Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8: Varia mathematica, Nachträge 1672-1676

Version 2

Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8: Varia mathematica, Nachträge 1672–1676. Version 2. Bearbeitet von Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber und Achim Trunk, hrsg. von der Leibniz-Forschungsstelle Hannover der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen beim Leibniz-Archiv der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek. Hannover, 16. November 2021.

ZU DIESEM DOKUMENT

Band 8: *Varia mathematica, Nachträge 1672–1676* von Reihe VII: *Mathematische Schriften* der historisch-kritischen Gesamtausgabe *Gottfried Wilhelm Leibniz: Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von der Preußischen Akademie der Wissenschaften u. a., Darmstadt u. a. 1923 ff. (Leibniz-Akademie-Ausgabe), wird die Edition der mathematischen Schriften aus Leibniz' Jahren in Paris abschließen. Die vorliegende Vorausedition gibt den Stand der Arbeiten an diesem Band vom November 2021 wieder.

Die Handschriften wurden von Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber und Achim Trunk bearbeitet. Davide Crippa (ANR MATHESIS: Édition et commentaires de manuscrits mathématiques inédits de Leibniz (2017–2021), N° ANR-17-CE27-0018-01 AAP generique 2017) stellte eine Transkription von N. 24 zur Verfügung. Die Erfassung der Stücke hat Manuela Mirasch-Müller übernommen, teilweise nach Vorarbeiten von Christopherus Ray'onaldo, Jule Schwarzkopf und Yixiao Wang.

Der Satz erfolgte mit dem von John Lavagnino und Dominik Wujastyk entwickelten TeX-Macropaket EDMAC. Um den Editionstext angemessen wiedergeben zu können, wurde im Leibniz-Archiv eine auf die Anforderungen und Bedürfnisse der Edition zugeschnittene Erweiterung entwickelt. Einige Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris generiert und in TeX weiterbearbeitet.

Vorläufigkeit

Bei den Texten der Vorausedition handelt es sich um vorläufige Ergebnisse. Der fertige Band wird in einigen Aspekten von diesem Preprint abweichen. So werden sich die Anzahl und die Reihenfolge der Stücke und damit auch ihre Nummern und Seitenzahlen ändern. Bei Seitenumbrüchen und Zeilenzählung kann es ebenfalls zu Verschiebungen kommen. Schließlich können sich auch inhaltliche Änderungen ergeben; insbesondere sind die Datierungen noch vorläufig.

Versionierung und Langfristigkeit

Im Lauf der editorischen Arbeit an einem Band können geänderte vorläufige Fassungen als Vorausedition zugänglich gemacht werden. Unterschiedliche Fassungen des Dokuments werden durch Versionsnummern gekennzeichnet und sind so eindeutig identifizierbar.

Wir empfehlen ausdrücklich, stets die aktuellen Fassungen der Bearbeitungen der Stücke zu nutzen. Bitte überprüfen Sie deshalb vor der Nutzung auf unserer Webseite, ob eine neuere Version der *Vorausedition* oder der publizierte Band verfügbar ist.

Die Langzeitarchivierung und die langfristige Bereitstellung der Dokumente erfolgen über die Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, die das Akademien-Vorhaben „Leibniz-Edition“ gemeinsam mit der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften betreut. Die Zitierfähigkeit wird gewährleistet.

Zitierhinweis

Die vollständigen bibliographischen Angaben des Dokuments können der Titelseite entnommen werden. Wir empfehlen, bei Zitaten aus der Vorausedition oder Verweisen auf diese stets die Versionsnummer mit anzugeben. Ein Verweis könnte in einer Kurzform nach dem Muster des folgenden Beispiels gestaltet werden:

> G. W. Leibniz, *De condendis tabulis analyticis* (GWLB LH 35 XIII 1 Bl. 440; vgl. *Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8, Version 1*, dort N. 21 S. 69–70).

Die Signatur der edierten Handschrift findet sich jeweils im Kopf des Stückes.

Kontakt

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Deutschland
Leitung: Michael Kempe
Email: leibnizarchiv@gwlb.de
Internetauftritt: http://www.gwlb.de

ABOUT THIS DOCUMENT

Volume 8: *Varia mathematica, Nachträge 1672–1676* of Series VII: *Mathematische Schriften* (Mathematical Writings) of the historical-critical edition of the complete works of Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz: *Sämtliche Schriften und Briefe*) published by the Prussian Academy of Sciences and other institutions since 1923 (the Academy Edition or *Leibniz-Akademie-Ausgabe*) will complete the publication of the mathematical writings from Leibniz's years in Paris. This *Vorausedition* (advance edition) presents the state of work on this volume as of November 2021.

The texts were prepared from manuscript sources by Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber and Achim Trunk. Davide Crippa (ANR MATHESIS: Édition et commentaires de manuscrits mathématiques inédits de Leibniz (2017–2021), N° ANR-17-CE27-0018-01 AAP generique 2017) provided a transcription of N. 24. Manuela Mirasch-Müller was responsible for inputting the texts, partly on the basis of preparatory work by the editors and by Christopherus Ray'onaldo, Jule Schwarzkopf, and Yixiao Wang.

The TEX macro suite EDMAC, developed by John Lavagnino and Dominik Wujastyk, was used for typesetting. To facilitate an adequate rendition of the published text, additions to this suite specifically adapted to the requirements and needs of the edition were developed at the Leibniz-Archiv. Some of the figures were initially produced using the WINGEOM and WINPLOT programs created by Richard Parris, and completed using TEX.

Preliminary status

The writings presented in this advance edition are preliminary research results. The finished volume can be expected to diverge from them in some respects. Thus, the quantity and the sequence of the texts will change, as will their numbering and pagination. Likewise, there may be shifts in page transitions and line numbers. Finally, changes may occur to the content itself; the dates assigned to the writings, in particular, are only preliminary.

Versions and long-term availability

Over the course of editorial work, successive preliminary versions may be made available as advance editions. Distinct versions of the document are marked with version numbers and are thus unambiguously identifiable.

We strongly recommend always using the most recently published version of our edition of each text. Please check our website before citing this document to ascertain whether a newer version of the *Vorausedition* or the printed volume has become available.

Long-term archiving and availability of our documents are provided by the Göttingen Academy of Sciences and Humanities, which is jointly responsible with the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities for the interacademic project of the Leibniz Academy Edition. Citability will remain assured.

Suggestions for citation

The complete reference of this document can be found on the title page. We recommend always specifying the version number when citing or referring to this advance edition. The following is an example of how such a reference may be provided in an abbreviated form:

> G. W. Leibniz, *De condendis tabulis analyticis* (GWLB LH 35 XIII 1 fol. 440; see *Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8, Version 1*, N. 21 p. 69-70).

The shelfmark for the manuscript source may be found in the introductory notes to each individual text.

Contact

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Germany
Head of department: Michael Kempe
E-mail: leibnizarchiv@gwlb.de
Website: http://www.gwlb.de

INHALTSVERZEICHNIS

VARIA MATHEMATICA, NACHTRÄGE 1672–1676

VARIA MATHEMATICA, NACHTRÄGE 1672–1676

1. OBSERVATIO DE LOGARITHMIS
[Mitte Februar 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 16 Bl. 4. 1 Streifen 19 × 1,5 cm. 2 Z. auf Bl. 4 r$^{\text{o}}$. — Gedr.: III, 1 N. 4 S. 26 Erl.
Cc 2, Nr. 339

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte kurz nach der in III, 1 N. 4 S. 22 f. erwähnten Unterhaltung mit J. Pell vom 12. Februar 1673 entstanden sein. Leibniz erwähnt das Werk von Briggs in seinen *Observata in itinere Anglicano* (VIII, 1 N. 1 S. 4).

Bridgius in *Trigonometria Britannica*, ubi de Logarithmis, observavit, differentias sinuum numerorum imparium crescere, ut ipsos sinus; parium decrescere, puto. Dixit D$^{\text{nus}}$ Pellius.

9 Astronomia Britannica *L ändert Hrsg.*

---

9 observavit: Pell bezog sich vermutlich auf folgende Aussage in H. Briggs, *Trigonometria Britannica*, 1633, S. 36: „Sunt igitur Differentiae Secundae, Quartae, Sextae, Octavae etc. proportionales ipsis Sinubus datis. Et Differentiae Primae, Tertiae, Quintae, Septimae proportionales inter se et Sinubus complementorum Arcuum mediorum.“

2. RÈGLE POUR TROUVER LES FERIES
[Oktober – Dezember 1675]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XII 1 Bl. 182–183. 2 Bl. 8°, die ursprüngl. 1 Bl. 4° bildeten. 1 S. auf Bl. 182, 2 S. auf Bl. 183.
Cc 2, Nr. 1502 B, A

Datierungsgründe: Vgl. die Datierungsgründe zu VII, 3 N. 49. — Eine Datierung auf das Jahr 1675 wird durch den Umstand nahegelegt, dass Leibniz, als er sich mit dem Beispiel 1. Mai 1615 befasst, zunächst versehentlich 1675 schreibt; möglicherweise ist dies also die aktuelle Jahreszahl. Einen konkreten *terminus ante quem* liefert das Stück, indem es den 1. Januar 1676 in der Zukunftsform behandelt. Auch der 15. August 1676 wird in der Zukunftsform behandelt, in einer verworfenen Variante allerdings in der Vergangenheitsform. — Das Wasserzeichen des Papiers ist bislang nur von zwei anderen Trägern bekannt. Auf diesen finden sich VII, 3 N. 49_1, eine gemeinsame Gesprächsaufzeichnung von Leibniz und Tschirnhaus, und VII, 3 N. 49_2, eine Aufzeichnung von Tschirnhaus. Möglicherweise stammt die bei Leibniz seltene Papiersorte also aus Tschirnhausens Besitz. Da Tschirnhaus erst Ende September 1675 in Paris ankommt, können die erwähnten beiden Teilstücke nicht früher entstanden sein. Falls das Papier tatsächlich aus Tschirnhausens Besitz stammt, gilt dies auch für unser Stück, falls nicht, legt die Übereinstimmung der Wasserzeichen zumindest eine Entstehung in derselben Zeit nahe.

[*Erster Ansatz*]

Le cycle solaire peut servir à obtenir la lettre dominicale, et à connoistre ainsi le jour de la semaine qui sera par exemple le premier de mars, ou quelque autre d'un mois donné. Mais on peut l'obtenir plus aisément par la voye suivante: Au nombre 2 soit adjouté le nombre de l'année proposée de l'Epoque vulgaire, et encor le quart du dit nombre de la dite année proposée; negligeant le residu. Divisez la somme de ces trois nombres, $2+b+\dfrac{b}{4}$

19 obtenir *erg. L* 22 proposée *erg. L*

19 cycle solaire: Die Nummer eines Jahres im 28-jährigen Sonnenzirkel setzt Leibniz offenbar als bekannt voraus, sie kann aber auch mühelos berechnet werden (sie entspricht dem Rest, der bei Division der um 9 vergrößerten Jahreszahl durch 28 bleibt). Der dieser Zahl des Sonnenzirkels zugeordnete Sonntagsbuchstabe und der sich aus diesem ergebende Wochentag eines gesuchten Datums lassen sich dann geeigneten Tabellen entnehmen.

par 7, et le residu sera le nombre du jour de la semaine au quel se rencontre le premier de mars, contant le dimanche pour le premier jour de la semaine, lundi pour le second, etc. Quand il ne restera 0 le premier de Mars sera un samedy.

Si l'on demande la même chose de quelque année avant la naissance de nostre seigneur; alors il faut se servir de la regle suivante.

[*Zweiter Ansatz*]

Regle pour trouver les feries ou le jour de la semaine au quel se rencontre un certain jour du mois donné dans l'année donnée

Adjoutons ensemble,

le nombre de l'année donnée	1676	
son quart (negligeant le residu s'il y en a)	419	
et le nombre constant	2	si c'est un bissexte ou 3 si c'est un autre
La Somme	2097	
divisée par 7 laissera	4	

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	
1	2	3	4	5	6	0	Nombres des feries

Donc le premier janvier de l'an 1676 sera un Mercredi.

Maintenant s'il s'agit de trouver la ferie du 15 d'Aoust de l'an 1676, on n'a qu'à prendre le nombre des jours qui sont depuis le 1. janvier inclusivement jusqu'au 15

3 *Über die* 0 *gesetzt:* rien

7 les feries ou *erg. L* 8 f. donnée *(1)* Par exemple le 15 d'Aoust de l'année 1676 estoit un samedi, tachons de le trouuer par nostre regle, qvi est telle: au nombre 2 *(a)* (si c'est un bissexte) *(b)* ou *(2)* Adjoutons *L* 12 constant 2 *(1)* ou 3. au lieux de 2. si l'an est un bissexte. *(2)* si *L* 18 trouuer *(1)* le 15 d'A *(2)* la ferie *L* 19 janvier *(1)* exclusivement jusqv'au 15 d'Aoust *(2)* inclusivement *L*

1 f. premier de mars: Die im ersten Ansatz festgehaltene Regel zur Bestimmung des Wochentages des 1. März eines beliebigen Jahres ist für den julianischen Kalender gültig, jedoch nicht für den in Paris geltenden gregorianischen. 5 regle suivante: Anstatt eine solche Regel zur Bestimmung des Wochentags von Daten, die vor Beginn der christlichen Zeitrechnung liegen, auszuführen, schneidet Leibniz das Blatt unterhalb der letzten Zeile des ersten Ansatzes durch und notiert den zweiten und dritten auf Vorder- und Rückseite des verbleibenden Papierstückes. 18 15 d'Aoust: Bereits G. SCHOTT, *Organum mathematicum*, 1648, *regula* XI, S. 412–415, dient ein 15. August (der des Jahres 1665) als Beispiel für seine Regel zur Berechnung des Wochentages.

d'Aoust exclusivement sçavoir 227, et y adjouter 4, nombre de la ferie du premier janvier, et il proviendra 231, le quel divisé par 7 laisse 0, donc le 15 d'Aoust 1676 est un Samedi.

La regle se proposera plustost ainsi. Il faut adjouter ensemble le nombre 1676, son

---

1 *Hilfsaufstellung zu den beiden Beispielen:*

Janvier	31 •	31	31
Fevrier	28 ou 29	29	28
Mars	31 •	31	31
Avril	30	30	30
May	31 •	31	120
Juin	31 •	31	
Juill.	30	30	
Aoust	31 •	14	
Sept.	30	227	
Oct.	31 •		
Nov.	30		
Dec.	31 •		

2 *Nebenrechnungen zum Beispiel 15. August 1676:*

$$\begin{array}{r} 1676 \\ 419 \\ \underline{227} \\ \underline{2} \\ 2324 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{21} \\ \cancel{2324} \not\int 332, \text{ reste, 0. Nombre de la ferie du Samedy.} \\ \cancel{777} \end{array}$$

1 227. *(1)* et les diviser par 7 le residu *(a)* 7 *(b)* 3 adjouté à 4 *(2)* et y adjouter *L*

---

3 regle: Diese Regel ist, da sie ausfallende Schaltjahre wie 1700 unberücksichtigt lässt, nicht auf den gesamten gregorianischen Kalender seit seiner Einführung 1582 anwendbar, sondern gilt so nur für das 16. und 17. Jahrhundert. Ab 1701 müsste sie angepasst werden, indem man vor der Division durch 7 die Anzahl der ausfallenden Schalttage subtrahiert. **10** Juin: Leibniz verwechselt die Länge der Monate Juni und Juli, was sich auf die Berechnung aber nicht auswirkt.

quart 419, negligeant le residu, le nombre des jours de l'année qui precedent celuy dont on cherche la ferie; et enfin le nombre constant 2 si c'est un bissexte, ou 3 si c'est une autre année; le residu de la somme divisée par 7 donnera le nombre de la ferie du jour qu'on cherche.

[*Dritter Ansatz*]

„Regle pour trouver la ferie ou jour de la semaine au quel se rencontre un certain „jour du mois donné dans l'année donnée de la periode julienne.

Au nombre de l'année julienne adjoutez sa quatrieme partie, ou si le residu passe l'unité, le nombre entier prochainement plus grand, negligeant tousjours la fraction. La

---

4 *Berechnung eines weiteren Beispiels für die Regel aus dem zweiten Ansatz:*

1 Maii 1615. Lundi.

1615		
403	6	4
1	2141 ⨍ 305	2139 ⨍ 305
120	777	777
2139		

10 1 Maii *(1)* 1675 *(2)* 1615 *L*

11–15

(1) 1615	*(2)* 1615	*L*
403	403	
3	1	
120	120	
2141	2139	

---

8 l'année julienne: Gemeint ist die Jahreszahl nach der von J. J. Scaliger, *De emendatione temporum*, 1583, S. 198 eingeführten Zeitrechnung. Ihre Epoche ist Montag, der 1. Januar 4713 v. Chr., gerechnet nach dem julianischen Kalender. **11** 1 Maii 1615: Dass der 1. Mai 1615 ein Montag gewesen sei, führt S. Morland, *Arithmetick Instruments*, 1673 [Marg.], Abschnitt *An Explanation of the Perpetual Almanack*, auf S. 3 als Beispiel zur Benutzung seines Ewigen Kalenders an. Leibniz prüft an diesem Beispiel die im zweiten Ansatz stipulierte Regel: Er addiert die Zahl 3 für Gemeinjahre und führt die Division durch 7 schriftlich aus (Mitte). Da das Ergebnis den Rest 6 aufweist und somit nicht wie von ihm erwartet ausfällt, ändert er den zu addierenden Wert, indem er statt einen Tag mehr als 2 einen weniger addiert. Die korrigierte Summe dividiert er erneut schriftlich (rechts). Doch auch diese Division liefert nicht das gewünschte Ergebnis. Tatsächlich ist das erste Ergebnis richtig: Der Rest 6 besagt, dass es sich beim 1. Mai 1615 des gregorianischen Kalenders um einen Freitag handelte. Dementsprechend war der 1. Mai 1615 des julianischen Kalenders — und eben diesen berechnet der Engländer Morland — ein Montag.

somme augmentée de 5, soit divisée par 7; et ce qui restera sera le nombre de la ferie du premier janvier nouveau style de l'année proposée. Lequel estant connu, il est aisé d'avoir la ferie de tel autre jour que l'on voudra, en adjoutant au nombre de la ferie du premier de janvier le nombre de tous les jours de cette année qui precedent le jour proposé. Cette somme divisée par 7 laissera la ferie demandée. Il est aisé de sçavoir le nombre de tous les jours precedans, parce qu'on sçait le nombre des jours de chaque mois qui est tousjours le même excepté que le fevrier au lieu de 28 en a 29, l'an estant bissexte. Or le bissexte de la Periode Julienne se reconnoist, lors qu'en divisant son nombre par 4, il reste 1.

Exemple

1676 est de la periode julienne	6389
son quart (negligeant la fraction)	1597
Nombre constant	5
	7991

$\cancel{3}4$
$\cancel{7}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{1}$ ⨍ 1141. Reste 4.
$\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}$

Donc le premier janvier de cette année est la quatrieme ferie ou un mercredi.

Si vous voulez la ferie du 15 d'Aoust de la meme année, adjoutez à 4 le nombre 227 qui est celuy des jours de cette année bissextile qui precedent le 15 d'Aoust, et la somme 231 divisée par 7 laisse [0] donc le 15 d'Aoust est la septieme ferie ou un samedi.

2 nouveau style: Die im dritten Ansatz vorgestellte Regel ist nicht ganz korrekt; sie erzeugt die Wochentagssprünge jeweils um zwei Jahre versetzt. So ergibt bereits ihre Anwendung auf den Neujahrstag des folgenden Jahres 1677 unzutreffenderweise, dieser sei ein Donnerstag gewesen; tatsächlich handelte es sich um einen Freitag. Die Regel ließe sich ohne weiteres ertüchtigen — etwa, indem man die Julianische Jahreszahl vor der Addition ihres Viertels um 2 erhöht und nach dieser Addition den ganzzahligen Anteil dann nur noch um 3 vergrößert. Doch auch eine in dieser Form verbesserte Regel wäre, so wie die aus dem zweiten Ansatz, nur bis 1700 gültig.

3. DATUM ET DETERMINATUM
[Erste Hälfte 1676 oder 1678 – 1679 (?)]

Bei den Stücken N. 3_1 und N. 3_2 handelt es sich um Notizen zu den Begriffen *datum* und *determinatum*. Auf dem Träger von N. 3_1 sind auf Bl. 73 v° Namen von französischen Diplomaten notiert. Am 7. November 1672 schreibt Johann Christian von Boineburg an Leibniz, dass er seinen Sohn mit Jean-Antoine d'Avaux, dem *président à mortier*, und mit Honoré Courtin bekannt machen solle (I, 1 N. 194, S. 284). Am 31. März 1673 schreibt Leibniz an Melchior Friedrich von Schönborn, dass er von der Entsendung von Honoré Courtin und Jean-Paul de Barillon, der ihm unbekannt sei, als französische Gesandte zum Kölner Friedenskongress erfahren habe (I, 1 N. 225, S. 330). Nach der Verhaftung von Wilhelm Egon von Fürstenberg verließ die französische Delegation Köln am 16. April 1674 zunächst Richtung Maastricht. Leibniz war spätestens ab Oktober 1674 aufgrund seiner juristischen Beratung für die Familie Fürstenberg in die Causa Fürstenberg involviert (vgl. seine Denkschrift zur Befreiung von Wilhelm Egon von Fürstenberg, I, 1 N. 318, S. 469–473). Für den in Nimwegen ab Ende 1676 stattfindenden Friedenskongress wurde von Ludwig XIV. bereits Ende November 1675 als Mitglied der französischen Gesandtschaft Jean-Antoine d'Avaux bestimmt. Es handelt sich hierbei um den Sohn des am 23. August 1673 verstorbenen *président à mortier*, er war zuvor von Mai 1672 bis November 1674 in Venedig und im Dezember 1675 als Gesandter in Brandenburg tätig. Dass Leibniz Kenntnis von der bereits erfolgten Abreise der französischen Delegation Richtung Nimwegen hatte — Leibniz nennt keine Namen —, belegt sein Brief an Melchior Friedrich von Schönborn von Anfang Januar 1676 (I, 1 N. 266, S. 397). Für die beiden Diplomaten Courtin und Barillon lässt sich erst ab Mai 1676 bzw. ab September 1677 wieder eine offizielle Akkreditierung nachweisen: jeweils für die französische Gesandtschaft in London. Die auf Bl. 73 r° festgehaltene Notiz stimmt inhaltlich überein mit einer Aussage in der von den Herausgebern auf Sommer 1678 bis Anfang 1679 datierten Studie VI, 4 N. 25 (S. 74 Z. 9 f.). N. 3 dürfte vorher verfasst sein. Die Nennung der drei französischen Diplomaten weist auf das erste Halbjahr 1676 hin, eine spätere Entstehung ist aber nicht ausgeschlossen. — N. 3_2 dürfte zur selben Zeit entstanden sein.

3_1. DATUM EST DETERMINATUM COGNITUM

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 9 Bl. 73. Zettel 6,35 × 3,4 cm. 5 Z. auf Bl. 73 r°. Auf Bl. 73 v° Cc 2, Nr. 449: Messieurs d'Avaux[,] Courtin, Barillon. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 545.
Cc 2, Nr. 448

Datum est determinatum cognitum. Ex data diametro circuli datur area quadrati inscripti, sed determinatur area circuli.

3_2. DETERMINATUM IDEM QUOD DABILE

Überlieferung: *L* Notiz: LH 4 V 10 Bl. 56 r° (v° leer). Zettel, rechte untere Ecke abgeschnitten, ca 4,4 × 8,5 cm. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 147.
Cc 2, Nr. 00

D e t e r m i n a t u m idem quod d a b i l e. Ita arcus aliquis positione datus est magnitudine determinatus seu dabilis. Etsi magnitudo ejus non sit cognita.

4. EXPRESSIO UNIUS LITERAE PER MULTAS

4. September 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 230. Ein beschnittenes Blatt ca 13,3 × 17,8 cm. 2 S. Bl. 230 bildete ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 14 (= VI, 3 N. 44) ein vollständiges Bl. 2°. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 4 f.
Cc 2, Nr. 740

Expressio unius literae per multas

4 Sept. 1674

Saepe magnitudinem cognitam incognitamve utile est exprimere certo quodam modo, per multas alias in ejus compositionem ingredientes; quod tum ad numeros, tum ad constructiones Geometricas inventorum jam valorum, et ad incognitas quorum valores non dantur, utiliores prae caeteris eligendas utile est. Omnis autem varietas oriri potest, ex combinatione literarum propositarum, inter se et cum forinsecus assumtis.

Exempli causa, datae sunt literae tres a. b. y. Et quaestio est de exprimenda aliqua magnitudine, cujus explicatio in nostro est arbitrio; tunc fateor infinitae sunt varietates, sed tamen re intra certos limites comprehensa varietates illae sunt numerabiles. V. g. a. b. y. ab. ay. by. aby. Singulae harum duci possunt in aliam quandam arbitrariam; nec refert multiplicando an dividendo. Sed postea ad arbitrarias accedentes veniemus. Nunc datis literis inhaereamus: Assurgant omnes ad quadratum: $a^2 + b^2 + y^2$. Hae inter se, et cum prioribus combinationibus jungi possunt. Et ita si ad altiora ascendatur. Hactenus incognita non nisi multiplicando dividendoque ex propositis literis formata est.

Jam jungi possunt inter se, et multiplicationes divisionibus misceri. Possunt jam de foris numeri literaeque accedere. Sed una litera numeros quoslibet comprehendet. Novae literae additio totidem producet varietates, quot sunt si plures essent ab initio propositae. Sufficeret ergo Tabulas texi, pro combinationibus possibilibus literarum, duarum: trium, quatuor. Et cuilibet combinationi resolutionem cujus est capax, pro varia literarum explicatione. Sed cum ista sint pene infinita, Methodi quaerendae sunt quibus ex

18 refert | addendo *ändert Hrsg.* | an *L* 20 possunt. *(1)* Primum inter se *(a)* addere *(b)* m *(2)* Hactenus omni *(3)* Et *L* 21 dividendoqve *(1)* ex datis *(2)* ex *L* 22 misceri. *(1)* Deniqve prae *(2)* Hactenus repetitiones praescidimus *(3)* possunt *L*

tot combinationibus utiles ab initio eligantur.

Breviter Tabulae analyticae formandae essent procedentes ordine per omnes formulas, non considerando literarum qualitatem sed numerum, v. g. $\frac{a^2 - y^2}{a + y}$. Jam y. potest significare $2a$.

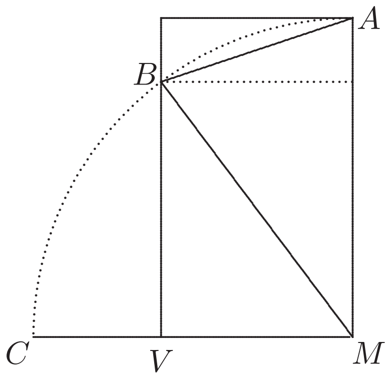
Ita inchoandum esset: a. ab. abc. $abcd$. $\frac{a}{e}$ $\frac{ab}{e}$ etc. $\frac{a}{ef}$ $\frac{ab}{ef}$ etc. Terminus, ut in numeratore pariter ac nominatore non sint ultra quatuor literae. Jam conjungantur inter se, ea lege, ne maximus numerus Terminorum nominatoris et terminorum denominatoris excedat 10. Ecce basin, jam in qualibet basi literis licet tribuere diversos valores; v. g. ab. licet annotare, si b. intelligatur a, fieri inde formulam a^2 cujus radix a. Nec obliviscendae forte formulae in quibus ipse nominator vel numerator rursus continent fractiones. Sed quoniam istorum spes nulla, nec forte operae pretium est, superest formulas illustriores hac methodo disponi, ut si qua theoremata nova reperiantur, inseri possint suo loco.

5 $\frac{\text{ab}}{\text{ef}}$ etc. *(1)* Summus *(2)* Terminus *L* 7 maximus *(1)* literarum *(2)* numerus *L* 9 licet *(1)* facere b. *(2)* annotare, *(a)* aliqvando b esse, *(b)* si b. intelligatur | a^2 *ändert Hrsg.* |, fieri *L* 10 nominator *(1)* ac numerator compositi sunt *(2)* vel *L* 12 qva *(1)* denuo *(2)* theoremata *L*

5. DE CHARACTERUM IMPERFECTIONE
[September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 122–123. 1 Bog. 4°. 7 Z. auf Bl. 123 r°. — Auf dem Rest des Bogens VII, 5 N. 10 u. VII, 6 N. 5.
Cc 2, Nr. 843

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Anfang September bis November 1674 belegt. N. 5 dürfte im selben Zeitraum entstanden sein wie VII, 5 N. 10 u. VII, 6 N. 5.



[*Fig. 1*]

Si a sectore *AMBA*, auferas Triangulum *AMB*, restat segmentum *ABA*. Id sane patet ex figura inspecta, sed non paret ex ipsis literis sive characteribus, unde patet eos esse imperfectos aliosque inveniendos. Eodem modo si a sectore duplicato auferas Rectangulum *VMA*, restabit segmentum duplicatum, necesse esset ista ex characteribus posse detegi, ne inspecta quidem figura.

6. GENERALIA GEOMETRICA
[Mai – Oktober] 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 47. 1 Bl. 4°. 2 S. Geringe Textverluste durch Tintenfraß sowie aufgrund einer Papierfalte. — Gedr.: 1. Couturat, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 144–146; 2. (engl. Teilübers. nach 1.) Wiener, *Selections*, 1951, S. 5.
Cc 2, Nr. 866

Datierungsgründe: Im vorliegenden Stück referiert Leibniz seine Leistungen auf dem Gebiet der Geometrie — unter anderem eine von ihm wenige Tage zuvor gefundene Lösung eines Konstruktionsproblems der Dreieckslehre. Die ausformulierte Lösung ließ sich in seinen Handschriften bislang nicht finden, doch enthält das auf den 25. August 1674 datierte Stück VII, 1 N. 47_{10} eine Skizze, die sich möglicherweise auf jenes Problem bezieht. Die Vermutung ist zulässig, dass er das Problem im August 1674 behandelt und kurz danach unser Stück verfasst hat. — Des weiteren erwähnt Leibniz eine Schrift zur *méthode des universels*, die er kurz zuvor geschrieben habe. Die drei hierfür in Frage kommenden Schriften (VII, 7 N. 10, 11 oder 14) sind auf Mai oder Juni, auf Juni respektive auf Mitte 1674 zu datieren. Unser Stück ist somit nicht vor Mai 1674 abgefasst worden. — Eine vergleichbare Darstellung seiner mathematischen Errungenschaften gibt Leibniz auch an anderer Stelle: Dem Stück III, 1 N. 38_2, das von den Herausgebern auf Oktober 1674 datiert wird, erteilt er nachträglich den einschlägigen Titel *Propria inventa analytico-geometrica*. In ihm beschränkt er sich aber im Bereich der Geometrie auf seine arithmetische Kreisquadratur und erwähnt die *méthode de l'universalité* nicht mehr, sondern führt statt dessen eine neue, analytische Methode zur Behandlung zahlentheorischer Probleme an. Offenbar ist jenes Stück also nach unserem verfasst worden, womit dieses spätestens im Oktober 1674 entstanden ist. — Auch das auf September oder Oktober 1674 zu datierende Stück VII, 6 N. 7, in welchem Leibniz seine arithmetische Kreisquadratur darstellt, greift (wie III, 1 N. 38_2) einleitend die in unserem Stück vorgenommene Kategorisierung geometrischer Probleme auf und verwendet dabei recht ähnliche Formulierungen. Es baut hierbei offenkundig auf unserem Stück auf und ist also ebenfalls jünger als dieses.

1674. Paris

Generalia Geometrica: de meis accessionibus et methodo universalitatis

Les Theoremes n'estant que pour abreger ou diriger la solution des problemes, puis-

26–29 1674. Paris | *(1)* imperfectum *(2)* Generalia ... universalitatis *erg.* | *(a)* Les problemes Geometriqves *(b)* Les Theoremes *L* 29 ou diriger *erg. L* 29–13,1 puisqve ... practiqve *erg. L* que toute la theorie doit servir à la practique. Il suffit d'estimer la varieté de la Geometrie, par celle des problemes. Les problemes de Geometrie, sont ou Rectilignes ou Curvilignes. Les Problemes rectilignes sont, dans les quels on ne demande ny suppose que la grandeur de quelques lignes droites ou espaces rectilignes. Les curvilignes supposent ou demandent la grandeur de quelque ligne courbe, ou de quelque espace curviligne. Les problemes des centres de Gravité et par consequent quantité de problemes de la Mechanique sont, de la derniere sorte. Ainsi on peut dire, qu'il y a comme deux E⟨sp⟩eces de la Geometrie, celle d'Apollonius, et celle d'Archimede; la premiere renouvellée par Viete et des Cartes; l'autre, par Galilei et Cavalieri.

Les problemes Rectilignes se reduisent à la Resolution de quelque ⟨E⟩q⟨u⟩ation dont il faut tirer les racines, analytiquement par le calcul, ou Geometriquement par l'intersection des lieux; exactement, ou par approximation. Mais les Curvilignes ne sont pas encor sujets à l'analyse connue, e⟨t⟩ si on les vouloit reduire à une equation, on la trouveroit de ⟨l⟩'infinitesieme degré.

Or ⟨a⟩yant fait quelques remarques assez extraordinaires dans l'une aussi bien que dans l'autre espece de Geometrie, j'ay bien voulu en toucher icy quelques unes en peu de mots.

Dans la Geometrie des Rectilignes; j'ay trouvé enfin le moyen de tirer les racines de toutes les Equations cubiques; c'est à dire

7 sorte. *(1)* On peut dire qve *(2)* de sorte qv *(3)* Ainsi *L* 8 d'Apollonius, *(1)* et l *(2)* qvi est des problemes Rectilignes, qvi se resolvent a la verité par l'intersection *(3)* et celle *L* 8 f. des Cartes; *(1)* second par *(2)* l'autre *L* 10 Rectilignes se *(1)* resolvent *(2)* reduisent *L* 11 par le calcul *erg. L* 11 f. par ... lieux *erg. L*

---

7 deux Especes: Die hier getroffene Unterscheidung zwischen gerad- und krummlinigen geometrischen Problemen sowie ihre historische Einordnung nimmt Leibniz auch anderorts vor: Sie findet sich sowohl in seinen wohl im Oktober 1674 für Mariotte verfassten Ausführungen über seine mathematischen Entdeckungen (III, 1 N. 38_2 S. 139 f.) als auch in den einleitenden Bemerkungen eines wahrscheinlich zwischen dem 10. September und Ende Oktober 1674 entstandenen Stückes, welches die Bestimmung der Kreisfläche mit Hilfe einer unendlichen Reihe rationaler Zahlen darstellt (VII, 6 N. 7, S. 88 f.).
19 Equations cubiques: Gemeint ist womöglich die Schrift *De aequationum transformationibus cubicarum et quadrato-quadraticum* aus dem September 1674 (VII, 1 N. 127 S. 818 ff.). Auch in der Schrift *Schediasma de radicibus cubicis* von Oktober 1674 (VII, 1 N. 139) sowie in dem (allerdings unvollendeten und dann verworfenen) Konzept VII, 1 N. 133, das wohl auf den September 1674 zu datieren ist, beschäftigt sich Leibniz mit der Lösung kubischer Gleichungen.

de rendre toutes les Equations cubiques pures; en sorte que pour les resoudre il ne faut que tirer la racine cubique d'un solide connu. Scipio Ferreus a trouvé le premier des regles propres à tirer les racines de quelques especes des Equations cubiques, Cardan a publié sa methode. Et Viete aussi bien que Mons. des Cartes ont desesperé de pouvoir venir ⟨au⟩ bout des autres. J'ay eu le bonheur d'y voir quelque jour. Et ce la estant on peut dire que la resolution de toutes les Equations cubiques ou quarrequarrées est achevée, et qu'on les peut construire toutes Geometriquement par l'invention de deux moyennes proportionelles.

Je ne repete pas icy ce que je viens de dire dans un papier àpart de la Methode des universels; qui nous abrege le calcul comprennant plusieurs cas soubs un seul, qui nous fait decouvrir des harmonies dans les figures et qui nous donne le moyen de les ranger en classes par des idees generales.

Touchant les lieux, j'ay observé quelques moyens extraordinaires d'obtenir des aequations *ad circulum* dans les problemes proposés, à fin d'en donner des constructions courtes et be⟨l⟩les, comme par exemple je donna[y] il y a quelques jours une construction

4 Et *(1)* Mons. Viete et *(2)* Viete *L* 6 dire qve *(1)* l'Analytiqve les *(2)* la resolution *L* 7 par *(1)* le moyen de *(2)* | la seule invention *nicht gestr.* | *(3)* l'invention *L* 10 comprennant ... seul *erg. L* 12 par | *(1)* qvelqves notions *(2)* des idees | generales *L* 14 les *(1)* proposés, *(2)* problemes proposés, *L* 15 et *(1)* nettes *(2)* be⟨l⟩les, *L* 15–15,1 jours *(1)* la construction du probleme: *(2)* une qvi n'est qve ⟨de deux⟩ mots *(3)* | une *erg. Hrsg.* | construction fort courte de ce probleme: *(a)* L'Hypothénuse d'un Triangle rectangle *(b)* un costé *L*

3 Equations cubiques: Vgl. G. Cardano, *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, 1545, Bl. 31 (G. Cardano, *Opera* IV, S. 251.) 9 papier: Gemeint ist wahrscheinlich der Mitte 1674 entstandene *Essay de la méthode des universels* (VII, 7 N. 14), denn die Bezeichnung *méthode des universels* verwendet Leibniz nur dort. Üblicherweise spricht er dagegen von der *méthode de l'universalité*. So lautet auch der Titel der beiden grundlegenden, auf Mai oder Juni 1674 zu datierenden Schriften zu diesem Ansatz, in welchen er — deutlicher und im Wortlaut dem obigen ähnlicher als im *Essay* — sowohl die Verkürzung des Rechenaufwandes als auch die Aufdeckung von Harmonien mittels seiner neu ersonnenen Methode anspricht (vgl. etwa VII, 7 N. 10 S. 76 § 2 u. S. 79 § 7; N. 11 S. 114 f.). Die Bemerkung könnte sich also auch auf eines dieser beiden Konzeptpapiere beziehen.

fort courte de ce probleme: Un costé d'un Triangle estant donné et l'angle qui luy est opposé, trouver le ⟨T⟩riangle en sorte que ses costés soyent en proportion harmonique.

