. [c] Producta autem GB, in rectam & continuum vsque ad I, cadet portio producta BI, infra BC, productam, v t in p r a e c e d e n t i a x i o m a t e e s t d e m o n s t r a t u m. Quare cum angulus ABG, ponatur rectus, [d] fiet angulus ABI, illi deinceps aequalis. Quapropter angulus ABH, maior quoque erit angulo ABI, pars toto, quod est absurdum.

12 *Anmerkung im Druck:* a 5. petit

13 *Anmerkung im Druck:* b 10. defin.

14 *Anmerkung im Druck (irrtümlich mit b statt mit c markiert):* b 2. pet

17 *Anmerkung im Druck (irrtümlich mit c statt mit d markiert):* c 10. defin.

14 angulo *ABC H, ändert LiH*

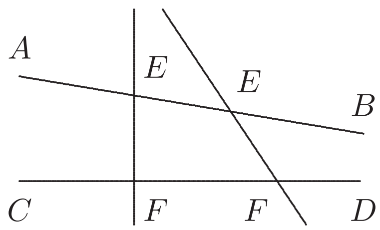
Non ergo inaequales sunt duo anguli recti propositi, sed aequales. Quod est propositum: eademque est ratio in caeteris.

. . .

XIII.

Et si in duas recta lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duae illae rectae lineae in infinitum productae sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

[*30*]



[*Fig. 7*]

Vt si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas esse ad aliquod punctum vnum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat.

. . .

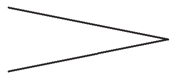
Verum quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, imo a numero principiorum reijcitur a G e m i n o G e o m e t r a , P r o c l o , & a l i i s , quod non facile quiuis ei assensum praebeat; praesertim cum reperiantur aliae quaedam lineae, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus) nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamsi infinite producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergaei, & ex linea conchili Nicomedis.

. . .

XIV.

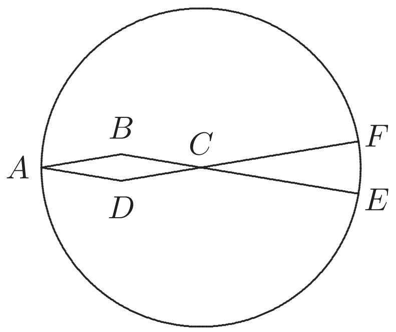
Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

Nullam prorsus habet difficultatem hoc principium.

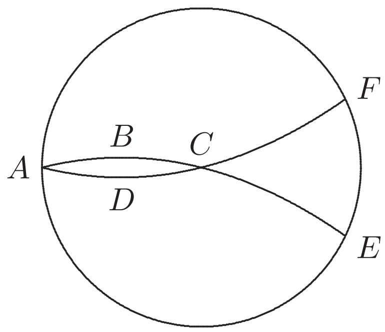


[*Fig. 8*]

Si enim duae rectae lineae ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quaedam adiungenda est. Ita enum conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principium, hoc modo.



[*Fig. 9a*]



[*Fig. 9b*]

Si fieri potest, vt duae lineae rectae claudant superficiem, comprehendant duae rectae ABC, ADC, superficiem $ABCD$, ita vt duae illae rectae coeant in duobus punctis, A, & C. Facto deinde centro C, [a] describatur circulus interuallo CA, [b] & [*31*] producantur rectae ABC, ADC, in rectum, & continuum vsque ad circumferentiam, nempe ad puncta. E, & F. Itaque quia rectae ACE, ACF, transeunt per centrum C, [a] erunt

14 *Anmerkung im Druck:* a 3. petit

14 *Anmerkung im Druck:* b 2. petit

16 *Anmerkung im Druck:* a 17. def

semicirculi *AE*, *AEF*, inter se aequales, & idcirco circumferentia quoque *AE*, circumferentiae *AEF*, aequalis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectae duae lineae spatium comprehendunt. Quod est propositum.

. . .

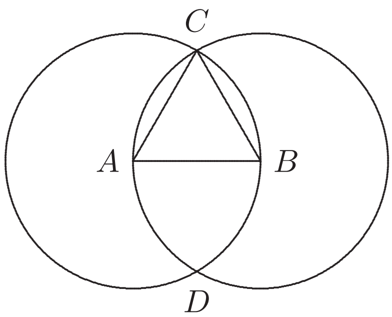
[*36*]

Problema I.

Propositio I.

Svper data recta linea terminata triangulum aequilaterum constituere.

. . .



[*Fig. 10*]

Sit igitur proposita recta linea terminata *AB*, super quam constituere iubemur triangulum aequilaterum. Centro *A*, & interuallo rectae *AB*, [a] describatur circulus *CBD*: Item centro *B*, & interuallo eiusdem rectae *BA*, alius circulus describatur *CAD*, secans priorem in punctis *C*, & *D*. Ex quorum vtrouis, nempe ex *C*, [b] ducantur duae rectae lineae *CA*, *CB*, ad puncta *A*, & *B*; Eritque super rectam *AB*, constitutum triangulum *ABC*, hoc est, figura rectiliea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse aequilaterum.

. . .

12 *Anmerkung im Druck:* a 3. pet.

13 f. *Zu* secans priorem in punctis *C*, & *D*, *am Rand ergänzt:* quod fiet si ambo circuli sint in eodem plano

14 *Anmerkung im Druck:* b 1. pet.

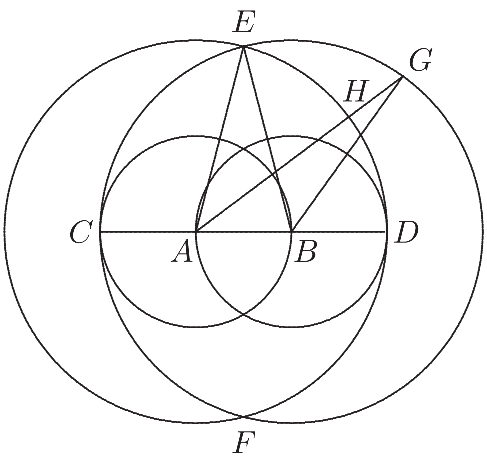
Scholivm.

...

[*37*]

...

Si quis super d a t a r e c t a d e s i d e r e t c o n s t i t u e r e t r i a n g u l u m q u o q u e I s o s c e l e s , & s c a l e n u m , id cum Proclo in hunc modum efficiet.



[*Fig. 11*]

Sit recta linea AB, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. [d] Deinde producatur AB, in vtramque partem ad circumferentias vsque ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero AD, [e] describatur circulus EDF. Item centro B, interuallo vero BC, circulus ECF, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, [f] ducantur ad puncta A, & B, duae rectae EA, EB. Factumque erit super recta AB, [g] triangulum ABE; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera

5 f. Constructiones hae fiunt nondum adhibito problemate 2. Non tamen sic describi potest quodvis isosceles vel quodvis scalenum.

9 *Anmerkung im Druck:* d 2. pet.

10 *Anmerkung im Druck:* e 3. pet.

12 *Anmerkung im Druck:* f 1. pet.

13 *Anmerkung im Druck:* g 20. def

AE, BE, esse & aequalia inter se, & maiora latere AB. Cum enim rectae AE, AD, ducantur e centro A, ad circumferentiam EDF, [h] erit AE, [38] aequalis rectae AD. Item cum rectae BE, BC, ducantur e centro B, ad circumferentiam ECF, [a] erit BE, aequalis rectae BC. Sunt autem rectae AD, BC, aequales inter se (vtraque enim AC, & BD, aequalis est rectae AB; cum AB, AC, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item BA, BD, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediantur. [b] Quare AC, BD, aequales inter se erunt. Additio igitur communi recta AB, [c] erit tota AD, toti BC, aequalis.) [d] Igitur AE, BE aequales quoque inter se erunt. Quod vero vtraque AE, BE, maior sit quam AB, perspicuum est, cum AD, aequalis ostensa ipsi AE, [e] maior sit quam AB; Item BC, aequalis demonstrata ipsi BE, [f] maior quoque sit, quam AB. Constitutum igitur est super recta AB, Isosceles ABE, habens duo latera AB, BE, aequalia inter se, & maiora latere AB, quod faciendum erat. Atque haec est demonstratio Procli, aliorumque interpretum Euclidis.

. . .

[*39*]

. . .

Probl. 2. Propos. 2.

Ad datum punctum, datae rectae lineae aequalem rectam lineam ponere.

---

2 *Anmerkung im Druck:* h 15. def

3 *Anmerkung im Druck:* a 15. def

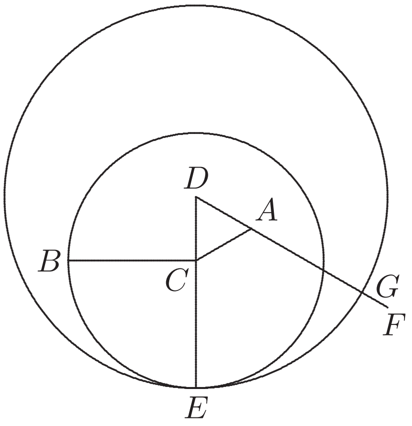
6 *Anmerkung im Druck:* b 1. pron

7 *Anmerkung im Druck:* c 2. pron

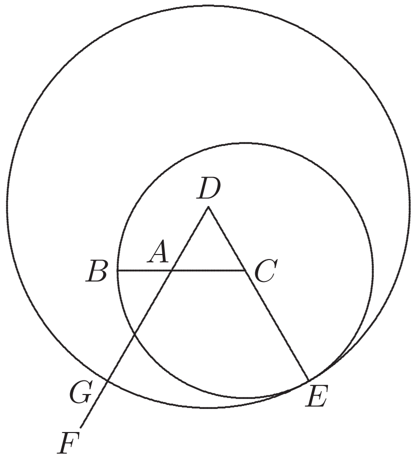
8 *Anmerkung im Druck:* d 1. pron

9 *Anmerkung im Druck:* e 9. pron

10 *Anmerkung im Druck:* f 9. pron



[*Fig. 12a*]



[*Fig. 12b*]

Sit punctum datum A, & data recta linea BC, cui aliam rectam ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineae BC, nempe C, centro [a] describatur circulus BE, interuallo rectae BC. Et ex A ad centrum [*40*] C, [a] recta ducatur AC; (nisi punctum A, intra rectam BC, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur AC, vt secunda figura indicat.) Super recta vero AC, [b] constru[a]tur triangulum aequilaterum ACD, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta DA, DC, versus rectam AC, [c] extendantur; DC, quidem oppositum puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; DA, vero oppositum centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectae DE, per C, centrum transeuntis, [d] alter circulus describatur EG, secans rectam DF, in G. Dico rectam AG, quae posita est ad punctum datum A, aequalem esse datae rectae BC. Quoniam DE, DG, ductae sunt ex centro D, ad circumferentiam EG, [e] ipsae

---

3 *Anmerkung im Druck:* a 3. petit

4 Quaeritur $AG = BC$. $CD = CA$ $AD = AC$ $DC + CB = DCE = DC + AG$ $CB = AG$

4 *Anmerkung im Druck:* a 1. petit

6 *Anmerkung im Druck:* b 1. primi

8 *Anmerkung im Druck:* c 2. pet.

10 *Anmerkung im Druck:* d 3. pet.

12 *Anmerkung im Druck:* e 15. def.

inter se aequales erunt: Ablatis igitur DA, DC, aequalibus lateribus trianguli aequilateri ACD, [f] remanebit AG, aequalis rectae CE. Sed eidem CE, [g] aequalis est recta BC. (cum ambae rectae CB, CE, cadant ex centro C, ad circumferentiam BE.) Igitur rectae AG, BC, quandoquidem vtraque aequalis est ostensa rectae CE, inter se [h] aequales erunt. Ad datum igitur punctum. &c. quod erat faciendum.

Qvod si punctum datum fuerit in extremo datae lineae, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo CB, [i] describatur circulus, ad cuius circumferentiam recta [k] ducatur vtcunque CE, erit haec posita ad punctum datum C, [l] aequalis datae rectae BC, cum vtraque & BC, & CE, ex eodem centro egrediantur ad circumferentiam BE.

Scholivm.

Hvivs problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumque iacebit extremum. Si vero extra ipsam, erit vel e directo datae lineae, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat, vel non e directo, ita vt ab ipso ad datae lineae extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum ACD, super recta AC, Isosceles, eodem modo ostendemeus, rectam AG, rectae BC, aequalem esse.

[*41*]

...

---

2 *Anmerkung im Druck:* f 3. pron.

2 *Anmerkung im Druck:* g 15. def.

4 *Anmerkung im Druck:* h 1. pron

7 *Anmerkung im Druck:* i 3. petit

8 *Anmerkung im Druck:* k 1. pet.

8 *Anmerkung im Druck:* l 15. def.

19 f. Male, nam triangulum autem isosceles debet esse constructum ad modum Scholii prop. 1. non adhibito probl. 2.

Theorema 1. Propos. 4.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo aequalem sub aequalibus rectis lineis contentum: Et basim basi aequalem habebunt: eritque triangulum triangulo aequale; ac reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, vterque vtrique, sub quibus aequalia latera subtendentur.

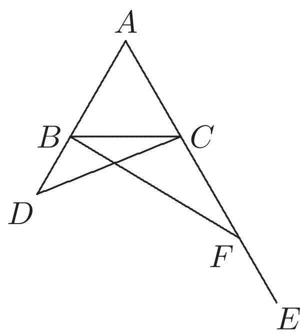
. . .

[*43*]

. . .

Theor. 2. Propos. 5.

Isoscelivm triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt aequales: Et productis aequalibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se aequales erunt.



[*Fig. 13*]

Sit triangulum Isosceles ABC, in quo latera AB, AC, inter se sint aequalia. Dico angulos ABC, ACB, supra basim BC, aequales inter se esse: Item si latera aequalia AB, AC, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque DBC, ECB, infra basim eandem BC, esse aequales.

. . .

2–5 Quae aequalibus eodem modo determinantur aequalia sunt.

13–16 Cum enim in constructione figurae B et C se habeant eodem modo, etiam quae inde resultant quoad B et quoad C se eodem modo habebunt.

[*44*]

...

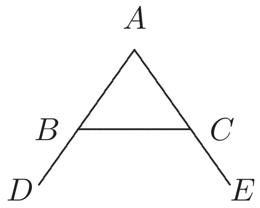
Scholivm.