Viete nous a donné la methode de tire⟨r⟩ les racines des Aequations par d e s n o m b r e s approchans aux veritables; mais personne a ce que [je] sçache a donné des a p p r o x i m a t i o n s G e o m e t r i q u e s ; ⟨j⟩e croy pourtant d'y avoir reussi, et de pouvoir resoudre l⟨e⟩s problemes solides par approximations en n'employan⟨t⟩ que des droites ou cercles; et cette methode a cela au dessus d⟨e⟩ l'exegese numerique de Viete, qu'elle nous donne toutes les racines de l'Equation proposée tout à la fois; au lieu que l'exegese par nombres n'en donne qu'une.

Quant à la Geom⟨et⟩rie des Curvilignes je pre⟨tend⟩s d'y avoir fait quelque chose d'ext⟨r⟩aordinaire. Sans parler de la quadrature d'un segment oblique ⟨d⟩e la Cycloeide;

1 f. et ... opposé *erg. L* 2 trouuer *(1)* les deux costés, de sorte qv *(2)* tous les coste *(3)* le ⟨T⟩riangle *L* 2 f. harmoniqve *(1)* et j'ay ob *(2)* Viete *L* 5 G e o m e t r i q u e s ; *(1)* j'en ay trouué *(2)* j'ay pourtant trouué *(3)* j'a *(4)* ⟨j⟩e croy *L* 9 f. qv'une *(1)* Dans la Geometrie des curvilignes *(2)* Qvant à *L* 11 de la *(1)* dimension *(2)* qvadrature *L*

---

1 probleme: Mit Konstruktionsproblemen der Dreieckslehre befasst sich Leibniz im Jahr 1674 mehrfach. In VII, 1 N. 11 etwa, das die Herausgeber auf August 1674 datieren, sind zwei Seiten und die Fläche eines gesuchten Dreiecks vorgegeben. In dem bislang auf Ende 1674 datierten Teilstück VII, 1 N. 14_1 sind dagegen die Basis des gesuchten Dreiecks und ein an der Basis anliegender Winkel sowie das Produkt der beiden anderen Seiten gegeben. Und im bislang auf Frühjahr 1675 datierten Teilstück VII, 1 N. 14_2 greift Leibniz das letztgenannte Problem erneut auf, ändert dann aber die Fragestellung und setzt nun nicht mehr einen an der Basis anliegenden, sondern den der Basis gegenüberliegenden Winkel als gegeben voraus. Dieses Problem kann er elegant konstruktiv lösen. Das in unserem Stück genannte Problem lässt sich auf eine sehr ähnliche, wenngleich geringfügig aufwendigere Weise lösen. Seine Bearbeitung ist nicht überliefert. Aus diesem Grund und auch, weil Leibniz von einer „construction fort courte" spricht, liegt die Vermutung nahe, dass er tatsächlich die Konstruktion aus VII, 1 N. 14_2 meint. Womöglich geht er davon aus, dass diese Konstruktion ohne Änderung auch das hier genannte Problem löst. Weil VII, 1 N. 14_1 und 14_2 aus einer Reihe von Gründen neu datiert und nun in die erste Hälfte des Jahres 1674 gestellt werden, steht ihre Datierung dieser Interpretation nicht mehr entgegen. 3 methode: Vgl. Fr. Viète, *De emendatione aequationum*, 1615 (VO S. 82–161). 4 approximations Geometriques: Leibniz denkt hier womöglich an eine Verknüpfung seiner Lösung der soliden Probleme durch Kegelschnitte mit der Umformung der Kegelschnittgleichungen in eine Kreisgleichung; vgl. seine wohl im September 1674 verfasste Schrift *De aequationibus ad circulum inveniendis* (VII, 1 N. 130). 11 Cycloeide: Den Segmentsatz an der Zykloide formuliert Leibniz erstmalig in III, 1, N. 29, zu datieren auf den Sommer 1674, auf S. 115. Vorarbeiten finden sich in VII, 4 N. 17, wohl aus dem späten Frühjahr 1673. Den Beweis liefert er in VII, 5 N. 31, zu datieren auf März bis Dezember 1675.

de la dimension de la courbe décrite par l'evolution du cercle (ayant trouvé que l'arc evolu est la moyenne proportionelle entre le diametre et la courbe décrite)[;] de la dimension de la surface du solide parabolique fait par la parabole revolüe à l'entour de la touchante du sommet; j'ay observé deux methodes fort estendues, l'une de donner la dimension des figures superieures en supposant celle des inferieures; l'autre de reduire l'aire d'une figure à la somme d'une progression de nombres rationaux. Ce qui est traduire la difficulté de la Geometrie à l [*bricht ab*]

3 de la *(1)* super *(2)* surface *(a)* d'un solide Hyp *(b)* du solide *L* 4 l'une de *(1)* revoqver *(2)* donner *L* 4 dimension des *(1)* courbes *(2)* figures *L* 6 somme *(1)* de progressio *(2)* d'une progression *L*

---

1 l'evolution du cercle: Vgl. das wahrscheinlich im Frühjahr 1673 entstandene Konzept VII, 4 N. 10_1 S. 141 u. 143 sowie III, 1 N. 29 S. 116. 3 solide parabolique: Vgl. das wohl aus dem Sommer 1673 stammende Konzept *Triangulum characteristicum ellipsis* (VII, 4 N. 28, hier S. 509–515) sowie den auf den 3. Oktober 1674 datierten ersten Teil der Schrift *Schediasma de superficiebus conoeidum* (VII, 5 N. 6). 4 l'une de: Leibniz bezieht sich hier möglicherweise auf sein im August 1673 verfasstes, *Methodus tangentium inversae seu De functionibus* überschriebenes Konzept VII, 4 N. 40. 5 l'autre: Diese Bemerkung bezieht sich auf Transmutation und Reihenentwicklung; vgl. etwa das aus der ersten Hälfte des Jahres 1674 stammende Stück zur arithmetischen Kreisquadratur VII, 6 N. 4. 6 difficulté: In VII, 6 N. 7 S. 89 Z. 2 f. formuliert Leibniz den hier abgebrochenen Gedanken zu Ende: „. . . la difficulté des Curvilignes est transferée de la Geometrie à l'Arithmetique par les progressions."

7. SUR LE CALCUL DES PARTIS
7. Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 14 Bl. 5–8. 2 Bl. 4° u. 1 Bog. 2°. 7 S. Bl. 8 v° leer bis auf 1 Z. — Gedr.: 1. PARMENTIER, *L'estime*, 1995, S. 113–145: 2. (span. Übers.) LEIBNIZ, *Obras filosóficas y científicas*, Bd. 7 B, 2015, S. 669–687.
Cc 2, Nr. 1259

7. Janvier 1676

Le Chevalier de Meslé fut le premier qui donna l'ouverture pour le calcul des partis, que Messieurs Pascal et Huguens ont entrepris par apres. On croyoit que s'il y avoit par exemple trois partis à gagner, pour gagner l'argent, qui estoit mis, ou trois partis à gagner, pour gagner le jeu, et si l'un avoit gagné deux partis et l'autre un; que $\frac{2}{3}$ du jeu

11 partis; *(1)* qve $\frac{2}{3}$ du jeu luy appartenoient *(2)* et l'autre *L*

---

8 Meslé: Gemeint ist Antoine Gombaud (1607–1684), genannt Chevalier de Méré. 8 partis: Das *problème des partis*, zu deutsch Teilungsproblem, besteht darin, eine „gerechte" Aufteilung des Einsatzes bei einem in mehreren Runden auszutragenden Spiel zu finden, wenn dieses abgebrochen werden muss, bevor einer der Spieler die für den Gesamtsieg vereinbarte Anzahl Runden gewonnen hat. Es gilt als klassisches Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie. 9 Pascal: Nachdem Méré das Problem an Pascal herangetragen hat, erörtert dieser es 1654 in seinem Briefwechsel mit Fermat. Eine Abhandlung Pascals, die die Lösung des Problems präsentiert, wird nach seinem Tod abgedruckt: Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [Marg.], Abhandlung III: *Usage du triangle arithmetique, pour determiner les partys qu'on doit faire entre deux Joueurs qui jouent en plusiers parties* (*PO* III, S. 478–498). Leibniz besitzt wohl schon seit 1672 ein Exemplar dieses Buches (vgl. N. 43) und bezieht sich hier offensichtlich auf diese Abhandlung. Ihre Ergebnisse hat er jedoch nicht zur Kenntnis genommen. Pascals Briefe an Fermat — der vom 29. Juli 1654 präsentiert seine eigene Problemlösung, der vom 24. August 1654 referiert jene Fermats — werden drei Jahre nach Entstehung des vorliegenden Stückes in P. de FERMAT, *Varia opera*, 1679 [Marg.], S. 179–188, veröffentlicht. Im Juni 1675 und wohl ab Januar 1676 kann Leibniz verschiedene Stücke aus Pascals Nachlass einsehen (vgl. N. 34 sowie III, 1 N. 53, 54 u. 74), gewinnt jedoch auch dabei keine nähere Kenntnis von der Behandlung des Problems durch Pascal und Fermat. 9 Huguens: Vgl. Chr. HUYGENS, *De ratiociniis in ludo aleae*, in: Fr. van SCHOOTEN, *Exercitationum mathematicarum*, 1657, S. 517–534, insbesondere prop. IV–VII.

appartenoient au premier. Mais il refusoit refusoit cela, par ce qu'il ne me faut qu'un parti pour gagner tout, et il ne me faut que la perte d'un, pour rendre tout egal, et pour revenir au premier estat, donc $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$ m'appartenant au commencement, et en cas de perte du 4[me] jeu; et le tout, ou $\frac{4}{4}$ m'appartenant en cas du gain du 4[me] jeu, ou du 3[me] parti; il est donc manifeste qu'avant que de le gagner ou perdre j'ay $\frac{3}{4}$ de l'argent mis sur la table. Car ce jeu me peut faire gagner $\frac{2}{4}$, et me peut faire perdre $\frac{2}{4}$, dont il vaut $\frac{1}{4}$ ou la moitié de $\frac{2}{4}$. Donc avant ce jeu j'avois $\frac{3}{4}$.

Le chevalier de Melé gentilhomme du Poictou, grand joueur, et homme d'esprit.

Cela a lieu au piquet où l'on joue des partis liez, et qu'il faut gagner 3 fois par exemple ou 4 fois, pour amener l'argent. NB. Si on joue à trois partis, il faut necessairement qu'un gagne en 5 jeux ou partis. Il peut arriver que l'un gagne trois partis de suite; | | | *item*

1 f. faut qv'un *(1)* jeu pour *(2)* parti *L* 4 du 4[me] *(1)* parti *(2)* jeu *L* 6 gagner *(1)* $\frac{1}{4}$, *(2)* $\frac{2}{4}$, et ... il *(a)* faut *(b)* vaut *L* 7 j'avois *(1)* $\frac{1}{2}$ *(2)* $\frac{3}{4}$ *L* 10 joue *(1)* trois jeux *(2)* à trois partis *L* 11–19,1 suite; *(1)* item qv'il en gagne *(2)* | | | item qv'il gagne *(a)* • | | | vel | • | | vel | | • | vel *(b)* | | • | *(aa)* vel | • | | vel • | | | *(bb)* ou *L*

1 appartenoient: Eine solche Aufteilung des Gewinns im Verhältnis der jeweils gewonnenen einzelnen Spielrunden schlägt L. PACIOLI, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni, et proportionalita*, 1494, Bl. 197 r° vor. Es handelt sich hierbei um die erste Behandlung des Problems durch einen namentlich bekannten Autor in der Literatur. 1 refusoit: Nicht erst Méré weist Paciolis Teilungsregel zurück; bereits G. CARDANO, *Practica arithmetice*, 1539, cap. 68, § 5 und N. TARTAGLIA, *La prima parte del general trattato di numeri, et misure*, 1556, lib. XVI, Bl. 265, § 206 kritisieren sie und stellen eigene Teilungsregeln auf. 4 parti: Die Verwendung der Begriffe *jeu* und *parti* ist anfangs inkonsistent; *jeu* steht meist für das gesamte Spiel, hier aber für eine einzelne Runde, *parti* meint in der Regel eine Spielrunde, hier aber eine gewonnene Runde bzw. einen Gewinnpunkt (später auch als *coup* oder *point* bezeichnet). 5 manifeste: Der hier am Beispiel referierte Ansatz zur Lösung des Teilungsproblems stimmt mit jenem von Chr. HUYGENS, *a. a. O.*, S. 525, prop. IV überein. 6 dont: Für die im modernen Französisch *donc* geschriebene Konjunktion verwendet Leibniz in diesem Stück, ohne einer ersichtlichen Regel zu folgen, öfters auch die Schreibweise *dont* (die an anderen Stellen aber auch für das gleichgeschriebene Pronomen steht). 9 piquet: Dies ist ein im 17. Jahrhundert populäres Kartenspiel französischen oder spanischen Ursprungs für zwei Personen.

qu'il gagne $||\bullet|$ ou $|\bullet||$ ou $\bullet|||$. Et s'il gagne en 5 jeux il peut gagner ainsi: $\bullet\bullet|||$ $|\bullet\bullet||$ $||\bullet\bullet|$ $\bullet||\bullet|$ $\bullet|\bullet||$ $|\bullet|\bullet|$. *Ecce modos omnes quibus vinci potest. Et notandum hoc combinationis plane singularis genus. Nunc ut ex meis rem principiis examinem*, je mets pour asseuré, qu'en gagnant un parti je fais un tiers de ce qu'il faut faire, pour gagner l'autre moitié de l'argent qui est mise au jeu; car une moitié m'appartient déjà. Donc l'argent mis au jeu estant: a, et le nombre des partis qu'il faut gagner pour amener tout l'argent estant p, 1 parti vaudra $\frac{a}{2p}$ et 2 partis gagnez vaudront: $\frac{a}{p}$. Les quels joints à $\frac{a}{2}$ j'aurois alors $\frac{a}{2}+\frac{a}{p}$ de tout l'argent. Mais mon adversaire gagne le 3$^{\text{me}}$ parti, c'est à dire, il gagne par là: $\frac{a}{2p}$, et il a ainsi $\frac{a}{2}+\frac{a}{2p}$. Donc mon droit sur l'argent tout entier est au sien, comme $\frac{a}{2}+\frac{a}{p}$ est à $\frac{a}{2}+\frac{a}{2p}$ ou comme $\frac{ap+2a}{2p}$ est à $\frac{ap+a}{2p}$, ou comme $p+2$ est à $p+1$. Par consequent il faut diviser a en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme $p+2$ est à $p+1$, et p estant $\sqcap$ 3, il faut a diviser en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme 5 à 4. C'est à dire divisant toute

5 gagner *(1)* la moit *(2)* l'autre *L* 6 estant: *(1)* ⟨b⟩ argent ayant gagné un pa *(2)* a *L* 8 vaudront: *(1)* $\frac{\mathrm{a}}{4\mathrm{p}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{p}}$ *L*

6 estant: Die Bezeichnung a für die Gewinnsumme findet sich bereits bei Huygens, und auch p tritt dort in ähnlicher Bedeutung auf wie hier bei Leibniz; vgl. Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. 523. 9 gagne: Der hier verfolgte Ansatz widerspricht der Voraussetzung, dass die Summe der Gewinne beider Spieler konstant a ist. Dies belastet die weitere Überlegung und wirkt sich insbesondere in S. 20 Z. 4 f. aus.
12 $p+2$ est à $p+1$: Eine Regel für die Aufteilung des Gewinns kann als hinreichend „fair" gelten, wenn sie mindestens drei Bedingungen erfüllt: Erstens sollte sie bei Gleichstand zum Zeitpunkt des Spielabbruchs beiden Spielern den gleichen Anteil zusprechen; zweitens sollte sie demjenigen Spieler, der als erster die für den Gesamtsieg geforderten Runden gewonnen hat, den gesamten Gewinn zusprechen; und drittens sollte sie sicherstellen, dass jede zusätzlich gewonnene Runde den Anteil am Gewinn vergrößert. Die beiden ersten Bedingungen sollten sich dabei als Randwerte aus der Regel ergeben und nicht lediglich *per definitionem* gelten. Man kann die „gerechte" Aufteilung auch noch strenger definieren, indem man verlangt, dass diese genau im Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten zu erfolgen hat. Unausgesprochen verfolgt Leibniz das Ziel, eben hierfür eine Regel zu finden. Die hier untersuchte Aufteilung des Gewinns im Verhältnis $(p+g):(p+f)$ bei einem Spielstand von $g:f$ im Augenblick des Abbruchs erfüllt allerdings bereits die zweite der Mindestbedingungen nicht: Nach dieser Regel stünde dem Verlierer stets mindestens ein Drittel des Gewinns zu.

la somme en 9 parties celuy qui a gagné 2 partis aura $\frac{5a}{9}$, et celuy qui n'a gagné qu'un aura $\frac{4a}{9}$. Mais nous verrons incontinent si ce calcul est juste car si celuy qui a gagné 2 partis, gagne encor un, c'est à dire $\frac{a}{2p}$, c'est à dire $\frac{a}{6}$, p estant $\sqcap$ 3, il aura a tout entier, mais $\frac{5a}{9} + \frac{a}{6}$ ne fait pas a. De meme s'il perdoit un, il n'auroit que $\frac{a}{2}$, or $\frac{5a}{9} - \frac{a}{6}$ ne fait pas $\frac{a}{2}$. C'est pourquoy il y a du sophisme dans nostre calcul.

Et il faut un tout autre principe d'analyse. Le principe general est, que deux joueurs ont un droit egal sur une somme qui est au jeu, lors qu'il est aussi aisé à l'un qu'à l'autre de gagner ou de perdre. Donc au commencement du jeu tout est commun. C'est à dire si la société venoit à se rompre chacun en auroit la moitié. De plus si un des joueurs a tant de partis, sur son adversaire, que le nombre des partis qu'il luy faut pour gagner tout est égal au nombre de ceux qu'il doit perdre pour revenir à l'egalité; il aura gagné la moitié de l'autre moitié outre la sienne. Ainsi supposé qu'il faille 5 partis pour amener l'argent. J'en ay gagné 3, et mon adversaire 1. Si j'en gagne encor deux, j'amene l'argent, si j'en perds deux nous revenons à l'egalité, donc en ce cas ils m'appartiennent $\frac{3}{4}$ de l'argent. On voit par là que ce n'est pas la meme chose, que j'aye gagné 3 partis et l'autre 1, et que j'aye gagné 2 partys et l'autre rien. Car au premier cas, il m'appartient $\frac{3}{4}$, au second cas, il me faut 3 partis pour gagner, et il ne faut que perdre deux pour revenir

2 f. qvi *(1)* gagne *(2)* a gagné ... encor | un *gestr. L, erg. Hrsg.* | , c'est *L* 6 principe *(1)* du jeu *(2)* general *L* 10 adversaire, qve *(1)* ce qv'il *(2)* le nombre *L* 10 f. gagner | tout *erg.* | est égal *(1)* à ce qvi luy faut *(a)* pour *(b)* de perte pour *(2)* au nombre L 13 deux, *(1)* je gagne *(2)* j'amene *L*

---

11 gagné: Auch in der Verallgemeinerung — einem Spieler fehlt noch eine bestimmte Zahl an Punkten zum Gesamtsieg und sein Vorsprung beträgt ebensoviele Punkte — ist der direkte Weg zum Gesamtsieg genauso wahrscheinlich wie der direkte Weg zum Gleichstand. Doch gibt es nun eine Anzahl weiterer Spielverläufe, die hier nicht berücksichtigt werden. Das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler kann so nicht korrekt bestimmt werden. Auch im weiteren beschränkt sich Leibniz auf die Betrachtung spezieller Konstellationen, bis er auf S. 34 den Blick dann auf alle Spielverläufe ausweitet.

au premier estat d'egalité. Donc l'apparence de gagner $\frac{a}{2}$ est à l'apparence de gagner 0, comme 2 à 3. Et il faut voir si je puis dire, que j'ay gagné autant de $\frac{1}{5}$ mes de $\frac{a}{2}$, qu'il y a d'apparences de gagner, sçavoir 2. Il faut que mon adversaire gagne 5 partis pour gagner $\frac{a}{2}$. Et il faut gagner 2 pour venir à l'egalité. Ce qui est paradoxe. Et on ne pourra pas dire icy que l'apparence de gagner est à l'apparence de l'egalité, comme 2 à 5, donc je n'ose pas parler comme cela, non plus dans la personne de celuy qui a gagné: car il faut de maniere de parler qui convienne à tous deux. Il est bien vray icy que l'un ayant gagné autant de partis, que l'autre tout est égal; mais il n'est pas vray, qu'adjoutant autant de

3 2. Il faut *(1)* 5 à mon adversaire, *(a)* dont *(b)* donc à qve *(2)* qve mon *L* 4 paradoxe, *(1)* ⟨don⟩ *(2)* et il ne faut parler comme cela; et même il faut considerer *(3)* Et on *L* 6 cela, *(1)* donc *(2)* non plus *L*

4,14 m'appartiennent: Wenn sich die Aufteilung des Gewinns am Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten bemessen soll, mit denen die beiden Spieler das gesamte Spiel gewinnen, ist zunächst danach zu fragen, ob man ein exaktes Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten angeben kann, mit welchen sie eine einzelne Runde für sich entscheiden. Bei Spielen wie etwa dem Münzwurf kann dieses Verhältnis mit 1 : 1 angesetzt werden. Bei einem Spielstand von 3 : 1 und fünf Gewinnrunden ist der Einsatz dann im Verhältnis 13 : 3 aufzuteilen, wie sich mit den Ansätzen von Pascal oder Fermat leicht berechnen lässt und wie es bei Chr. HUYGENS, *a. a. O.*, S. 526, prop. VII nachzulesen ist. Auch Bl. PASCAL, *a. a. O.*, S. III, 7 (= *PO* III, S. 488 f.) behandelt dieses Beispiel. Bei dem hier betrachteten Kartenspiel Piquet haben die beiden Spieler jedoch im Allgemeinen nicht die gleiche Chance, eine Runde zu gewinnen, so dass sich die Frage stellt, wie ihre jeweiligen Spielstärken zu bemessen sind. Falls man davon ausgeht, dass der Zwischenstand von 3 : 1 die unterschiedlichen Spielstärken abbildet und man daher auch das Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten in einer einzelnen Runde so ansetzt, müsste eine Verteilung des Gewinns im Verhältnis von 63 : 1 erfolgen. In der Regel sind die genauen Spielstärken aber unbekannt. Das Problem setzt in seiner überlieferten Form stillschweigend gleiche Spielstärken und Erfolgswahrscheinlichkeiten in jeder Einzelrunde voraus, und Leibniz folgt dieser Vorgabe. 1 apparence: Der methodische Ansatz zur mathematischen Behandlung von Wahrscheinlichkeiten besteht im vorliegenden Stück darin, das Verhältnis zweier *apparences* zueinander zu betrachten. Die *apparence* — die Häufigkeit, mit der ein ungewisses Ereignis eintritt — wird also nicht als für sich stehende Größe betrachtet, sondern sie ist stets in eine Relation zu setzen. Dies gilt in diesem Stück gleichermaßen auch für die als *facilité*, *difficulté* oder *probabilité* bezeichneten Größen. 4 paradoxe: Für eine analoge Betrachtung aus der Sicht des zurückliegenden Spielers ist die Zahl an Runden, die dieser gewinnen muss, damit wieder Gleichstand herrscht (hier 2), in Relation zur Zahl der Runden, die er verlieren muss, damit er das Gesamtspiel verliert (hier 3), zu setzen. Dementsprechend wäre im vorliegenden Beispiel sein eigener Anteil im Verhältnis von 3 : 2 aufzuteilen. Der Ansatz führt also, ob man nun den führenden oder den zurückliegenden Spieler betrachtet, tatsächlich zum gleichen Ergebnis.

partis à l'un qu'à l'autre tout demeure egal, car celuy qui est déja le plus avancé gagnera en ce cas. C'est pourquoy un jeu estant disputé il y aura bien de la difference entre dire que tous deux ont gagné, et que pas un n'a gagné. On ne sçauroit bien demonstrer cela sans des definitions exactes. Cependant je croy que nous avons la regle. Le nombre des partis necessaires est p, le nombre des partis gagnez g. Donc de ceux qui restent à gagner le nombre est $p-g$. Donc si vous perdez g, vous reviendrez à l'egalité, si vous gagnez $p-g$, vous amenez l'argent. Or l'apparence de gagner est à l'apparence de perdre en raison reciproque du nombre des jeux qu'il faut gagner, au nombre des jeux qu'il faut perdre, ou comme g à $p-g$; et par consequent l'apparence d'amener l'argent, est à l'apparence de revenir à l'egalité, comme g à $p-g$. Mais comme est l'apparence d'amener l'argent à l'apparence de revenir à l'egalité de même est la partie de l'argent de mon adversaire sur la quelle un droit m'est acquis, à la partie de son argent qui reste dans la communauté. Donc si le jeu se doit separer en cet estat, j'aurois preferablement de l'argent de mon adversaire une partie qui sera à l'autre partie comme g est à $p-g$. Le reste sera divisé egalement. Et par consequent l'argent est a, la moitié de mon adversaire est $\dfrac{a}{2} \sqcap \dfrac{pa}{2p} \sqcap \dfrac{ga+pa-ga}{2p}$. Ainsi j'auray en cas de separation;

$$\frac{a}{2}+\frac{pa-ga}{4p}+\frac{ga}{2p} \sqcap \frac{3ap+ga}{4p}$$

Avant que de venir au theoreme il faut aussi comprendre dans le calcul le cas où tous deux ont gagné quelque partis; l'un en a gagné g, l'autre en a gagné f, et je suppose f moindre que g. Il faut à G, c'est à dire celuy qui a gagné g, le nombre $p-g$; pour amener

5 partis *(1)* est p. le nombre des partis *(2)* qv'il fa *(3)* necessaires *L* 6 donc *erg. L* 7 p − g. vous *(1)* gagnez *(2)* amenez l'argent. *(a)* donc *(b)* or *L* 7 perdre *(1)*, comme le nombre *(2)* en raison *L* 9 comme *(1)* p − g *(2)* p *(3)* g à p − g; et par conseqvent *(a)* le gain sur la moitié de vostre ⟨nom⟩ *(b)* l'apparence *L* 11 même est *(1)* le gain *(2)* le droit acqvis sur l'argent de mon adversaire, un droit *(3)* la partie *L* 17 f. $\frac{\mathrm{3ap+ga}}{\mathrm{4p}}$ *(1)* Donc nous pourrons faire un theoreme. Deux joueurs *(a)* ayant mis *(b)* estant tombés d'accord qve celuy *(2)* Avant *L* 18 aussi *(1)* toucher *(2)* comprendre *L* 20 gagné | f, *ändert Hrsg.* | le nombre *L*

15 divisé: Der hier verfolgte Ansatz verlangt, den Einsatz des zurückliegenden Spielers im angegebenen Verhältnis zwischen den beiden Spielern aufzuteilen. Demzufolge bleibt weder unverteiltes Geld im gemeinsamen Besitz übrig, noch ist jener Teil des Einsatzes, der dem zurückliegenden Spieler verbleibt, hälftig auf beide Spieler zu verteilen. Leibniz entwickelt seinen Gedanken konsequent weiter, bis er in S. 24 Z. 7 diese Inkonsistenz erkennt.

l'argent; et il faut que l'autre F gagne $g-f$ pour venir à l'egalité donc l'apparence de gagner sera à l'apparence d'egalité comme $g-f$ est à $p-g$. Par consequent il faut diviser $\frac{a}{2}$ en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme $g-f$ est à $p-g$. Pour cela: $\frac{a}{2} \sqcap \frac{ga-fa+pa-ga}{2g-2f+2p-2g \sqcap 2p-2f}$. Donc ces deux parties seront: $\frac{ga-fa}{2p-2f}$, et $\frac{pa-ga}{2p-2f}$. Donc $\overset{\text{☽}}{\frac{ga-fa}{2p-2f}}$ appartient preferablement à celuy qui a gagné g, et du reste il luy appartient $\frac{a}{2}$, sa moitié, et la moitié du reste de la moitié de l'adversaire $\frac{pa-ga}{4p-4f}$, c'est à dire $\frac{a}{2}+\frac{pa-ga}{4p-4f} \sqcap \overset{\odot}{\frac{3pa-2fa-ga}{4p-4f}}$, et à luy preferablement ☽. Donc joignant $\odot +$ ☽, il proviendra $\overset{\text{☿}}{\frac{3pa+ga-4fa}{4p-4f}}$, qui appartient à G, et à F, il n'appartient que $\overset{\text{♃}}{\frac{pa-ga}{4p-4f}}$. Donc joignant ☿ et ♃, nous aurons $\frac{\begin{array}{c}4pa+ga-4fa\\ -ga\end{array}}{4p-4f} \sqcap a$.

Donc nous pourrons faire un theoreme: Deux joueurs estant tombés d'accord que celuy qui auroit fait le premier un certain nombre de jeux (points), (p) ameneroit la somme d'argent mise au jeu (a) et le jeu venant à estre rompu legitimement lors que celuy qui a fait le plus de points n'en a fait qu'un nombre moindre que celuy qu'on demande (p) sçavoir (g) et celuy qui en a fait le moins en a (f). Il s'agit de sçavoir comment il faut faire les partis, c'est à dire comment il faut partager la somme a, entre ces deux joueurs, au sortir de ce jeu imparfait? Je dis que la somme a, doit estre partagée

1 et *(1)* il faut à celuy qvi a *(2)* il faut *L* 7 $\frac{\text{3pa} - \text{2fa} - \text{ga}}{\text{4p} - \text{4f}}$, $\odot$ *(1)* celu *(2)* ce qvi appartient aussi à son adversaire, *(3)* et à luy *L* 7 preferablement *(1)* $\frac{\text{ga} - \text{fa}}{\text{2p} - \text{2f}}$ *(2)* ☽. donc *L* 11 jeux | (points) *erg.* |, (p) *(1)* ga *(2)* gagneroit *(3)* ameneroit *L* 12 f. lors qve *(1)* l⟨'un en⟩ a f *(2)* celuy *L* 14 f. sçavoir *(1)* combien il faut faire les partis, c'est à dire combien il faut ⟨avoir⟩ *(2)* comment *L* 16 Je dis *(1)* qve celuy qvi a fait (g) points ⟨am⟩ *(2)* qve la somme *L*

en deux: $\overset{☿}{\dfrac{3p+g-4f}{4p-4f}}\,a$, et $\overset{♃}{\dfrac{p-g}{4p-4f}}\,a$ et que la premiere ☿ doit estre donnée à celuy qui aura fait (g) points, l'autre ♃ à celuy qui n'en aura fait que (f).

Il est premierement manifeste que g et f estant egaux, ou tous deux egaux à rien, tout doit estre partagé egalement. Mais nostre calcul ne comprend pas ce cas, donc il faut qu'il y ait de la faute là dedans, dont je voys la raison à present. Je ne luy donne pas seulement preferablement sur son adversaire $\dfrac{ga-fa}{2p-2f}$, qui est $\sqcap$ à 0, lors que $g \sqcap f$ mais je luy donne encor la moitié de $\dfrac{pa-ga}{2p-2f}$. Donc il gagne en ce cas cette somme, et neantmoins il ne doit rien gagner, donc la regle est fautife, et il faut retrancher cette moitié. L'erreur est venue de ce que j'avois pris l'argent mis au jeu comme une somme dont le reste doit estre divisé, lors que celuy qui a gagné le plus de points a pris son preciput. Ce que les loix de cette societé faite pour le jeu, ne portent pas. Je n'y vois pas même de la societé; et il n'est point necessaire de considerer l'argent mis sur la table; il faut seulement considerer que celuy qui gagne le plus de points, a obligé l'autre à quelque chose, et a un droit acquis sur quelque chose, qu'il faut determiner, et quand les points sont egaux l'apparence de gagner toute est egale de part et d'autre, et l'obligation est compensée. Donc il faut dire: comme l'apparence de gagner la somme à la quelle mon adversaire s'oblige en cas de perte, est à l'apparence de revenir à l'egalité, ou à l'apparence de rien gagner, de même doit estre le gain au sortir du jeu imparfait, à ce que l'adversaire retient. Or l'apparence de gagner est à l'apparence de revenir à l'egalité en raison reciproque des points à faire. C'est à dire l'apparence de faire $p-g$ points; e[s]t à l'apparence de perdre $g-f$ points comme $\dfrac{1}{p-g}$ points à $\dfrac{1}{g-f}$ points, parce que l'apparence de les faire est d'autant moindre, que le nombre à faire est plus grand. Donc l'apparence de gagner est à l'apparence de rien gagner comme $g-f$ est à $p-g$. Donc le

2 f. fait qve (f) *(1)* Axiomes: lors qve l'apparence de gagner de l'un et de l'autre costé est commune, le droit est egal Le droit du parti, est *(a)* qve chacun *(b)* qv'un joueur *(2)* Le fondement doit estre, qve l'argent doit estre divisé en deux parties, *(3)* Le fondement *(a)* doit *(b)* est, *(4)* il est *L* 3 f. rien, *(1)* le droit *(2)* tout *L* 9 moitié. *(1)* | Et *nicht gestr.* | generalement | la *nicht gestr.* | *(2)* L'erreur *L* 10 plus de *(1)* partis a *(2)* points *L* 15 toute *erg. L* 18 estre le *(1)* parti *(2)* partis au sortir du jeu imparfait *(3)* gain *L* 20 points *(1)* faits *(2)* à faire c'est à dire *(a)* est en raison *(b)* l'apparence *L* 23 l'apparence de *(1)* revenir *(2)* rien *L*

gain doit estre au residu, comme $g - f$ à $p - g$. C'est à dire la somme que mon adversaire a mis au jeu doit estre divisé en deux parties, dont l'une est [à] l'autre comme $g - f$ à $p - g$, et mon adversaire est obligé de me donner la partie qui est comme $g - f$, le reste luy demeure. Mais j'avoue que cela a besoin d'estre demonstré rigoureusement. De plus la difficulté s'augmentera ainsi, posons que les obligations des joueurs soyent inegales; c'est à dire que l'un s'oblige à perdre plus qu'il ne sçauroit gagner. Il est manifeste qu'à lors en cas d'egalité; il n'y a point d'obligation mais en cas de gain je gagne la somme que mon adversaire a mis, quoyque plus grande que la mienne. Donc si j'ay gagné quelques points et mon adversaire aussi, il faut calculer tout de même sur la somme que mon adversaire a mis. Je ne voy pourtant pas encor la chose assez clairement, par ce que si je le voyois dans la derniere simplicité, je devois estimer combien un point gagné m'avance en nostre cas et combien un point perdu avance mon adversaire. Il faut voir si on peut expliquer la chose ainsi. Je gagne un certain nombre de points et en raison de ces points j'ay un droit acquis sur l'argent de mon adversaire; je conte comme si mon adversaire n'avoit rien gagné; car ce qu'il aura gagné sera conté apart sur mon argent; et nous pouvons faire comme si à chaque coup nous payions autant que chacun a de droit acquis sur son adversaire, et nous verrions au bout du conte, le quel auroit gagné. Je gagne dont g points, il me restent à gagner $p - g$ points, l'apparence de les gagner est en raison reciproque des points à gagner car la difficulté croist avec le nombre, dont la facilité décroist avec le nombre (+ il faut pourtant demonstrer cecy rigoureusement +). rigoureusement +). Mais

2 estre *(1)* à la somme *(2)* divisé *L* 5 posons qve *(1)* l'un s'oblige *(2)* les obligations *L* 6 f. manifeste qv' *(1)* en ce cas tout révenant à rien *(2)* à lors ... d'egalite; *(a)* chacun reprend *(b)* il n'y a *L* 13 de | ses *ändert Hrsg.* | points *L* 14 f. conte *(1)* si mon adversaire n'avoit rien gagné; car si *(2)* comme *L* 20 rigoureusement +). *(1)* donc l'apparence de gagner est a g *(2)* ⟨–⟩ *(3)* Au contraire *(4)* Mais *L*

2 divisé: Die hier aufgestellte Teilungsregel für einen Spielstand von $g : f$ im Augenblick des Abbruchs lässt sich auch mit der Formel $(p+g-2f) : (p-g)$ wiedergeben. Diese erste Leibniz'sche Teilungsregel erfüllt die drei genannten Mindestanforderungen an eine „faire“ Aufteilung. 15 conté apart: Die folgenden Überlegungen betrachten die von einem Spieler gewonnene Anzahl an Runden separat und unabhängig von der Anzahl an Runden, die sein Gegner gewonnen hat. Leibniz erwägt dabei verschiedene Vorschriften, dieser Anzahl jeweils einen Anteil des Gewinns zuzuordnen. Schreibt man die Gewinnanteile hintereinander auf, bilden sie, je nach Vorschrift, eine umgedrehte harmonische Folge, eine arithmetische oder eine geometrische Reihe. Allerdings erfüllen Teilungsregeln, die auf einer solchen Getrenntbetrachtung basieren, die zweite Mindestbedingung nicht, da sie dem Verlierer des gesamten Spiels regelmäßig einen Teil des Einsatzes seines Gegners zusprechen.

cela ne me dit pas encor combien j'auray. Car il faut deux termes pour faire cette raison reciproque, et d'où prendrons nous l'autre terme; si j'avois gagné $g+1$ points il reste $p-g-1$; l'apparence de gagner tout au premier cas, est à l'apparence de gagner tout au second cas comme $\dfrac{1}{p-g}$ est à $\dfrac{1}{p-g-1}$, ou comme $p-g-1$ à $p-g$. Et enfin si j'avois gagné tous les points quasi comme si le nombre des points gagnez estoit $g+\beta$, et la difference entre p et $g+\beta$ quasi nulle, l'apparence de gagner tout en cas des points g gagnez est à l'apparence de gagner tout, ou d'amener mon argent, en cas des points $g+\beta$ gagnez, comme $p-g$ est à $p-g-\beta$; c'est à dire si $p-g-\beta \sqcap 0$, l'apparence de gagner en cas de tous les points gagnez, sera à l'apparence de gagner tout en cas de quelques points gagnez, comme quelque chose à rien, ce qu⟨i⟩ est inepte. C'est pourquoy il y a encor du manquement la dedans, et comme la chose est tres considerable, il est important de l'examiner à fonds.

---

11 *Am unteren Seitenrand:* Voyez 7 Janvier 1676 partie II$^{\mathrm{de}}$

1 j'auray. *(1)* Car l'apparence de gagner p − g est *(2)* Car *L* 2 f. il reste p − g − 1 *erg. L* 4 comme *(1)* $\dfrac{1}{\mathrm{p-g-1}}$ est à $\dfrac{1}{\mathrm{p+1}}$ *(2)* $\dfrac{1}{\mathrm{p-g}}$ *L* 5 comme si *(1)* p − g − 1 *(2)* le nombre *L* 6 tout *erg. L* 8 p − g − β; *(1)* donc *(2)* c'est ... $\sqcap$ 0. *(a)* comme *(b)* l'apparence *L*

25,19 difficulté: Bei *facilité* und *difficulté* handelt es sich um zwei weitere Schlüsselbegriffe des Stückes. Leibniz definiert sie jedoch nicht explizit, sondern arbeitet mit einem impliziten Verständnis, das er für evident hält. Diesem zufolge verhält sich die *difficulté*, r Runden zu gewinnen, zu der *difficulté*, s Runden zu gewinnen, wie $r:s$, und das Verhältnis der entsprechenden *facilités* zueinander beträgt $\frac{1}{r}:\frac{1}{s}$ bzw. $s:r$ (vgl. Z. 2–4, S. 30 Z. 9 f. u. S. 38 Z. 14 f.). In S. 27 Z. 10 führt Leibniz zudem den Begriff *des-apparence* als Synonym für *difficulté* ein, und in S. 30 Z. 9 f. gebraucht Leibniz *facilité* und *apparence* als Synonyme. Meist verwendet er *apparence* im vorliegenden Stück aber im oben genannten, weiter gefassten Sinn. 4 $p-g-1$ à $p-g$: Diese Aussage ergibt sich aus dem Konzept der *facilité*. Das Verhältnis zweier Wahrscheinlichkeiten zueinander wird durch sie im Allgemeinen jedoch nicht zutreffend beschrieben. Notiert man die *facilités* hintereinander, erhält man eine Reihe, die einer umgedrehten harmonischen Folge sehr ähnelt. Die Glieder dieser Reihe geben die relativen Gewinnanteile, die dem Spieler im Abhängigkeit vom Punktestand zugesprochen werden, wieder. Der Sieg in einer Runde führt hierbei zu einem jeweils größeren Zuwachs als ein Sieg in der vorangehenden Runde. Allerdings wird dem Spieler bereits ein Gewinnanteil zugesprochen, bevor er überhaupt eine Runde gewonnen hat (vgl. auch S. 30 Z. 14–16). Problematisch ist zudem, wie Leibniz im folgenden bemängelt, die Zuteilung für den Fall $g=p$.

7 Janvier 1676.

Partie II$^{\text{de}}$

Il ne faut donc pas dire que les apparences de gagner sont en raison reciproque des points qui restent à gagner pour amener l'argent, car si cela estoit, l'apparence de gagner, et par consequent le droit acquis sur l'argent de mon adversaire lors que j'ay tous les points qu'il faut, seroit à l'apparence de gagner, lors que j'ay tous les points horsmis 3, comme 3 à 0. Et par consequent celuy qui a tous les points prenant tout ce que son adversaire a mis au jeu, celuy qui auroit tous les points horsmis 3, n'obtiendroit rien. Donc il ne faut pas faire les apparences en raisons reciproques des points à faire. Mais plustost les des-apparences ou les difficultez, en raisons directes des points qui restent à faire. Et les des-apparences sont proportionelles à ce qui reste de droit à mon adversaire, sur son argent. Et les points qu'il a à faire, sont la des-apparence qu'il y a qu'il conserve son argent, et par consequent elles sont proportionelles au droit qu'il a perdu. Donc: ayant gagné (g) points, et ayant à gagner $p-g$ points, il ne faut que dire que l'argent de mon adversaire doit estre partagé en 2 parties dont l'une est à l'autre comme g à $p-g$, et la partie comme g m'appartiendra. Jusques icy j'ay supposé que mon adversaire n'ait rien gagné. Ainsi supposons que j'aye gagnez g points et que j'en doive gagner $5p$ pour

9 il | ne *erg. Hrsg.* | faut *(1)* dire qve *(2)* pas faire *L* 11 proportionelles *(1)* aux *(2)* non pas au *(3)* à ce qvi *L* 12 argent. *(1)* Dont ayant fait (g) points *(2)* Et les *L* 14 gagné *(1)* p *(2)* (g) points *L* 17–28,4 gagné. *(1)* Apresent contons ce qv *(2)* Ainsi ... gagnez | 3 *ändert Hrsg.* | points et qve j'en *(a)* faille *(b)* doiuue ... du party *(aa)* gagnant le *(bb)* et qv'il ait mis *(aaa)* 5 *(bbb)* 10a, je gagne *(aaaa)* 3g, donc son argent doit estre divisé en 2 parties 3g. et *(aaaaa)* 5g *(bbbbb)* 5p − 3g *(aaaaaa)* et j'aurois $\frac{\text{3ga}}{\text{5p} - \text{3g}}$. et il luy resteront *(bbbbbb)* Sçavoir a ⊓ $\frac{\text{3ga} + \text{5p} - \text{3ga}}{\text{5p}}$ *(bbbb)* 1g, donc ... Sçavoir *(aaaaa)* a ⊓ $\frac{\text{1ga} + \text{5pa} - \text{1ga}}{\text{5p}}$, et j'auray $\frac{\text{1ga}}{\text{5p}}$. il luy resteront $\frac{\text{5pa} - \text{1ga}}{\text{5p}}$ *(bbbbb)* 10a ⊓ $\frac{\text{1g10a} + \text{5p}\,|\,10\ \textit{erg. Hrsg.}\,|\,\text{a} - \text{1g10a}}{\text{5p}}$ *L*

2 Partie: Die Gliederung des Stückes in drei Teile ist nicht inhaltlich, sondern durch die Papierträger begründet. Jeder Teil entspricht dem auf einem der drei Träger niedergeschriebenen Text. Tatsächlich endet der erste Teil mitten im Satz nach „comme la chose est tres considerable“ und der zweite beginnt mit „il est important“; der besseren Lesbarkeit halber wird hier der gesamte Satz im ersten Teil wiedergegeben. 4 restent: Wendet man den hier verworfenen Ansatz, zwei *facilités* zueinander ins Verhältnis zu setzen, nicht auf die Gewinnanteile des einen Spielers, sondern auf den Spielstand $g:f$ an, so erhält man eine besonders einfache und alle Mindestbedingungen erfüllende Teilungsregel, nämlich die Teilung im Verhältnis von $(p-f):(p-g)$. (Vgl. auch S. 37, Anm. zu Fig. 4.)

amener tout, mais que nous convenions, de nous payer à chaque coup à proportion du party et qu'il ait mis $10a$, je gagne $1g$, donc son argent doit estre divisé en 2 parties $1g$, et $5p - 1g$. Sçavoir $10a \sqcap \dfrac{1g\,10a + 5p\,10a - 1g\,10a}{5p}$, et j'auray $\dfrac{1g\,10a}{5p}$, il luy resteront $\dfrac{5p\,10a - 1g\,10a}{5p}$. Je gagne encor $1g$, donc c'est comme si nous recommencions et s'il n'avoit mis au jeu que $\dfrac{5p\,10a - 1g\,10a}{5p} \sqcap R$, qui luy restent, donc au lieu de $\dfrac{1g\,10a}{5p}$ que j'avois gagné auparavant, je gagneray $\dfrac{1gR}{5p}$. C'est à dire je gagneray $\dfrac{1g\,5p\,10a - 1g^2\,10a}{25p^2}$ au deuxieme coup et la somme des deux coups gagnez sera:

$$\frac{25p^2\,10a\ \boxed{-5p\,1g\,10a + 1g\,5p\,10a} - 1g^2\,10a}{25p^2}$$

Donc si je ne m'estois pas fait payer au premier coup, et si j'avois attendu jusqu'au 2^{me}, et si alors le jeu avoit esté rompu, il faudroit que j'eusse gagné la meme somme, que

---

7 *Zwischen die Zeilen gesetzte Anmerkung:* (Erreur: on ne peut pas comme cela conter sur les restes, voyez la 3^{me} partie.)

4 donc *(1)* ⟨en⟩ *(2)* je gagneray *(3)* c'est *L* 5 $\sqcap$ R. *erg. L*

11,17 $5p$: Lies „im Beispiel 5, im Allgemeinen p". $10a$ oder $1g$ sind entsprechend zu interpretieren. 6 $\dfrac{1gR}{5p}$: Da der Spieler nach g gewonnenen Runden nur noch $(5p - g)$ weitere gewinnen muss, um den Gesamtsieg zu erringen, stünde ihm beim Gewinn weiterer g Runden folgerichtig ein zusätzlicher Anteil von $\dfrac{1gR}{5p - g}$ zu. Dies entspricht eben $\dfrac{1g\,10a}{5p}$; der hier verfolgte Ansatz, welcher jede gewonnene Runde mit einem gleichen Teil des Gewinns belohnt, wird also im folgenden mit einem untauglichen Argument verworfen. In der bereits in Hannover verfassten Schrift *De incerti aestimatione* kehrt Leibniz im September 1678 zu diesem Ansatz einer arithmetischen Reihe zurück (vgl. VI, 4 N. 34, S. 101 Z. 10 bis 12). 8 $\dfrac{25p^2\,10a\ \boxed{-5p\,1g\,10a + 1g\,5p\,10a} - 1g^2\,10a}{25p^2}$: Das Ergebnis der Addition lautet konsequent gerechnet $\dfrac{2g\,5p\,10a - 1g^2\,10a}{25p^2}$. Der Fehler fällt nicht mehr ins Gewicht.

je gagne en me faisant payer chaque deux coups. Voila une belle preuve de ces sortes de raisonnemens mais selon nostre regle, j'aurois gagné $\frac{2g\,10a}{5p}$, ce qui est bien different de $\frac{25p^2\,10a - 1g^2\,10a}{25p^2}$. C'est pourquoy pour venir à bout d'une question aussi difficile que cellecy; je vois qu'il faut proceder tout autrement. Et tous ces sauts aux proportionalitez ne sont que des sophismes, qui nous doivent estre suspects. Et je vois par là qu'Euclide a eu raison de demonstrer rigoureusement les theoremes des triangles semblables et choses semblables. Voila la veritable methode, à ce que je crois.

Le nombre des points qu'il faut gagner est p. L'argent que mon adversaire a mis au jeu est a. Supposons que je ne mette rien de mon costé car cela peut arriver; et mon adversaire peut conter le plaisir qu'il a de jouer contre moy, pour quelque chose. Quoyqu'il y ait de la difficulté, car c'est alors plustost un prix proposé, s'il faut que je gagne dans un temps prefix et s'il n'y a point de temps, c'est un salaire, car humainement parlant je ne manqueray jamais de gagner que si nous mettons de deux costez, on peut concevoir l'un comme salarié de l'autre; et le salaire cessera lors que l'un de deux aura fait un certain nombre: mais cela n'est pas dans notre cas; donc cette supposition ne servira de rien.

Je reviens tousjours à cela, qu'ayant gagné 1 coup, ou 1 point, j'ay gagné quelque chose. Appellons cela l (*lucrum*). Mon adversaire a mis a sur la table, je gagne de son argent l le premier coup, donc il reste $a - l$, l'argent qui est sur la table que nous appellerons (a), donc le second coup je gagneray (l) qui seroit à l comme $(a) \sqcap a - l$ est à a. C'est à dire $(l) \sqcap \frac{al - l^2}{a}$. Et ainsi autant de fois qu'il y a des unitez en p, et la

6 demonstrer *(1)* Geometriq *(2)* rigoureusement les *(a)* proportions *(b)* les *(c)* theoremes *L* 18 l. (lucrum.). *(1)* Donc l'argent gagné *(2)* Mon adversaire *L* 19 a − l. *(1)* pour le second *(2)* je gagne le second coup *(3)* l'argent *L* 20 appellerons *(1)* l *(2)* a *(3)* (a) donc … gagneray | (L) *ändert Hrsg.* | qvi seroit à | L *ändert Hrsg.* | comme *L* 21 c'est a dire *(1)* L $\sqcap$ $a^2 - al$ *(2)* (l) $\sqcap \frac{al - l^2}{a}$ *L*

6 demonstrer: Vgl. EUKLEIDES, *Elementa*, VI.

somme de tous les l, (l) doit estre egale à a, ou $a \sqcap l + (l) + ((l))$ etc. Mais cela suppose une chose dont je ne suis pas bien seur, sçavoir que je gagne autant à proportion par le second coup sur l'argent qui reste apres celuy j'ay emporté par le premier coup; que j'ay gagné au premier coup sur tout l'argent de mon adversaire, ce qui n'est pas. Mais voila ce qu'on peut dire: j'ay emporté une certaine partie de l'argent de mon adversaire le premier coup: par exemple l. Il reste donc $a - l$. Donc apres cela, c'est comme si mon adversaire avoit mis sur la table $a - l$, à gagner en 4 points. Supposons que je ne mette rien, et que mon adversaire mette de l'argent a, à gagner en 5 points consecutifs; or je suppose que la facilité de gagner en 5 points consecutifs, est à l'apparence de gagner en 4 points consecutifs en raison reciproque du nombre des points. Ce principe estant posé, nous calculerons le party en cas qu'on laisse le jeu imparfait: Le nombre des points à gagner est p, l'argent mis est a. Je gagne un coup, ou 1 point, et je gagne par là quelque chose que nous appellerons l. Donc il reste $a - l$: à gagner en $p - 1$ points. Il faut considerer icy une chose estrange, qui est, que cette condition estant accordée, il m'appartient quelque chose si un cas survenant m'empechoit de commencer même à jouer; car j'ay tousjours un droit acquis et il est possible que je gagne. Et il est assez difficile d'estimer la probabilité qu'il y a que je gagne 5 fois consecutifes à la probabilité

1 somme *(1)* |de *nicht gestr.*| tous, doit estre êgale à a. *(2)* de tous les l. |(l) *erg.*| doit *L* 2 à proportion *erg. L* 5 emporté *(1)* un certain argent *(2)* une certaine *L* 9 qve la *(1)* difficulté *(2)* facilité *L* 11 imparfait: *(1)* Ayant gagné 1 point il est asseuré *(2)* Le nombre *L* 17 qve je *(1)* trouue *(2)* gagne *L*

---

1 $a \sqcap l + (l) + ((l))$: Leibniz legt hier den jeweils erreichten Gewinnanteil über eine geometrische Reihe fest. Der Sieg in einer Runde führt dabei zu einem jeweils kleineren Zuwachs als ein Sieg in der vorangehenden Runde. Allerdings konvergiert die von ihm definierte Reihe — unabhängig davon, wie groß der Anteil l von a gewählt wird — gegen a. Damit ist jede ihrer Partialsummen kleiner als a. Eine Teilungsregel, die auf dieser Reihe basiert, kann also die zweite der Mindestbedingungen (dass der Gesamtsieger den gesamten Gewinn erhält) niemals exakt erfüllen. 17 probabilité: Auch die *probabilité* wird in diesem Stück als Größe angesehen, die nicht absolut zu betrachten ist, sondern ihre Bedeutung als Teil eines Zahlenverhältnisses erhält. Zwar hat Leibniz bereits 1665 in seiner *Disputatio de conditionibus posterior* (in einem rechtstheoretischen Zusammenhang also) eine Vorform eines genormten Wahrscheinlichkeitsmaßes entwickelt: Der *conditio impossibilis* ordnet er dort die 0 zu, der *conditio necessaria* die 1 und der *conditio incerta* einen Bruch zwischen 0 und 1 (vgl. VI, 1 N. 6 S. 139; ganz ähnlich auch in den *Specimina juris* von 1667–69, ebd., N. 11 S. 420). Hier knüpft er an diesen Gedanken jedoch nicht an. 17 5 fois consecutifes: Das im Anschluss behandelte Beispiel verlangt nur vier in Folge zu gewinnende Runden. Es ist als Zusatzspiel im Rahmen des eigentlichen Spiels konzipiert. Eine vergleichbare Anforderung besteht aber auch etwa bei einem 0 : 3-Rückstand und vier Gewinnrunden.

qu'il y a que je perde une seule fois. Au premier jeu il est aussi probable que je perde que, que je gagne, donc une probabilité pour mon adversaire, l'autre est encor incertaine, car ayant gagné, il est encor aussi probable que je perde le second jeu, qu'il n'est probable que je le gagne; donc encor 1 degrez de probabilité asseuré pour mon adversaire, l'autre controversé entre luy et moy, car ayant gagné le second jeu, je peux encor ou perdre le troisieme, ce qui est asseuré pour mon adversaire, ou le gagner, ce qui est controversé entre moy et l'adversaire, et ainsi tousjours, jusqu'au dernier qui m'asseure de la victoire, $D \sqcap 0 \infty 1$.

$$A\begin{cases}0\\ B\begin{cases}0\\ C\begin{cases}0\\ D\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

[*Fig. 1*]

∞ *est signum disjunctivi, aut, quo nondum in calculo usi sumus.* $C \sqcap 0 \infty D \sqcap 0 \infty 0 \infty 1 \sqcap 2\,\overline{0} \infty 1$. $B \sqcap 0 \infty C \sqcap 0 \infty 2\,\overline{0} \infty 1 \sqcap 3\,\overline{0} \infty 1$. Et $A \sqcap 4\,\overline{0} \infty 1$.

2 gagne, *(1)* dont *(2)* donc ayant gagné, *(3)* donc *L* 2 l'autre *(1)* pour moy *(2)* est encor *L* 3 qve je *(1)* gagne le second jeu, *(a)* qve *(b)* qv'il n'est probable qve je perde; *(2)* perde *L* 4 f. encor 1 | degrez ... asseuré *erg.* | pour ..., l'autre *(1)* pour moy *(2)* controversé *L* 5–7 jeu, | il peut *ändert Hrsg.* | encor ... pour | son *ändert Hrsg.* | adversaire, ... entre | luy *ändert Hrsg.* | et ... qvi | l' *ändert Hrsg.* | asseure *L* 7 f. victoire, *(1)* C $\sqcap$ *(a)* $0 - 1$. *(b)* $0 \infty 1$ ∞ est signum disjunctivi | , aut *erg.* |, qvo nondum in calculo usi sumus. B $\sqcap 0 \infty$ C $\sqcap 0 \infty 0 \infty 1 \sqcap 2\,\overline{0} \infty 1$. A *(2)* D $\sqcap 0 \infty 1$ *L*

10 *Fig. 1:* *(1)* $\mathrm{A}\begin{cases}0\\ \mathrm{B}\begin{cases}0\\ \mathrm{C}\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}$ *(2)* $\mathrm{A}\begin{cases}0\\ \mathrm{B}\begin{cases}0\\ \mathrm{C}\begin{cases}0\\ \mathrm{D}\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$ *L*

10 Fig. 1: In diesem Schema lässt sich jede geschweifte Klammer als einzelne Spielrunde betrachten, *A* stellt den Spielstand zu Beginn des Zusatzspiels dar (vgl. S. 35 Z. 3), *B*, *C* und *D* sind Zwischenstände, bei denen es fortgesetzt wird, und 0 und 1 sind die möglichen Endresultate. Dabei bedeutet 1, dass der Spieler eine Serie von vier Runden in Folge gewonnen hat, 0 dagegen, dass ihm dies nicht geglückt ist. Ein fast identisches Zerlegungsschema findet sich als fragmentarische Notiz in dem ebenfalls im Januar 1676 verfassten Stück *De numero jactuum in tesseris* (N. 10 S. 59 Z. 16 f).

Donc $4p$ points estant proposez à estre gagnez consecutivement, l'apparence de les gagner à celle de ne pas gagner au commencement du jeu, est comme 1 est à $4p$. Ainsi

2 à celle … gagner *erg. L* 2 comme *(1)* 4p est à 1. *(2)* 1. est à 4p. *(a)* Rappeler *(b)* ainsi *L*

31,11 signum disjunctivi: Leibniz verfolgt das Programm, nach den Regeln einer *ars characteristica* universell einsetzbare Zeichen zu bilden. Das neu geschaffene Symbol ∞ steht jedoch nicht allgemein für *aut* (… *aut*), also exklusives „oder" (wofür die moderne Logik verschiedene Symbole kennt, etwa $\veebar$ oder $\oplus$), sondern es hat eine engere Bedeutung: Es stellt die einander ausschließenden Ausgänge einer Spielrunde nebeneinander. Dabei stehen links wie rechts des Symbols jeweils als gleichwahrscheinlich betrachtete Möglichkeiten; seine symmetrische Gestalt versinnbildlicht dieses Gleichgewicht. Das Symbol ∞ kann in eine Reihe mit den *signa ambigua* gestellt werden, wie sie Leibniz Mitte 1674 in seinen Schriften zur *méthode de l'universalité* (VII, 7 N. 10 u. 11) definiert. Auch bei diesen gibt es exklusive Fallunterscheidungen, die sich weiter aufzweigen. So steht etwa das Symbol $^{+}\!\mp$ für die Aussage „im einen Fall $+$, im anderen Fall entweder $-$ oder $+$" (vgl. VII, 7 N. 11 S. 124). Noch zwei Jahrzehnte später nennt Leibniz *notae ambiguitatis* und *notae disjunctivorum* im selben Atemzug (vgl. Leibniz an Wernher, 6./16. Oktober 1697; III, 7 N. 148 S. 598). **31,11** $C \sqcap 0 \infty D$: In den zum Schema aufgestellten Gleichungen haben die Größen A bis D andere Bedeutungen als im Schema selbst. Sie stehen nicht mehr für einen Spielstand, sondern für die Gesamtheit der als gleichwahrscheinlich vorausgesetzten Ausgänge, die sich aus diesem Spielstand ergeben können. Sie geben somit eine Art Erwartungswert an. Die Kurzschreibweise $C = 2\,\overline{0} \infty 1$ für $C = 0 \infty 0 \infty 1$ behandelt die Gleichung, als ob sie äquivalent zu $C = (0 \infty 0) \infty 1$ wäre; tatsächlich steht sie aber für $C = 0 \infty (0 \infty 1)$, was aufgrund der fehlenden Assoziativität der durch ∞ begründeten Verknüpfung nicht das Gleiche ist. In der Folge zählt die Kurzschreibweise nur die ungünstigen Endresultate und stellt sie dem einen günstigen Endresultat gegenüber. Bei der Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten führt sie in die Irre (vgl. Z. 2), da sie nicht zwischen den einzelnen ungünstigen Endresultaten, die jeweils unterschiedlich wahrscheinlich sind, differenziert. 1 $4p$: Lies „im Beispiel 4, im Allgemeinen p". 2 1 est à $4p$: Leibniz übersetzt die Gleichung $A = 4\,\overline{0} \infty 1$ in die unzutreffende Aussage, dass vom Spielstand A ausgehend das Endresultat 0 (Misserfolg) viermal so häufig auftrete wie das Endresultat 1 (Erfolg). Noch im selben Monat gelangt er an anderer Stelle aber zu einem korrekten Ergebnis: Unter dem Zerlegungsschema in N. 10 (S. 59 Z. 17) notiert er die Gleichungen $D = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{8}$ und $A = \frac{1}{16}$ (in jenem Schema sind B und C vertauscht). Die Größen A bis D erhalten dabei erneut eine andere Bedeutung; sie lassen sich als Erwartungswert des Zusatzspiels interpretieren, wenn der mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Spielstand erreicht worden ist. Der Erwartungswert (*valor expectationis*, eingeführt von Chr. Huygens, *a. a. O.*, 1657, S. 521 f.) ist ein Konzept, mit welchem Leibniz auch zweieinhalb Jahre später in *De incerti aestimatione* arbeitet. Dort berechnet er ihn für den Spielstand 1 : 0 und zwei Gewinnrunden über den Ansatz $\dfrac{\frac{1}{2}+1}{2}$ (vgl. VI, 4 N. 34 S. 100 Z. 4–6). Die Gleichungen in N. 10 lassen sich leicht auf analogem Wege aus den oben aufgestellten Gleichungen erhalten, indem man die Notation $D = 0 \infty 1$ in $D = \dfrac{0+1}{2}$ umschreibt, dann $C = 0 \infty D$ in $C = \dfrac{0+\frac{1}{2}}{2}$ überführt und entsprechend fortfährt.

celuy qui joue, a au commencement $\frac{1}{p}$ de la somme proposée. Le Reste est au jeu, c'est à dire, commun aux deux joueurs, s'il[s] les ont mis tous deux; ou à celuy qui a mis cet argent: celuy qui a gagné 1 point consecutif a $\frac{1}{p-1}$ de la somme proposée, celuy qui a 2 points consecutifs, a $\frac{1}{p-2}$ de la somme proposée. Donc la question se peut concevoir ainsi: deux joueurs mettent chacun une somme egale au jeu, à condition, que celuy qui gagnera un certain nombre de coups consecutifs, par exemple 4, gagnera tout. Par exemple jouant triomphe, ils demeurent d'accord apart, que celuy qui pendant le jeu principal gagnera le premier quatre fois consecutives, tirera outre ce qu'il gagne au jeu principal, une certaine somme qu'ils ont mise pour cet effect. Il s'agit de sçavoir le party qu'il faut faire de cette somme, lors que [le] jeu cesse, selon le nombre des points que celuy qui a gagné le dernier a gagné. Cette condition a cela de remarquable qu'on ne sçauroit finir que l'un de deux n'emporte quelque chose de la somme. Car celuy qui a gagné le dernier a détruit tout ce que l'autre a fait. Et ainsi, n'ayant qu'un point pour le moins

3 argent: *(1)* aux deuxiême coup *(2)* celuy qvi a gagne *(a)* deux points consecutifs *(b)* 1 point *L* 6 exemple 4. *(1)* amenera *(2)* gagnera *L* 7 f. celuy qvi *(1)* aura le premier *(a)* 5 *(b)* 4 *(2)* pendant le jeu principal *(a)* aura le premier *(b)* gagnera *L* 8 f. outre ... principal *erg. L* 9 sçavoir *(1)* si *(2)* combien *(3)* le party *L* 11 dernier a *(1)* amené *(2)* gagné *L* 12 finir *(1)* (dans les jeux ou pas un ne peut passer *(2)* qve l'un *L*

---

4 consecutifs: Die hier beschriebene Zuteilung der Gewinnanteile folgt unmittelbar aus der unzutreffenden Annahme, die Häufigkeit eines Misserfolgs sei, wenn p Siege in Folge gefordert sind, p-mal so hoch wie die eines Erfolges. Konsequent betrachtet müsste der Spieler allerdings mit einem Anteil von $\frac{1}{p+1}$ (und nicht von $\frac{1}{p}$) starten. Die Gewinnanteile im Zusatzspiel entsprechen dann den Gliedern einer umgedrehten harmonischen Folge. Die Frage nach dem „fairen" Einsatz für ein solches Spiel — die Leitfrage von N. 10; vgl. S. 71 Z. 1–4 — greift Leibniz an dieser Stelle nicht auf, obwohl sein Ergebnis eine Antwort impliziert. 7 triomphe: Dieses einfache, in zeitgenössischem Deutsch als „Trumpffspiel" bezeichnete Kartenspiel ist zu jener Zeit in Frankreich populär; die Zahl der Spieler ist variabel (vgl. La Marinière, *La maison des jeux académiques*, 1665, S. 43–45). Es existiert auch eine Variante für genau zwei Spieler (vgl. ebd., S. 46). 8 quatre fois consecutives: Durch die geänderten Bedingungen des Zusatzspiels — es ist nun symmetrisch angelegt, wird bei Misserfolg fortgesetzt und als Endresultat ist auch ein Unentschieden möglich — wird ein ganz neues Problem gestellt. Die geänderten Bedingungen und insbesondere der zusätzlich zu berücksichtigende Parameter machen die Berechnung der Gewinnchancen deutlich aufwändiger.

lors que le jeu cesse, il luy appartiendra à proportion. Question: deux joueurs mettent ensemble une somme egale, qui sera à celuy qui aura gagné quatre fois consecutives au jeu principal. Il s'agit de sçavoir combien de la somme appartiendra à celuy qui aura gagné le dernier un certain nombre de coups consecutifs, lors qu'on se separe sans avoir achevé le nombre qui luy faut.

$$
A\left\{\begin{array}{l}
b\left\{\begin{array}{l}
(b)\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{smallmatrix}b\\c\end{smallmatrix}\right. \\ c\left\{\begin{smallmatrix}b\\c\end{smallmatrix}\right.\end{array}\right. \\
(c)\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{smallmatrix}b\\c\end{smallmatrix}\right. \\ c\left\{\begin{smallmatrix}b\\c\end{smallmatrix}\right.\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
c\left\{\begin{array}{l}
b\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{smallmatrix}b\\c\end{smallmatrix}\right. \\ c\left\{\begin{smallmatrix}b\\c\end{smallmatrix}\right.\end{array}\right. \\
c\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{smallmatrix}b\\c\end{smallmatrix}\right. \\ c\left\{\begin{smallmatrix}b\\c\end{smallmatrix}\right.\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\qquad\qquad
A\left\{\begin{array}{l}
B\left\{\begin{array}{l}
D\left\{\begin{array}{l} H \\ L \end{array}\right. \\
E\left\{\begin{array}{l} M \\ N \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
C\left\{\begin{array}{l}
F\left\{\begin{array}{l} O \\ P \end{array}\right. \\
G\left\{\begin{array}{l} Q \\ R \end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

[*Fig. 2*]

1 f. proportion. *(1)* Lors qve la condition *(2)* qvestion deux joueurs mettent *(a)* une somme *(b)* ensemble ... egale, *(aa)* pendant *(bb)* qvi *L* 2 fois | consecutifs *ändert Hrsg.* | *(1)* dans le jeu *(2)* au jeu *L* 3 combien *(1)* aura gagné celuy *(2)* de la somme *L* 4 le dernier *erg. L* 5 nombre *(1)* qv'il faut *(2)* qvi *L*

4 le dernier: Man betrachte als Beispiel ein Spiel, in welchem für das Hauptspiel sechs Gewinnrunden vereinbart worden sind und für das Zusatzspiel vier Gewinnrunden in Folge. Wird das Hauptspiel nun beim Stand von 2 : 2 abgebrochen, wobei der eine Spieler die beiden letzten Runden gewonnen hat, so würde die in Z. 1 angeregte Teilung *à proportion* nahelegen, dass der Einsatz im Verhältnis 3 : 1 zu seinen Gunsten zu teilen wäre. Tatsächlich beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Sieges dieses Spielers im Zusatzspiel jedoch $\frac{39}{128}$ und die seines Gegners $\frac{12}{128}$; eine „faire" Aufteiung müsste also im Verhältnis 155 : 101 erfolgen. 7 Fig. 2: Mit diesem Schema, das einem modernen Baumdiagramm sehr ähnlich ist, nimmt Leibniz nun auch die weiteren möglichen Spielverläufe in den Blick. *A* lässt sich auch als jener Spielstand interpretieren, bei dem ein Spiel, in welchem maximal noch vier bzw. drei Runden zu spielen sind, abgebrochen werden muss.

S'ils la mettent de sorte que celuy qui gagne le premier quatre fois; la peut prendre; alors, on peut faire de même: Car en 2 fois autant de jeux, qu'il y a de points demandés; l'un des deux doit gagner: A est l'estat au quel on commence le jeu. Puisque le nombre des jeux necessaires à chacun est p, le nombre des jeux qui doivent determiner la chose est $2p$. Et chaque jeu est $b \infty c$, *id est* favorable à la personne b ou à la personne c, egalement. Il y aura donc: $2p\ \overline{b \infty c}$ au commencement c'est à dire $2pb \infty 2pc$. Mais (g) jeux estant gagnés par b, le nombre des jeux qui restent est $2p - g$. Le nombre des jeux qui restent à gagner à b est $p - g$. Le nombre des jeux, qu'il faut que c gagne est $p + g$. Or il peut arriver par autant de manieres differentes que b gagne, qu'il y a de com$\boxed{p-g}$naisons dans le nombre $2p - g$, considerant, qu'il peut gagner chaque jeu; car ainsi il peut autant de fois gagner ces $p - g$ jeux qui luy restent, qu'on peut prendre differentes fois le nombre de $p - g$ dans $2p - g$ choses. De même accordant à l'autre c, aussi, qu'il peut gagner chaque jeu, comme il doit gagner $\overline{p + g}$ fois pour tirer l'argent. Mais je trouve encor un paralogisme là dedans, il ne faut pas examiner combien des fois il peut gagner le nombre des jeux qui luy restent, dans le nombre des jeux qui restent à jouer; mais combien des fois il les peut gagner le premier, par exemple dans le nombre $2p - g$. Combien des fois on peut conter $p - g$ pour l'un avant qu'on ait conté $p + g$ pour l'autre. Soit le nombre des jeux qui restent à jouer $2p - g \sqcap 5$, le nombre des jeux que l'un doit gagner $p - g$, le nombre des jeux que l'autre doit gagner n'est pas $p + g$ comme j'avois dit, mais encor p, s'il n'a rien gagné, et $p - f$, s'il en a fait f.

2 alors, *(1)* il faut *(2)* on peut *L* 2 Car *(1)* ⟨en 3 fo⟩ *(2)* en *(a)* 3 *(b)* 2 fois *L* 3 f. Puisqve *(1)* cha *(2)* le nombre des *(a)* jeux est 2p. *(b)* jeux *L* 5 est 2p. *(1)* Dont il faudroit *(2)* Et *L* 6 egalement | Dans le nombre *gestr.* | , il y aura *L* 6 Mais *(1)* 1 jeu estant gagné, *(2)* (g) | jeu estant gagné *ändert Hrsg.* | | par b *erg.* | , *L* 12 De même *(1)* consider *(2)* accordant *L* 13 jeu, *(1)* neantmo *(2)* comme *L* 14 Mais je *(1)* m'a *(2)* trouue *L*

---

2 en 2 fois: Leibniz springt unvermittelt vom Zusatzspiel zurück zum Hauptspiel. Die Aussage trifft jedoch weder auf das eine noch das andere zu. 5 $2p$: Tatsächlich hat nach spätestens $(2p - 1)$ Runden ein erster Spieler p Siege erzielt; vgl. auch S. 18 Z. 10 f. 10 com$\boxed{p-g}$naisons: Dieser Begriff bezeichnet ungeordnete Stichproben von $(p - g)$ Elementen aus einer gegebenen Grundmenge; vgl. N. 23 S. 102 Z. 21 bis S. 103 Z. 2. Hier sind also Kombinationen von $(p - g)$ aus $(2p - g)$ Elementen ohne Wiederholung, in moderner Darstellung $\binom{2p-g}{p-g}$ an der Zahl, gemeint. Mit Fig. 4 greift Leibniz diesen Ansatz wieder auf. 18 $2p - g$: Die Anzahl der bei einem Stand von $g : f$ und p Gewinnrunden maximal noch zu spielenden Runden m beträgt tatsächlich $(2p - g - f - 1)$. Leibniz richtet in der Folge in den Figuren ⊕ und 4 mehr Spalten ein als erforderlich.