...

[*45*]

...

Veritas porro huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoque demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio 4.



[*Fig. 14*]

Sint enim rursum in triangulo ABC, duo latera aequalia AB, AC, quae producantur quantumlibet vsque ad D, & E. Dico tam angulos ABC, ACB, supra basim BC, inter se aequales esse, quam angulos DBC, ECB, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC, triangulo ACB, (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt rectae AB, rectae AC, superponatur, cadet punctum B, in C, ob aequalitatem laterum AB, AC. Quo posito, cadet recta AC, super rectam AB, ob aequalitatem, siue identitatem anguli A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter aequalitatem laterum AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo ECB, [a] congruet, ac proinde tam illi, quam hi, inter se aequales erunt.

...

[*60*]

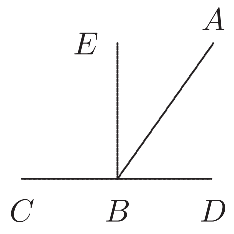
8 recte

18 *Anmerkung im Druck:* a 8. pronun.

...

Theor. 6. Propos. 13.

Cvm recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis aequales efficiet.



[*Fig. 15*]

Recta linea AB, consistens super rectam CD, faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur AB, fuerit perpendicularis ad CD, [b] erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis aequales. [c] Educatur enim BE, ex B, perpendicularis ad CD, vt sint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD, [d] aequalis est duobus angulis DBA, ABE; [e] erunt, apposito communi angulo recto EBC, duo recti EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC, aequales. Rursus quia [f] angulus ABC, duobus angulis ABE, EBC, aequalis est; [g] erunt apposito communi angulo ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, aequales. Sed eisdem his tribus ostendimus, aequales etiam esse duos rectos EBD, EBC; quae autem eidem aequalia, [h] inter se sunt aequalia. Duo igitur anguli ABC, ABD, aequales sunt duobus rectis

---

5 $CBA + ABD = CBE + EBA + ABD = CBE + EBD$

7 *Anmerkung im Druck:* b 10. def

9 *Anmerkung im Druck:* c 11. pri.

10 *Anmerkung im Druck:* d 19. pro

11 *Anmerkung im Druck:* e 2. pron

12 *Anmerkung im Druck:* f 19. pro

13 *Anmerkung im Druck:* g 2. pro.

16 *Anmerkung im Druck:* h 1. pron

EBD, *EBC*. Cum ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

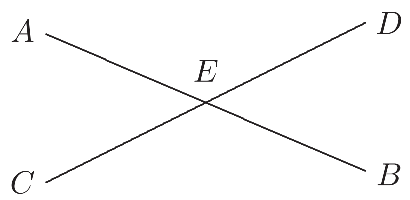
...

[*62*]

...

Theor. 8. Propos. 15.

Si duae rectae lineae se mutuo secuerint, angulos ad verticem aequales inter se efficient.



[*Fig. 16*]

Secent se duae rectae AB, CD, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse aequales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED. Quoniam recta DE, consistit super rectam AB, [a] erunt duo anguli AED, DEB, aequales duobus rectis. Rursus quia recta BE, super rectam CD, consistit, erunt eadem ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis aequales. Cum igitur [b] omnes recti anguli inter se sint aequales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, aequales. Dempto igitur communi angulo DEB, [c] remanebit angulus AED, angulo BEC aequalis. Eadem ratione confirmabatur, angulos AEC, BED, inter se aequales esse.

10–12 $AED + DEB = DEB + BEC$ per 13 primi. Ergo $AED = BEC$.

12 *Anmerkung im Druck:* a 13. pri.

14 *Anmerkung im Druck:* b 12. pro

16 *Anmerkung im Druck:* c 3. pro.

Nam duo anguli *AEC*, *CEB*, [d] qui duobus sunt rectis aequales, aequales erunt duobus quoque angulis *DEB*, *BEC*, qui duobus rectis sunt aequales. Ablato igitur angulo communi *BEC*, [e] remanebunt anguli *AEC*, *BED*, aequales inter se. Si igitur duae rectae lineae se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

...

[*63*]

...

Theor. 9. Propos. 16.

Cvivscvnqve trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

[*64*]

...

Scholivm.

...

[*65*]

...

Ex Proclo.

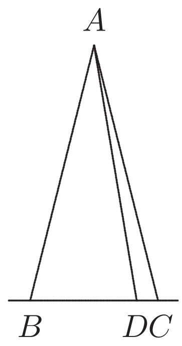
Seqvitvr ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemque lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se aequales.

---

1 *Anmerkung im Druck:* d 13. pri.

3 *Anmerkung im Druck:* e 3. pron

18 f. His sequitur circulum et rectam non posse sibi occurrere in plus quam duobus punctis.



[*Fig. 17*]

Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineae rectae aequales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC, sunt aequalia, [c] erunt anguli ACB, & ABC, aequales super basin BC. Rursus quia latera AB, AD, sunt aequalia, [d] erunt anguli ADB, & ABD, super basin BD, aequales. Quare cum vterque angulus ACD, & ADB, aequalis sit angulo ABC, [e] erit angulus ADB, aequalis angulo ACD, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineae rectae, quam duae, inter se aequales, ex A, ad BC, possunt duci. Quod est propositum.

. . .

[*84*]

. . .

Theor. 19. Propos. 28.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, aequalem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis aequales: Parallelae erunt inter se ipsae rectae lineae.

. . .

---

3 *Anmerkung im Druck:* c 5. pri.

4 *Anmerkung im Druck:* d 5. pri.

6 *Anmerkung im Druck:* e 1. pron

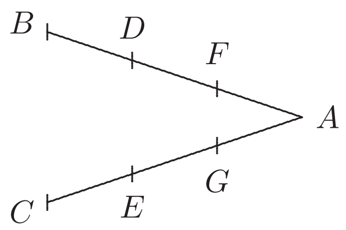
[*85*]

...

Scholivm.

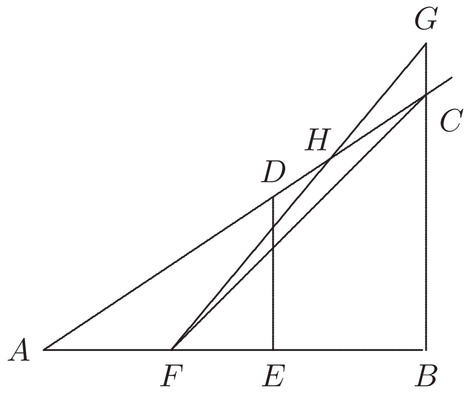
Iamdvdvm pronunciatum tertium decimum a Principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propos. 29. Cum multis aliis illi ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, operae pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quae ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deind eidem nos pronunciatum magis accurate, atque euidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonstret, duo praemittit. Primum est.

Si ab vno puncto duae rectae lineae angulum facientes infinites producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



[*Fig. 18*]

Exeant a puncto A, duae rectae AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G. Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectae lineae AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsae producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posses eorum distantia; igitur & lineae ipsae vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinite iam esse productae. Quare si dictae lineae AB, AC, producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de coelo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum. Qvod autem rectae AB, AC, quo longius protrahantur, eo magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare, [*86*] quam F, & G. Item B, & C, plus quam D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus.