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \oplus\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \begin{array}{c} B \\ C \\ (1) \\ (2) \\ \hline (1) \end{array} & & & & & & & \end{array}$$

$$\oplus\left\{\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ B & b & b & b & b & b & \text{etc.} \\ C & c & c & c & c & c & \text{etc.} \\ (1) & b & & & & & \\ (2) & c & b & & & & \\ \hline (1) & c & c & & & & \end{array}\right.$$

[*Fig. 3*]

Supposons $p \sqcap 4$, $g \sqcap 3$, $f \sqcap 2$, le nombre des jeux à jouer 5. Le nombre des jeux à gagner par b, sera 1. Le nombre des jeux à gagner par c, sera 2. Or il faut considerer combien des fois on peut conter $1\,b$, avant que d'avoir conté $2\,c$ dans la figure $\oplus$. Et on voit, que cela ne se peut qu'en deux manieres, marquées de (1) et de (2). Mais $2\,c$ ne se peut conter qu'une seule fois, en commençant par $c\ c$, avant que d'avoir dit une fois b. Donc la possibilitez de l'un est double de la possibilité de l'autre. Et l'argent tout entier qui est au jeu sera partagé en trois parties egales, dont l'un aura $\frac{2}{3}$, l'autre $\frac{1}{3}$, sans se mettre en peine d'autre chose. Prenons un tel exemple. On a proposé une somme d'argent a, à celuy de deux joueurs seuls jouans, qui gagnera le premier 5 jeux. L'un b, en ayant déja gagné 3, et l'autre c, un seulement, il est manifeste que si b gagne 2, il aura tout; et s'il perd deux, il n'aura que la moitié de l'argent mis au jeu. Dont l'autre moitié se doit partager en deux, et l'un ayant 3, l'autre 1. Celuy qui a gagné 3, aura gagné $\frac{3}{4}$. Ce qui est un cas connu. Voyons si nous pouvons deriver cela de nostre principe. Le nombre

1 1 ... 5 *erg.* L 6 $\overline{(1)\,|\,\mathrm{b\ b}}$ *ändert Hrsg.* | L 8 f $\sqcap$ 2. *(1)* et il *(a)* en faut 1 point *(b)* faut 2 points à *(2)* Le nombre L 10 dans *(1)* les figures *(2)* la figure $\oplus$ L 11–13 Mais | 2. *ändert Hrsg.* | ne se ... par | b b, *ändert Hrsg.* | avant ... fois | c. *ändert Hrsg.* | donc L 16 joueurs seuls jouans *erg.* L 16 premier *(1)* 6 *(2)* 5 jeux L 17 manifeste qve *(1)* s'il *(2)* si b *(a)* perd *(b)* gagne L 19 f. gagné *(1)* $\frac{1}{2}$ *(2)* $\frac{3}{4}$. *(a)* Mais *(b)* Ce qvi L

13 double: Leibniz betrachtet hier die möglichen weiteren Spielverläufe bis zur Entscheidung — die *possibilités* —, zählt zusammen, wieviele davon mit einem Gesamtsieg des führenden Spielers enden und wieviele mit dem Sieg seines Gegenspielers, und setzt das Verhältnis dieser *possibilités* mit dem der *probabilités* gleich. Dies würde allerdings voraussetzen, dass jede *possibilité* mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt, was nicht der Fall ist. Tatsächlich sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten in diesem Beispiel die gleichen wie in jenem am Anfang des Stückes (S. 18 Z. 5), wo Leibniz sie korrekt angibt.
20 connu: Leibniz bezieht sich hier auf seine unzutreffenden Überlegungen in S. 20 Z. 9–14.

des jeux à jouer au commencement estoit 10. On en a joué 4, dont b a gagné 3, et c en a gagné 1. Il en restent donc 6 à jouer, et 2 à gagner pour b, et 4 à gagner pour c. Donc ayant accordé à l'un aussi bien qu'à l'autre de gagner egalement chaque jeu; il faut voir quelle consequence il peut tirer de cette permission.

	1	2	3	4	5	6
	b	b	b	b	b	b
	c	c	c	c	c	c
(1)	b	b				
(2)	c	b	b			
(3)	c	c	b	b		
(4)	c	c	c	b	b	
(5)	b	c	b			
(6)	c	b	c	b		
(7)	c	c	b	c	b	
(8)	b	c	c	b		
(9)	c	b	c	c	b	
(10)	b	c	c	c	b	

(1)	c	c	c	c	
(2)	b	c	c	c	c
(3)	c	b	c	c	c
(4)	c	c	b	c	c
(5)	c	c	c	b	c

[*Fig. 4*]

5 1 ... 6 *erg. L*

18 Fig. 4: Leibniz verfolgt weiterhin den Ansatz der *possibilités*. Bei höchstens m noch zu spielenden Runden und einem Stand von $g : f$ enden $\binom{m}{p-g}$ Spielverläufe mit einem Gesamtsieg des in Führung liegenden Spielers und $\binom{m}{p-f}$ mit seiner Niederlage. Die Aufteilung soll nun im Verhältnis dieser Zahlen erfolgen, wobei Leibniz allerdings keine Formel zu ihrer Berechnung angibt. Gekürzt ergibt sich eine Teilung im Verhältnis von $(p-f):(p-g)$. Leibniz gelangt hier also auf dem Umweg über kombinatorische Erwägungen — und ohne sich dessen gewahr zu werden — zu einer der einfachsten und nächstliegenden Teilungsregeln. Diese Regel erfüllt die genannten Mindestanforderungen; da sie unterschiedlich wahrscheinliche Spielverläufe gleich gewichtet, erfolgt die Aufteilung allerdings im Allgemeinen nicht im Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten der beiden Spieler zueinander. Dies leistet dagegen die kanonisch gewordene Lösung von Pascal und von Fermat aus dem Jahr 1654. Fermats Ansatz dabei liegt nur einen Schritt von jenem, den Leibniz hier verfolgt, entfernt: Er ergänzt ein Schema wie das obige so, dass es sämtliche Spielverläufe, die in der maximal noch zu spielenden Anzahl an Runden möglich sind, wiedergibt (gleichgültig, ob diese Runden tatsächlich alle gespielt werden müssen, um den Sieger zu ermitteln). Diese Spielverläufe betrachtet er dabei als jeweils gleichwahrscheinlich, und er zählt zusammen, in wie vielen davon der Führende den Gesamtsieg erringen würde und in wie vielen sein Gegenspieler. Die Teilung erfolgt im Verhältnis dieser Zahlen (vgl. P. de FERMAT, *a. a. O.*, S. 184).

Donnons à la personne *b* le pouvoir de gagner toutes les fois qu'il veut; il ne peut gagner qu'en 10 manieres selon les loix et circomstances du jeu: donnons à l'autre le même pouvoir sur la fortune, il ne peut gagner qu'en 5 manieres differentes: dont ostant à tous deux ce pouvoir, et les remettant dans l'estat des hommes ordinaires, les apparences de gagner, seront comme les possibilitez, et les possibilitez comme le nombre de plusieurs cas egalement possibles. Voila icy l'objection car on peut dire les differens cas ne sont pas egalement possibles. Je reponds qu'ouy, par ce qu'il y a dans l'un autant de requisits que l'autre, car dans tous les dix cas favorables à *b*, on ne demande que deux fois le gain de *b*, et dans tous les cas favorables à *c* on ne demande que quatre fois le gain de *c*. Mais je voy par là que mon opinion avoit besoin de correction, et que un cas favorable à *b*, est bien plus possible qu'un cas favorable à *c*, par ce qu'il faut quatre succes à un cas de *c*, et il n'en faut que 2 à un succes favorable à *b*. Donc les facilitez estant en raison reciproque des nombres, et 10 estant double de 5, et 4 double de 2, l'avantage de *b* sera à l'avantage de *c*, comme 4 à 1. Il est manifeste de soy meme qu'il est plus aisé de faire 2 coups que d'en faire 4, en raison reciproque de 2 à 4. Et il est bien manifeste aussi qu'il est bien plus aisé de recontrer une des dix manieres, que de recontrer une des 5. Si le partage doit estre fait en deux parties qui sont en raison des apparences de gagner;

---

1 *Über* le pouvoir de gagner *gesetzte Anmerkung:* chapeau de Fortunatus

2 manieres *(1)* dont l'une est aussi possible qv *(2)* selon *L* 7 possibles *(1)* Car un cas des *(2)* Je reponds *L* 9 gain de c. *(1)* Donc je vois a prese *(2)* Mais *L* 15 faire 4. *(1)* Or qvand il y a *(2)* en ... de *(a)* 4 a 2 *(b)* 2 a 4. *L* 16 manieres, *(1)* | qve de rencontrer une des *(a)* 4 *(b)* 10 *nicht gestr.* | *(2)* qve de rencontrer un des *(a)* 4 *(b)* 5. *(aa)* Si le droit *(aaa)* est *(bbb)* acqvis est egal à l'apparence de gagner; et l'apparence de gagner est en raison des cas comme *(bb)* Si *L*

---

18 chapeau: Das Wunschhütlein ist eine magische Requisite in dem ersten eigenständigen Prosaroman deutscher Sprache, dem aus unbekannter Feder stammenden *Fortunatus*. Mit Hilfe des Hutes kann sich sein Besitzer an jeden beliebigen Ort der Erde wünschen; vgl. O. V., *Fortunatus*, 1509, Bl. 60.
14 manifeste: Das Verhältnis der *facilités* zueinander beträgt $(p-f):(p-g)$; es entspricht also genau dem der *possibilités* und somit auch der oben zunächst vorgeschlagenen Teilungsregel. Da Leibniz für diese Regel jedoch keine Formel aufstellt, sondern sie nur anhand des Beispiels veranschaulicht, entgeht ihm die Übereinstimmung.

et les apparences de gagner, comme les nombres des cas egalement aisez, ou en raison composée du nombre des cas et de leur facilité, il est manifeste qu'il est aussi aisé que *b* gagne dans le premier des cas qui luy sont favorables que dans le second.

On peut considerer la meme chose lors qu'il y a plus de joueurs que deux, ce que Mons. Pascal n'a pas examiné, et qui est bien plus embarrassé. Car s'il y en a trois par exemple; il ne faut pas prendre le double du nombre des jeux à gagner, pour le nombre des jeux à jouer, mais le triple, *item* il faut faire le partage en trois parties proportionnelles aux apparences, et pour estimer les apparences il faut avoir egard à deux obstacles, par exemple non seulement venant de *c*, mais aussi de *d* troisieme joueur. On peut considerer que deux jouent, et qu'on demande d'un certain nombre de partis à l'autre, un autre; pour gagner. Il peut estre que l'un aye mis plus au jeu, dont il a quitté la proprieté, pour acheter le droit de gagner en moins de coups.

1 f. gagner; *(1)* en raison des possibilitez *(2)* comme *(a)* le nombre *(b)* les nombres des cas egalement *(aa)* possibles; ou en raison *(bb)* aisez, ou en raison *(aaa)* reciproqve *(bbb)* recip *(ccc)* composée *L* 4 qve deux *erg. L* 8 egard a *(1)* trois *(2)* deux *L* 9 seulement *(1)* de *(a)* b, *(b)* c, mais aussi *(2)* venant *L* 12–40,1 acheter *(1)* | par *nicht gestr.* | la des *(2)* le droit ... moins de *(a)* part *(b)* coups. *(aa)* Si *(aaa)* un *(bbb)* b aya *(bb)* S'il y a trois *(aaa)* parties, et b a gagné *(bbb)* poi *(ccc)* jeux *L*

1 f. raison composée: Die hier aufgestellte zweite Leibniz'sche Teilungsregel, die eine Aufteilung im Verhältnis der Produkte aus *facilité* und *possibilité* vorsieht, lässt sich mit der Formel $(p-f)^2 : (p-g)^2$ wiedergeben. Diese Regel erfüllt die genannten Mindestanforderungen. Die von Leibniz zunächst erwogene Aufteilung im Verhältnis der *possibilités* spricht dem in Führung liegenden Spieler stets einen geringeren Anteil zu, als es der Wahrscheinlichkeit seines Gesamtsieges entspricht; die um den Faktor der *facilité* erweiterte Regel liefert demgegenüber eine bessere Annäherung an das Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten. 5 pas examiné: Leibniz bezieht sich hier auf die genannte Abhandlung III in Pascals *Traité du triangle arithméthique*, 1665 [Marg.]. Dass diese die Aufteilung unter zwei Spielern behandelt, geht aus ihrem Titel hervor. Mit der Teilungsregel, die Pascal in dieser Abhandlung auf S. III, 6 f. (= *PO* III, S. 488) beschreibt und welche sich mit der Formel $\sum_{n=0}^{p-f-1}\binom{m}{n} : \sum_{n=p-f}^{m}\binom{m}{n}$ wiedergeben lässt, befasst sich Leibniz nicht. Die Verteilung des Gewinns unter drei Spielern diskutiert Pascal ausführlich an anderer Stelle (vgl. Pascal an Fermat, 24. August 1654, in: P. de FERMAT, *Varia opera*, 1679 [Marg.], S. 185–188). Der Inhalt dieses Briefes ist Leibniz, als er das vorliegende Konzept niederschreibt, offensichtlich noch nicht bekannt. 7 triple: Tatsächlich beträgt bei drei Spielern die maximal zu spielende Anzahl an Runden $(3p-2)$. 12 acheter: Bei einer solchen Vereinbarung stellt sich unmittelbar die Frage nach dem „gerechten" Einsatz, also die Leitfrage von N. 10.

S'il y a trois jeux à gagner, et b en a gagné 2, c en a gagné 1, et si b gagne 1, il a tout, s'il perd un, il a la moitié de ce qui est au jeu, donc le gain d'un coup luy donnant a et la perte d'un coup le remettant à $\frac{a}{2}$, il semble que le jeu luy doit donner autant qu'il luy peut oster. Mais si ce calcul n'a point d'autre principe, il est malfondé; parce qu'il s'agit non seulement du nombre des points mais encor de la primauté. Et par même raison, on prouveroit qu'il est la même chose que deux joueurs gagnent tous deux, ou perdent tous deux en cas de jeu contesté; ce qui n'est pas icy.

$$\begin{array}{ccc|cc} b & b & b & & \\ c & c & c & & \\ \hline b & & & c & c \\ c & b & & & \end{array}$$

[*Fig. 5*]

Donc selon mes principes en ce cas le party de b sera au party de c, comme 4 à 1. L'autre opinion semble estre confirmée par cecy: quand il y a autant de hazard de gagner, qu'il y en a de perdre; le droit qu'on acquireroit en gagnant, doit estre egal au droit qu'on quitteroit en perdant. Mais cette maxime n'est pas bien constante. Nous le pouvons voir. Soit trois coups à gagner; je gagne 1 coup. Et je suppose d'avoir gagné par là, l. Si je l'avois perdu, j'aurois perdu l. Avant que de jouer j'avois $\frac{a}{2}$. Ayant gagné le premier coup, j'ay $\frac{a}{2}+l$. Ayant perdu le premier coup, j'aurois $\frac{a}{2}-l$. Apres avoir gagné le premier coup, je gagne aussi le second coup, qui me donne (l). Si je l'avois perdu, j'aurois $\frac{a}{2}+l-(l)$. Or en ce cas, l'autre auroit gagné autant que moy, et nous serions égaux, donc j'aurois $\frac{a}{2}$, donc $\frac{a}{2}+l-(l) \sqcap \frac{a}{2}$, *id est* $(l) \sqcap l$. Donc le second coup

2 un, il *(1)* n'a rien, et to *(2)* a la moitié *L* 2 f. gain d'un *(1)* point *(2)* coup luy donnant *(a)* $\frac{\mathrm{a}}{2}$ *(b)* a ... coup *(aa)* | luy *nicht gestr.* | donnant $\frac{\mathrm{a}}{2}$ *(bb)* le remettant *L* 3 semble qve *(1)* l'apparence *(2)* le jeu *L* 10 f. $\begin{array}{cc|l} \overline{\mathrm{b}\quad} & & \mathrm{c\ c} \\ \mathrm{c} & \mathrm{b} & |\ \mathrm{b\ c\ c}\ \textit{gestr.}\ | \end{array}$ *L* 15 gagner | qvelqve chose *gestr.* | , qv'il ... perdre; *(1)* et qvand on gagne, $\frac{\mathrm{a}}{2}$. *(2)* le droit *L* 16 constante. *(1)* Car il est asseuré, qv'on peut gagner un jeu ⟨aya⟩ *(2)* Nous *L* 18 perdu l. *(1)* Si je gagne le *(2)* avant *L* 20 donne (l). | si je l'avois perdu *streicht Hrsg.* | si *L*

me fait avoir $\frac{a}{2} + 2\,l$. Il m'en osteroit autant. Il faut examiner si la difficulté de gagner une somme en trois jeux, ou 4, est proportionnelle au nombre de jeux.

On propose à b et c de gagner une somme d'argent, en sorte que celuy, qui fera le premier trois jeux; l'emportera. Il est manifeste, qu'au commencement tout est égal; dont l'un a autant de droit que l'autre sur la somme proposée; et la somme est tout entiere à tous deux, parce qu'ils ne manqueront pas de gagner, l'un ou l'autre, donc la moitié appartient à chacun.

(1) b b	(1) c c c	
(2) c b b	(2) b c c c	$\frac{15a}{23}$ $\frac{8a}{23}$
(3) c c b b	(3) c b c c	
(4) b c b	(4) c c b c	
(5) c b c b		
b	c c c	
c b		$\frac{9a}{10}$ $\frac{1a}{10}$
c c b		
b	c c	$\frac{4a}{5}$ $\frac{1a}{5}$
c b		

[*Fig. 6*]

1 f. me *(1)* donne 2 l *(2)* fait ... +2 l. *(a)* À present le troisiême coup me donne ((l)), si je l'avois perdu j'aurois *(b)* il ... autant *(aa)* donc *(bb)* A present voyons *(cc)* il faut examiner *(aaa)* | s'il est *nicht gestr.* | aussi aisé de gagner les *(bbb)* si la ... trois jeux, | ou 4, *erg.* | est proportionelle *(aaaa)* à la somme de la gagner *(bbbb)* au nombre *L* 5 somme | est *gestr. L, erg. Hrsg.* | *(1)* à *(2)* tout *L*

---

2 proportionnelle: Eine Gleichheit $(l) = ((l))$ lässt sich auf analogem Wege nicht zeigen. Tatsächlich wird die allgemeine Forderung, dass jede einzelne Runde eines Vorsprungs einen gleich großen Zugewinn einbringen, für den Sieger also gleich viel wert sein soll, ausschließlich durch die erste Leibniz'sche Teilungsregel, formuliert in S. 25 Z. 1–4, erfüllt. Die Forderung dagegen, dass ein Spieler in einer einzelnen Runde stets ebensoviel gewinnen wie verlieren können soll (vgl. auch S. 40 Z. 14–16), dass also der Wert dieser Runde für beide Spieler gleich sein soll, wird nur durch die Teilungsregel von Fermat und Pascal erfüllt. Eine allgemeine Regel, die beide Forderungen gleichzeitig erfüllt, existiert nicht. 18 Fig. 6: In der Tabelle fehlt der sechste Spielverlauf, durch den der in Führung liegende Spieler ausgehend vom Spielstand von 1 : 0 bei drei Gewinnrunden gewinnen kann, nämlich b c c b. Dementsprechend müsste der zweiten Leibniz'schen Teilungsregel folgend der Gewinn nicht im Verhältnis von 15 : 8, sondern von 9 : 4 aufgeteilt werden. Die sich aus dem Irrtum ergebenden Zahlenwerte werden bis S. 45 verwendet.

Je suppose que b gagne 1 jeu, il restent 2 jeux à gagner à luy, et trois à gagner à son adversaire; voyons combien il y a plus d'apparence, qu'il en emporte les deux premiers, que l'autre les trois premiers. Parce qu'il faut que b gagne 2, avant que c gagne trois, voyons combien de fois cela peut arriver, que b gagne deux avant que l'autre trois, or il y a 5 manieres favorables à b, et il y en a 4, à c, donc l'apparence pour b est à l'apparence pour c, comme 5 à 4. Mais encor parce que le nombre des jeux que b demande, est au nombre des jeux que c demande comme 2 à 3, donc l'apparence est en raison de 3 à 2 et toute l'apparence est en raison composée, c'est à dire de $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$, c'est à dire comme 15 à 8. Donc divisant l'argent en 23 parties $\frac{15a}{23}$ seront à b, et $\frac{8a}{23}$ à c.

Supposons de plus, que b gagne aussi le second coup, il ne luy restera qu'un à gagner, et à son adversaire encor trois, donc les manieres estant comme 3 à 1, et la raison reciproque des coups aussi comme 3 à 1. Les apparences seront comme 9 à 1, c'est à dire b aura $\frac{9a}{10}$, et c, $\frac{a}{10}$ de la somme. Si b avoit perdu le second coup tout seroit revenu à l'egalité.

Supposons maintenant que b perde le 3$^{\text{me}}$ coup, car s'il gagne il a a tout entier. S'il perd, il luy reste 1 coup à gagner, et à son adversaire il en reste deux. Les manieres comme 2 à 1, et les coups de meme donc les avantages comme 4 à 1, et b aura $\frac{4a}{5}$ et c, $\frac{a}{5}$. Voila tous les cas possibles à trois jeux. Pour examiner cela, voyons si le meme proviendroit, en supposant qu'un homme b, gagne trois coups de suite; et qu'on luy paye chaque foy, ce qu'il peut avoir gagné de droit par ce coup. Le premier coup luy donne $\frac{15a}{23}$

2 voyons *(1)* qvel *(2)* qvelle apparence il y a, qv *(3)* combien *L* 2 emporte les *(1)* trois *(2)* deux *L* 3 faut qve *(1)* celuy *(2)* b *L* 8 composée, c'est à dire *(1)* comme 10 à ⟨5⟩ *(2)* de $\frac{5}{4}$ *L* 9 $\frac{15\,|\,\text{a } \textit{erg.}\,|}{23} \ldots \frac{8\,|\,\text{a } \textit{erg.}\,|}{23}$ *L* 11 donc *(1)* le nombre des manieres *(2)* les manieres *L* 13 Si *(1)* j'avois *(2)* b avoit *L* 14 f. l'egalité. — *(1)* de plus *(2)* Supposons *L* 18 $\frac{\text{a}}{5}$. *(1)* Ecce omnes casus possibiles in tre *(2)* voila *L* 19 b *erg.* *L*

et à son adversaire $\frac{8a}{23}$, dont prenant $\frac{7a}{23}$ preferablement et laissant $\frac{8a}{23}$ au jeu, aussi bien que son adversaire, il restera au jeu $\frac{16a}{23}$. Et c'est comme si l'on avoit proposé à gagner $\frac{16a}{23}$ à deux en sorte que l'un fut obligé à gagner 2 coups, l'autre à gagner trois pour l'emporter. Mais je voy apresent que ce seroit injuste comme cela, car ayant payé à celuy qui a gagné l'avantage qu'il a eu sur l'autre, il ne faut pas luy laisser encor de l'avantage, c'est pourquoy il faut que l'un gagne autant de fois que l'autre. Et on peut dire que celuy qui a gagné renonce à son coup, en recevant ce que je viens de dire. Et puisque ils sont rendus égaux, il s'agit de sçavoir, s'il faut faire en sorte que tous deux soyent obligez de gagner le residu en trois coups; ou tous deux en deux coups. Je dis que cela n'importe. Et selon la justice puisque ils sont égaux, c'est à eux de choisir la maniere qui leur plaist. Donc si encor tous deux s'obligeoient à gagner trois coups, et si on payoit tousjours son coup, à celuy qui gagneroit, continuant cecy à l'infini; la somme de toutes ses fractions infinies doit estre egale à la somme proposée toute entiere. Si tous deux s'obligeoient à gagner seulement deux coups; et b gagne le premier, il ne luy reste qu'un coup, et deux à son adversaire, donc les manieres et les coups estant doubles; l'avantage e[s]t quadruple, et par ce second coup, b aura sur $\frac{16a}{23}$ qui reste au jeu, que nous appellerons (a), $\frac{4\,(a)}{5}$, et c $\frac{1\,(a)}{5}$. Donc, b prendra preferablement $\frac{3\,(a)}{5}$, et il restera au jeu $\frac{2\,(a)}{5} \sqcap \frac{32a}{5,23}$, le quel appartient à tous deux egalement. Si on les obligeoit de jouer tousjours à trois coups, et

1 f. adversaire $\frac{8\,|\,\text{a } \textit{erg. Hrsg.}\,|}{23}$, ... $\frac{7\,|\,\text{a } \textit{erg.}\,|}{23}$ ... $\frac{8\,|\,\text{a } \textit{erg. Hrsg.}\,|}{23}$ ... $\frac{16\,|\,\text{a } \textit{erg.}\,|}{23}$ *(1)* dont gagnant le second coup *(2)* Et *L* 3 obligé a *(1)* jouer *(2)* gagner *L* 4 ayant *(1)* donné a celuy qvi *(2)* payé *L* 7 dire. *(1)* Et il s'agit de sçavoir si selo *(2)* Et puisqve *L* 15 et les *(1)* nombres *(2)* coups *L*

9 n'importe: Während die Entscheidung für zwei weitere Spielrunden (und anschließend eine einzelne Runde) ein Modell für das Spiel mit drei Gewinnrunden liefern kann, impliziert die Entscheidung für drei weitere Runden einen von der ursprünglichen Spielidee deutlich abweichenden, unendlichen Spielverlauf. 12 l'infini: Dieser Spielmodus entspricht letztlich dem auf S. 29 Z. 18 – S. 30 Z. 1 entwickelten Ansatz unter Ausweitung auf unendlich viele Spiele. 15 manieres: Leibniz wendet erneut seine zweite Teilungsregel an, ersetzt nun aber den Begriff *possibilité* durch *maniere*, und anstelle von *facilité* oder *difficulté* spricht er nun einfach von den benötigten *coups*.

de vendre tousjours le coup; b gagnant tousjours, il auroit premierement $\frac{15a}{23}$, et $\frac{15\,(a)}{23}$. *Sed si* $(a) \sqcap \frac{16a}{23}$, *et* $\frac{15\,((a))}{23}$, *si* $((a)) \sqcap \frac{16\,(a)}{23}$ *sive* $((a)) \sqcap \frac{16,16a}{23,23}$, et ainsi: b auroit eu $\frac{15a}{23} + \frac{15}{23}, \frown \frac{16a}{23},, + \frac{15}{23} \frown \frac{16,16a}{23,23}$, et ainsi en progression geometrique perpetuelle à l'infini. Donc b gagnant tousjours; la difference de son gain, et du tout deviendroit moindre qu'aucune grandeur assignable, c'est à dire il gagneroit tout dans un temps infini. Or la somme de 1. $\frac{16}{23}$. $\frac{16^2}{23^2}$ *etc. est geometricae seriei* $\frac{1}{1-y} \sqcap 1+y+y^2+y^3$ *etc.* *Ergo* 1. $\frac{16^1}{23^1}$. $\frac{16^2}{23^2}$ *etc.* $\sqcap \frac{1}{1-\frac{16}{23}} \sqcap \frac{23}{7}$. *Jam* $\frac{23}{7} \frown \frac{15a}{23} \sqcap \frac{15a}{7} \sqcap 2a + \frac{a}{7}$. Donc b gagneroit plus qu'il n'y a à gagner, ce qui est absurd, donc le principe l'est aussi. Ou il faut qu'il aye une erreur dans le calcul. Ce que je trouve aussi.

7. Janvier 1676.

Partie III$^{\text{me}}$

Ce qui est aussi car b a premiêrement preferablement non pas $\frac{15a}{23}$, mais $\frac{7a}{23}$. Il reste $\frac{16a}{23} \sqcap (a)$. De (a) il gagne de même $\frac{7\,(a)}{23} \sqcap \frac{7,16a}{23,23}$, et il reste $\frac{16\,(a)}{23} \sqcap \frac{16,16a}{23,23} \sqcap ((a))$. Au troisiême coup, b gagne, $\frac{7\,((a))}{23} \sqcap \frac{7,16,16a}{23,23,23}$, et il reste $\frac{16\,((a))}{23} \sqcap \frac{16,16,16a}{23,23,23}$, etc.

---

9 *Am unteren Seitenrand:* Voyez Partie III$^{\text{me}}$ 7. Janvier 1676

1 $\frac{15\,(\text{a})}{23\,|\,\text{a } \textit{streicht Hrsg.}\,|}$ *L* 2 $\frac{16,16\text{a}}{23,23\,|\,\text{a } \textit{streicht Hrsg.}\,|}$ *L* 3 eu *erg.* *L* 4 donc *(1)* | la *nicht gestr.* | differ *(2)* b gagnant *L* 5 dans *(1)* toute l'eternité *(2)* un temps *L* 7 $\frac{23}{7} \frown \frac{15\text{a}}{23} \sqcap$ *(1)* $\frac{15}{7} \sqcap 2\frac{1}{7}$ *(2)* $\frac{15\text{a}}{7} \sqcap 2\text{a} + \frac{\text{a}}{7}$ *L* 14 gagne, *(1)* non pas *(2)* $\frac{7\,((\text{a}))}{23}$ *L*

Ainsi les gains continuels estant la progression geometrique 1. $\frac{16}{23}$. $\frac{16,16}{23,23}$. $\frac{16^3}{23^3}$ etc. $\sqcap \frac{23}{7}$ multipliée par $\frac{7a}{23}$, c'est à dire a. Ainsi b gagnant tousjours à l'infini gagnera a tout entier. Cette methode sert à trouver une infinité de fractions de tout autre egales à des fractions en progression geometrique. Car on peut faire croistre continuellement le nombre des jeux il faut jouer. Cependant tout cecy ne me donne pas encor une marque dont je puisse juger de la bonté de ma supposition; et de la methode dont je me sers de calculer.

Et il faut réver s'il n'y a point d'autre methode qui nous mene à la même connoissance. C'est pourquoy commençons des cas le[s] plus simples: a argent mis au jeu. Joueurs, b et c. Celuy gagnera a qui aura fait le premier deux coups. Supposons que b gagne un coup, et supposons qu'il gagne par là l. C'est à dire, qu'il luy faut payer l, pour luy payer son droit acquis. Preferablement, le reste demeurant au jeu, sera $a - l$, dont il luy appartiendra la moitié, sçavoir $\frac{a-l}{2}$. Or $\frac{a-l}{2} + l \sqcap \frac{a+l}{2}$, donc son droit sur toute la masse sera $\frac{a+l}{2}$. Si son adversaire gagne le second coup, il est manifeste, qu'il acquerira tout autant de droit sur toute la masse, car il n'importe pas le quel des deux a fait le premier 1 coup, par ce qu'il importera seulement de sçavoir le quel de deux aura le premier deux coups; dont le droit de c sera aussi $\frac{a+l}{2}$. Or $\frac{a+l}{2} + \frac{a+l}{2} \sqcap a$, car leurs droits joints ensemble font le droit tout entier dont $l \sqcap \frac{a}{4}$.

3 sert a *(1)* prouuer *(2)* trouuer *L* 10 coup. *(1)* il est manifeste s'il gagne encor 1. coup, *(2)* et supposons *L* 10 par la *(1)* (l) *(2)* l *L* 11 acqvis. *(1)* il s'agit de sçavoir la valeur de l. il *(a)* luy *(b)* est manifeste qv'il luy faut un coup, encor pour avoir *(2)* Si c gagne le deuxiême coup, il gagne le même droit qv'avoit b. *(3)* preferablement *L* 17 droits *(1)* sont egaux; dont l $\sqcap \frac{\mathrm{a}}{4}$ *(2)* joints *L*

11 demeurant: Diese Definition von l oder *lucrum* weicht von der ursprünglichen in S. 29 Z. 18 f. ab. Während l dort den Gewinnanteil meint, den der Verlierer einer Runde theoretisch an deren Gewinner zu entrichten hätte, steht es hier für den Anteil, welchen der Rundensieger entnehmen könnte, so dass beide Spieler gleiche Anteile zu dem im Spiel verbleibenden Einsatz beisteuern (vgl. S. 43 Z. 1 f.). Dieses *lucrum* ist doppelt so groß wie jenes.

Donc nous avons une solution parfaite du premier cas, lors qu'on joue à deux coups. Selon l'autre methode ayant gagné 1 coup, il vous n'en faut qu'un, et il en faut 2 à vostre adversaire, donc vostre avantage est double; de même il est encor double par une autre raison, parce que vous avez deux manieres, et luy n'en a qu'une. Donc vostre avantage est quadruple du sien, dont il appartient à vous, Monsieur b, la $\frac{4}{5}$ et à c $\frac{1}{5}$, au lieu qu'au paravant nous avons prouvé, qu'il appartient à b, la somme $\frac{a+l}{2} \sqcap \frac{a+\frac{a}{4}}{2} \sqcap \frac{5}{8}\,[a]$. Or la methode posterieure est demonstrative et convaincante, et ne laisse point de doute; venons au jeu à 3 coups. b gagne 1 coup, son droit acquis $\frac{a+l}{2}$. Si c gagne autant son droit acquis est égal sçavoir $\frac{a+l}{2}$, donc $l \sqcap \frac{a}{4}$. Si b gagne 2 coups il aura gagné $l+(l) \sqcap L$, et il aura encor $\frac{a-L}{2}$. Or $\frac{a-L}{2}+L \sqcap \frac{a+L}{2}$. Si son adversaire gagne aussi deux coups,

---

3 *Am Rande:* $\begin{array}{c|c} b & cc \\ bc & \end{array}$

7 *Am Rande: imo error ut statim sequitur*

1 lors qv'on *(1)* gagne *(2)* joue *L* 2 gagné *(1)* 2 coups *(2)* 1. | coups *ändert Hrsg.* |, il *L* 5 vous, *(1)* b; *(2)* Monsieur b, ... à *(a)* luy *(b)* c *L* 9 il *(1)* restera $\frac{\mathrm{a}-\mathrm{L}}{2}$. ou a *(2)* aura *L*

29,17 $l \sqcap \frac{a}{4}$: Aus $\frac{a+l}{2}+\frac{a+l}{2}=a$ ergibt sich richtig gerechnet $l=0$, was kein sinnvolles Ergebnis ist. Es kommt dadurch zustande, dass nach der zweiten Runde der Zugewinn des einen Spielers dem anderen nicht abgezogen wird, so dass beiden Spielern, obwohl der Gesamtgewinn a konstant ist, ein Gewinn gegenüber dem Stand bei Spielbeginn zugesprochen wird. Dieser in Z. 9 und in S. 47 Z. 1 erneut begangene Fehler belastet die weiteren Überlegungen des Stückes. Korrigiert man ihn, so erhält man die Gleichung $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$, aus der sich keine Aussage über die Größe l ableiten lässt. Tatsächlich hängt l von der vorgeschlagenen Teilungsregel ab und lässt sich nicht umgekehrt dazu nutzen, eine solche zu finden. Sofern man l im zuerst definierten Sinn versteht (vgl. S. 29 Z. 18 f.), beträgt im gewählten Beispiel sowohl bei einer Aufteilung gemäß der ersten Leibniz'schen Teilungsregel als auch bei Anwenden der Regel von Pascal und Fermat der Zugewinn durch jede gewonnene Runde tatsächlich $l=\frac{a}{4}$.

il aura aussi $\frac{a+L}{2}$. Or $\frac{a+L}{2} + \frac{a+L}{2} \sqcap a$. Donc $L \sqcap \frac{a}{4}$. Or $L \sqcap l + (l)$, et $l \sqcap \frac{a}{4}$. Donc $L \sqcap \frac{a}{4} + (l)$. Or $L \sqcap \frac{a}{4}$. Donc $\frac{a}{4} + (l) \sqcap \frac{a}{4}$. Donc $(l) \sqcap 0$, ce qui est absurd. D'où il s'ensuit que ce droit acquis ou cet l est une chose impossible ou chimere, estant pris absolument, sans relation aux jeux qui restent à jouer. Cependant ce n'est pas repondre *in forma* à l'objection. Et il s'ensuit necessairement que b n'a pas plus acquis par 2 coups, que par un. Tout ce qu'on peut repondre à cela, c'est de nier que les droits de tous deux joints ensemble, fasse[nt] le droit sur toute la masse. Par ce que selon le droit du jeu, ils sont obligez de jouer 6 jeux. Et il faut concevoir comme si un troisiême leur avoit mis cet argent à jouer. Cet argent ne sera pas à eux qu'en cas, qu'ils le gagnent, et s'ils sont interrompus il ne leur appartient que l'avantage qu'ils ont acquis par leurs jeux; et celuy qui a mis l'argent reprendra le reste. Cependant il est vray aussi, que lorsque tous deux ont mis l'argent, en cas de rupture; leurs droits joints ensemble font le droit tout entier. Cependant on peut aussi former la question en sorte, qu'un troisiême propose [un] prix, et leur commande de jouer autant de coups de suite, qu'il faut pour gagner; un accident les empechant de continuer, il est asseuré qu'ils ont acquis quelque droit, et que l'equité veut qu'ils en tirent quelque avantage quoyque à la rigueur; le proposant puisse dire qu'il a demandé la condition tout entiere. Il peut pourtant aussi s'obliger de leur laisser en cas d'interruption l'avantage qu'on leur pourra attribuer. Estant proposants eux mêmes on les peut considerer neantmoins comme un troisiême quant à cet égard, et raisonner tout de même.

3 acqvis *(1)* absolument *(2)* ou *(a)* ce *(b)* cet L 14 jouer *(1)* 6 coups *(2)* autant *L* 16 rigueur; *(1)* il puisse dire, qve *(2)* le proposant *L*

---

8 6 jeux: Unter diesen Voraussetzungen sind maximal fünf Runden zu spielen.

8. FRACTIONES SEXAGENARIAE
[Mitte 1674 – Ende 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III A 26 Bl. 17. Unregelmässig zugeschnittenes Fragment, ca 10 cm × 9 cm. Text auf Bl. 17 r°, rückseitig 1 Z. mit dem Titel.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz beschäftigt sich in der vorliegenden Notiz mit den rechnerischen Grundlagen des Sexagesimalsystems. Hierbei knüpft er an Überlegungen an, die er in N. 9, welches dem gleichen Gegenstand gewidmet ist, entwickelt hat. Es darf daher vermutet werden, dass die Notiz kurz nach N. 9 entstanden ist. Da dieses Stück wahrscheinlich im Zeitraum zwischen Mitte 1674 und Ende 1676 verfasst worden ist, wird das Gleiche auch für die vorliegende Notiz angenommen. **Die Gegenstücke zu den unregelmäßigen Schnittkanten des Papierfragmentes, auf welchem die Notiz niedergeschrieben ist, sind bislang noch nicht gefunden worden; eine automatisierte Suche im Rahmen des beantragten Projektes zur digitalen Rekonstruktion von Textzusammenhängen bei Leibniz erscheint hier vielversprechend. Aus ihren Resultaten können sich neue Hinweise zur Datierung ergeben. [noch]**

F r a c t i o n e s   s e x a g e n a r i a e

$$\frac{13}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{15}{60^3}$$

$$\begin{array}{cc} 13 & 24 \\ 36 & 6 \end{array}$$

Pour reduire les primes et secondes aux troisiesmes, c'e[s]t àdire pour reduire les fractions sexagenaires à un meme denominateur, il faut multiplier les primes par 36, les

16 F r a c t i o n e s   s e x a g e n a r i a e *erg. L auf Bl. 17 v°*

17 $\frac{13}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{15}{60^3}$: Vgl. diesen Ausdruck mit der Summe $\frac{2}{60}[+]\frac{1}{3600}[+]\frac{7}{216000}$, welche Leibniz in N. 9 S. 56 Z. 3 betrachtet. 21 denominateur: Mit dem beschriebenen Verfahren rechnet man eigentlich eine dreistellige Sexagesimalzahl, so wie in N. 9 gefordert, in eine Dezimalzahl um: Man multipliziert die erste Stelle mit 36 und die zweite mit 6. Um die drei oben genannten Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, ist dagegen der erste Bruch mit 3600 zu erweitern und der zweite mit 60. Die zum Gleichnamigmachen erforderlichen Nullen fügt Leibniz dem Ergebnis der Nebenrechnung zu S. 49 Z. 2 f. nachträglich noch hinzu, lässt den Haupttext aber unverändert.

secondes par 6, les 3[mes] par 1. Multiplier par 36[,] c'est multiplier par 40 − 4, multiplier par 6, c'est multiplier par $4 + \frac{4}{2}$. *Ergo primae multiplicentur per 4*[,] *producto adjiciatur 0, et inde detrahatur ipsum productum, secundae multiplicentur per 4, producto addatur ipsius dimidium, sed brevius sufficit secundas multiplicari per 6.*

---

2 f. *Nebenrechnung:* $\begin{array}{r} 13 \\ \underline{4} \\ 520 \\ \underline{52} \\ 46800 \end{array}$

3 f. *Gestrichene Nebenrechnung:* $\begin{array}{r} 24 \\ \underline{4} \\ 96 \\ \underline{48} \\ 4 \end{array}$ *L*

5–9 *Gestrichene Nebenrechnung: (1)* $\begin{array}{r} 13 \\ \underline{40} \\ 520 \\ \underline{52} \\ 468 \end{array}$ *(2)* $\begin{array}{r} 13 \\ \underline{4} \\ 520 \\ \underline{52} \\ 46800 \end{array}$ *L*

9. MULTIPLICATIO NUMERORUM SEXAGESIMALIUM
[Mitte 1674 – Ende 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 27. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 27 v°, Vorderseite leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Der Gegenstand des Stückes — ein Verfahren zur Multiplikation einer im Sexagesimalsystem ausgedrückten dreistelligen Zahl mit einem unechten Bruch — legt nahe, dass es in zeitlicher Nähe zu N. 8 entstanden ist. Leibniz nimmt seine Aufgabe offenkundig in Angriff, bevor er sich näher mit Stellenwertsystemen befasst hat; dies belegt jedoch nur, dass er das Stück vor März 1679 abgefasst hat. Einen genaueren Hinweis liefert das Papier: Es stammt aus Paris, und sein Wasserzeichen ähnelt anderen Wasserzeichen, die vor allem in der frühen Pariser Zeit auftreten. Auch der Symbolgebrauch gibt einen Hinweis in diese Richtung: Ganz überwiegend setzt Leibniz als Gleichheitssymbol das Zeichen ⨍ ein, teils in einer leicht stilisierten Form, teils als simples handschriftliches *f*. Diese letztere Variante kommt überwiegend, allerdings nicht ausschließlich, bis Anfang 1673 vor. Die dreimalige Verwendung des Gleichheitssymbols $\sqcap$ dagegen spricht unzweideutig für eine Niederschrift nach Mitte 1674. Somit ist gesichert, dass das Stück in Paris verfasst worden ist; trotz der Hinweise auf eine Entstehung zu Beginn der Pariser Zeit gibt der Gebrauch des stilisierten Waagebalkens letzlich den Ausschlag für den *terminus post quem* Mitte 1674.

[*Erster Ansatz*]

$$\begin{array}{ccccccc}
13 & \text{———} & \overset{\prime}{19} & \overset{\prime\prime}{9} & \overset{\prime\prime\prime}{7} & \text{———} & 17 \\
 & & \frac{19}{6} & \frac{3}{2} & \frac{7}{6} & & \frac{17}{13} \fint 1 + \frac{4}{13} \\
 & & 3\frac{1}{6} & 1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{6} & \text{vel} & \frac{1\,3\,1}{6} \fint 2\;1\;\frac{5}{[6]}
\end{array}$$

---

20 *Nebenrechnung:* $\dfrac{10}{6}$ $\overline{\overline{10}}$ $\quad \dfrac{5}{3} \sqcap 2$ [*bricht ab*]

19 13 — *(1)* 14, 13, 18 · *(2)* $\overset{\prime}{19}$ $\overset{\prime\prime}{9}$ $\overset{\prime\prime\prime}{7}$ *L* 21 $3\frac{1}{6}$ *(1)* $2\frac{1}{2}$ *(2)* $1\frac{1}{2}$ *L*

---

21 1 3 1: Der Status von Zahlen wie dieser als Sexagesimal- oder Dezimalzahl ist für Leibniz nicht eindeutig festgelegt, was er durch (allerdings nicht ganz konsequent durchgeführte) Gesperrtschreibung der Ziffern andeutet. Bei Zahlen, die er als eindeutig hexagesimal ausgedrückt verstanden wissen will, trennt er dagegen die Stellen in der Regel durch Kommata voneinander ab — insbesondere, wenn es sich bei mindestens einer ihrer Ziffern um eine im Dezimalsystem notierte zweistellige Zahl handelt.

$$\frac{12\frac{4}{6}}{13} \qquad \frac{4+\frac{4}{2}}{13} \qquad \frac{4+\frac{4}{6}}{13} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ 2\ 1 \\ \hline 3\ 4\ 2\,\frac{5}{6} \end{array} \frown 1+\frac{4}{13}$$

$$\frac{76}{13\frown 6} \qquad \frac{120}{13\frown 6} \qquad \frac{28}{13\frown 6} \qquad\qquad \begin{array}{l} 3\ 4\ 2 \\ 1\ 0\ 5 \\ \hline 4\ 4\ 7\,\frac{19}{39} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ 120 \\ 28 \\ \hline 8828 \\ \hline 13\frown 6 \end{array} \Bigg| \ \frac{4414}{13\frown 3} \ \Bigg| \ \frac{1471}{13} + \frac{1}{13\frown 3} \qquad\qquad 24,\ 24,\ \begin{array}{c} 28 \\ 30 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \cancel{5}6 \\ \cancel{114} \\ \hline \cancel{39} \end{array} \Bigg| 2\,\frac{36}{39} \Bigg| \frac{12}{13}$$

---

1 *Nebenrechnung:* $\begin{array}{c} \cancel{1}3 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{8} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} \ \cancel{f}\ 105\ \frac{18+20}{6\frown 13} \qquad \frac{38}{78}\Big|\frac{19}{39}$

2 $\frac{76}{13\frown 6}$ *(1)* $\frac{140}{13\frown 6}$ *(2)* $\frac{120}{13\frown 6}$ *L* 4 105 *(1)* $\frac{3}{13}+\frac{20}{6\frown 13}$ *(2)* $\frac{18+20}{6\frown 13}$ *L*

---

1 3 2 1 : Hier ist die Korrektur in der Zeile zuvor nicht berücksichtigt; folgerichtig wäre 3 1 1 . 2 $\frac{120}{13\frown 6}$: Folgerichtig wäre $\frac{36}{13\frown 6}$. 2 4 4 7 $\frac{19}{39}$: Bei der Addition von 3 4 2 $\frac{5}{6}$ mit 1 0 5 $\frac{19}{39}$ ist der Bruchanteil des ersten Summanden verloren gegangen. 3 24, 24, 28: Das gesuchte Produkt der Sexagesimalzahl $(19,9,7)_{60}$ mit dem unechten Bruch $\frac{17}{13}$ ist $(25,2,41\frac{6}{13})_{60}$. Dass die in der rechten Spalte fortgeführte Berechnung zum falschen Ergebnis $(24,24,30\frac{12}{13})_{60}$ führt, ist nicht nur auf Rechenfehler zurückzuführen, sondern grundsätzlich in dem Verfahren begründet, welches Leibniz im vorliegenden Stück ausprobiert: Er behandelt beim Rechnen mit Sexagesimalzahlen diese in einzelnen Rechenschritten wie Dezimalzahlen. Offenbar fühlt er sich hierzu berechtigt, da er eingangs eine Division durch 6 durchführt und am Ende der Rechnung wieder mit 6 multipliziert. Im vorliegenden Ansatz etwa teilt Leibniz im ersten Schritt tatsächlich nicht die Sexagesimalzahl $(19,9,7)_{60}$ durch 6, sondern die Dezimalzahl 1997. Sein (nicht ganz korrektes) Ergebnis 3 4 2 $\frac{5}{6}$ multipliziert er sodann wie eine gewöhnliche Dezimalzahl mit $\frac{17}{13}$. Erst bei der abschließenden Wiederversechsfachung seines (ebenfalls nicht korrekten) Produktes 4 4 7 $\frac{19}{39}$ behandelt er dessen Ziffern wie jene einer im Sexagesimalsystem geschriebenen Zahl. Tatsächlich kann ein solches Verfahren keine Umrechnung vom Sexagesimal- ins Dezimalsystem und zurück leisten; es führt im Allgemeinen zu fehlerhaften Resultaten.

$$\begin{array}{l} \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{4}2 \\ \cancel{1}\cancel{4}\cancel{7}\cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} \fint \begin{array}{c} 113 \\ 321 \end{array} + \frac{7}{13 \frown 3}$$

Ergo productum,

$$\begin{array}{cccc|l} 4, & 3, & 6: & \frac{20}{39} & \\ & & & 6 & \\ \hline & & & \cancel{3}3 & \\ 24 & 18 & 36 & \cancel{1}\cancel{2}\cancel{0} & \\ 0 & 0 & 3 & \cancel{3}\cancel{9} & \fint 3\,\frac{3}{39} \\ \hline 24, & 18, & 39 & \frac{3}{39} & \frac{1}{13} \end{array}$$

[*Zweiter Ansatz*]

$$13 \text{ ——— } \overset{\prime}{19}, \quad \overset{\prime\prime}{9}, \quad \overset{\prime\prime\prime}{7} \text{ ——— } 17$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hline \cancel{6} & 6 & \cancel{6} \end{array}$$

---

1 *Nebenrechnungen:* $\frac{140}{60}\Big|\frac{14}{6}\Big|\frac{7}{3} \frown 17$ $\qquad \frac{7 + \boxed{7 \frown 13}\, 91}{13 \frown 3} \sqcap \frac{98}{13 \frown 3}\Big| \begin{array}{c} 2 \\ \cancel{3}0 \\ \cancel{9}\cancel{8} \\ \hline \cancel{3}\cancel{9} \end{array} \fint 2\,[\frac{20}{39}]$

4 *Nebenrechnung:* $\frac{17}{13} \fint 1\frac{4}{13}$

11 | $\frac{13}{13}$ *ändert Hrsg.* | $\fint 1\frac{4}{13}$ *L*

---

2 24, 18, 39: Auch das Ergebnis $(24, 18, 39\frac{1}{13})_{60}$ ist aus den genannten Gründen — diversen Rechenfehlern sowie der unzulässigen Behandlung von Sexagesimal- als Dezimalzahlen — nicht korrekt.

$$\begin{array}{r} 1\,8\,6\,6 \\ 1\,3\,1 \\ \hline 1\,9\,9\,7 \\ \hline 6 \end{array} \;⨍\; 3\,3\,3 - \frac{1}{6} \frown \frac{17}{13}\Big|\,1\frac{4}{13}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1}6 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{2} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} \;⨍\; 102 \; \boxed{\frac{36-4}{13\frown 6}}\; \frac{32}{78}\Big|\frac{16}{39}$$

$$\begin{array}{l} 3\,3\,3 - \dfrac{1}{6} \\ 1\,0\,2 + \dfrac{16}{39} \\ \hline 4\,3\,5 \end{array}$$

[*Dritter Ansatz*]

$$13 \;\text{———}\; \acute{19},\quad 9'',\quad 7''' \;\text{———}\; 17 \qquad \Big| \qquad \frac{17}{13} \sqcap 1 + \frac{4}{13}$$

$$\begin{array}{r} 1997 \\ 4 \\ \hline 13)\cancel{7}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{8} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{5}6 \\ \cancel{1} \end{array} \;⨍\; 614\frac{6}{13} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1997 \\ 4 \\ \hline \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{5}6 \\ \cancel{7}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{8} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}3 \\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} \;⨍\; 614$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1 \\ \cancel{2}\cancel{3} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1997 \\ 614 \\ \hline \cancel{2}\cancel{3} \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1\dfrac{6}{13} \end{array}$$

---

3 4 3 5 : Die Rechnung des zweiten Ansatzes wird konsequent und fehlerfrei im Dezimalsystem durchgeführt. Ihr Resultat $4\,3\,5\,\frac{19}{78}$ würde mit 6 multipliziert $(24, 18, 31\frac{18}{39})_{60}$ ergeben; auch dies ist nicht das korrekte Ergebnis. 6 $\frac{1997}{4}$: Im dritten und vierten Ansatz verändert Leibniz nun die Reihenfolge der Rechenschritte: Zunächst wird die dezimale Multiplikation von 1997 mit $\frac{17}{13}$ durchgeführt, erst danach folgt die dezimale Division durch 6 und die Wiederversechsfachung im Sexagesimalsystem.

$$\frac{4\;3\;5\;\frac{2}{13}}{24,\ 18,\ 30\;\frac{12}{13}} \qquad\qquad \begin{array}{c} 4\;3\;5\;\frac{2}{13} \\ 24,\ 18,\ 30\;\frac{6}{13} \end{array}$$

[*Vierter Ansatz*]

$$13 \;\text{———}\; \frac{19+9+7}{6} \;\text{———}\; 17$$

$$\begin{array}{cccl} & & 17 & \\ \hline & \cancel{1} & & \\ \cancel{2} & \cancel{6} & 4 & \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{9} & \cancel{7} & \cancel{9} & ⨍\; 1\;0\;7\;5 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & \\ \cancel{1}\cancel{1} & \cancel{1} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13979 \\ 1997 \\ \hline 33949 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1997 \\ \;\;17 \\ \hline \;\;\cancel{1} \\ \cancel{1}7\cancel{1}\cancel{1}6 \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{9} \;⨍\; 2611\,\frac{6}{13} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \;\;\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \;\;\cancel{1} \\ \cancel{1}7\cancel{1}\cancel{1}6 \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{9} \;⨍\; 2611\,\frac{6}{13} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \;\;\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \end{array}$$

---

4 *Isoliert und ohne direkten Bezug:* 19 9 7

7 *Randnotiz mit aus S. 55 Z. 5 bezogener Ergänzung:* $33949\,\frac{6}{13} + \frac{19}{26}$

7 *Gestrichene Nebenbetrachtung:* $\begin{array}{l} \;\;\cancel{3} \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}49 \;⨍\; 5658 \; L \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}6 \end{array}$ **9** $+\frac{19}{26}$ *erg. L*

---

1 $4\;3\;5\;\frac{2}{13}$: Konsequent gerechnet lautet das Zwischenergebnis nach der Division $4\;3\;5\;\frac{19}{78}$. Der Fehler beeinträchtigt im links dargestellten Rechengang das Endergebnis in der folgenden Zeile. Das rechts stehende Endergebnis dagegen verwendet stillschweigend den korrekten Wert des Bruchanteils, vernachlässigt jedoch einen Einerübertrag; folgerichtig gerechnet ergibt sich $(24, 18, 31\frac{6}{13})_{60}$ (vgl. auch den vierten Ansatz, S. 55 Z. 3, rechts). 5 1 0 7 5 : Versehentlich teilt Leibniz hier das Siebenfache anstelle des Siebzehnfachen von 1997 durch 13. Er erkennt den Irrtum und setzt neu an.

$$\begin{array}{l} \cancel{2}\cancel{3} \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1 \quad \frac{1}{13} \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \cancel{2}\cancel{3} \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1 + \frac{6}{13} \\ \cancel{6}\cancel{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 5\,\frac{1}{6} + \frac{1}{13} \\ 6 \\ \hline 24,\ 18,\ 31\,\frac{1}{13} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4\ 3\ 5\,\frac{1}{6} + \frac{1}{13} \\ \\ 24,\ 18,\ 31\,\frac{6}{13} \end{array}$$

[*Fünfter Ansatz*]

$$26 \text{ ——— } 1997 \text{ ——— } \frac{17}{26}$$

$$\begin{array}{l} 1997 \\ \underline{17} \\ 13979 \\ \underline{1997} \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}9 \ ⨍\ 1\ 3\ 0\ 5\,\frac{19}{26} \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1 \\ \cancel{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 7\,\frac{3}{6} \\ \hline 12,\ 6,\ 21\,\frac{18}{6}\Big|\,3 \\ \underline{3} \\ 24 \quad \frac{19}{26} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{7}\cancel{1}1 \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}9 \ ⨍\ 1305\,\frac{19}{26} \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}6 \\ \cancel{2}\cancel{2}2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{1}\cancel{4}3 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{5} \ ⨍\ 2\ 1\ 7\,\frac{3}{6} + \frac{19}{26} \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 12,\ 6,\ 45 \end{array}$$

---

9 *Nebenbetrachtungen:* $\frac{38}{26}$ ⨍ $1\frac{12}{26}$ $\qquad \frac{19}{26} \qquad \frac{3\frac{1}{6}}{26}$

---

5 26: Im fünften Ansatz multipliziert Leibniz im ersten Schritt die Dezimalzahl 1997 nicht mehr mit $\frac{17}{13}$, sondern mit $\frac{17}{26}$ und verdoppelt dafür das Zwischenergebnis vor dessen Versechsfachung im letzten Schritt. 7 12, 6, 21: Richtig wäre 12, 6, 42. Leibniz korrigiert dies nicht, sondern setzt neu an.

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 7 \\ 6 \\ \hline 12,\ 6,\ 42 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4\ 3\ 4 \\ 6 \\ \hline 24,\ 18,\ 24 \end{array}$$

$$\frac{2}{10} \qquad \frac{1}{100} \qquad \frac{7}{1000}$$

$$\frac{2}{60} \qquad \frac{1}{3600} \qquad \frac{7}{21600[0]}$$

[*Sechster Ansatz*]

$$\frac{19}{6}\Big|1\frac{1}{6} \qquad \frac{9}{36}\Big|\frac{1}{4} \qquad \frac{7}{216}\Big|\frac{1}{27} - \frac{1}{216}$$

$$\begin{array}{c} 4\frac{4}{6} \qquad 1 \qquad \frac{4}{27} - \frac{4}{216} \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\frac{19}{6} \qquad \frac{9}{36} \qquad \frac{7}{216}$$

---

3 *Hilfsrechnung:* $\begin{array}{r} 3600 \\ 6 \\ \hline 21600 \end{array}$

6 *Nebenrechnung:* $\begin{array}{l} \cancel{2} \\ \cancel{2}\cancel{8}\cancel{6} \ \not f \ 22 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1} \end{array}$

1 *Gestrichene Nebenbetrachtung:* $\begin{array}{l} \cancel{1} \\ \cancel{4}\cancel{3}4 \ \not f \ 7\ 1\,\frac{8}{6} \\ \cancel{6}\cancel{6} \qquad ,\,14 \end{array}$ *L* 2 *(1)* 24, *(2)* $\frac{2}{10}$ *L*

---

3 $\frac{2}{60}\ \frac{1}{3600}\ \frac{7}{21600[0]}$: Leibniz vergewissert sich hier noch einmal der Bedeutung von Sexagesimalstellen und verwirft daraufhin die Ausgangsidee, eine Zahl vom Sexagesimal- ins Dezimalsystem zu transformieren, indem man die gesamte Zahl (also unterschiedslos jede Stelle) durch 6 teilt. In den folgenden Ansätzen differenziert er nun bei der Division zwischen den verschiedenen Stellen. 5 $\frac{19}{6}\Big|1\frac{1}{6}$: Richtig wäre $3\frac{1}{6}$. Der Fehler belastet die weitere Rechnung bis S. 57 Z. 2, nach welcher Leibniz noch einmal neu ansetzt.

$$\left(\begin{array}{ccc} 13\frac{13}{6} & \frac{13}{4} & \frac{13}{7} - \frac{13}{216} \\[6pt] 4\frac{4}{6} & 1 & \frac{4}{7} - \frac{4}{216} \\[4pt] & & 17 \quad 17 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lccc} & 3+\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} - \frac{1}{216} \\[6pt] \text{seu} & 39\frac{17}{6}, & \frac{17}{4}, & \frac{17}{7} - \frac{17}{216}\,(\mathit{1}) \end{array}$$

[*Siebter Ansatz*]

$$\begin{array}{ccc} 19 & 9 & 7 \\[10pt] \frac{19}{6} & \frac{\frac{9}{6}}{6} & \\[10pt] \frac{19}{6} & \frac{\frac{9}{60}}{6} & \frac{\frac{9}{600}}{6^\frown 6} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \frac{19}{6} & \frac{\frac{9}{60}}{6} & \frac{\frac{9}{60}}{36} \end{array}$$

$$\frac{19 \quad \frac{9}{6} \quad \frac{9}{36}}{6}$$

$$24,\ 3 \quad \frac{31\frac{6}{13}}{36}$$

5 *(1)* | seu *nicht gestr.* | 9 *(2)* seu *(a)* $39\frac{13}{6}, \frac{13}{4}, \frac{13}{7} - \frac{13}{216}$ *(b)* $39\frac{17}{6}$, *L* 7 $\frac{\frac{9}{60}}{6}$ *(1)* $\frac{\frac{9}{60}}{\frac{6}{6}}$ *(2)* $\frac{\frac{9}{60}}{36}$ *L*

9 *(1)* $\frac{\frac{7}{600}}{6^\frown 6}$ *(2)* $\frac{\frac{9}{600}}{6^\frown 6}$ *L*

---

5 $39\frac{17}{6}$: Leibniz multipliziert zunächst die vorangehende Zeile versehentlich mit 13 statt mit 17, korrigiert dies aber umgehend, wobei er allerdings vergisst, die 39 in 51 zu ändern. Zudem muss es $\frac{17}{27}$ anstatt $\frac{17}{7}$ heißen; dieser Fehler stammt aus Z. 1. Die Versehen wirken sich nicht aus, da Leibniz die Rechnung abbricht. 10 24, 3: Leibniz probiert hier am Ergebnis des vierten Ansatzes (S. 55 Z. 3, rechts) die Division der zweiten Stelle durch 6 und die der dritten durch 36 aus.

[*Achter Ansatz*]

19 9 7
42 42
6
252
60

19 9 7
60
420
6
25200
450
25650

25650
17
17955
2565
$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{1}$
$\cancel{1}\cancel{4}\cancel{7}\cancel{5}3$
$\cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{5}$ ⨍ 3354
$\cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}$
$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}$

$\cancel{3}\cancel{3}54$ ⨍ 55 : 54
$\cancel{6}\cancel{6}0$

25650
17
17955
2565

2 *(1)* 19 9 7 / $\cancel{54}$ 54 / 54 / 252 / 306 *(2)* 19 9 7 / 42 42 / 6 / 252 / 60 *L* 3 *(1)* | 2 / $\cancel{1}40$ / $\cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}05$ ⨍ 32 *nicht gestr.* / $\cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}$ / 1 | *(2)* $\cancel{1}\cancel{3}\cancel{2}$ / $\cancel{1}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{9}4$ / $\cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{5}$ ⨍ / $\cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}$ / $\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}$

(a) 3276 *(b)* 3277 3 / $\cancel{3}\cancel{2}77$ ⨍ 54 : 37 / $\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}0$ *(3)* 8 / $\cancel{1}\cancel{0}0$ / $\cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}05$ ⨍ *(a)* 33 *(b)* 32 / $\cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}$ / $\cancel{1}$ *(4)* 2 / $\cancel{1}\cancel{4}0$ / $\cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}05$ ⨍ 32 / $\cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}3$ / $\cancel{1}1$ *(5)* $\cancel{1}\cancel{2}\cancel{1}$ / $\cancel{1}\cancel{4}\cancel{7}\cancel{5}3$ / $\cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{5}$ ⨍ *(a)* 3254

(b) 3354 $\cancel{3}\cancel{3}54$ ⨍ / $\cancel{6}\cancel{6}0$ *(aa)* 54 *(bb)* 55 : 54 *L*

---

2 25200: Im achten Ansatz multipliziert Leibniz die dritte Stelle anstatt der ersten mit 3600, addiert aus unklarem Grunde 450 (womöglich denkt er an 540 als dem 60-fachen von 9) und führt sodann die Multiplikation mit $\frac{17}{13}$ durch, wobei eine Dezimalstelle verloren geht. Das Ergebnis der Multiplikation teilt er schließlich wieder durch 6 und beendet die Rechnung ohne brauchbares Resultat.

10. DE NUMERO JACTUUM IN TESSERIS
Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 14 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S. — Auf Bl. 1 r° am oberen Rand Datum und Titel des Stückes. In der oberen Hälfte dieser Seite eine fragmentarische Notiz (s. u.), in der Seitenmitte vier Tabellen (= Teil 1 unseres Stückes). Auf dem Rest der Seite das Stück VII, 1 N. 89, um Notiz und Teil 1 herum gesetzt. Auf den drei anderen Seiten des Bogens Teil 2 und 3 unseres Stückes. — Gedr.: 1. Biermann, *Spezielle Untersuchungen*, 1956, S. 170 (tlw. = S. 63 Z. 2 – S. 64 Z. 7); 2. Parmentier, *L'estime des apparances*, 1995, S. 79 f. u. 88–101 (z.T. frz. Übers.); 3. (span. Übers.) Leibniz, *Obras filosóficas y científicas*, Bd. 7 B, 2015, S. 659 f. u. 662–667.
Cc 2, Nr. 1281

Januar. 1676.

De numero jactuum in tesseris.
Proposuit mihi dux Roannesius

---

5 *Fragmentarische Notiz inmitten des Textes:*

$$A\begin{cases}0\\ C\begin{cases}0\\ B\begin{cases}0\\ D\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

$$D \sqcap \frac{1}{2} \qquad B \sqcap \frac{1}{4} \qquad C \sqcap \frac{1}{8} \qquad A \sqcap \frac{1}{16}$$

13 f. De numero ... Roannesius *erg. L* **17** D $\sqcap \frac{1}{2}$ B $\sqcap \frac{1}{4}$ *gestr. L erg. Hrsg.*

---

14 Roannesius: Gemeint ist Artus Gouffier (1627–1696), Herzog von Roannais, ein Vertrauter Blaises Pascals. **15** Notiz: Leibniz schreibt das Stück auf einem Papierbogen nieder, auf dessen erster Seite er bereits einen Gedanken zu einem anderen Thema notiert hat. Es handelt sich bei dieser inhaltlich nicht zum Stück gehörenden Notiz um ein spieltheoretisches Zerlegungsschema, das dem in N. 7 S. 31 Z. 9 festgehaltenen gleicht.

[*Teil 1*]

	1	2	3	4 5	6	
1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	
	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6	
		3, 3	3, 4	3, 5	3, 6	
			4, 4	4, 5	4, 6	
				5, 5	5, 6	
					6, 6	
	1	2	3	4	5	6
	2	4	6	8	11	6
	22				17	

[*Tab. 1*]

1 Teil 1: Dieser Abschnitt behandelt offensichtlich das (allerdings erst auf S. 71 Z. 1–4 explizit formulierte) Würfelspielproblem, den gerechten, also an Gewinnchancen gleichen Einsatz zweier Spieler zu finden, wenn bei einem Wurf von einem, zwei, drei oder mehr Würfeln der eine Spieler darauf wettet, dass keine 6 fällt, der andere dagegen auf das Erscheinen mindestens einer 6 setzt. Es darf vermutet werden, dass es sich hierbei um das durch den Herzog von Roannais an Leibniz herangetragene Problem handelt. 12 Tab. 1: Leibniz befasst sich als erstes mit den möglichen Ausgängen eines Wurfes zweier nicht unterscheidbarer Würfel, in moderner Terminologie also mit Kombinationen mit Wiederholung. Die entsprechenden Ereignisse sind in diesem Falle jedoch ungleich wahrscheinlich, so dass sich das genannte Problem des „gerechten“ Einsatzes nicht lösen lässt, indem man die Anzahlen der verschiedenen Ausgänge bestimmt.

1 dez	a sans 6	b avec 6
2 $\cdots$	(a)	(b)
3 $\cdots$	$\overline{a, (a)}$	$\overline{(a) \frown b + (b) \frown a}$
4 $\cdots$		

[*Tab. 2*]

5 *Tab. 2: (1)*

1 dez	5 sans 6	1 avec 6
2 ...	⟨6⟩	⟨15⟩
3 ...	$15 \frown 6$,, + ˛$6 \frown 1$	$(a)\, 15, \frown 5$ $(b)\, 15 \frown 6$
4 ...		

(2)

1 dez	5 sans 6	1 avec 6
2 ...	15	6
3 ...	$\overline{5, 15}$	$\overline{15 \frown 1 + 6 \frown 5}$
4 ...		

(3)

1 dez	5a (sans 6)	1b avec 6
2 ...	15(a)	6(b)
3 ...	$\overline{5a, 15(a)}$	$\overline{15(a) \frown 1b + 6(b) \frown 5a}$
4 ...		

ändert Hrsg. | *L*

5 Tab. 2: Leibniz nennt in dieser Tabelle zunächst konkrete Zahlen, ersetzt diese dann aber durch Buchstaben: a steht für 5, b für 1, (a) für 15 und (b) für 6. Er löscht die ursprünglichen Zahlenangaben nicht; der Lesbarkeit halber werden sie im Haupttext jedoch nicht wiedergegeben. Eine ähnliche Notation benutzt er auch in N. 7. Die Verwendung dieser Schreibweise ist wohl durch die Hoffnung motiviert, die Erkenntnisse verallgemeinern zu können: auf andere geeignete Spielgeräte wie etwa einen Oktaeder (also $a = 7$) oder auf andere Anzahlen an kritischen Ausgängen, z. B. auf die 1 *und* die 6 (also $b = 2$). Auch in dieser Tabelle betrachtet Leibniz Kombinationen mit Wiederholung, allerdings findet er nicht den richtigen Ansatz zur Berechnung ihrer Zahl. Tatsächlich ist beim Wurf von drei identischen Würfeln die Zahl an Ausgängen, in welchen eine 6 enthalten ist, gleich $(a) + (b)$, die der Ausgänge ohne 6 ist gleich $\frac{7}{3}(a)$, was sich für n Würfel zu den rekursiven Definitionen $a_n = \frac{n+4}{n}\, a_{n-1}$ und $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ verallgemeinern lässt. Modern formuliert, gibt es beim Wurf von n nicht unterscheidbaren Würfeln $\binom{n+4}{5}$ verschiedene Ausgänge, die mindestens eine 6 enthalten, und $\binom{n+4}{4}$ Ausgänge ohne 6.

	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	
4	1	4	10	20		
5	1	5	15			
6	1	6				
7	1					

[*Tab. 3*]

	0	1	*A* 2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
B 4	1	4	*C* 6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	
	1	6	15	20	15	6	1
	Unitez	Naturels	∇laires	Pyram.	∇∇	∇P	PP

[*Tab. 4*]

9 Tab. 3: Leibniz will einer Lösung des Problems mit Hilfe des Arithmetischen Dreiecks näherkommen, wozu er dieses in zwei verschiedenen Gestalten notiert. Die in Tab. 3 gewählte Form findet sich auch in N. 32 S. 000; sie entspricht jener in Bl. Pascal, *Traité de triangle arithmetique*, 1665 [Marg.], Ausklapptafel vor S. 1 (*PO* III, S. 446). 19 Tab. 4: In Teil 2 arbeitet Leibniz mit dem Arithmetischen Dreieck in der hier gezeigten Form (vgl. S. 67 f.). — Ausgehend von Tab. 3 u. 4 setzt Leibniz auf derselben Seite zu einem zahlentheoretischen Exkurs an (VII, 1 N. 89), in welchem er eine Vermutung formuliert, die dem Kleinen Satz von Fermat sehr nahe kommt. Die beiden Tabellen gehören somit gleichermaßen zu VII, 1 N. 89 (wo sie auf S. 583 abgedruckt sind) und zum vorliegenden Stück.

[*Teil 2*]

1 Dez. 6 faces. *a. b. c. d. e. f.*

Faces de deux dez,

aa	*ba*	*ca*	*da*	*ea*	*fa*
ab	*bb*	*cb*	*db*	*eb*	*fb*
ac	*bc*	*cc*	*dc*	*ec*	*fc*
ad	*bd*	*cd*	*dd*	*ed*	*fd*
ae	*be*	*ce*	*de*	*ee*	*fe*
af	*bf*	*cf*	*df*	*ef*	*ff*

Il faut adjouter au nombre Triangulaire ou des Com2naisons la somme des choses, et nous aurons le nombre des faces de deux dez.

2 f. a. b. c. d. e. f *(1)* Com2naisons de deux dez, 36. faces

	ab				
aa	bb	cc	dd	ee	ff
ab	bc				
ac	bd				
ad	be				
ae	bf				
af					

(2) Faces *L*

10 le | nombres *ändert Hrsg.* | des *(1)* formes *(2)* faces *L*

---

2 faces: Auch in Teil 2 untersucht Leibniz zunächst das Hilfsproblem, wieviele verschiedene Ausgänge es beim Wurf von mehreren identischen Würfeln gibt. Einen solchen Ausgang bezeichnet er auf französisch als *faces*, auf lateinisch als *facies*. 9 Com2naisons: Zu den Begriffen *com2naison* und *con3naison* vgl. N. 23 S. 102 Z. 21 – S. 103 Z. 2. Siehe auch das Beispiel in VII, 1 N. 89 S. 583 Z. 8 f. sowie die Definitionen, die Leibniz in seinem Handexemplar von Bl. PASCAL, *Traité de triangle arithmetique*, 1665 [Marg.], auf der Ausklapptafel vor S. 1 (*PO* III, S. 446) notiert. 10 deux dez: Mit Hilfe von Binomialkoeffizienten lässt sich diese korrekte Lösung des Hilfsproblems bei zwei Würfeln als $K_6^2 = 1\binom{6}{1}+1\binom{6}{2}$ darstellen.

Pour les Faces de 3 dez, il faut chercher premierement toutes les varietez sans repetition qui sont le nombre pyramidal de 6. Il faut adjouter toutes les com2naisons doublees, par ce qu'on peut faire des faces de trois dez des com2naisons de choses, en supposans ou l'une ou l'autre des choses double.

Pour les faces de 4 dez. On prendra le nombre Triangulo-Triangulaire et on luy adjoutera une fois les choses, deux fois les combinaisons, trois fois les con3naisons.

Et ainsi de suite.

Mais lors que nous ne contons pas seulement les conjunctures, et lors que nous voulons distinguer les c a s non seulement par les nombres *a. b. c. d. e. f*, mais encor par les choses, c'est autre chose, et nous nous pouvons par exemple marquer ceux d'un des dez par *A. B. C. D. E. F*, ceux de l'autre par *a. b. c. d. e. f*, ainsi nous aurons:

1 Pour les *(1)* Con3naisons, *(2)* Faces *L* 3 par ce qv' *(1)* il faut *(2)* on peut *(a)* faire des combi *(b)* faire ... dez, des *(aa)* combinaisons *(bb)* com2naisons | de choses *erg.* |, en *L* 6 fois les *(1)* nombres; deux *(2)* choses, *L* 8 seulement *(1)* les diversitez *(2)* les conjunctures *L*

1 f. varietez sans repetition: Hiermit ist die Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung gemeint (nicht etwa die der Variationen im modernen Sinne), und diejenige für drei Würfel lässt sich aus Tab. 4 als Pyramidenzahl der 6. Zeile ablesen. 3 trois dez: Die korrekte Lösung lautet in moderner Darstellung $K_6^3 = 1\binom{6}{1} + 2\binom{6}{2} + 1\binom{6}{3}$; Leibniz übersieht hier den ersten Summanden, der für „la somme des choses", die Anzahl der Würfel also, steht. 5 4 dez: Die richtige Lösung kann man modern mit $K_6^4 = 1\binom{6}{1} + 3\binom{6}{2} + 3\binom{6}{3} + 1\binom{6}{4}$ wiedergeben; Leibniz' Lösung dagegen berücksichtigt die Zahl der *combinaisons* $\binom{6}{2}$ nur zweimal. 7 ainsi de suite: Aufgrund des Irrtums in der vorausgehenden Zeile lieferte eine Verallgemeinerung der Leibnizschen Lösungen kein valides Ergebnis. Das korrekte Ergebnis für n Würfel lautet vielmehr $K_6^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{6}{k} = \binom{n+5}{5}$. 10 choses: Leibniz betrachtet nun also unterscheidbare Würfel. Die Ausgänge ihrer Würfe sind, modern gesprochen, Variationen mit Wiederholung. Den entsprechenden Ereignissen können gleiche Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, so dass sich das Ausgangsproblem auf dieser Grundlage lösen lässt. Im weiteren Verlauf des Stückes steht allerdings das allgemeinere Problem im Vordergrund, in wievielen Ausgängen eines Wurfes mit mehreren Würfeln eine zuvor festgelegte Zahl an Sechsen fällt.