[*Fig. 19*]

Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in recta AC, acceptis, ad AB, perpendiculares CB, DE, quae distantias punctorum C, D, a recta AB, metientur, cum sint minima omnium rectarum ex C, D, ad AB, ductarum, vt in coroll. propos. 19. ostendimus. Dico CB, maiorem esse, quam DE; ac proinde plus distare rectam AC, a recta AB, in puncto C, remotiore, quam in puncto propinquiore D. Si enim CB, non est maior, quam DE, erit vel aequalis, vel minor: Sit primum aequalis & rectae AE, abscindatur aequalis BF, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturque recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, BD, trianguli AED, duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, aequalia sunt, vtrumque vtrique, angulosque continent aequales, vtpote rectos: [a] erunt & bases AD, FG, & anguli DAE, CFB, inter se aequales. Igitur externus angulus GFB, interno DAE, aequalis erit; [b] quod est absurdum. Vel cum externus angulus CFB, interno DAE, aequalis sit, [c] parallelae erunt AC, FC, quod etiam absurdum est, cum in C, concurrant.

Sit deinde CB, minor quam DE, si fieri potest, & producta BC, fiat BG, ipsi DE, aequalis, iungaturque recta FG. Quia igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BG, aequalia sunt, vtrumque vtrique, angulosque continent aequales, puta

12 *Anmerkung im Druck:* a 4. pri.

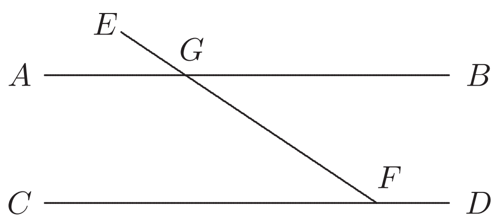
13 *Anmerkung im Druck:* b 16. pri.

14 *Anmerkung im Druck:* c 27 primi.

rectos; [d] erunt & bases AD, FG, & anguli EAD, BFG, inter se aequales. Igitur externus angulus BFG, interno EAD, aequalis erit, quod est absurdum. Vel cum externus angulus BFG, interno EAD, aequalis sit, [e] erunt AC, FG, inter se parallelae, quod absurdum est, cum se mutuo secent in H. Quocirca BC, ipsa ED, maior erit, cum neque aequalis, neque minor esse possit, vt demonstratum est.

Secvndvm, quod Proclus praemittit, huiusmodi est.

Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quaedam recta linea, reliquam quoque productam secabit.



[*Fig. 20*]

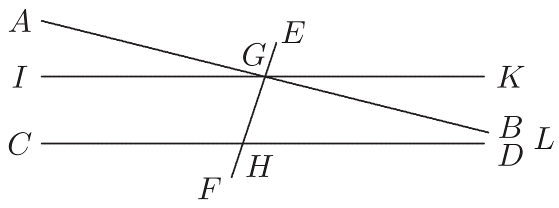
Sint duae parallelae AB, CD, & recta EF, secet ipsam AB, in G. Dico rectam EF, si producatur, secturam esse quoque ipsam CD. Quoniam duae rectae GB, GF, in puncto G, angulum faciunt, si producantur infinite, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela AB, a parallela CD, distat, cum hac distantia sit finita, alias enim non essent lineae parallelae. Quare quando distantia GB, a GF, maior iam fuerit ea, qua inter parallelas est, necesse est rectam GF, produ-[*87*]ctam secuisse rectam CD. Nam quamdiu GF, continebitur inter duas parallelas, minori distantia a GB, remouebitur, quam CD, ab eadem GB, vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertium decimum pronunciatum.

Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes, angulos duob. rectis minores faciat; Duae illae rectae lineae infinite productae sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duob. rectis minores.

---

1 *Anmerkung im Druck:* d 4. pri.

3 *Anmerkung im Druck:* e 27. primi.



[*Fig. 21*]

In rectas *AB*, *CD*, incidens recta *EF*, faciat internos angulos ad partes *B*, & *D*, vt *BGH*, *DHG*, duobus rectis minores. Dico rectas *AB*, *CD*, coire ad easdem partes *B*, & *D*. Quoniam enim duo anguli *BGH*, *DHG*, minores ponuntur esse duobus rectis: Sunt autem duo anguli *DHG*, *DHF*, [a] duobus rectis aequales: Erunt duo anguli *DHG*, *DHF*, maiores duobus angulis *DHG*, *BGH*. Ablato ergo communi angulo *DHG*, remanebit angulus *DHF*, [b] maior angulo *BGH*. Si igitur ad rectam *FG*, & ad punctum, *G*, [c] constituatur angulus *KGH*, aequalis angulo *DHF*, cadet *GK* supra *GB*, [d] secabitque producta rectam *AB*. Quoniam igitur in duas rectas *IK*, *CD*, recta incidens *EF*, facit angulum externum *DHF*, aequalem interno, & opposito *KGH*. [e] Erunt rectae *IK*, *CD*, parallelae. Secat autem recta *AB*, ipsam *IK*, in *G*. Producta igitur secabit quoque ipsam *CD*, vt demonstratum est. Quare *AB*, cum *CD*, conueniet ad partes *B*, & *D*, nimirum in puncto *L*. quod est propositum.

Hac ergo ratione conatur Proclus Axioma tertiumdecimum demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco praemisit, aeque dubium, & obscurum esse videtur, atque illud Axioma, afferemus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius a Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia, sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quae semper sibi mutuo fiunt propinquiores tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duae rectae, in quas recta indidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus

---

5 *Anmerkung im Druck:* a 13. pri.

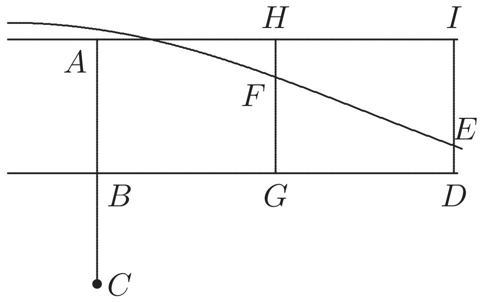
7 *Anmerkung im Druck:* b 5. pronun.

7 *Anmerkung im Druck:* c 23. primi.

8 *Anmerkung im Druck:* d 11. pronun.

10 *Anmerkung im Druck:* e 28. primi.

sit, & alter acutus: Hae enim sibi mutuo appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus. Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quod dari possunt in eodem plano duae lineae, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoeidos, sibi semper muto magis ac magis appropinquantes, quae tamen nunquam coeant, licet in infinitum ambae producantur. quorum illud ab Apollonio Pergaeo, hoc vero a Nicomede demonstratum est: Ita quoque non videtur sine demonstratione ad-[*88*]mittendum esse, (quamquam verissimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, si in infinitum producantur ambae, licet semper magis ac magis inter se distent, vt nos supra demonstrauimus. Nam exhiberi possunt duae lineae in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quae conchoeideos appellatur a Nicomede, semper magis inter se distantes, quarum tamen distantia datam quamcunque rectam lineam nunquam superet, aut exaequet, licet ambae extendantur in infinitum.