Aa	Ba	etc.
Ab	Bb	
Ac	Bc	
Ad	Bd	
Ae	Be	
Af	Bf	etc.

Ainsi les cas ou faces selon ce sens, seront les nombres de la progression senaire. Les faces de deux dez seront 36, de 3 dez 216, etc.; de même les faces de deux pentaedres seront 5, 25, 125, 625, etc., nombre de faces sans f. Leur difference sera le nombre des faces de deux cubes ou hexaedres où il y a le nombre f, la difference entre les quarrez, de 6 et de 5. Et s'il y a trois hexaedres la difference entre les cubes de 6 et de 5 donnera le nombre des faces avec f. Ainsi de suite. Et ces differences seront tousjours terminées par 1, parce que les termes [se terminent] tousjours par 6 et 5.

Il s'agit apresent de sçavoir les doublets; c'est à dire les faces où il y a f plus d'une fois. Et il est manifeste, qu'il n'y a qu'un seul cas dans deux hexaedres, où f soit double. Mais dans trois hexaedres, voyons combien de fois f est double; car il n'y peut estre qu'une fois triple. Pour double voyons. Il est une fois double dans deux hexaedres, adjoutons y le nombre des faces sans f, du 3$^{\text{me}}$, qui est 5; en voila 5; il est $\overline{6^2 - 5^2 - 1}$ fois simple dans 2 hexaedres, ce la ne se peut prendre qu'une fois, en adjoutant le 3$^{\text{me}}$; et en l'y combinant avec un seul f. Avant que de passer outre, il sera bon d'exprimer cecy par ordre:

8 f. les faces de *(1)* 5 dez *(2)* deux pentaedres ... 625, etc *(a)* les differences font *(b)* nombre ... sans *(aa)* f. *(bb)* | 6. *ändert Hrsg.* | leur *L* 10 hexaedres *(1)* qvi est sans une des choses par exemple sans f. *(2)* ou il y a | le nombre *erg.* | f. *L* 12 faces | sans *ändert Hrsg.* | f. *L* 14 sçavoir *(1)* combien il y a des *(2)* les doublets *L* 18 adjoutons y *(1)* le tro *(2)* les *(3)* le nombre des faces *(a)* du troisieme *(b)* sans f *L*

		0 *		1 *	2	3	[4]	[5]	
1 Hexa-edres	$\overline{\text{6 faces}}$	$\overline{\text{5 faces}}$ $\overline{\text{sans } f}$	1 faces avec f	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{1 fois } f}$	*				
2 ·····	36 ····	25 ····	11 ····	10 ····	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{2 fois } f}$				
3 ·····	216 ···	125 ···	91 ····	$\underbrace{10 \frown 5 + 25 \frown 1}_{75}$	$\underbrace{10 \frown 1 + 1 \frown 5}_{15}$	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{3 fois } f}$			
4 ·····	1296 ··	625 ···	671 ···	$\underbrace{75 \frown 5 + 125 \frown 1}_{500}$	$\underbrace{75 \frown 1 + 5 \frown 15}_{150}$	$\underbrace{15 \frown 1 + 1 \frown 5}_{20}$	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{4 fois } f}$		
5 ·····	7776 ··	3125 ··	4651 ··	$\underbrace{500 \frown 5 + 625 \frown 1}_{3125}$	$\underbrace{500 + 150 \frown 5}_{1250}$	$\underbrace{150 + 20 \frown 5}_{250}$	$\underbrace{5 \frown 1 + 20 \frown 1}_{25}$	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{5 fois } f}$	
6 ·····	46656 ·	15625 ·	31031 ·	$\underbrace{3125 \frown 5 + 3125 \frown 1}_{18750}$	$\underbrace{3125 \frown 1 + 1250 \frown 5}_{9375}$	$\underbrace{1250 \frown 1 + 250 \frown 5}_{2500}$	375	30	$\overline{\text{1 fac. à}}$ $\overline{\text{6 fois } f}$
		etc.	etc.						

[*Tab. 5*]

---

9 *Hilfsrechnungen zu Tab. 5:*

$$\begin{array}{r} 625 \\ 2500 \\ \hline 3125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 150 \\ 5 \\ \hline 750 \\ 500 \\ \hline 1250 \end{array}$$

9 *Nebenrechnung über Tab. 5:* | 300 325 $\begin{array}{c} \cancel{1}2 \\ \cancel{3}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{0}0 \\ \cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}4 \end{array}$ ⨍ 8125 *gestr.* | L 25

Ex his manifesta est Tabulae continuatio. Nimirum c o l u m n a s vocabimus, series perpendiculares, numeratas numero duplicationum. S e r i e s autem horizontales notatae numero hexaedrorum. Constructio haec est. Quilibet terminus componetur ex quintuplo seriei praecedentis columnae suae, et simplo seriei pariter et columnae praecedentis, ut ita stet semper:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & E & F & G \end{array} \quad \text{et} \quad E \sqcap 1A + 5B \qquad F \sqcap 1B + 5C \qquad G \sqcap 1C + 5D$$

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \alpha & \varepsilon & & & \\ 2 & \beta & \zeta & \iota & & \\ 3 & \gamma & \eta & \kappa & \xi & \\ 4 & \delta & \theta & \lambda & \mu & \pi \\ & & & & \rho & \end{array}$$

[*Tab.*] ⊙

3 terminus *(1)* fiet ex sum *(2)* componetur *L* 13 *Unter Tab.* ⊙*:* | Scribatur hoc modo *nicht gestr.* |

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & & & 1 & & & & \\ \alpha & 1 & & & & 5^1 \frown & 1 & 1 & & & \\ \beta & \mathrm{Z} & 1 & & & 5^2 \frown & 1 & 2 & 1 & & \\ \gamma & \mathrm{H} & \kappa & 1 & & 5^3 \frown & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \delta & \theta & \lambda & \mu & 1 & & & & & & \end{array}\right| \; \textit{gestr.} \; | \; L$$

15 Scribatur: Dieser erste Versuch, die Verteilung der Ausgänge mit Hilfe des Arithmetischen Dreiecks wiederzugeben (vgl. auch Tab. 8), ließe sich durch geringfügige Änderungen retten:

$$\begin{array}{lllll} 5^1 \frown & 1 & & & \\ 5^2 \frown & 1 & 1 & & \\ 5^3 \frown & 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

$\alpha = 5$	$\varepsilon \sqcap 1$	
$\beta = \alpha^2$	$\zeta \sqcap 1\alpha + 5\varepsilon \sqcap 2,5$	$\iota \sqcap 1$
$\gamma = \alpha^3$	$\eta \sqcap \overline{1\beta + \overline{5\zeta\,(\sqcap 5\alpha + 5^2\varepsilon)}} \sqcap 3,5^2$	$\kappa \sqcap \zeta\,(\sqcap 2,5) + 5\iota\,(\sqcap 5) \sqcap 3,5$
$\delta = \alpha^4$	$\theta \sqcap \overline{1\gamma + \overline{5\eta(\sqcap 5^2\alpha + 5^3\varepsilon)} \sqcap 4,5^3}$	$\lambda \sqcap 1\eta\,(\sqcap 3,5^2) + 5\kappa\,(\sqcap 3,5^2) \sqcap 6,5^2$
etc.	etc.	etc.

$\iota \sqcap 1$	$\xi \sqcap 1$	
$\kappa \sqcap 3,5$	$\mu \sqcap 1\kappa\,(\sqcap 3,5) + 5\xi\,(\sqcap 5) \sqcap 4,5$	
$\lambda \sqcap 6,5^2$	$\rho \sqcap 1\lambda\,(\sqcap 6,5^2) + 5\mu\,(\sqcap 4,5^2) \sqcap 10,5^2$	$\pi \sqcap 1$

[*Tab.*] ☽

Ex hac jam tabulae repraesentatione Analytica, inventa est ratio inveniendi quemlibet Tabulae terminum sine Tabula. Nimirum quilibet Tabulae numerus est multiplus potestatis Numeri numero Hedrarum Polyhedri unitate Minoris, hoc loco quinarii $\sqcap y$, affectus sub numero combinatorio. Quod ut clarius pateat tabulam ⊙ explicatam ope Tabulae ☽, sic repraesentabimus:

	0	1	2		
1	$1, y^1$	1			
2	$1, y^2$	$2, y^1$	1		
3	$1, y^3$	$3, y^2$	$3, y^1$	1	
4	$1, y^4$	$4, y^3$	$6, y^2$	$4, y^1$	1

[*Tab. 8*]

---

21 *Am Rande eine punktuelle Probe der Tabelle:* $25 \quad \begin{array}{r} 25 \\ 6 \\ \hline 150 \end{array}$

10 *Über Tab.* ☽*:* | $\alpha \sqcap 5$ $\beta \sqcap$ *(1)* 5α *(2)* α^2 $\gamma \sqcap 5\beta \sqcap \alpha^3$ etc. $\varepsilon \sqcap 1$ $\zeta \sqcap \alpha + 5\varepsilon$ *gestr.* | *L* 12 numerus *(1)* est potestas *(2)* est multiplus *L* 14 clarius *(1)* patet *(2)* pateat *L* 17 $1, \mathrm{y}^1$ 1, | y^0 *gestr.* | *L*

Hinc multa duci poterunt theoremata singularia. Lineas perpendiculares appellabo Columnas, et transversales appellabo Series: Exponentes potestatum in columnis crescunt progressione arithmetica naturali: in seriebus decrescunt etiam progressione arithmetica naturali. Afficientes potestatum in columnis sunt Unitates, Numeri Naturales, Numeri Triangulares, Numeri Pyramidales, Numeri Triangulo-Triangulares, verbo Numeri figurati. Afficientes potestatum in seriebus sunt characteristici Potestatum Binomicarum. Nempe sit radix $a+b$, cujus characteristici 1.1, quad. $1a^2+2ab+1b^2$, cubus: $1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$, et ita porro.

Problema palmarium huc redit: Dato numero Tesserarum, eundem numerum laterum habentium, iisdemque characteribus similiter inscriptarum, invenire numerum facierum, tum simpliciter, tum earum, in qua datus character reperiatur, aut non reperiatur, aut datis vicibus reperiatur. Facies autem voco diversitates jactuum, tum a characteribus in supereminentia superficie apparentibus ortas, tum etiam ortas ab ipsis diversis Tesseris, quod ad sensum appareret, si iidem characteres diversis tesseris colore discernerentur vel magnitudine, ut si sit Tessera sola cubus characteres unius Tesserae, $A.\ B.\ C.\ D.\ E.\ F$, alterius $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f$, patet duabus tesseris ejusmodi jactis, differre Ab et aB. Et ita ut eodem exemplo insistamus, si sint 5 tesserae cubicae, quibus sex characteres $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ diversis coloribus inscripti, quaeritur quot sint facies sive jactus diversi, in quibus una aliqua harum rerum exempli gratia, a reperiatur vicibus 4. Vel positis quatuor tesseris, quot sint jactus in quibus eadem res, ut a vicibus duabus. Sumatur numerus laterum polyhedri 6, sumatur et numerus tesserarum 4, et numerus duplicationum. A numero Tesserarum subtrahatur numerus duplicationum, $4-2 \sqcap 2$. Residuo addatur unitas, fiet 3. Jam ponantur tot numeri unitate sola differentes quorum minimus 3, quot sunt

1 theoremata *(1)* admir *(2)* singularia. Lineas *(a)* trans *(b)* horizontales *(c)* perpendiculares *L* 2 Series: *(1)* Afficientes *(2)* Exponentes *L* 3 naturali *erg. L* 3 progressione *(1)* eadem *(2)* arithmetica naturali *(a)* Exponente *(b)* Afficientes *L* 4 sunt *(1)* Numeri, *(2)* | Numeri *gestr.* | Unitates *L* 6 sunt *(1)* Numeri *(2)* characteristici *L* 9 f. redit: *(1)* Datis lateribus *(2)* Dato numero laterum polyhedri, *(3)* dato numero Polyhedrorum | similiter signatorum *erg.* | aeqvalem datumqve numerum hedrarum habentium, *(a)* et similiter *(b)* et similiter sig *(4)* Dato numero Tesserarum, *(a)* et *(aa)* laterum *(bb)* lat *(cc)* latera numeri dati ejusdem, eademqve similiter signata habentium, *(b)* eundem ... habentium, *(aa)* similiterqve inscriptarum, aeqv *(bb)* similiterqve inscriptarum in *(cc)* iisdemqve characteribus *(aaa)* inscriptarum *(bbb)* similiter *L* 13 diversis *(1)* polyhedris ut *(2)* Tesseris *L* 14 f. vel magnitudine *erg. L* 15 sola *erg. L* 16 a. b. c. d. e. f. *(1)* supponendo majusculos albo, alteros nigro colore scriptos, *(2)* patet *L* 17 sint *(1)* duae *(2)* 5 *L* 19 vicibus 4. *(1)* Problema ita solvetur *(2)* vel *L* 21 f. duplicationum. *(1)* 2 *(2)* A numero ... duplicationum | vicinali *erg. L, streicht Hrsg.* |, $4-2 \sqcap 2.$ *L*

unitates in numero duplicationum, hoc loco, 2, nempe 3. 4. Hi numeri ducantur in se invicem. Factus ex ipsis dividatur per factum ex totidem numeris unitate differentibus quorum minimus unitas, multiplicetur 1. 2, nempe 2, $\frac{12}{2} \sqcap 6$. Quotiens 6 multiplicatus per potestatem numeri numero laterum unitate minoris, hoc loco 5, cujus exponens differentia numeri tesserarum et vicium 2[,] seu 5^2, seu $6, 5^2 \sqcap 150$.

[*Teil 3*]

Problema

Dato numero Laterum,	6	
(Tessera enim si[t] Cubica, Hexaedros)		
Tesserarum ut	4	(6)
ut si 4 (vel 6) tesseris simul jaciendum sit,		
et Repetitionum,	2	(4)
ut si quaerantur jactus, in quibus eadem punctorum configuratio,		
ut ⁙ (nam omnium par ratio) bis (vel quater) reperiatur		

invenire numerum facierum, id est invenire numerum jactuum a se invicem differentium, in quibus dato Vicium numero repetitur configuratio proposita. Diversitas autem jactuum oritur tum ab ipsis punctis jactis, ut si duabus tesseris jaciamus nunc IV et 5, nunc IV et 3, tum a tesseris quibus fit jactus, ut jactus IV et 5 differet a jactu V, 4, si quod majusculis characteribus exhibetur, unius tesserae, quod minusculis alterius esse intelligatur: quod appareret, si tesserae plures coloribus, vel aliis notis discernerentur. Nec vero tantum eorum quae jaciuntur, sed et tesserarum quibus fit jactus ratio habenda

3 unitas *(1)*. Qvotiens multiplicetur per *(2)*, multiplicetur *L* 7 f. |Distinctius *erg. u. wieder gestr.*| Problema *(1)*: Dato numero Tesserarum ut 4. (6) eundem ac datum laterum numerum ··· 6. habentium |et ubiqve ac similiter inscriptarum *erg.*|, invenire Numerum facierum, in qvibus aliqvid character |inscriptus *erg.*| vel punctorum configuratio, ut ⁙ aliave (nam omnium eadem ratio) dato vicium numero, v. g. vicibus ··· 2. (4) reperiatur. brevius: *(2)* Dato *L* 11 sit, *(1)* invenire *(2)* et Repetitionum *L* 14 ut *(1)* ⁖ (vel ∷) bis (vel qvater) reperiatur *(2)* ⁙ (nam *L* 15 invicem *(1)* sive apparentia eorum qvae jaciuntur, sive ipsis tesseris jactis, *(2)* differentium *L* 17 f. nunc *(1)* 4. et 5. *(2)* IV. et 5. *(a)* vel *(b)* nunc ... ut *(aa)* IV a 5. *(bb)* jactus *(aaa)* 4 *(bbb)* IV. et 5. *L* 20 qvod |apparebet *ändert Hrsg.*|, si *L*

est. Quia problema nostrum servire debet ad solutionem alterius problematis quod ita conceptum est: Si convenerit inter duos ut quoties 5 quatuor Tesseris jecerit certum capiat ⟨numer⟩um denariorum, contra, quoties 5 abfuerit, certum solvat, quaeritur quid debeat esse porportio inter capiendum et solvendum, ut aequalitas servetur. Non est hic sermo.

Solutio

A Numero Tesserarum $T, \sqcap 4$ (vel 6) subtrahatur numerus Repetitionum $R \sqcap 2$ (vel 4), supererit $T-R \sqcap 4-2 \sqcap 2$ (vel $6-4 \sqcap 2$). Huic residuo $T-R$, addatur unitas, fiet $T-R+1 \sqcap 3$ (vel 3).

Scribantur totidem Numeri continue sola unitate crescentes, quorum minimus $T-R+1$, sive 3 (vel 3) nempe $T-R+1$, $T-R+2$, $T-R+3$ etc. quot sunt unitates in numero repetitionum R, sive in 2 (4) nempe 3. 4. (vel 3. 4. 5. 6.).

Hi numeri continue crescentes unitate ducantur in se invicem: Productum 12 (360) dividatur per factum, ex totidem numeris sola unitate differentibus, seu sumtis deinceps ab unitate, 1 in 2 $\sqcap$ 2 (1 in 2 in 3 in 4 $\sqcap$ 24) fiet $\frac{12}{2} \sqcap 6$ $\left(\begin{array}{c}\cancel{1}\cancel{2}\\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\\ \cancel{2}\cancel{4}\cancel{4}\\ \cancel{2}\end{array} \,⨍\, 15\right)$.

Quotiens ducatur in numerum laterum tesserae, unitate minutum, hoc loco 5, toties in se ductum, quot in $T-R$, differentia Numeri Tesserarum et Repetitionum 2 (2) sunt unitates id est in 5^2 (5^2) $\sqcap$ 25 (vel 25) fiet $6 \frown 25 \sqcap 150$ ($15 \frown 25 \sqcap 375$).

2 quoties 5 *(1)* tribus *(2)* qvatuor *L* 6 Repetitionum *(1)* 2 *(2)* R $\sqcap$ 2, *(a)* (4) fiet *(b)* (vel 4) supererit *L* 8 f. $\sqcap$ 3 (| vel *erg.* | 3). *(1)* Ducantur in *(2)* Scribantur *L* 10 T − R + 1, *(1)* qvot *(2)* sive 3 vel (3) *L* 12 f. invicem: *(1)* , fiet: ⟨6⟩ *(2)* Productum ... per *(a)* totidem *(b)* factum, *L* 13 seu sumtis *erg. L* 15 ducatur *(1)* in numerum laterum te⟨r⟩ *(2)* in *(a)* ⟨Qvadratum⟩ *(b)* | qvi est *nicht gestr.* | numerus *(c)* numerum *L*

1 alterius problematis: Bei diesem handelt es sich vermutlich um das im Titel erwähnte Problem des Herzogs von Roannais. Die Lösung für den hier genannten Fall mit vier Würfeln lässt sich Tab. 5 auf S. 66 entnehmen. 6 (vel 6): Die eingeklammerten Zahlenangaben und Berechnungen in der *Solutio* fügt Leibniz nachträglich hinzu, um so ein zweites konkretes Beispiel für die Lösung des Problems zu geben. 17 Diese korrekte, bereits auf S. 69 f. beschriebene Lösung lässt sich modern wie folgt ausdrücken: Beim Wurf von T unterscheidbaren Würfeln ist die Zahl der Ausgänge, die genau R mal eine zuvor festgelegte Augenzahl zeigen, gleich $\binom{T}{R} 5^{T-R}$.

[*Französische Zusammenfassung*]

Le nombre des dez (6), et des repetitions (4) estant donnés trouver le nombre des doublets (375), suivant la repetition donnée (4) sans se servir d'aucune table, calcul de suite.

Du nombre des dez ostez le nombre des repetitions, adjoutez l'unité à ce qui reste (2). Et faites que ce qui provient (3) soit le moindre d'autant de nombre[s] croissans par l'unité (3. 4. 5. 6), qu'il y a d'unitez dans le nombre des Repetitions (4). Multipliez tous ces nombres l'un par l'autre de suite. Et divisez le produit (360) par le produit (24) [d']autant de nombres croissans par 1 et commençans par 1 (1. 2. 3. 4) ce qui se peut toujours faire sans reste. Multipliez le quotient (15) par la puissance de 5 (25) dont l'exposant (2) est la difference du nombre des dez et des repetitions. Et le produit (375) satisfera à la demande.

3 f. sans ... suite *erg. L* 5 repetitions, *(1)* (reste 2) adjoutez y l'unité (3) Et vous aurez un nombre, qvi sera le moindre, d'autant de nombres croissans par l'unité *(2)* le qvel doit estre multiplié pa *(3)* adjoutez *L* 8 f. le produit (24) *erg. L* 9 croissans par *(1)* l'unité, ou le moindre soit l'unité meme *(2)* 1. et *L*

---

2 (6): Auch die französischsprachige Kurzfassung ergänzt Leibniz nachträglich um die in Klammern gesetzten Zahlenwerte eines konkreten Beispiels.

11. DE ANALYSEOS HISTORIA
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 14 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 793

Datierungsgründe: Leibniz' Ausführungen in diesem Stück setzen inhaltlich seine Studien zur Algebra in den Jahren 1673 und 1674 voraus. Ein erster *terminus post quem* ist durch die Erwähnung des *Horologium oscillatorium* von Huygens (erschienen im Frühjahr 1673) gegeben; ein erster *terminus ante quem* lässt sich aus dem Umstand ableiten, dass Rafael Bombelli, mit dessen *Algebra* sich Leibniz seit dem Frühjahr 1675 beschäftigt (vgl. VII, 2 N. 49), im Stück nicht genannt wird. Diese Eingrenzung kann weiter präzisiert werden: So schließt die Verwendung eines Ergebnisses aus dem zwischen Dezember 1673 und Juni 1674 verfassten Stück VII, 7 N. 7 eine Niederschrift vor Ende 1673 aus. Und die Bemerkungen zu Sluses *Mesolabum* deuten darauf hin, dass Leibniz das Stück erst verfasst, nachdem er Mitte 1674 jenes Werk exzerpiert (VII, 7 N. 16) und für seine eigenen Arbeiten erschlossen hat; die vorherige Lektüre der Rezension des *Mesolabum* in den *Philosophical Transactions* hätte ihm nicht die gleiche Sicherheit des Urteils verschaffen können. In seiner Bemerkung zu Boulliau schließlich bezieht sich Leibniz mit ziemlicher Sicherheit auf das Gespräch mit diesem am 3. Oktober 1674 (VII, 5 N. 6 S. 31). Ein weiteres Indiz für eine Niederschrift nicht vor Oktober 1674 ist die Erwähnung Gosselins, denn Leibniz' Exzerpte aus und Marginalien in Gosselins *De arte magna* (VII, 3 N. 41) sind gesichert nicht vor Oktober 1674 (und wahrscheinlich nicht nach Januar 1675) entstanden. Die Erwähnung der *Geometriae pars universalis* von Gregory erhärtet eine Datierung auf diese Periode weiter, denn Leibniz' erste bisher bekannte Nennung dieses Werkes stammt aus dem Dezember 1674 (vgl. VII, 1 N. 13 S. 130 f.) Die Erwähnung von Girards *Invention nouvelle* spricht nicht gegen diese Datierung. Zwar wird Leibniz' bisher früheste Erwähnung dieser Publikation (VII, 2 N. 17 S. 189) auf März bis Mai 1675 datiert, und ihre erste Erwähnung im Briefwechsel ist die in Oldenburgs Brief vom 22. April 1675 (III, 1 N. 49 S. 242), doch wird sie in Schootens Appendix erwähnt, den Leibniz bereits seit Herbst 1674 zitiert (VII, 2 N. 3 S. 32). Insgesamt betrachtet ist unser Stück also sicher nicht vor Oktober 1674 und wohl eher nicht nach Januar 1675 entstanden.

De Analyseos Historia

Calculum literalem in locum numeralis primus omnium credo introduxit Franciscus Vieta, tametsi enim Gosselinum quendam aliosque obscuriores Algebrae scriptores

27 De Analyseos Historia *erg. L*

28 introduxit: Vgl. Fr. Viète, *In artem analyticem isagoge*, 1591 (= *VO* S. 1–12), Bl. 7 r° (*VO* S. 8). 29 Gosselinum: Vgl. G. Gosselin, *De arte magna*, 1577, etwa auf Bl. 82 v° u. 84 v°. 29 obscuriores: Dies trifft etwa auf Jean Borrel zu; vgl. J. Buteo, *Logistica*, 1559, Bl. 189 r°.

literis nonnunquam usos videam, tamen nec in exemplum eorum valuit autoritas; et ad novae scientiae formam longe aliis praeterea observationibus opus erat. Vieta autem cum videret antecessores suos in quaestionibus implicatioribus pluribus una incognitis oblatis duabus unitatibus fictitiis uti; satius credidit numeros cognitos incognitosque literis exprimere. Ita enim et lineis accommodari posse easdem ratiocinationes, et Arithmeticae cum Geometria consensum apparere, exemplo Geometrarum, qui in doctrina de rationibus magnitudines literis designant et alioquin rectam extra figuram positam, ad propositionem tamen pertinentem, una litera notatam separatim exhibere solent. Idem primus rationem ostendit excitandi ex radicibus aequationem quandam propositae similem, ut ex ejus genesi propositae analysis appareret; unde factum quoque est ut Analytica appelletur, quam alii speciosam vocant. Ego Calculum Symbolicum appellare malim.

Porro Vieta neminem Artis suae oppugnatorem habuit, praesertim cum de ejus usu modeste sentiret ipse. At Cartesius, ut erat inventorum alienorum in rem suam accommodandorum artifex insignis, cum ope calculi duo in Geometria praestitisset egregia; digestionem in classes locorum sive linearum calculi capacium, quarum intersectione aequationes construerentur, et inventionem tangentium, per aequationes duarum radicum aequalium. Dissimulato prorsus aut contemto Vieta, in totius scientiae autorem erigere se posse credidit, cui ut pollicitationum magnitudine pretium faceret; libro edito scribere ausus est, nullum esse problema quod methodo sua solvi non possit. Cumque animadver-

2 f. cum *(1)* observasset *(2)* videret *L* 4 credidit *(1)* pro qvalibet q *(2)* qvantitates literis *(3)* numeros *L* 6 f. in doctrina ... alioqvin *erg. L* 11 qvam *(1)* alibi *(2)* alii *L* 14 in Geometria *erg. L* 15 f. digestionem *(1)* locorum sive linearum Geometricarum in Classes, *(2)* in ... linearum *(a)* Analyseos, *(b)* calculi capacium | qvarum intersectione *(aa)* problemata *(bb)* aeqvationes construerentur *erg.* | , et *L* 16 tangentium, *(1)* ope duarum radicum aeqvalium *(2)* per *L* 17 in *(1)* novae *(2)* totius *L* 18 faceret; *(1)* jactavit in lib *(2)* in libro *(3)* libro *L* 19–75,1 animadverteret *(1)* Methodos suas *(2)* eam *L*

---

9 ostendit: Fr. VIÈTE, *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo*, 1615, insbesondere S. 128 f. (*VO* S. 158). 11 speciosam: DERS., *In artem analyticem isagoge*, 1591, Bl. 5 r^{o} (*VO* S. 4) unterscheidet das Rechnen mit Buchstaben als *logistica speciosa* von der *logistica numerosa*, dem reinen Zahlenrechnen. 16 construerentur: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106. 16 tangentium: Vgl. ebd., S. 40–49. 19 nullum: Vgl. ebd., S. 1 u. 118. Eine ähnliche Kritik an Descartes übt Leibniz bereits im Sommer 1673 in seinem Stück *Fines geometriae* (VII, 4 N. 25, S. 594 f.). Das Postulat „nullum non problema solvere" geht allerdings auf Fr. VIÈTE, *In artem analyticem isagoge*, 1591, Bl. 9 r^{o} (*VO* S. 12) zurück.

teret eam ad curvilineorum dimensiones non porrigi, impossibile pronuntiavit rectam exhibere curvae aequalem, quod scilicet nulla tunc *εὐθυνσις* extaret.

Ea Viri confidentia ipsi pariter Artique adversarios paravit. Erant tunc in Gallia duo Geometrae insignes, Fermatius et Robervallius, quorum ille paraboloeidum omnium quadraturas, et methodum de maximis et minimis (qua et tangentes continebantur) dederat. Hic cycloeidis et solidi ejus circa axem exhibuerat dimensionem; aliaque problemata praeclara produxerat, quae manifestum erat Cartesianae Methodo non subjici, quod scilicet ad aequationes revocari non possent. Hi ergo praeterquam quod jactantiam manifeste absurdam ferre non possent; etiam illud non probabant, calculi praetextu a quibusdam constructiones Geometricas negligi, quarum elegantiae veteres cumprimis operam dedisse constabat.

Thomas Hobbes a Cartesio in *responsionibus ad objectiones Metaφysicas* indigne habitus; edito libro *de Corpore*, occasionem nactus de calculo ita censuit; modeste satis;

3 Viri *(1)* arrogantia *(2)* fiducia *(3)* confidentia *L* 6 axem *(1)* dederat *(2)* exhibuerat *L* 6 f. praeclara *(1)* solverat *(2)* produxerat *L* 7 Methodo *(1)* solvi non posse, *(2)* non *L* 9 praetextu *(1)* elegantes veterum *(2)* a qvibusdam *L* 12 indigne *(1)* tracta *(2)* habitus *L* 13 nactus de *(1)* symbolica *(2)* calculo *L*

---

1 pronuntiavit: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39. 5 dederat: Fermats Extremwertmethoden wurden in P. Herigone, *Supplementum cursus mathematici*, 1642 u. 1644, S. 59–69, dargestellt, später auch in Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255. Über die Existenz von Fermats Quadratur höherer Parabeln war Leibniz durch Roberval unterrichtet (vgl. VII, 6 N. 49_1 S. 507); vgl. auch den Brief von Fermat an Mersenne von Februar/März 1642, tlw. gedr. in M. Mersenne, *Tractatus mechanicus*, 1644, praefatio, § IV, Bl. a1 v^{o} – a2 r^{o} (*FO* I S. 195–198; M. Mersenne, *Correspondance* XI, S. 55–58). 6 exhibuerat: Vgl. den Brief von M. Mersenne an R. Descartes vom 28. April 1638, in: R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667; S. 380–384 (*DO* II S. 116–122; M. Mersenne, *Correspondance* VII, S. 173–179). — Robervals Quadratur der Zykloide erwähnt Leibniz bereits im Sommer 1673 (vgl. VII, 4 N. 36 S. 595). 12 responsionibus: Descartes' *Meditationes de prima philosophia* von 1641 waren als Beilage die brieflichen Einwürfe (*Objectiones*) von philosophischen Gegnern, darunter Gassendi und Hobbes, und deren Beantwortungen (*Responsiones*) angefügt. In diesen wird ein grundlegendes Unverständnis gegenüber Hobbes' Positionen deutlich. 13 censuit: Leibniz hat Hobbes' *De corpore* sowohl in der Erstausgabe von 1655 wie in der überarbeiteten Ausgabe von 1668 studiert (vgl. U. Goldenbaum, *Indivisibilia vera. How Leibniz Came to Love Mathematics*, in: Dies. u. D. Jesseph (Hrsg.), *Infinitesimal Differences*, 2008, S. 53–94). Hier bezieht Leibniz sich vermutlich auf die Formulierung der Erstausgabe: „Estque Analyticae, ut ita dicam, brachygraphia, ars quidem non docendi neque discendi Geometriam, sed inventa Geometrarum celeriter et compendio in Commentarios redigendi. Nam etsi inter propositiones longe dissitas, facilis sit per Symbola discursus, an tamen is discursus, cum fiat

etsi inter res longe dissitas facilis sit per symbola discursus, cum tamen fiat sine ipsarum rerum ideis, an valde utilis existimandus sit, se nescire. Postea vero a Wallisio Oxoniensi Mathematico scholarum ab Hobbio contumeliose tractatarum propugnatore durius acceptus, in ipsam ejus Methodum bilem effudit, edito libro de *Emendatione Mathematicae hodiernae*, ubi non contentus inutilem pronuntiare, etiam erroneam ostendere, posse sibi visus est. Ei vero ita a Wallisio satis mea sententia factum ut de Calculi symbolici veritate possimus esse securi; solaque de utilitate disceptatio supersit.

De Utilitate autem Analyseos quem vocant, variant sententiae doctorum quoque Virorum: alii nullam agnoscunt, alii velut inveniendi principium in pretio habent, ad

2 an *(1)* satis *(2)* valde utilis *(a)* existimanda *(b)* existimandus *L* 4 in *(1)* methodum eius, id est calculum symboli *(2)* in *(3)* ipsam *L* 6 sibi *erg. L* 6 f. factum *(1)* est *(2)* ut de *(a)* eius *(b)* Calculi symbolici *(aa)* usu in *(bb)* veritate . . . securi; *(aaa)* nec nisi *(bbb)* solaqve *L* 8 Utilitate *(1)* Calculi Analytici *(2)* autem . . . vocant, *(a)* duae p *(b)* variant *L*

---

sine ipsarum rerum Ideis valde utilis existimandus sit, certe nescio.“ (*De corpore*, 1655, cap. 20, S. 181.) 1668 hatte Hobbes den ersten Teil der Aussage bereits verschärft: „At Symbolica, qua permulti hodie utuntur putantes esse Analyticam, nec Analytica est nec Synthetica, sed calculationum Arithmeticarum quidem vera, Geometricarum autem falsa Brachygraphia ars quidem non docendi neque discendi Geometriam, sed inventa Geometrarum celeriter et compendio in Commentarios redigendi.“ (*De corpore*, 1668, S. 157; *HOL* I, S. 257 f.) 3 propugnatore: Leibniz bezieht sich hier wahrscheinlich u. a. auf die 1654 anonym veröffentlichte Streitschrift *Vindiciae academiarum*, welche von Wallis’ Kollegen in Oxford, dem Astronomieprofessor Seth Ward und John Wilkins, dem Warden von Wadham College, verfasst worden war. Sie richtete sich gegen die Kritik an den Universitäten in Th. Hobbes, *Leviathan*, 1651, S. 179 f. (*HEW* I, S. 330–332). Wallis mischte sich mit seiner Schrift *Elenchus geometriae hobbianae*, 1655, in diese Kontroverse ein. 5 ostendere: Th. Hobbes, *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*, 1660 (*HOL* III, S. 1–232). 6 factum: Vgl. J. Wallis, *Hobbius heauton-timorumenos*, 1662, sowie Ders., *Animadversions of Dr. Wallis, upon Mr. Hobs’s Late Book, De principiis et ratiocinatione geometrarum*, in: *Philosophical Transactions* I, Nr. 16 vom 6./16. August 1666, S. 289–294; Ders., *Thomae Hobbes quadratura circuli confutata*, 1669; Ders., *Thomae Hobbes quadratura circuli denuo refutata*, 1669; Ders., *An Answer of Dr. Wallis to Mr. Hobbes’s Rosetum Geometricum in a Letter to a Friend in London, Dated July 16.*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 73 vom 17./27. Juli 1671, S. 2202–2209; Ders., *An Answer to Four Papers of Mr. Hobs*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 75 vom 18./28. September 1671, S. 2241–2250; Ders., *Dr. John Wallis his Answer, by Way of Letter to the Publisher, to the Book, Entituled Lux Mathematica, etc.*, in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 87 vom 14./24. Oktober 1672, S. 5067–5073. — Zumindest die Artikel und Rezensionen in den *Philosophical Transcations* waren Leibniz mit Sicherheit bekannt. Seine Haltung zu Hobbes’ Positionen entwickelte sich entsprechend von fast euphorischer Zustimmung (vgl. seinen ersten Brief an Hobbes, 13./23. Juli 1670; II, I N. 25 S. 90 ff.) hin zu einer differenzierteren Sichtweise (vgl. Leibniz an Hobbes, 1674; II, I N. 119 S. 385).

demonstrandum parum valere existimant. Sunt contra qui prae symbolica linearem Methodum spernunt; a quibus omnibus diversa mihi ratio ineunda videtur. Nam qui prorsus inutilem putant experientia refutantur. Ope Analyseos Albertus Girardus vidit trisectionem anguli et aequationem quandam cubicam eodem reduci. Ope analyseos problemata ad duo loca reduci posse infinitis modis, quorum intersectione solvantur, ut Cartesius primum et egregie inprimis Slusius ostendit. Cartesius praeclaram inventionem duarum mediarum proportionalium ex hoc fonte duxit, per Circulum et Parabolam, et proprietatem Hyperbolae ad usum dioptricum. Calculo debetur praeclarum Hugenii inventum de Isochronismo Cycloeidis, ego quoque qui primus Circulum reduxi ad progressionem numerorum rationalium illud de me fateor, sine symbolorum usu, per tantos anfractus quod inveni ne quaesiturum quidem fuisse.

Cl$^{\text{mo}}$ Viro Ismaeli Bullialdo illud largior, sola Cartesiana methodo ne simplicissimam quidem quadraturarum, parabolicam, deprehendi posse; et ratio est, quia Cartesius non nisi aequationum resolutiones et constructiones tradidit; problemata autem quadraturarum ad aequationes reducere nemo docuit. Idem tamen fatebitur, locorum analyticam, si accedant principia Archimedis aut Cavalerii ad ipsas quoque quadraturas magni usus esse.

3 refutantur. *(1)* Ope Analyseos Cartesius dedit praeclaram constructionem duarum mediarum proportionalium *(2)* Ope *L* 4 analyseos *(1)* loca *(2)* problemata *L* 5 posse *(1)* constat *(2)* infinitis *L* 5 f. Cartesius primum et *erg. L* 7 per *(1)* Analysin *(2)* Circulum *L* 7 f. , et proprietatem ... dioptricum *erg. L* 12 sola *erg. L* 14 resolutiones *(1)* sive *(2)* et *L* 14 f. qvadraturarum *(1)* non possunt redu *(2)* ad *(a)* aeqvationem *(b)* aeqvationes reducere *(aa)* non docuit *(bb)* nemo *L* 15 tamen *(1)* fateor *(2)* fatebitur locorum *(a)* doctorum *(b)* analyticam *L*

3 vidit: A. Girard, *Invention nouvelle*, 1629, D2 v$^{\text{o}}$ – D3 v$^{\text{o}}$. — Vgl. Fr. van Schooten, *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*, 1659, *DGS* I S. 345–368. 5 reduci: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106; R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, insbesondere *Pars altera de analysi*, S. 51–95 (von Leibniz Mitte 1674 in VII, 7 N. 16 exzerpiert). Vgl. auch das im letzten Quartal 1674 verfasste Stück VII, 7 N. 40 S. 426. 6 inventionem: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67–69. 7 f. proprietatem Hyperbolae: Vgl. Ders., *La dioptrique*, 1637, S. 89–121 (*DO* VI, S. 165 bis 196). 9 Isochronismo: Vgl. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.], S. 42–58 (*HO* XVIII S. 158–187). 9 reduxi: Vgl. die in Band VII, 6 zusammengefassten Handschriften zur arithmetischen Kreisquadratur. 12 largior: Leibniz bezieht sich hier sehr wahrscheinlich auf das Gespräch mit Boulliau am 3. Oktober 1674 (VII, 5 N. 6 S. 31), in dem dieser bestritten hatte, dass die Resultate von Archimedes, zu denen auch die hier erwähnte Quadratur der Parabel gehört, allein mit den Mitteln der Algebra erzielt werden könnten.

Analyticen demonstrare posse non est cur dubitemus, nam doctrina est de Magnitudine in universum, qua numeris, spatiis, temporibus, motibus communia traduntur; de magnitudine autem in universum demonstrationes extare nemo credo in controversiam revocabit.

Omnis calculi ratiocinatio non nisi axiomatum Euclideorum, si aequalibus (proportionalibus) addas (auferas) aequalia (proportionalia) fieri aequatio (proportionalia): aequalium aequimultipla esse aequalia; totum parte majus esse, aliorumque id genus catena est: non minus quam demonstrationes lineares: ita ut plerumque alterae ab alteris non magis distare videantur, quam idem sensus verbis nunc latinis nunc Gallicis redditus a se ipso. Cum addere aut subtrahere calculus jubet, tu lineas ducis, cum ille multiplicat, tu rationes componis; cum dividit, cum regulam auream exercet, quaeris tertiam quartamve proportionalem. Cum ad potestates puras aut potestatum purarum radices assurgit, tu medias proportionales investigas. Hactenus alter alterum pari passu secutus est. Sed ubi ille ad affectum gradum protulit, ubi divisores aequationum inquirit, ubi per aequationes plurium incognitarum, inter se junctas ex similium comparatione natas per abrupta sibi viam facit; et rebus quodammodo vim infert; tu impar sequendi, velut inter nubes condentem caput vix oculis comitere. Nam saepe quae unius plagulae calculo exhibentur, vix justo volumine per lineas repraesentaveris: nullo profecto fructu; cum sub rerum multitudine lassa fatiscat imaginatio cujus potissimum causa linearum ductus adhibentur.

2 numeris, *(1)* lineis, motibus, communia traduntur figuris *(2)* spatiis *L* 4 f. revocabit. *(1)* Qvare *(a)* demonstratio *(b)* praecepta Analytica Geometrice demonstrare velle, perinde est, *(aa)* ac praecepta *(bb)* ac *(aaa)* demonstrationes *(bbb)* theoremata Geometricas per Empiricae qvoddam genus ostendere, qvod doctissimus Geometra Joachimus Jungius in tironum usum eleganter instituerat. Qvod ut suo usu non caret, ita necessarium nunqvam *(aaaa)* etsi *(bbbb)* et nisi *(aaaaa)* cum *(bbbbb)* in illis exemplis ubi peculiari elegantia praestari potest, supervacuum *(2)* Omnis *L* 6 (proportionalia): *(1)* aeqvimultiplorum aeqvalium *(2)* aeqvalium *L* 7 esse, *(1)* etc. *(2)* aliorumqve *L* 8 plerumqve *(1)* Geom *(2)* alterae *L* 9 non *(1)* maius *(2)* magis *L* 11 f. dividit, | cum ... exercet *erg.* | qvaeris tertiam *(1)* proportionalem *(2)* qvartamve *L* 12 puras *erg. L* 12 purarum *erg. L* 14 ad *(1)* affectas aeqvationes *(2)* | affectas *ändert Hrsg.* | gradum protulit, | ubi ... inqvirit *erg.* | ubi | per *erg.* | aeqvationes *L* 16 vim *(1)* facit *(2)* infert; tu *(a)* e *(b)* longinqvo *(c)* non nisi *(d)* impar *L* 17 comitere. Nam *(1)* im *(2)* ea saepe operationum multitudo unius plagulae calculo comprehenditur, ut lineis exhibere velle *(3)* Nam *L* 18 vix *(1)* integri voluminis *(2)* justo *L* 19 sub *erg. L* 19 f. ductus *(1)* exhibentur *(2)* adhibentur *L*

---

5 axiomatum: Vgl. die Liste der Axiome in EUKLEIDES, *Elementa*, I. 17 inter ... oculis: P. VERGILIUS Maro, *Aeneis*, IV, 177. **24** instituerat: Vgl. J. JUNGIUS, *Geometria empirica*, 1627.

Fateor equidem saepe fieri, ut quae prolixo calculo invenimus demonstrari possint paucis linearum ductibus. Sed tunc rursus distinguendum arbitror. Compendium enim aut verum est aut apparens. Verum cum totam ratiocinationem lineis exhibemus valde contractam, apparens cum inter demonstrandum ad alias propositiones alibi demonstratas lectorem remittimus quae rursus ex aliis pendent, ut junctis in unum omnibus futura sit demonstratio linearis ipso calculo prolixior. Cum apparens est brevitas rursus distinguo nam propositiones quibus utimur inter demonstrandum aut pulchrae sunt atque elegantes ac dignae velut ad perpetuam rei memoriam condi Archivis Geometrarum; quo casu utilis est demonstratio Geometrica veritatis calculo inventae. Calculi fructus, non in praesens tantum problema, sed in perpetuum valit⟨uri⟩ ut egregia ratiocinandi compendia inter calculandum inventa theorematis inclusa serventur in usum. Sin quod ego calculo inveni, tu lineis exhibes, inversa tantum calculi vestigia describentibus; operam tuam laudare non possum. Hoc enim admisso infinitis voluminibus sine ratione Geometria onerabitur. Quando autem evenit ut demonstratio linearis vere brevis sit, nec nisi pauca lemmata, aut theoremata alibi demonstrata, requirat, tum vero plerumque eveniet, ni fallor, ut eadem brevitate per calculum quoque possit absolvi. Ibi ergo eligendi libertas esto scriptori. Ego certe malim autorem mihi analysin suam quam synthesin dare; nam eadem opera et inventionis rationem patefaciet, quae inter linearum ductus non aeque tralucet: scriptoris autem interest aliquando lineis potius quam calculis uti; nam ita et profanos longe a scientiae mysteriis arcebit, et inventis suis plus admirationis conciliabit. Ita enim plerumque comparatum est, ut quae minus intelligimus magis suspiciamus. Eoque consilio non est dubitandum ab Archimede usum indivisibilium, ab Apollonio et Pappo calculi vestigia supressa esse, praesertim cum artes illae non nisi paucis et magnis

1 f. possint *(1)* paucis verbis *(a)* ac *(b)* sed tunc *(2)* paucis *(a)* linearum ductibus; idqve praesertim sagaci Analytico saepe monstrat ipse Calculi exitus; qvo casu adeo non improbo *(b)* linearum . . . tunc *(aa)* illud *(bb)* rursus *L* 2 Compendium *(1)* autem *(2)* enim *L* 3 Verum *(1)* si *(2)* cum *(a)* nihil extra *(b)* totam *L* 4 f. ad *(1)* aliam propositionem *(2)* alias propositiones | alibi *(a)* demonstrationes *(b)* demonstratas *erg.* | lectorem *L* 7 inter demonstrandum *erg. L* 8 dignae *(1)* memorari; *(2)* velut *L* 9 inventae. *(1)* Cum hic sit potissimus *(2)* calculi *(a)* non fructu *(b)* fructus, *L* 10 perpetuum *(1)* utilis et valit⟨urus⟩ *(2)* valit⟨uri⟩ *L* 13 possum. *(1)* Ita enim infinitis *(2)* Hoc *L* 13 sine *(1)* usu *(2)* ratione *L* 15 pauca *(1)* aliunde *(2)* vel *(3)* lemmata, aut | theoremata *erg.* | alibi demonstrata, *(a)* | adhibeat *nicht gestr.* | *(b)* reqvirat, tum *(aa)* maxime ea *(bb)* vero *L* 16 brevitate *(1)* lineis *(2)* per *L* 16 possit *(1)* exhiberi. *(2)* absolvi. Ibi *(a)* vero *(b)* ergo *L* 21 f. magis *(1)* admiremur *(2)* suspiciamus *(a)* Idqve *(b)* Eoqve *L* 23 calculi *(1)* compendia *(2)* vestigia *L*

viris notae, apud vulgus Geometrarum erroris suspicione cauturae non fuissent; quod nunc minime metuendum est, rebus in clariore luce collocatis.

Caeterum cum soleant homines suam quisque artem plus aequo admirari, mirum non est analyticos ex adverso linearium demonstrationum usum elevasse. Neque enim nisi magnis viris et ad omnia paratis competit aeque de rebus omnibus judicia ferre. Ex quibus Schotenius eo usque provectus est, ut libros theorematum inutiles pronuntiaret, cum inquit, eadem suo quisque marte per calculum investigare possit, intellectis semel *Elementis* Euclidis, et praeceptis Analyticis. Itane vero? Tu admiranda Archimedis inventa, et pulchra Apollonii theoremata, et exquisitas Pappi *Collectiones* inutiles pronuntias. Poteras eodem jure dicere, praeter Euclidem et Cartesium, et tuos in eum *Commentarios* omnes de Geometria libros supervacuos esse. Ego vero ita sentio hunc potissimum esse calculi fructum, ut propositiones, quae nihil aliud quam elegantia calculi compendia sunt, in aerarium publicum referantur, quo aliis imposterum quaerendi labor minuatur. Quare nec Cartesii consilium probo quod ipsum scio non secutum, qui duobus tantum uti suadebat Theorematis; (triangulorum similium latera proportionalia esse; et in Triangulo rectangulo quadratum hypotenusae quadratis duorum reliquorum laterum aequari). Nam expertus scio, ad ingentes saepe calculos, reductu difficiles attolli, quae per inventa theoremata nullo negotio conficiuntur. Adde quod saepe ne in mentem quidem nobis veniret, ejusmodi propositiones quaerere, quarum ubi aliis inventae sunt demonstrationem postea vel calculo vel lineis investigare plerumque non arduum est.

1 Geometrarum *erg. L* 4 adverso *(1)* linearis Geometriae usum *(2)* linearium *L* 4 f. Neqve … ferre *erg. L* 8 Itane vero? *erg. L* 10 dicere, *(1)* | post *nicht gestr.* | *(2)* praeter *L* 11 libros *(1)* inutiles *(2)* supervacuos *L* 12 ut *(1)* elegantia ca *(2)* propositiones *L* 13 referantur *(1)*. Ita *(2)*, qvo *L* 15 uti *(1)* se ajebat *(2)* suadebat *L* 15 latera *(1)* homologa *(2)* proportionalia *L* 17 ad *(1)* immensos saepe *(2)* ingentes saepe calculos *(a)* assurgi, *(b)*, reductu *L* 18–20 Adde … investigare *(1)* saepe nec *(2)* plerumqve … est *erg. L*

7 inquit: Vgl. z. B. Fr. van Schooten, *Praefatio ad lectorem*, in: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I Bl. 2 r° („Nec enim video, quid impraesentiarum, post mediocrem in Arithmeticae et Geometriae elementis exercitationem, calculique, eadem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere possit, quo minus inoffenso pede ad hanc Geometriam accedat“), sowie Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 206 f. 15 duobus … Theorematis: R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 461 (*DO* IV S. 38); bei den Theoremen handelt es sich um Eukleides, *Elementa*, I, 47 u. VI, 4.

Ego igitur media sententia antecedendum arbitror; egregias propositiones in literas referri, et quod hinc sequitur, ubi res postulat adhiberi debere arbitror. Proposito problemate primum elementa experiunda, antequam ad calculum accedatur qui non nisi difficilioribus i n v e n i e n d i s servari debet. De demonstrationibus jam inventorum si literalis pariter ac linearis, suas quaeque peculiares elegantias habeat, posse utramque exhiberi, quemadmodum nihil prohibet, duas ejusdem theorematis dari demonstrationes lineares; si alterutra earum elegans videatur, altera simplicem calculi tramitem sequatur praeferri debere. Si neque literae neque lineae quicquam singulare exhibeant inter demonstrandum; literales demonstrationes lectori, lineares scriptori utiliores.

Exemplum subjiciam unicum a me observatum: Dixerat Cartesius ex calculo sibi constare: si Circulus parabolam secet, demissarum ex punctis intersectionis in axem parabolae perpendicularium ab uno latere summam; summae perpendicularium ab altero latere aequari. Schotenius ut theorematis veritatem calculo investigaret, tres credo paginas in suis *Commentariis* complevit; hoc cum animadvertisset Jac. Gregorius Scotus, demonstrationem investigavit Geometricam sic satis elegantem. Ego vero reperi, per analysin demonstrari posse tribus verbis: eademque opera etiam detexi qua ratione Theorema tam elegans invenerit Cartesius, et qua ratione innumera alia similia in aliis curvis, sese

1 f. egregias *(1)* theoremata *(2)* propositiones in literas *(a)* referendae *(b)* referri *L* 2 f. postulat *(1)* adhibendas cum fructu *(2)* adhiberi *(a)* posse *(b)* debere arbitror. *(aa)* De qvo *(bb)* De demonstrationibus | ⟨autem jam inventorum⟩ *erg.* | cum ita sentio *(aaa)* literalem *(bbb)* si literalis pariter ac linearis *(cc)* proposito *(aaa)* ad inveniendum *(bbb)* problemate *L* 8 neqve *(1)* calculus *(2)* literae *L* 9 demonstrandum; *(1)* calculum *(2)* literas *(3)* literales *L* 11 f. secet *(1)* in punctis *(2)* demissarum *(a)* in *(b)* ex . . . perpendicularium *(aa)* summam, unius *(bb)* ab uno . . . ab *(aaa)* uno *(bbb)* altero *L* 13 ut *(1)* theorema hoc *(2)* theorematis *L* 15 Geometricam *(1)* prolixius *(2)* non admodum *(3)* sic satis *L* 16 ratione *(1)* prob *(2)* Theorema *L* 17 curvis, *(1)* inter se *(2)* sese *L*

10 Dixerat: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 92. 14 complevit: Vgl. Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 330–343. 15 demonstrationem: Vgl. J. Gregory, *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 70, S. 130–132. 15 reperi: Ein kurzer algebraischer Beweis macht sich zunutze, dass sich die Schnittpunkte von Kreis und Parabel über eine Gleichung 4. Grades, bei welcher der kubische Term fehlt, berechnen lassen. Aus der Multiplikation der Linearfaktoren aber ergibt sich, dass der Koeffizient dieses kubischen Terms gleich der negativen Summe der vier Wurzeln dieser Gleichung ist, womit diese gleich Null sein muß. Bei seinen Überlegungen zur *constructio aequationum* stellt Leibniz eine Gleichung für die Schnittpunkte von Kreis und Kegelschnitt auf (vgl. VII, 7 N. 7 S. 43–48), von welcher die für den genannten Beweis benötigte ein viel einfacherer Spezialfall ist.

invicem aut circulum secantibus, aliis rectis in axis locum cum opus est adhibitis, concinnari possint, quod neque Schotenius calculo suo, neque Gregorius linearum ductu praestiterint. Quod si ergo haec propositio in aerarium theorematum referri deberet: nemo prudens in dubium revocabit; analyticam demonstrationem caeteris praestare: cum et inventi rationem detegat. Imo si mihi id negotii datum esset, ego problematis instar ita conciperem: Datis duabus curvis se secantibus, invenire lineam rectam in quam demissae ex punctis intersectionis unius lateris angulo dato, simul sumtae; sint rectis alterius lateris simul sumtis aequales. Cujus problematis solutio generalis ostendet in parabola, rectam quaesitam esse ipsum axem; et si angulus datus sit rectus. Hoc ergo theorema, problematis generalis non nisi corollarium erit.

Quoniam ergo de propositionum Geometricarum Aerario, mentio semel iterumque hic incidit: adjiciam paucis: inter potissima Mathematicae doctrinae desiderata a me censeri, librum, omnes propositiones geometricas elegantes hactenus inventas, quanta licet brevitate demonstratas, ipso demonstrandi ordine continentem. Demonstrationes autem tales esse debere, cum licet, ut eadem opera inveniendi rationem ostendant. Usus ingens foret tum ad inveniendum, (theorematis praeclaris omnibus velut in conspectu positis), tum ad demonstrandum. Multa enim apud Archimedem et ejus commentatorem Eutocium; apud Apollonium, Pappum; et alios veteres praeclare demonstrantur. Adjici-

1 locum *(1)* exhibitis, *(2)* exhiberi *(3)* cum *L* 2 ductu *(1)* invenissent *(2)* praestiterint *L* 5 ego *(1)* theorematis *(2)* problematis *L* 6 duabus *(1)* curvis *(2)* curvis se *(3)* lineis *(4)* curvis *L* 6 f. lineam *(1)* in qvam ductae ex uno latere ex punctis intersectionis rectae angulo dato *(2)* rectam *L* 9 et *(1)* angulum esse rectum. d *(2)* si angulus *L* 12 potissima *(1)* scientiae huius *(2)* Mathematicae | doctrina *ändert Hrsg.* | desiderata *L* 13 geometricas *erg. L* 14 demonstratas | continentem *streicht Hrsg.* | , ipso *L* 15 ostendant. *(1)* Possis Euclidis continuationem appellare *(2)* Usus *L* 18–83,3 demonstrantur. *(1)* Adjecta sunt insignia qvaedam theoremata *(2)* Adjectae sunt insignes propositiones *(3)* Adjiciendae . . . a *(a)* Galilaeo *(b)* Commandino, | Clavio *erg.* | . . . | Stevino *erg.* | . . . Gregorio a S. V. *(aa)* Robervall *(bb)* Cartesio *(aaa)* Robervallio *(bbb)* Fermatio . . . | Pascalio *erg.* | . . . | Slusio, Robervallio *erg.* | | Huddenio *erg.* | . . . Heuratio | , Huddenio *streicht Hrsg.* | ; aliis; *L*

17 Archimedem: Vgl. etwa Archimedes, *De sphaera et cylindro*; Ders., *Dimensio circuli*; Ders., *De spiralibus*; Ders., *De planorum aequilibris*; Ders., *De conoidibus et sphaeroidibus*; Ders., *De planorum aequilibris*; Ders., *Quadratura parabolae.* 18 Eutocium: Vgl. Eutokios, *Commentarii in libros Archimedis.* 18 Apollonium: Vgl. Apollonios, *Conica.* 18 Pappum: Vgl. Pappos, *Mathematicae collectiones.*

endae sunt insignes propositiones a Commandino, Clavio, Vieta, Stevino, Luca Valerio, Galilaeo, Guldino, Cavalerio, Gregorio a S. V., Cartesio, Fermatio, Torricellio, Pascalio, Hugenio, Slusio, Robervallio, Huddenio, Wrenno, Wallisio, Heuratio; aliis; quibus saepe lubens uterer inter demonstrandum compendii causa, nisi a ratione alienum videretur; lectorem unius tuae demonstrationis intelligendae causa ad tot alios autores non omni-

---

1 Commandino: Federico Commandino besorgte eine Anzahl lateinischer Übersetzungen von mathematischen Werken der griechischen Antike, die er zum Teil auch kommentierte. 1 Clavio: Gemeint ist wohl Clavius' Euklidausgabe *Elementorum libri XV*, 4. Ausg. 1607 [Marg.]. Clavius war aber auch Autor eines eigenständigen, von Leibniz rezipierten Werkes zur Geometrie; vgl. Chr. Clavius, *Geometria practica*, 1604. 1 Vieta: Vgl. Fr. Viète, *Supplementum geometriae*, 1593 (*VO* S. 240–257); Ders., *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593 (*VO* S. 347–435); Ders., *Ad Adr. Romani problema responsum*, 1595 (*VO* S. 305–324). 1 Stevino: Vgl. S. Stevin, *Problematum geometricorum libri V*, 1583, sowie die von Albert Girard herausgegebene und kommentierte Werkausgabe *Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin*, 1634, Tl. III, *La practique de géometrie* (S. 341–432).
1 Luca Valerio: Vgl. L. Valerio, *De centro gravitatis solidorum*, 1604; Ders., *Quadratura parabolae*, 1606. 2 Galilaeo: Vgl. G. Galileo, *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, 1638 (*GO* VIII S. 39–318); M. Mersenne, *Les nouvelles pensées de Galileo*, 1639. 2 Guldino: Vgl. P. Guldin, *Centrobaryca*, 1636–41. 2 Cavalerio: Vgl. B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635; Ders., *Exercitationes geometricae*, 1647. 2 Gregorio a S. V.: Vgl. Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647. 2 Cartesio: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I. 2 Fermatio: Zu Lebzeiten veröffentlichte Pierre de Fermat selbst keine seiner mathematischen Schriften. Ohne ihn als Autor zu nennen, wurde 1660 *De linearum curvarum* publiziert. Eine Reihe seiner Manuskripte, deren Ergebnisse Pariser Mathematikern oftmals schon seit längerem bekannt waren, wurde posthum in P. de Fermat, *Varia opera*, 1679 [Marg.], abgedruckt. Darunter waren auch solche zur Geometrie, etwa die 1657–58 entstandene Schrift *De solutione problematum geometricorum* (*Varia opera* S. 110–114, *FO* I S. 118–132). 2 Torricellio: Vgl. E. Torricelli, *Opera geometrica*, 1644 (*TO* I, 1 S. 1–230 u. *TO* I, 2 S. 101–232). 2 Pascalio: Vgl. Bl. Pascal, *Essay pour les coniques*, 1640 (*PO* I S. 252–260); Ders., *Histoire de la roulette*, 1658, lat.: *Historia trochoidis*, 1658 (*PO* VIII S. 195–223); sowie die unter dem Pseudonym Amos Dettonville verfassten *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*, 1658–59 (*PO* VIII S. 323–384 u. IX S. 1–149). 3 Hugenio: Vgl. etwa Chr. Huygens, *Theorema de quadratura hyperbolae, ellpsis et circuli*, 1651 (*HO* XI S. 281–337); Ders., *De circuli magnitudine inventa*, 1654 (*HO* XII S. 113–181); Ders., *Réduction de la rectification de la parabole*, 1657 (Ms.); Ders., *Recherches sur les propriétés géometriques de la cycloide*, 1658 (Ms.); Ders., *Recherches sur la théorie des développées*, 1659 (Ms.) (*HO* XIV S. 387–405); Ders., *Demonstratio regulae de maximis et minimis*, 1667 (Ms.) (*HO* XX S. 229–241); Ders., *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*, 1667 (Ms.) (*HO* XX S. 243–255); Ders., *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.], S. 42–58 (*HO* XVIII S. 158–187).
3 Slusio: Hier dürfte neben dem *Mesolabum* von 1668 insbesondere Sluses Tangentenbrief in den *Philosophical Transactions* von 1672/73 gemeint sein. 3 Robervallio: Bereits M. Mersenne, *L'optique et la catoptrique*, 1651, S. 117, hatte Gilles Personne de Roberval als „Nostre Geometre“ bezeichnet und dabei dessen geometrische Arbeiten über die Oberflächen verschiedener Brennspiegel genannt. Leibniz erwähnt diese Bemerkung Mersennes im Oktober 1674 (vgl. VII, 5 N. 74 S. 91).

bus obvios remittere: ita cogimur saepe inviti, eadem denuo demonstrare, taedio nostro pariter et lectorum peritorum. Cui malo mederetur liber si quis producet aliquando quo continuarentur quodammodo Euclidis *Elementa*, qui versaretur in omnium manibus, et quem a doctis accurate examinatum, tuto postea allegari posse constaret. Et tale quiddam ab Academia Scientiarum Regia expectare videtur orbis, quod ad Gloriam ejus dudum florentem magnopere pertineret. Quanquam autem Euclidis exemplo doctrinam Analyticam generalem seu de rationibus, doctrinam de magnitudinum commensurabilitate aut incommensurabilitate seu de numeris, ac denique doctrinam de spatiis et de motibus quibus spatia aut eorum partes designantur, quae mere Geometrica est comprehendi uno opere necesse sit, scientiae enim istae non nisi ab ignaris divellerentur: ausim dicere duabus artibus, scilicet novorum quorundam symbolorum ad Geometricas designationes accommodatione, et multorum casuum particularium revocatione ad propositiones generales, effici posse, ut formae quadratae mediocris (in quarto vocant) librum non exeat volumen nulli facile praestantia et fructu cessurum. Aequitatis etiam erit cuilibet propositioni adscribi autorem suum si modo extra controversiam sit quod unum saepe pretium laboribus suis postulant Viri summi, et tum inventa tum inventores ab oblivione et plagiariorum malitia vindicari; et thesaurum quendam publicum condi, qui novis quotidie eruditorum collationibus locupletetur.

5 qvod *(1)* ut plurimum *(2)* ad Gloriam *L* 7 Analyticam *(1)* geometri *(2)* generalem *L* 8 f. et de *(1)* spatiorum mutationibus seu motibus *(2)* motuus *(3)* motibus *L* 11 artibus *(1)* altera *(2)* scilicet *L* 12 accommodatione, *(1)* altera *(2)* et *(a)* part *(b)* multorum *L* 15 adscribi *(1)* inventorem *(2)* autorem *L* 15 si modo ... sit *erg. L* 17 et plagiariorum malitia *erg. L*

11,3 Huddenio: Die Tangentenmethode von Hudde findet sich in J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. Huddes geometrische Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades mit sich abwechselnden Vorzeichen gibt Schooten in seinem Kommentar zu Descartes' *Geometria* wieder; vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I, S. 325–328. **11,3** Wrenno: Vgl. Chr. Wren, *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici*, 1669. Ergebnisse von Wren wurden auch publiziert in J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 70–76 (*WO* I S. 533–537), sowie in Ders., *Mechanica*, 1670–71, S. 556–567 (*WO* I S. 929 bis 938). **11,3** Wallisio: Vgl. J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659 [Marg.] (*WO* I S. 489–569); Ders., *Opera mathematica*, 2 Bde, 1656–57; Ders., *Mechanica*, 1670–71 (*WO* I S. 570–1063). **11,3** Heuratio: Vgl. H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520.

12. GENERATIO CIRCULI
[November 1675 – Januar 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 4 IV 13c Bl. 33. 1 Streifen ca 20 × 5 cm. 3 Z. unten auf Bl. 33 r°. Darüber die Aufzeichnung VI, 3 N. 29_1. Der Streifen hing ursprünglich zusammen mit LH 35 X 8 Bl. 1 (= VII, 5 N. 57).
Cc 2, Nr. 1405 tlw.

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte kurz nach dem von den Herausgebern auf November 1675 – Januar 1676 datierten VII, 5 N. 57 entstanden sein.

Videtur simplicius intelligi generatio circuli quam rectae. Sit figura quaedam certo sui puncto manens in certo loco, eo modo mutans locum, ut sibi semper ipsi similis appareat respectu eorundem extra ipsum, certum aliquod punctum in ea sumtum describet arcum circuli. Imo ♃. Opus ut sit plana figura. ♃.

9 Sit *(1)* Linea rigida qvaecunqve *(2)* qv *(3)* figura *L* 11 respectu ... ipsum *erg. L* 12 sit *(1)* planum *(2)* plana *L*

13. CYLINDER SINUUM EX APPLICATIS PARABOLICIS
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 42 V Bl. 7. Ca $\frac{2}{3}$ eines Bl. 2°, von dem die linke untere Ecke abgeschnitten und die rechte untere Ecke ausgerissen sind. 9 Z. auf Bl. 7 r°. Darunter eine Aufzeichnung zur Rechenmaschine (Druck in Reihe VIII vorgesehen). Bl. 7 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Ende 1672 bis Herbst 1673 nachgewiesen. Die inhaltlichen Bezüge zu VII, 4 N. 26 u. VII, 4 N. 31 deuten auf eine Entstehung im Sommer 1673 hin.

$$\underset{\substack{\wedge\\ x}}{\sqrt{ax}} \frown \underset{\substack{\wedge\\ a-x}}{\sqrt{ax}} \text{ vel } \sqrt{ax} \frown \sqrt{a^2-ax} = \sqrt{a^3x-a^2x^2}, \smile a = \sqrt{ax-x^2}. \text{ Sinus.}$$

Ergo parabolicae applicatae in se inverse ductae cylindro sinuum aequantur.

$$a^2-,\ \underbrace{a-x\ \square}_{a^2+x^2-2ax}. \text{ fiet} a^2-a^2-x^2\ -2ax.$$

$$\sqrt{\frac{\beta a}{\gamma}\underset{\substack{\wedge\\ \frac{\beta a}{\gamma}-x}}{x}} = \sqrt{\frac{\beta^2a^2}{\gamma^2}-\frac{\beta ax}{\gamma}}_{[,]} \frown [\sqrt{\ }]ax = \sqrt{\frac{\beta^2a^3x}{\gamma^2}-\frac{\beta a^2x^2}{\gamma}}. \text{ Divisum per } a \text{ dat}$$

$$\sqrt{\frac{\beta^2 a}{\gamma^2}}-\frac{\beta}{\gamma}x^2 = z \text{ applicata Ellipseos quia } z^2 = \frac{\beta^2a}{\gamma^2}-\frac{\beta x^2}{\gamma}. \text{ Ergo } \frac{\beta z^2}{\gamma} = v^2 = \frac{\beta a}{\gamma}-x^2.$$

---

9 $\smile a$: Leibniz rechnet hier und in der Folge fortlaufend. 11 Ergo ... aequantur: Vgl. VII, 4 N. 26 prop. 2 S. 426 sowie VII, 4 N. 31 S. 550. 12 $-2ax$: Richtig wäre $+2ax$. 16 $\sqrt{\frac{\beta^2a}{\gamma^2}}$: Richtig wäre $\sqrt{\frac{\beta^2ax}{\gamma^2}}$. Leibniz rechnet konsequent weiter und setzt dann irrtümlich eine Gleichung für $\frac{\beta z^2}{\gamma}$ statt für $\frac{\gamma z^2}{\beta}$ an. Die Versehen beeinträchtigen die Rechnungen, jedoch nicht die allgemeine Aussage.

14. DE MODIS EXPRIMENDI SERIES
[Herbst 1672 – Anfang 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 3 Bl 8. 1 Zettel ca. 19,3 × 5,8 cm. 1 S.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Zum „fundamentum" einer Folge vgl. VII, 3 N. 1, 4, 6, 8. **[noch]**

D e m o d i s e x p r i m e n d i s e r i e s , s e u d e e a r u m r e g u l i s f u n d a m e n t a l i b u s

Progressiones aliae sunt fundamenti simplicis, aliae fundamenti compositi, fundamentum simplex est: cum dato termino uno, inveniri potest sequens, fundamentum compositum est, cum opus est pluribus terminis antecedentibus ad inveniendum sequentem; et prout multis terminis opus est, fundamentum est compositum primi, secundi[,] tertii gradus. Fundamentum maxime compositum est, cum opus est omnibus terminis praecedentibus cognitis, ad inveniendum sequentem.

9 inveniri *(1)* possunt seqventes *(2)* potest *L*

15. EXEMPLA AEQUATIONIS QUADRATICAE ET BIQUADRATICAE
[10.–11. Oktober 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 20 × 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca 17,5 × 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca 19,5 × 4 cm. 9 Z. gegenläufig auf Bl. 408 v°. Die ersten 8 Zeilen sind vom Schluss des Textes von VII, 7 N. 55 überschrieben, die Zahlenbeispiele am Ende von Z. 20 stehen unterhalb des herausgeschnittenen Streifens. — Auf dem Rest des Trägers N. 16 sowie VII, 5 N. 33; VII, 6 N. 10; VII, 7 N. 55.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Bei dem vorliegenden Stück handelt es sich um Notizen, die Leibniz vor N. 16 und vor VII, 7 N. 55 verfasste. Sie sind dem Duktus nach vermutlich zusammen mit den Aufzeichnungen von VII, 6 N. 10 entstanden, die wahrscheinlich nach VII, 5 N. 32 vom 10. Oktober 1675 und vor dem auf den 11. Oktober 1675 datierten VII, 5 N. 33 verfasst sind.

$$x^4 \boxed{+px^3} + qx^2 + rx + s \sqcap 0.$$

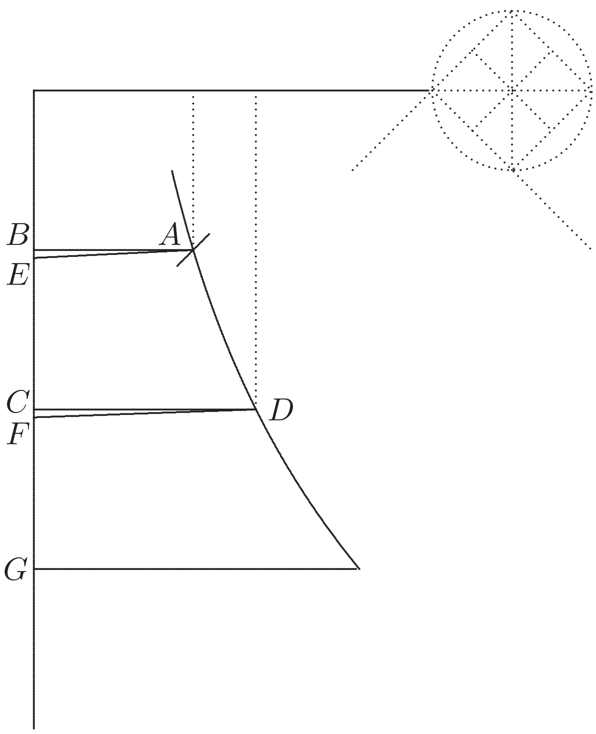
$$\begin{array}{llll}
x - 3 \sqcap 0 & x - 3 \quad \sqcap \quad 0 & x + 4 & \\
\underline{x + 4 \sqcap 0} & \underline{x + 4 \qquad\qquad} & x + 4 \sqcap 0 & \\
 & x^2 - 3x & \quad x \sqcap -4 & \\
x + b & \underline{\quad + 4x - 12} & & \\
\underline{x + c \qquad} & \underline{x^2 + 1x - 12 \sqcap 0} & x^2 \; + 1x \sqcap 12 & \\
x^2 + bx & \langle 9 \rangle + 3 \; - 12 \sqcap 0 & \dfrac{x+1}{\langle 1 \rangle} \sqcap \dfrac{12}{x} & \dfrac{-4+1 \sqcap -3}{1} \sqcap \dfrac{12}{-4} \qquad \dfrac{3+1}{1} \sqcap \dfrac{12}{3} \\
\quad + c_{\bullet} \; + bc & & &
\end{array}$$

14 *Darüber:* $p \sqcap s \sqcap -10$

16. INSTRUMENTUM AD CONSTRUCTIONEM AEQUATIONUM
[Mitte bis Ende Oktober 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 20 × 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca 17,5 × 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca 19,5 × 4 cm. 7 Z. auf Bl. 408 r°. — Auf dem Rest des Trägers die Aufzeichnung zur Gleichungslösung N. 15 sowie VII, 5 N. 33; VII, 6 N. 10; VII, 7 N. 55.
Cc 2, Nr. 1069

Datierungsgründe: Bei dem vorliegenden Stück handelt es sich um Notizen, die Leibniz nach den in N. 15 und in VII, 6 N. 10 gedruckten Aufzeichnungen und vermutlich kurz nach der auf den 11. Oktober 1675 datierten Studie VII, 5 N. 33 verfasste. Sie ist vor VII, 7 N. 55 geschrieben.