[*Fig. 22*]

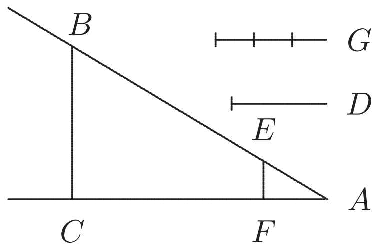
Data namque sit recta AB. Dico describi posse lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earum nunquam aequalem esse rectae AB, aut maiorem, quantumuis producantur ambae. Producta enim recta AB, quantumlibet vsque ad C, ducatur per B, ad AC, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem AB, describatur linea conchoideos AE, inflexa quam tamen cum ea conueniat, vt a Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta AI, ad AC, perpendicularis, [a] quae ipsi BD, parallela erit. Postremo ex duobus punctis HI, vtcunque in

10–14 NB.

22 *Anmerkung im Druck:* a 28. primi.

recta AI, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares HG, ID, [b] qua parallelae, [c] atque adeo aequales inter se erunt, angulosque [d] constituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate 13. non penderent, aut etiam si pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud iam sit demonstratum ante propos. 29. huius lib. vbi primum vsus illius apparere incipit, vti vere a nobis mox ante propos. 29. demonstrabitur. Itaque quoniam FG, maior est, quam ED, vt Nicomedes demonstrauit, erit FH, reliqua minor, quam reliqua EI. Magis ergo inter se distant lineae AI, AE, in punctis I, E, quam in punctis H, F; atque ita semper eas probabimus magis ac magis distare, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit, quam recta AB, hoc est, quam perpendicularis ex recta AI, ad rectam BD, demissa, cum inflexa linea AE, ad rectam BD, numquam perueniat, vt demonstratum est a Nicomede.

Scio principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quae ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo.



[*Fig. 23*]

Contineant duae rectae AB, AC, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex [*89*] quouis puncto E, in recta AB, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quae si maior fuerit, quam D, constat propositum: si vero non est maior, sumatur eius multiplex proxime maior, quam D, nempe G. Sumpta autem AB, ipsius AE, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius EF, demittatur ex B, ad AC, perpen-

1 *Anmerkung im Druck:* b 28. primi.

1 *Anmerkung im Druck:* c 34 primi.

2 *Anmerkung im Druck:* d 29. primi.

dicularis BC, quam dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim [a] est, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF. (quod ex coroll. propos. 4. lib. 6. Euclid. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas BC, EF, quae [b] parallelae sunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad EF: erit ita multiplex BC, ipsius EF, vt multiplex est AB, ipsius AE, hoc est, vt multiplex est G, ipsius EF. Cum ergo BC, & G, aeque multiplices sint ipsius EF, ipsae erunt inter se aequales. Est autem ex constructione, maior G, quam D. Igitur & BC, distantia puncti B, a puncto C, maior erit, quam recta D, data. Quod est propositum.

Verum demonstratio haec sine proprietatibus linearum parallelarum, quae axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quae cum ita sint, sedulo dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex iis solum, quae ante propos. 29. primi libri demonstrata sunt. Ante enim propos. 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, et si obnixe illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quae sequitur, excogitauimus. Primum autem praemittenda quoque sunt nonnulla, quae licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessario, multo tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum praebere possimus. Primum sit huiusmodi.

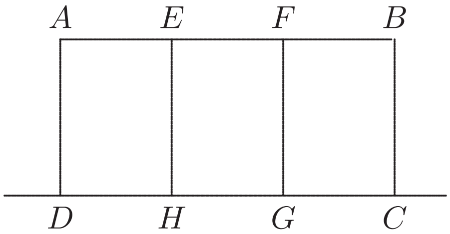
I.

Linea, cuius omnia puncta a recta linea, quae in eodem cum ea plano existit, aequaliter distant, recta est.

---

1 *Anmerkung im Druck:* a 4. sexti.

3 *Anmerkung im Druck:* b 28. pri



[*Fig. 24*]

Vt si omnia puncta lineae AB, a recta DC, aequaliter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissae aequales sint (perpendicularis enim quaelibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum minima, ex corol. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, a quo ducta est, metitur.) erit AB, linea recta. Hoc autem ex defin. lineae rectae liquido constare potest. Nam si omnia puncta lineae AB, aequaliter distant a recta DC, ex aequo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extre-[*90*]mis s u r s u m , a u t d e o r s u m , vel huc atque illuc deflectendo subsultabit, nihilque in ea flexuosum reperietur, sed aequabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta DC. Alioquin non omnia eius puncta aequalem a recta DC, distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque vero cogitatione apprehendi potest, aliam lineam praeter rectam posse habere omnia sua puncta a recta linea, quae in eodem cum illa plano existat, aequaliter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concesso, vna cum ijs, quae vsque ad propos. 29. huius lib. ostensa sunt, axioma 13. demonstrabimus, adeo clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoque sanae mentis illud negare possit. Aut certe citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longe facilius et quilibet assentiatur, quam illi axiomati 13. Euclidis.

Idem prorsus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta aequaliter a circulari distant, id est, a qua omnes rectae in circularem lineam ad aequales angulos incidentes aequales sunt, circularis quoque est; ita

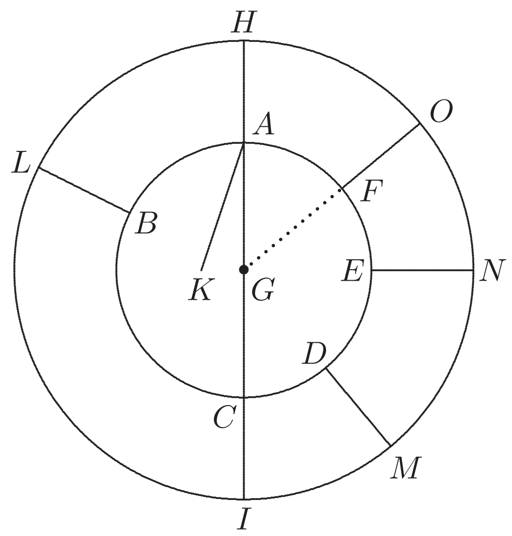
---

8 Illud sursum aut deorsum supponit jam rectam.

18–220,3 Non semper lineae aequidistantes ejusdem sunt natura; aequidistans parabolae parabola non est.

32,**22** f. aequidistans parabolae: Vgl. VII, 7 N. 3, 53 u. 54.

vt naturam circularis lineae, a qua aequali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea aequaliter semper a recta linea distans, naturam lineae rectae, cui semper aequidistat, induit, propterea que recta est, vt diximus. Quod autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfecte circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos aequales; & contra, rectam, quae aequales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire.



[*Fig. 25*]

Sit igitur circulus $ABCDEF$, cuius centrum G. Dico rectam GC, ex centro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quam externos ICB, ICD, inter se aequales. Producta enim IG, vsque ad A, si semicirculus ABC, circa diametrum AC, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo AEC, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se aequales. Quod si quis dicat, vnum semicirculum alterum intersecare, ducenda erit recta linea ex centro G, secans vtramque circumferentiam, colligendumque partem toti esse aequalem, nimirum semidiametrum vsque ad interiorem circumferentiam, semidiametro ad exteriorem vsque circumferentiam ductae, quod absurdum est. Anguli igitur ad C, tam interni, quam externi inter se congruent, ac proinde aequales erunt. Efficiat iam recta HAK, aequales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta GA, quae ex proxime demonstratis angulos GAB, GAF, constituet aequales. Non ergo aequales sunt KAB, KAF. Quod est contra hypothesin.

Hoc ostenso, ambiat inflexa linea *HLIMNO*, circularem li-[*91*]neam *ABCDEF*, omniaque eius puncta ab hac aequaliter absint, id est, omnes rectae ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientutesque angulos aequales, sint inter se aequales, cuiusmodi sunt HA, LB, IC, MD, NE, OF. Hae enim cum, vt demonstratum est, per centrum transeunt, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimae; (Hoc enim demonstratum est ab Eucl. propos. 8 lib. 3. quae solum ex propositionibus, quae 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atque adeo eorum distantias a subiecta linea circulari metientur. Dico linea *HLIMNO*, esse circularem. Cum enim omnes illae, vt proxime ostendimus, per centrum G, transeant; si aequalibus HA, OF, addantur aequales AG, FG, erunt totae HG, OG, aequales; eademque ratione omnes aliae ex linea inflexa *HLIMNO*, ad G, ductae aequales erunt & rectis HG, OG, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod praemisimus, sequitur secundum: videlicet.

II.

Si recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoque rectam.

. . .

---

15 in eodem plano

28 (CC409B). EXTRACTS FROM KERSEY'S ELEMENTS OF ALGEBRA [1709 – 1716]

Überlieferung: *A* Abschrift von unbekannter Hand aus J. Kersey, *The Elements of that Mathematical Art Commonly Called Algebra* mit Zusätzen von Leibniz (*LiA*): LH 35 XII 2 Bl. 110–111. 1 Bog. 2°, 2 S. auf Bl. 110 r° u. 111 r°, Rückseiten beider Blätter leer. — Auf Bl. 111 r° u. 110 v° der schwache und seitenverkehrte Löschabdruck eines bislang nicht identifizierten, in lateinischer Sprache verfassten Schriftstücks, das wohl von derselben unbekannten Hand angefertigt worden ist. Nur einzelne Worte sind lesbar, etwa die Begriffe *Echo artificiale*, *tuba stentorophonica* oder *monochordo*.
Cc 2, Nr. 409 B

Datierungsgründe: Der erste, die Bücher 1 und 2 umfassende Band von Kerseys *Elements of Algebra* erschien im Sommer 1673, der zweite Band mit den Büchern 3 und 4 im Herbst 1674. Ein Nachdruck des ersten Bandes wurde 1709 veröffentlicht. Auf den im Druck befindlichen ersten Band war Leibniz bereits im April 1673 durch Oldenburg hingewiesen worden (vgl. III, 1 N. 13 S. 66). Nachdem der Band erschienen war, wurde er in den *Philosophical Transactions* VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6073 f. lobend besprochen. Die Vermutung liegt nahe, dass das Exzerpt in diesem Zusammenhang und ungefähr zu dieser Zeit entstanden ist. Dass die Abschrift nur Beispiele aus den Büchern 1 und 2 enthält, lässt sich in diesem Falle durch die Annahme erklären, dass sie vor Erscheinen des zweiten Bandes verfasst wurde. Eine solche Datierung gewinnt weiter an Plausibilität, wenn man berücksichtigt, dass sich im Löschabdruck eines anderen Manuskriptes auf dem Träger unseres Stückes der Begriff *tuba stentorophonica* entziffern lässt. Dieses auf deutsch auch als Sprechtrompete bezeichnete Instrument, ein erstes Megaphon, hatte der Engländer Samuel Morland erfunden und in seinem 1671 in London erschienenen Werk *Tuba stentoro-phonica. An Instrument of Excellent Use* beschrieben. Im selben Jahr machte sich Leibniz eine kurze Notiz hierzu (vgl. VIII, 1 N. 58), und er hielt womöglich bereits 1672 das Werk in seinen Händen (ebd., N. 62; vgl. auch VIII, 3 N. 2). — Einer Datierung auf diesen Zeitraum steht jedoch ein gewichtiges Argument entgegen: Die Abschrift enthält einen Fehler in Form der Vertauschung zweier Ziffern einer 13-stelligen Zahl (S. 224 Z. 20). Derselbe Fehler ist auch im Nachdruck von 1709 zu finden, die Originalausgabe von 1673 weist ihn dagegen nicht auf. Eine zufällige Übereinstimmung kann hier ausgeschlossen werden. Zudem muss das Werk Leibniz, wie seine eigenhändigen Hinzufügungen zeigen, selbst vorgelegen haben, was für die Jahre 1673 und 1674 als unwahrscheinlich erachtet wird. Die einleuchtendste Annahme lautet daher, dass Leibniz eine Abschrift aus dem Nachdruck von 1709 anfertigen ließ. Da der Nachdruck nur Buch 1 und 2 umfasst, würde dies auch erklären, warum die Abschrift keine Beispiele aus den Büchern 3 und 4 enthält. Die Übernahme des Fehlers ließe sich ansonsten nur durch sehr spekulative Annahmen erklären, etwa durch die Verwendung einer unkorrigierten Druckfahne, von welcher der Fehler dann den Weg in den Nachdruck gefunden haben müsste. Zwar findet sich in der Abschrift bevorzugt die auch in der Originalausgabe verwendete Schreibweise *Summ*, nicht *Sum* wie im Nachdruck. Statt durch eine Abschrift aus der Orginalausgabe könnte man dies aber auch erklären, indem man einen im Englischen ungeübten, deutschsprachigen Schreiber annimmt. Hierauf verweist auch die Verschreibung *de* anstatt *the* (S. 223 Z. 17). Somit gibt die Vertauschung der beiden Ziffern in der Abschrift wie im Nachdruck letztlich den Ausschlag, das Stück auf 1709 oder später zu datieren.

Kersey *Algebra* lib. 1. c. 10
Collection of Questions

		Answers by letters	Answers by *nombres*
		$a; e$	$3, 2$
1	The Sum of the two Quantities proposed is	$a+e$	5
2	The Difference, or the excess of the greater above the less, is	$a-e$	1
3	The Product of their Multiplication is	ae	6
4	The Quotient of the greater divided by the less is	$\frac{a}{e}$	$\frac{3}{2}$
5	The Quotient of the lesser divided by the greater is	$\frac{e}{a}$	$\frac{2}{3}$
6	The Summ of their Squares is	$aa+ee$	13
7	The Difference off their Squares is	$aa-ee$	5
8	The Sum of the Summ and Difference of the two Quantities first proposed is	$2a$	6
9	The Difference of their Summ and Difference is	$2e$	4
10	The product of the Multiplicationof the Summ by the Difference is	$aa-ee$	5
11	The Square of the Summ is	$aa+2ae+ee$	25
12	The Square of the Difference is	$aa-2ae+ee$	1
13	The Summ of the Squares of the Summ and Difference is	$2aa+2ee$	26

1–4 Kersey ... nombres *erg. LiA* 10 $\frac{\text{a}}{\text{e}}$ | $\frac{1}{2}$ *ändert Hrsg.* | *A* 17 of | de *ändert Hrsg.* | Summ *A*

3 f. Answers: Die von Leibniz ergänzten Spaltenüberschriften finden sich als *Answers by Letters, by Numbers* in J. Kersey, *Elements of Algebra*, 1673 u. erneut 1709, Book 1, S. 47. Das Kapitel 10, dem die Tabelle entnommen ist, trägt dort den Titel *A Collection of easie Questions to exercise the Rules hitherto delivered* (ebd.). Das Werk hat Leibniz also vorgelegen.

14	The Difference between [the] Square of the Summ and the Square of the Difference is	$4ae$	24
15	The Square of the product of the multiplication of the two Quantities is	$aaee$	36

[*Tab. 1*]

Potentia Quinti Gradus excitata

	2	8	5	Root proposed
$a = 20$	32	00000		$aaaaa$
$e = 8$	64	00000		$5aaaae$
	51	20000		$10aaaee$
	20	48000		$10aaeee$
	4	09600		$5aeeee$
		32768		$eeeee$
$a = 280$	172	10368	00000	$aaaaa$
$e = 5$	15	36640	00000	$5aaaae$
		54880	00000	$10aaaee$
		980	00000	$10aaeee$
		8	75000	$5aeeee$
			3125	$eeeee$
	188	20876	78125	fifth power desired

[*Tab. 2*]

6 | Example 2 of Sect. IV *gestr. A* | | Potentia ... excitata *erg. LiA* |

5 Tab. 1: Ebd., Book 1, S. 47 f. 20 fifth power: Im Ergebnis sind die Ziffern 2 und 0 vertauscht; richtig wäre 1 880 287 678 125. In der 1709 nachgedruckten Ausgabe des Werkes findet sich auf S. 146 exakt derselbe Fehler, die Originalausgabe von 1673 weist hingegen diesen Fehler nicht auf. 21 *Tab. 2*: Ebd., Book 2, S. 146, Example 2 of Sect. IV. — Auf S. 145 erläutert Kersey sein Vorgehen.

Radix 5^{ti} *gradus extracta*

	172	10368	(28 Root
	32	00000	$a\,a\,a\,a\,a$
	140	10368	Resolvend
$a = 20$	8	00000	$5\,a\,a\,a\,a$
		80000	$10\,a\,a\,a$
		4000	$10\,a\,a$
		100	$5\,a$
	8	84100	Divisor
$e = \ \ 8$	64	00000	$5\,a\,a\,a\,a\,e$
	51	20000	$10\,a\,a\,a\,e\,e$
	20	48000	$10\,a\,a\,e\,e\,e$
	4	09600	$5\,a\,e\,e\,e\,e$
		32768	$e\,e\,e\,e\,e$
	140	10368	Ablatitium
	000	00000	

[*Tab. 3*]

1 Radix ... extracta *erg. LiA* 2 171 10368 *A ändert Hrsg.* 15 Ablativum *A ändert Hrsg.*

17 *Tab. 3*: Ebd., Book 2, S. 157. — An eben diesem Beispiel 17 210 368 erläutert Kersey hier auch sein Verfahren, die fünfte Wurzel aus einer gegebenen Zahl zu ziehen: Als erstes sucht man in einer ebd., S. 156 abgedruckten Tabelle die größte Zahl, deren fünfte Potenz kleiner als 172 ist (also die 2) und schreibt sie als erste Ziffer der Wurzel rechts an. Dann bildet man a, indem man hieran eine 0 anhängt, und zieht a^5 von der gegebenen Zahl ab. Die Differenz wird als Resolvend bezeichnet. Nun formuliert man den Divisor $5a^4+10a^3+10a^2+5a$ und teilt den Resolventen durch ihn. Da im vorliegenden Beispiel der Quotient größer als 9 ist, probiert man zunächst in einer Nebenrechnung aus, wie groß das sogenannte Ablatitium $5a^4e+10a^3e^2+10a^2e^3+5ae^4+e^5$ für $e=9$ wird. Da das Ablatitium in diesem Fall größer als der Resolvend ist, verwirft man diesen Ansatz und wählt als nächstes $e=8$. Nun ist die Differenz von Resolvend und Ablatitium gleich 0, die 8 wird als zweite Ziffer der Wurzel rechts angeschrieben und die Wurzel ist gezogen.

The Cubick Root of $27a^6-54[a]^5+171a^4-188a^3+285aa-150a+125$, will be found $3aa-2a+5$, and the operation stands thus[:]

$$
\begin{array}{l|l|l}
\text{Cube} & 27a^6-54a^5+171a^4-188a^3+285aa-150a+125 & (3aa-2a+5.\ \text{Root} \\
\text{Subtract} & 27a^6 & \\
\hline
\text{Remainder} & \quad -54a^5+171a^4-188a^3+285aa-150a+125 & \\
\text{Divisor} & \quad +27a^4+\ 9a^2) & \\
\hline
\text{Subtract} & \quad -54a^5+\ 36a^4-\ \ 8a^3 & \\
\text{Remainder} & \qquad\qquad +135a^4-180a^3+285aa-150a+125 & \\
\hline
\text{Divisor} & \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad +\ 27a^4-\ 36a^3+\ 12aa \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\ \ 9aa-\ \ 6a \end{array}\right. & \\
\hline
\text{Add these} & \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad +135a^4-180a^3+\ 60aa \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +225aa-150a \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +125 \end{array}\right. & \\
\hline
\text{Subtract} & \qquad\qquad +135a^4-180a^3+285aa-150a+125 & \\
\hline
\text{Remainder} & \qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

[*Tab. 4*]

225,17–226,1 *Tab. 3* | Example 3 *gestr.* | The Cubick *A* 14 Subtract *erg. LiA* 15 Remainder 0 0 0 0 0 *erg. LiA*

---

16 *Tab. 4*: Ebd., Book 2, S. 162, Example 3. — Auf S. 161 erklärt Kersey sein Verfahren zum Ziehen der Kubikwurzel aus einem geeigneten Polynom. Im vorliegenden Beispiel geht er wie folgt vor: Zunächst wird aus dem ersten Glied des geordneten Polynoms 6. Grades die Kubikwurzel gezogen und das Ergebnis A (hier $3a^2$) rechts angeschrieben. Dann wird dieses erste Glied bzw. A^3 vom Polynom abgezogen, man erhält ein Polynom 5. Grades. Als nächstes wird ein sogenannter Divisor formuliert: Er beträgt $3A^2+3A$ (hier $27a^4+9a^2$). Das erste Glied des geordneten Polynoms 5. Grades wird nun durch das erste Glied des Divisors $3A^2$ (hier durch $27a^4$) geteilt und das Ergebnis B (hier $-2a$) wird ebenfalls rechts angeschrieben. Mit Hilfe des Divisors wird sodann ein Subtrahend aufgestellt, nämlich $3A^2B+3AB^2+B^3$. Dieser wird von dem Polynom 5. Grades abgezogen, man erhält ein Polynom 4. Grades. Nun wird der zweite Divisor formuliert, nämlich $3(A+B)^2+3(A+B)$. Das erste Glied des Polynoms 4. Grades wird durch das erste Glied dieses Divisors, also wiederum durch $3A^2$ geteilt und das Ergebnis C (hier 5) wird rechts angeschrieben. Damit ist die Aufgabe gelöst. Als Probe wird noch ein weiterer Subtrahend, nämlich $3(A+B)^2C+3(A+B)C^2+C^3$, aufgestellt und vom Polynom 4. Grades abgezogen. Ist die Aufgabe richtig gelöst, bleibt dabei kein Rest.

29 (CC1019). DE RADICIBUS IMAGINARIIS
[1677 – 1716]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 57. 1 Bl. 4°. 2 S. quer beschrieben.
Cc 2, Nr. 1019

Datierungsgründe: [noch]

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{rrr}
x-1 & 49 & 27 \\
x-2 & 7 & 9 \\
\hline
-2x+2 & 343 & +243 \\
x^2-1x & & -343 \\
\hline
x^2-3x+2 & & -100 \\
x+3 & & \\
\hline
+3x^2-9x+6 & & \\
x^3-3x^2+2x & & \\
\hline
x^3 \quad * \quad -7x+6 & &
\end{array}$$

$$\boxed{3}\ \overline{a+\sqrt{-b}} \text{ aequ. } \begin{array}{lll} +a^3 & +3a^2 & \sqrt{-b} \\ -3ab & -\ b & \sqrt{-b} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
1 & +\ m & \sqrt{-n} \\
1 & +\dfrac{mn}{b} & \sqrt{\dfrac{-nb^2}{n^2}} \\
-3 & +\dfrac{10}{3} &
\end{array}$$

a^3-3ab aequ. 1
$+3a^2b-\ b^2$ aequ. mn^2

a^2 aequ. $\dfrac{1+3ab}{a}$ aequ. $\dfrac{1}{a}+3b$ aequ. $\dfrac{mn^2+b^2}{3}$. Ergo $31+9ba$ aequ. $\overline{mn^2+b^2}a$ seu $\dfrac{31}{mn^2+b^2-9b}$ aequ. a. et b aequ. $\dfrac{a^3-1}{3a}$ seu b aequ. $\dfrac{1}{3}a^2-\dfrac{1}{3a}$ seu $3b$ aequ. $a^2-\dfrac{1}{a}$. Hinc quia 1 aequ. -3. et m aequ. $+\frac{10}{3}$, et n aequ. $\frac{1}{3}$ si ponamus a aequ. $\frac{1}{2}$. erit b aequ. $\dfrac{\frac{1}{8}-3}{\frac{3}{2}}$

aequ. $\dfrac{\frac{1-24}{8}}{\frac{3}{2}}\ \dfrac{\frac{1-24}{4}}{3}\ \dfrac{-23}{12}$.

$$b \text{ aequ. } mn^2+3a^2b \text{ aequ. } \frac{a^3b-1b}{3a}. \text{ Ergo } \frac{+3mn^2a}{-a^3+1+3a^2}\,\frac{\frac{10}{9}}{\underbrace{-4+3}\sqcap -1}.$$

a aequ. b	aequ. $\dfrac{a^3-1}{3a}$	aequ. $\dfrac{3mn^2a}{1+3a^2-a^3}$
1	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{10\smile 9}{-3+3-1}\sqcap -\dfrac{10}{9}$
$+\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\frac{1}{8}+3}{3\smile 2}\sqcap\dfrac{+1+24,\smile 8}{3\smile 2}\sqcap\dfrac{[25]}{12}$	$\dfrac{5\smile 9}{-3+\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\sqcap\underbrace{-24+12-1}_{-13},\smile 8}\sqcap\dfrac{5\smile 9}{1\smile 8}$
$-\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{-\frac{27}{8}+3}{-\frac{9}{2}}\sqcap\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{15\smile 9}{-3+\frac{27}{4}-\frac{27}{8}\sqcap -24+54-27\sqcap 3\smile 8}\sqcap\dfrac{5\smile 9}{1\smile 8}$

[*Teil 2*]

$1+\sqrt{-3}$

$1+3\sqrt{-3}-9-3\sqrt{-3}$

$+\ 1^3\boxed{+3,1,\sqrt{-3}}+3,1,-3\ \boxed{+-3,\sqrt{-3}}$

$\boxed{3}\ \overline{1+\sqrt{-3}}$ aequ. -8. Quod videtur absurdum, sed non est.

$\underline{\underline{\sqrt[3]{-8} \text{ aequ. } 1+\sqrt{-3}.}}$

$$\boxed{3}\ \overline{1+\sqrt{-3}} \text{ aequ. } 1^3\ \underbrace{\boxed{+3,1,-3}\ \boxed{-3\sqrt{-3}}}_{-8}$$

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{-3}\\ 1+\sqrt{-3}\\ \hline 1-3+2\sqrt{-3}\end{array}\quad \text{aequ.}\qquad \begin{array}{r} -2+2\sqrt{-3}\\ +1+\ \sqrt{-3}\\ \hline -2\sqrt{-3}-\ 6\\ -2+2\sqrt{-3}\qquad\\ \hline -2\quad *\quad -\ 6\end{array}$$

Hinc videmus radicem cubicam ab aliquo numero etiam multiplicem esse, nam, ut radix quadratica ex 4, est $+2$. et -2. ita radix cubica ex -8, et -2. et $1+\sqrt{-3}$.

Nam si x^3+8 aequ. 0. erit una radix $x+2$ aequ. 0. qua si dividatur x^3+8 aequ. 0. fiet:

$$\begin{array}{llll} x^3 & * & *+8 & \text{aequ. } 0\ ⨍\ x^2-2x+4.\\ \boxed{x+2} & & & \\ -\ 2 & x^2 & & \\ & \boxed{x+2} & & \\ & +\ 4 & x & \\ & & \boxed{x+2} & \end{array}$$

Ergo x^2-2x+4 aequ. 0. seu x^2-2x+1 aequ. -3. Ergo $x-1$ aequ. $\mp\sqrt{-3}$.
Ergo x aequ. $1+\sqrt{-3}$. vel x aequ. $1-\sqrt{-3}$.

$$\boxed{3}\ \overline{1-\sqrt{-3}} \text{ aequ. } 1^3\ \underbrace{\boxed{-3,1^2,\sqrt{-3}}+3,1,-3\ \boxed{\underbrace{-,-}_{+}3\sqrt{-3}}}_{-8}$$

VERZEICHNIS DER BILDQUELLEN

Die verwendeten Faksimiles von Ausschnitten aus Handschriften sind den *Digitalen Sammlungen* der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek (GWLB) entnommen. Die Handschriften wurden von der GWLB digitalisiert. Die Digitalisate stehen als gemeinfreie Materialien (Creative Commons Public Domain Mark 1.0) unter den in der Liste angegebenen persistenten URLs zur Verfügung. In den jeweils angegebenen Stücken werden Ausschnitte aus Blättern der folgenden Handschriften benutzt:

LH 35 I 11 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067970

- N. 7 (40835) Bl. 18 r°, 19 r°
- N. 8 (40836) Bl. 21 v°

LH 35 I 14 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067976

- N. 14 (40944) Bl. 73 r°, 74 v°

LH 35 I 15 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067999

- N. 16 (40982) Bl. 3 r°

LH 35 I 19 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00067981

- N. 17 (41009) Bl. 1 r°, 1 v°, 2 v°
- N. 18 (41010) Bl. 3 r°, 3 v°, 4 r°, 4 v°, 5 v°, 6 r°
- N. 19 (41011) Bl. 7 r°, 7 v°, 8 r°, 8 v°

LH 35 III A 25 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068238

- N. 26 (59166a) Bl. 11 r°

LH 35 XII 1 http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068194

- N. 1 (39455) Bl. 228 r°, 228 v°, 229 r°, 229 v°