[*Fig. 1*]

12 *Über der Figur:* $x^3 - px^2 \sqcap qx + r$

Ope catenularum delicatarum, et lineae logarithmicae in materia solida descriptae in qua assurgere aliquid ac descendere possit, possunt construi omnes aequationes, catenulae ibunt $BAECDFG$. Sed pro exactioribus operationibus adhibendae essent regulae. Credo tamen catenulas bene elaboratas satis aptas tolerabilibus operationibus, imo in magno instrumento etiam exactis.

Forte hoc instrumento solvi poterunt etiam aequationes plurium incognitarum, ut: $x^2 + y^2 \sqcap c$[,] $+ cy + bx^2 + dx \sqcap e$. $\mathfrak{S}$.

7 $\sqcap$ e. *(1)* $\mathrm{x}^2 - \mathrm{c}$ *(2)* $\mathrm{x} \sqcap \dfrac{\mathrm{c} - \mathrm{y}^2}{\mathrm{x}}$. et $\mathrm{x} \sqcap \dfrac{\mathrm{e} - \mathrm{cy}}{\mathrm{bx} + \mathrm{d}}$ *(3)* $\mathfrak{S}$ *L*

17. DE CONOEIDIBUS
[1673 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VII 1 Bl. 80. 1 Bl. 8°. 1 S.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: [noch]

Trouver une ligne, *surface plane, courbe, solide homogene, à une ligne*[,] *surface, solide. Par exemple les Elemens du Conoeide Parabolique sont en raison des appliquées du Triangle*. Eodem modo inveniri potest solidum, cujus Elementa seu plana secundum axem sint in ratione applicatarum hyperbolae, seu in ratione altitudinum reciproca. Hoc erit Conoeides Hyperboloeidicum generatum esse rotatione circa suum axem figurae, cujus applicatae sunt in ratione altitudinum reciproca subduplicata, nam harum applicatarum quadrata, erunt in ratione altitudinum reciproca. Ergo et circuli applicatarum rotatione facti. Habemusque sic Methodum generalem solvendi hoc problema: Datae figurae planae conoeides proportionale exhibere. Nimirum Figura plana cujus Elementa sint in subduplicata ratione figurae planae datae, rotetur circa suum axem; et Conoeides productum erit figurae planae datae proportionale. Hinc habemus Methodum datae cuilibet figurae planae exhibendi solidum proportionalem. Superficiem autem conoeidicam datae figurae proportionalem exhibemus ipsius figurae datae descripto Conoeide. Itaque etiam cuilibet figurae planae superficiem curvam proportionalem exhibere possumus. Lineae etiam cuilibet proportionalem figuram curvam exhiberi posse constat. Hoc autem conoides secando aliter habebuntur aliae series quae ad priorem reducentur.

6 Trouuer *(1)* un solide homogene à un plan. *(2)* | une *erg. Hrsg.* | ligne *L*   7 sunt *L ändert Hrsg.*

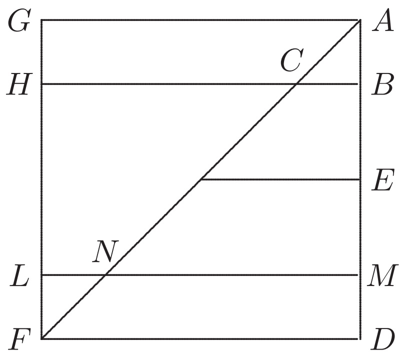
---

18 exhibemus: Die Mantelfläche des Konoids ist nicht proportional zur Fläche unter der erzeugenden Kurve. Damit ist auch die Folgerung unbegründet.

18. QUADRATURA PER FIGURAE COMPLEMENTUM
[Herbst 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VII 1 Bl. 25. 1 Zettel von max. 19,4 × 4,3 cm. 10 Z. auf Bl. 25 r°. Am unteren Rand Gleichung mit binomischer Formel ohne Bezug zum Text: $y^3 \sqcap x^3 + a^3 + 3a^2x + 3ax^2$.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: [**Wz-Rest; noch**]

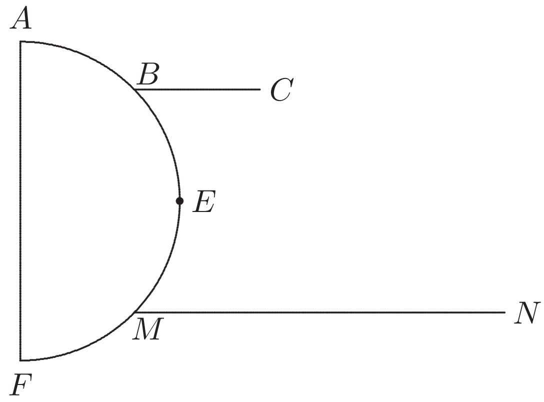


[*Fig. 1*]

Trianguli quaeritur area, seu summa omnium x. seu summa omnium AB. seu summa omnium BC. Hoc ut fiat necesse est ut in considerationem intret etiam finitam esse lineam ABD. trianguli altitudinem. Bisecetur in E. compleatur rectangulum $ADFG$, id est quadratum GA, quia supposui $AB \sqcap BC$. Producatur BCH dum ipsi FG occurrat in H. Eodem modo ducatur MNL, posito $DM \sqcap AB \sqcap GH$ erit $HC \sqcap MN$. et $BC \sqcap LN$. Ergo $BC + MN \sqcap GA$. et in quibuslibet aliis punctis binis simul semper fiet GA. Ergo ubi ad E ventum erit, cessabitur, et fiet rectang. $GAE \sqcap$ Triangulo ADF.

10 omnium | AC *ändert Hrsg.* | Hoc *L* 14 fiet | GH *ändert Hrsg.* | ergo *L*

9 Trianguli quaeritur area: Vgl. VII, 1 N. 36 S. 227 f. sowie VII, 3 N. 19 S. 246.



[*Fig. 2*]

Haec et cycloeidi et infinitis aliis idgenus applicari possunt si AB arcus $\sqcap$ applicatae BC, et sit infra portio priori aequalis, et similis FME $\sqcap$ ABE et MN $\sqcap$ arcui AEM erit rursus $MN + BC$ $\sqcap$ curvae Totae.

2 cycloeidi: Vgl. H. FABRI, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 382 f. und die zugehörige Figur 24 auf Tafel 3 [Marg.] (Vermerk in VII, 4 N. 1 S. 21) sowie VII, 5 N. 74.

19. LALOUVERAE SPECULATIONES GEOMETRICAE 1673

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III A 22 Bl. 5. 1 Zettel max. 18,5 × 3,5 cm. 5 Z. auf Bl. 5 v°. Bl. 5 r° leer.

L a l o u v e r a , nepos Jesuitae, qui in Helvetia nunc est cum Domino de S. Romain, Legato Regis Franciae 1673, habet speculationes Geometricas, quibus promittit omnia revocare ad demonstrationes faciles et manifestas.

6 Legato ... 1673 *erg. L*

5 L a l o u v e r a : S. de La Loubère. 5 Jesuitae: A. de La Loubère. 6 Legato: Der Gesandte M. de Harod de Senevas, Marquis de Saint-Romain, war am 18. November 1672 in Solothurn eingetroffen. 6 speculationes: vgl. S. De La Loubère, *De la résolution des équations, ou de l'extraction de leurs racines*, 1732.

20. TABULA PYTHAGORICA IN MANU NOSTRA INSCRIPTA
[nach Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 86. 1 Streifen von ca 18,5 cm × 7 cm. 1 S. auf Bl. 86 v°, Vorderseite leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: **[noch]**

Tabula pythagorica in manu nostra inscripta

Das Einmahl eins oder die Multiplication in den Händen: Zwey Zahlen v. g. 7, et 8. deren keine großer als 10, sind gegeben in einander zu multipliciren. Thue die finger alle nieder, oder mache beyde hände zu. Alsdann hebe an der einen hand soviel finger auff, als die differenz der einen zahl 7 von 10 macht v. g., 3 an der anderen hand, soviel als die andre, 8 ⟨differt⟩ v. g. 2. Zehle alle finger so nieder, sind 5, multiplicire die differentien in einander sind, 6, das productum 56. Dieses muste auch angehen zum großen einmahl eins.

$$\begin{array}{llllll} 10-7 \sqcap 3. & 10-8 \sqcap 2. & & 10-a-b & & \\ 10-a & 10-b & & \underline{\qquad\qquad 10} & + & 10-a \frown 10-b \\ & ab & \sqcap & 100-10a-10b & + & 100-10a-10b+ab \end{array}$$

Unde patet difficultatem transferri a multiplicatione numerorum datorum ad mutliplicationem differentiarum a 10; ideoque non habere usum nisi quando numeri dati notabiliter majores sunt differentiis suis, seu valde accedunt ad 10. Idem est de 100. Observatio haec cum sua demonstratione est in *nouveaux Elemens de Geometrie*.

7 Tabula ... inscripta *erg. L*   14 f. eins. | 44, $\frown$ 43, $100-44 \sqcap 56$, $100 \frown 43 \sqcap 55$ *gestr.* | $10-7 \sqcap 3.$ *L*

15–17 Leibniz stellt das Verfahren auf die Probe, indem er das Beispiel 7×8 verallgemeinert. Allerdings macht er einen Fehler an der Zehnerposition: Es müsste in Z. 15 nicht $10-a-b$, sondern $10-(10-a)-(10-b)$ heißen. Nach Multiplikation mit 10 ergäbe sich in Z. 17 statt $100-10a-10b$ dann $-100+10a+10b$, und nach Addition von $100-10a-10b+ab$ bliebe dann ab übrig, was korrekt ist.   21 *nouveaux*: [Arnauld, A.], *Nouveaux Elemens de Geometrie*, 1667, liv. I, § LXIII, S. 14 f.

21. CALCULUS PER DIVISIONES
29. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 13 Bl. 19. Ca. $\frac{1}{3}$ Bl. 2°. 1 S.
Cc 2, Nr. 1093

29. Octob. 1675.

C a l c u l u s p e r d i v i s i o n e s l o c o m u l t i p l i c a t i o n u m $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ l o c o $\frac{ac}{b}$

Observatio venit in mentem, qua possint omnia reduci ad meros terminos simplices continuarum divisionum, cum contra reducere soleamus omnia ad terminos continuarum multiplicationum.

Sit: $\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{\frac{d}{e}}{f}+\frac{\frac{g}{h}}{l} \sqcap x$. Reducamus. Multiplicentur omnes termini per cfl. fiet: $\frac{afl}{b}+\frac{cdl}{e}+\frac{cgl}{h} \sqcap cflx$.

Rursus multiplicetur producta aequatio per beh. fiet: $aeflh+bcdhl+bcegl \sqcap bcefhlx$. Prior autem expressio aptior ad constructiones lineares.

Sed video id ineptum esse, si hoc modo explicetur, in $\frac{\frac{a}{b}}{c}$. ipsam c. dividere ipsam $\frac{a}{b}$. Tunc enim $\frac{\frac{a}{b}}{c} \sqcap \frac{a}{bc}$. Itaque sic explicabimus quasi esset: $\frac{a}{\frac{b}{c}}$. Nam et continuari posset hoc modo $\frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}}$. Sed sufficiet nos uti his tribus, nam in rei veritate $\frac{a}{\frac{b}{c}} \sqcap \frac{ca}{b}$. et vero statim

6 C a l c u l u s . . . l o c o $\frac{ac}{b}$ *erg. L* 10 Sit: *(1)* $\frac{\frac{b}{c}}{d}+\frac{e}{f}$ *(2)* | $\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{\frac{d}{e}}{f}+\frac{\frac{g}{h}}{l}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ x *L*
10 per | dfl. *ändert Hrsg.* | fiet *L* 13 prior . . . lineares *erg. L*

11 $+\frac{cgl}{h}$: Richtig wäre $+\frac{cfg}{h}$ und in der folgenden Zeile $+bcefg$ statt $+bcegl$. Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

reduci potest ut $\begin{array}{c}a\\ \equiv\\ b\\ =\\ c\\ \hline d\end{array}$ idem est quod $\dfrac{ac}{bd}$. Interim hoc modo exprimendo evitaremus omnes multiplicationes, sive sic diceremus $\begin{array}{c}a\\ =\\ b\\ -\\ c\end{array}$ sive sic $\begin{array}{c}a\\ \hline b\\ =\\ c\end{array}$. Quorum illud $\dfrac{ac}{b}$, hoc $\dfrac{a}{bc}$.

Verum jam hinc ostendit natura rerum non divisionem sed multiplicationem esse naturalionem et aptiorem, quia in ipsa nullae lineoleae necessariae ad exprimendam varietatem. Interim leges calculi hujusmodi tradi possent nempe si $\dfrac{ac}{b}$ velimus reducere ad meras divisones, non poterimus aliter quam scribendo sic: $\begin{array}{c}a\\ =\\ b\\ -\\ c\end{array}$. et $\dfrac{a}{bc}$ sic: $\begin{array}{c}a\\ \hline b\\ =\\ c\end{array}$.

Sed videndum quid in compositis sive comprehensionibus, ut $b+c \frown b-c \sqcap a^2$. Tunc vero apparet incommoditas divisionis fiet enim $b+c \sqcap \dfrac{a^2}{b-c}$. Sed non potest $\dfrac{a^2}{b-c}$ reduci ad terminos simplices, nisi infinitos; nec potest fieri nominator simplex, quemadmodum numerator.

3 f. esse *(1)* rectam, qvia *(2)* naturaliorem | et *erg. Hrsg.* | aptiorem *L*

22. DE CONDENDIS TABULIS ANALYTICIS
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 440. 1 Bl. 2°. $\frac{2}{3}$ S. auf Bl. 440 r°. Rückseite leer. — Gedr.: *LDK*, 1980, S. 146 f.
Cc 2, Nr. 898

Januar. 1675.

De Condendis Tabulis Analyticis

Tabulas habemus Numerorum, Tabulas literarum, sive Combinationum dedit nemo. Quaerenda ergo ratio est condendi Tabulas ejusmodi, ut earum usus quam latissime pateat.

Pars I^ma de aequationum unius incognitae radicibus indefinitis

Hic recensebuntur ordine omnes aequationes unius incognitae ad gradum usque vicesimum si placet, et quidem generaliter atque indefinite; v. g. pro gradu tertio $x^3 + bx^2 + a^2cx + a^2d \sqcap 0$ cujus radices irrationales generaliter, et una formula (ope signorum ambiguorum) exhiberi potest; idem fiat in caeteris aequationibus omnibus, si modo id fieri potest.

Pars II. de aequationum tractationibus

Methodus investigandi aequationum divisores rationales atque irrationales gradu inferiores Tabulaeque quales Huddenianae. Methodus tollendi ex aequatione terminos quot

8 Numerorum, *(1)* restant Tabulae *(2)* Tabulas *L* 9 ejusmodi, *(1)* qvo *(2)* ut *L* 9–11 latissime *(1)* fundatur *(2)* pateat. *(a)* Pars I$^{\text{ma}}$ de Formulis | sive Aeqvationibus *erg.* | unius incognitae *(aa)* ibi *(bb)* Praemittatur omnibus M e t h o d u s i n v e s t i g a n d i d i v i s o r e s R a t i o n a l e s p a r i t e r a t q v e i r r a t i o n a l e s , | s e d d i m e n s i o n e i n f e r i o r e s ; aeqvationum unius incognitae *nicht gestr.* | *(b)* Pars I$^{\text{ma}}$: de *(aa)* Aeqvationibus *(bb)* Aeqvationum unius incognitae, *(cc)* Aeqvationum *L* 11 f. radicibus | indefinitis *erg.* | *(1)* In *(2)* Hic *L* 13 indefinite; | Earumque *gestr.* | v. g. *L* 13 f. tertio *(1)* x^3+a *(2)* a^4+a^3bx+a^4 *(3)* x^4 *(4)* x^3+ *(a)* ba^2 *(b)* abx^2 *(c)* bx^2+ *(aa)* a^2cx *(bb)* acx | +a^2d *erg.* | $\sqcap$ 0 *L* 15 omnibus, *(1)* Sed qvoniam in altioribus inprimis aeqvationibus *(a)* incognitae *(b)* aeqvationes mult *(c)* radices irrationales multis exprimi possunt modis, suppositis *(2)* si *L* 17 aeqvationum *(1)* form *(2)* tractationibus *L* 19 Tabulaeqve qvales Huddenianae *erg.* *L* 19 Methodus *(1)* transformandi *(2)* tollendi *L*

19 tabulaeque ... Huddenianae: J. Hudde, *De reductione aequationum*, Regel XI, *DGS* I S. 439 bis 458.

licet, praescriptis in eam rem formulis generalibus ut res sine calculo fiat. Methodus reducendi aequationes locorum parium ad proxime inferiores locorum imparium. Methodus efficiendi ut omnium aequationum radices fiant verae; Methodus reducendi aequationes ad alias inferiores ope quarundam intervenientium.
Regulae de aequationum limitibus; de resolutionibus aequationum in Analogias et formularum in portiones, sed hoc ope calculorum qui sequentur seu ope formularum plurium incognitarum. Huc alia id genus.

Pars III. de Aequationibus plurium incognitarum reducendis ad aequationes unius

Sit aequatio ascendens ad solidum incognitum; conjungatur primum cum alia quae non ascendit nisi ad lineam incognitam, deinde cum ea in qua linea et planum incognita, tertio cum pari.

Totum ejusmodi Tabulae condendae artificium in eo consistet, ut sequentia praecedentibus perpetuo juventur; itaque primum simplicibus admodum utendum est aequationibus, sed multis.

2 locorum *(1)* parium *(2)* imparium *L* 3 verae; | item, *gestr.* | Methodus *L* 5 in *(1)* Analy *(2)* Analogias *L* 6 ope *(1)* Rela *(2)* formularum *L* 9 ad *(1)* cubum; *(2)* qvadratum incogni *(3)* solidum *L* 10 ad *(1)* rect *(2)* lineam *L* 10 qva | non nisi *gestr.* | linea *L*

8 De ... unius: vgl. z. B. die Studie *De aequationibus pluribus ad unam reducendis* (VII, 2 N. 77) vom 7. Februar 1676.

23. DISPOSITIONS ET COMPLEXIONS
[April – Juli 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 45–47. $1\frac{1}{2}$ Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 45 r° (= erster bis dritter Ansatz) u. Bl. 47 r° (= vierter Ansatz). Am Rand von Bl. 45 r° sowie auf Bl. 45 v° u. 46 r° befindet sich VII, 3 N. 3; Bl. 46 v° u. 47 v° sind leer. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 6–9. Cc 2, Nr. 519 A, B

Datierungsgründe: Das Stück befasst sich mit der Kombinatorik, wobei es inhaltlich an die *Dissertatio de arte combinatoria* (VI, 1 N. 8) aus dem Jahr 1666 anknüpft: Leibniz greift einige Begriffe jener Arbeit auf, übersetzt sie ins Französische und definiert sie kurz. Sprache und thematischer Ansatz verweisen das Stück also in die frühe Phase seiner Zeit in Paris, womit der *terminus post quem* Leibniz' Ankunft in Paris Ende März 1672 ist. Dass das Stück nicht später als Anfang 1673 entstanden ist, belegt die Symbolverwendung in dem auf demselben Träger niedergeschriebenen Stück VII, 3 N. 3, welches konkrete Beispiele zur gleichen Thematik liefert. In ihm finden sich als Gleichheitssymbole zum einen das moderne Gleichheitszeichen, welches Leibniz spätestens ab Mitte 1674 durch den stilisierten Waagebalken ersetzt; zum anderen verwendet er *f.* als Abkürzung für *facit*. Diese Notation gebraucht er jedoch nur bis Ende 1672 oder Anfang 1673. — Das Papier ist Pariser Provenienz. Sein Wasserzeichen lässt eine weitere Präzisierung der Datierung zu. Das gleiche Zeichen findet sich ansonsten nur noch bei dem Träger von VI, 3 N. 2_2, dem zweiten in einer Reihe von vier auf französisch verfassten Entwürfen zu physikalischen Fragen. Selbst wenn Leibniz den ersten Entwurf N. 2_1 recht bald nach seiner Ankunft in Paris geschrieben haben sollte, kann der zweite Entwurf kaum vor April 1672 entstanden sein. Und der auf diesen folgende dritte Entwurf N. 2_3 war offensichtlich fertiggestellt, bevor Leibniz von dem am 25. Juli 1672 im *Journal des sçavans* veröffentlichten Brief von Huygens an Gallois Kenntnis genommen hatte, was wahrscheinlich ohne große Verzögerung geschehen ist. Dies spricht dafür, dass N. 2_2 im Zeitraum von April bis Juli 1672 verfasst worden ist. Wegen der seltenen Papiersorte wird für unser Stück das Gleiche angenommen.

[*Verworfener erster Ansatz*]

Definitions

Pour placer une chose avec une autre, il y a trois sortes de variation. Car ou on place une chose tousjours avec une même chose, mais d'une maniere nouvelle; ou on place une chose tantost avec une tantost avec une autre.

Si on place une chose avec une même chose, mais d'une differe [*bricht ab*]

29 d'une *(1)* même *(2)* no *(3)* maniere *L*   30 tantost avec *(1)* l'une *(2)* une *L*

[*Verworfener zweiter Ansatz*]

Soit une chose donnée, ayant certaines parties, outre les quelles il ne faut pas la soubsdiviser [comme sont les unitez dans le nombre, ou les atomes dans un Corps, ou les personnes d'une assemblée, les quelles ne souffriroient pas d'estre coupées en pieces]; trouver tous les changemens imaginables dans cette chose donnée qu'elle peut fournir de soy même, sans luy adjouster rien de nouveau. [Car s'il seroit permis d'adjouster une nouvelle chose, ou diviser les parties plus outre ou d'une autre maniere, les changemens iroient à l'infini, et il n'y auroit point de probleme pour les conter. Par exemple dix personnes estant donnez, on peut trouver [*bricht ab*]

[*Dritter Ansatz*]

Certaines choses estant données, trouver en nombres toutes les dispositions imaginables.

Les d i s p o s i t i o n s sont les varietez de penser à certaines choses données ou de les placer dans l'esprit.

Par exemple, dix personnes estant données, vous pouvez penser ou à quelques unes ensemble; ou à toutes ensemble; ou à nulles ensemble, c'est à dire à une apres l'autre.

Si vous prennez quelques unes ensemble, tantost celles cy et tantost celles là, cela s'appelle Complexion.

2 donnée, *(1)* divisée *(2)* ayant *L* 3 f. [comme ... pieces.] *erg. L* 5 donnée *(1)* sans la qvelle *(2)* qv'elle *L* 7 parties *(1)* d'une *(a)* autre *(b)* autre maniere ou plus outre, *(2)* plus *L* 11 toutes les *(1)* c o n j u n c t u r e s imaginables *(2)* dispositions *L* 13 sont *(1)* les varietez avec les qvelles plusieurs choses peuuent estre placées dans l'esprit ou dans la pensée, *(2)* conjunctures de plusieurs choses *(a)* Par exemple *(b)* Dix personnes peuuent estre considerees de plusieurs manieres *(c)* La *(3)* les varietez *L* 15 penser ou à *(1)* toutes ensemble, ou à plus *(2)* qvelqves *L*

3–6 [comme ... [Car: Die eckigen Klammern in diesem Ansatz stammen von Leibniz selbst. 18 Complexion: Vgl. Leibniz, *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, prooemium §§ 7–12 S. 4 (VI, 1 N. 8, S. 172 f.).

[*Vierter Ansatz*]

Probleme General

Certaines choses d'un certain nombre connu estant données, trouver en nombres toutes les d i s p o s i t i o n s imaginables.

Les d i s p o s i t i o n s sont les varietez de penser à certaines choses, ou de les placer dans l'esprit. Par Exemple, dix personnes estant données, vous pouvez penser ou à quelques unes ensemble, ou à toutes ensemble, ou à nulles ensemble, c'est à dire à l'une apres l'autre. Car pour considerer plusieurs particularitez dans elles, ou pour considerer le tout rangé en quarré ou en polygone ou en autre figure, cela n'appartient pas à nostre tractation, par ce que nous voulons considerer les places qu'on leur donne dans l'esprit en les rapportant pas à l'espace, mais au temps, car les pensées dans l'esprit, n'ont point de difference des places, mais seulement du temps.

Si vous prennez donc quelques unes ensemble tantost celles cy, tantost celles là, et tantost d'un grand, tantost d'un petit nombre, cela s'appelle C o m p l e x i o n , dont la variation consiste dans la matiere donnée même, sans avoir égard à la forme. Par exemple dix estans donnez, $a.\,b.\,c.\,d.\,e.\,f.\,g.\,h.\,i.\,l.$ Vous en pouvez prendre, tantost cinq ensemble, tantost seulement quatre ensemble; et si vous prennez cinq ensemble, vous pouvez prendre ou ceux cinq cy, $a.\,b.\,c.\,d.\,e.$ ou ceux cinq là, $b.\,c.\,d.\,e.\,f.$ etc.

Je nomme le Nombre de ceux qu'on prend, l ' E x p o n e n t d e l a C o m p l e x i o n , par exemple 5 dans l'exemple precedant.

Et selon ce nombre ou exponent, je nomme la C o m p l e x i o n tantost une C o m b i n a i s o n , ou Com2naison, tantost une C o n 3 n a i s o n ou Conternaison, tantost

3 d'un . . . connu *erg. L* 9 rangé *(1)* ou *(2)* en *L* 10 considerer *(1)* pas *(2)* les *L* 10 dans l'esprit *erg. L* 11 temps, *(1)* par ce qve les d *(2)* car *L* 17 ensemble, *(1)* et en prennant cinq, *(2)* vous *L* 18 f. etc. *(1)* Le Nombre de ceux qv'on prend, je nomme *(2)* Je *L*

22 Conternaison: Die Bezeichnungen *conternatio* für eine ungeordnete Stichprobe von drei Elementen aus einer gegebenen Grundmenge und analog *conquaternatio* finden sich schon bei M. MERSENNE, *Harmonicorum libri*, 1635, etwa auf S. 135. Die Schreibweisen *com2natio*, *con3natio* und *con4natio* gebraucht Leibniz bereits in der *Dissertatio*, prooemium §§ 11 f. S. 4 (VI 1, N. 8 S. 172). Er verwendet sie auch in einer Marginalie in seinem Handexemplar von Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [*Marg.*] (*PO* III S. 446). Dort notiert er auf der vor S. 1 eingefügten Ausklapptafel, welche das arithmetische Dreieck darstellt, Formeln zur Berechnung der Anzahl der verschiedenen *complexions* — für *con3nationes* etwa $\dfrac{y, y-1, y-2}{1, 2, 3}$.

une C o n 4 n a i s o n , etc. bien qu'ordinairement le mot de Combinaison se prend pour la complexion en general.

Le Nombre de toutes les com2naisons ou con3naisons etc. imaginables, s'appelle: L e N o m b r e d e s c o m p l e x i o n s d ' u n e x p o n e n t d o n n é . Par exemple toutes les con3naisons de 10 choses données, sont 120 et toutes les con3naisons de 4 choses, *a. b. c. d.* sont 4 comme *a. b. c.* et *b. c. d.* et *a. b. d.* et *a. c. d.*

Le nombre de toutes les complexions de tous les exponens ensemble, s'appelle s i m p l e m e n t , l e n o m b r e d e s C o m p l e x i o n s . Par exemple le nombre de toutes les Complexions de 4 est 15, sçavoir 4 1 n i t e z , quand chaque chose est mise à part (: *a. b. c. d.* :) 6 C o m 2 n a i s o n s (: *ab. bc. cd. ac. ad. bd.* :) 4 C o n 3 n a i s o n s (: *abc. bcd. abd. acd.* :) 1 C o n 4 n a i s o n (: *abcd* car la varieté de l'ordre *acbd. adbc.* etc. ne change pas la matiere ou complexion, mais seulement la forme :). Et ainsi en tout 1 5 .

1 qv'ordinairement le *(1)* terme *(2)* mot *L* 3 Nombre *(1)* des Com2n *(2)* de toutes les com2naisons ou *(a)* con2naisons *(b)* con3naisons | etc. *erg.* | *(aa)* imaginaires *(bb)* imaginables *L* 5 de *(1)* dix *(2)* 10 *L* 5 f. et toutes les | con3nations *ändert Hrsg.* | de ... sont 4 *erg. L* 8–12 Par exemple ... tout 1 5 . *erg. L*

12 en tout 1 5 : Die Möglichkeit, gar kein Element aus der Grundgesamtheit auszuwählen, zählt Leibniz hierbei wie bereits in der *Dissertatio*, prooemium §§ 7 u. 12 S. 4 (VI 1, N. 8 S. 172 f.) nicht mit, bedenkt sie aber sehr wohl; vgl. ebd., probl. I Tab. ℵ S. 7 (S. 174).

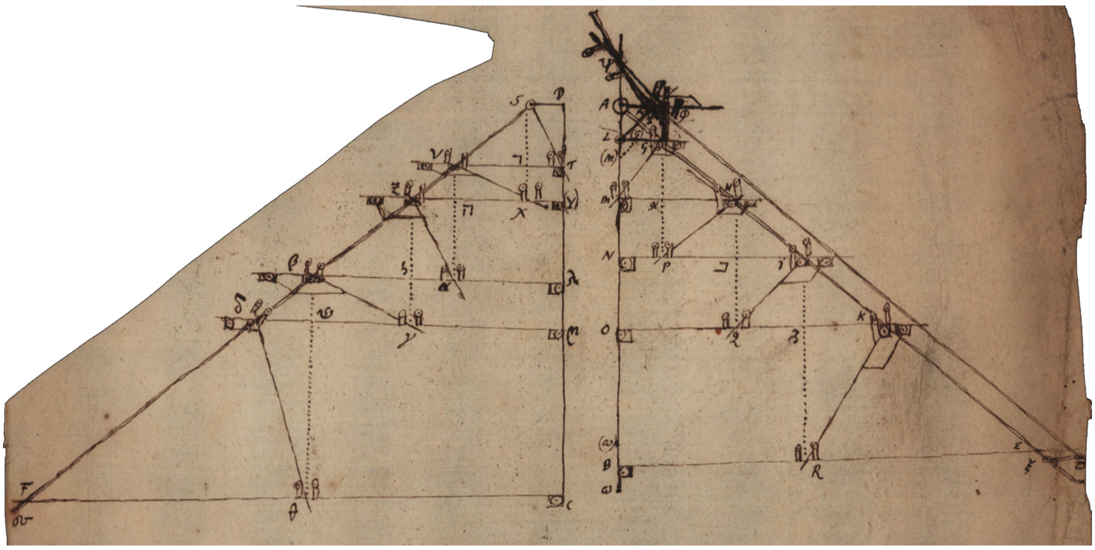
24. CONSTRUCTOR
Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 20 Bl. 1–5. Bl. 1–4 zwei Bog. 2°. Bl. 5 ein Bl. 2°, aus dem zwei dreieckige und ein rechteckiger Abschnitt entfernt wurden. 9 S. Textfolge Bl. 5 v°, Bl. 1–4. Bl. 5 r° leer.
Cc 2, Nr. 815, 816

Inveni mense X$^{\text{bri}}$ 1674. Parisiis
Godofredus Guilielmus Leibnitius

C o n s t r u c t o r

Instrumentum Algebraicum
pro inveniendis omnium Aequationum Radicibus,
geometrice pariter, et in numeris quantumlibet exactis
sine calculo



[*Fig. 1*]

8 *(1)* Gottfredus *(2)* Godofredus *L*

14 *Fig. 1*: Die Figur zeigt einen Ausschnitt aus LH 35 III A 20 Bl. 5 v°. Bearbeiteter Ausschnitt des Digitalisats http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068233 der Handschrift LH 35 III A 20 der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek (GWLB). Das Digitalisat wurde von der GWLB unter einer CC0 1.0 Public Domain Dedication Lizenz zur Verfügung gestellt.

Descriptio Constructoris sive Instrumenti Algebraici

In plano hujus paginae figurae 1 rectangulum paginae parallelum $ABCD$ designatum intelligatur et super rectis AB, DC, alia perpendiculariter erecta plana, ABE, et DCF, sibi proinde parallela. Punctum A summum, B imum, E dextrum, C sinistrum.

Ex puncto A ducatur dextrorsum simul ac deorsum recta $AGHIKE$. secans rectas indefinite dextrorsum productas ipsi $ALMNOB$ perpendiculares LG, MH, NI, OK. Sint indefinite deorsum productae GP, HQ, IR perpendiculariter secantes ipsas NPI, OQK, BRE; junctaeque transversales GM, HP, IQ, KR indefinite deorsum pariter et sinistrorsum productae. Ipsae AL, LM, MN, NO, OB sumtae prout e re erit. Intelligantur jam rectae quidem AB et LG esse lineae rigidae impraesentiarum immobiles, sed MH, NI, OK, BE, sint regulae mobiles sursum ac deorsum in ipsa AB, et GM, HP, IQ, KR, dextrorsum et sinistrorsum in rectis GL, HM, IN, KO, EB, ita tamen ut durante motu tam priores quam posteriores, regulae vestigiis suis parallelae moveantur sive eosdem ad rectas ad quas moventur angulos servent. Quod eminentiis quibusdam oblongis rectilineis, crenae cuidam eique in qua moventur, rectae congruentibus quas increnaturas, nova sed necessaria voce appellare possis praestari constat.

Qualis increnatura (fig. 2) est $L(L)$ qua regula GL movetur super AB in crena $(L)B$, eodem semper angulo GLA, sive is rectus sive obliquus sit, servato. Quod si increnatura velut rotulis quibusdam circa sua centra mobilibus imposita intelligatur, ne crenam in omnibus sui[s] punctis tangat; facilior erit motus.

1 Descriptio ... Algebraici *erg. L* 2 paginae *(1)* esto recta AB *(2)* figurae 1 rectangulum | paginae parallelum *erg.* | ABCD *L* 3 intelligatur | cuius summum AD, imum BC *erg. u. gestr.* | et super rectis | dextra *erg. u. gestr.* | AB, | sinistra *erg. u. gestr.* | DC, alia *(1)* erecta plana *(2)* perpendiculariter *L* 4 parallela. *(1)* Circa punctum A velut centrum *(a)* in *(b)* mobilis sit in ipso plano ABE, recta AE secans rectam G *(2)* Punctum A summum, B imum, E dextrum B sinistrum *(3)* Punctum *L* 7 indefinite | deorsum *erg.* | productae GP, HQ, IR | perpendiculariter *erg.* | secantes *L* 8 f. junctaeqve | transversales *erg.* | GM, HP, IQ, KR | indefinite ... productae *erg.* |. Ipsae *L* 10 et LG | esse ... impraesentiarum *erg.* | immobiles *L* 11 ipsa AB, *(1)* servato semper angulo qvem *(2)* et *L* 14 f. oblongis | rectilineis *erg.* |, crenae | cuidam *erg.* | eiqve *L* 17 (fig. 2) *erg. L* 17 in crena (L)B *erg. L* 18 is *(1)* perpendicularis *(2)* rectus *L* 19 circa ... mobilibus *erg. L*

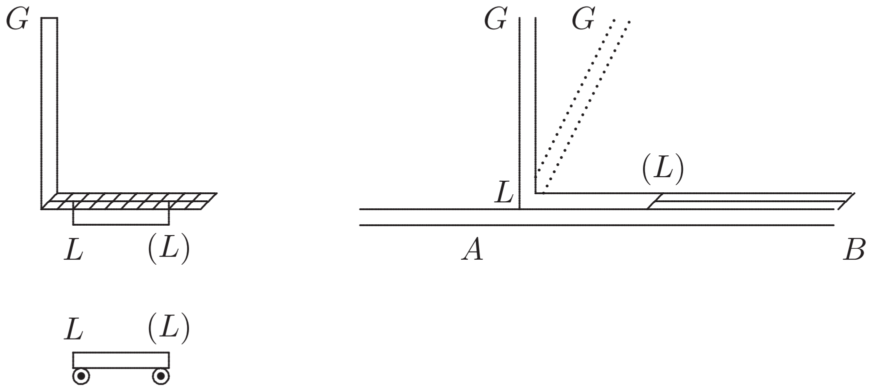


fig. 2

Ut autem aliquod motus in caetera omnia propagati principium intelligamus, cogitetur regula AE, mobilis circa B, in eodem semper plano ABE. quae elevata a situ inclinato ad minus inclinatum sive horizontali propiorem, aperiet Machinam, contrario vero motu, claudet. Quod ita intelligendum est[:] Dum AE elevabitur puncta G, H, I, K, quibus LG, MH, NI, OK, secat, longius distabunt sive recedent, ab L, M, N, O. Intelligantur jam regulae transversales GM, HP, IQ, KR, intersectionis puncta sequi, et rectae AE motu per parallelas LG, MH, NI, OK, eodem semper angulo dextrorsum duci, aut etiam dum AE rursus deprimetur sinistrorsum reduci: Eodem modo, motu transversalium GM, HP, IQ, KR, per parallelas sustinentes G, H, I, K, mutabuntur M, P, Q, R puncta intersectionum cum aliis parallelis uno gradu semper inferioribus, MH, NPI, OQK, BRE. Pone jam effici, ut idem sit semper punctum intersectionis M, P, Q, R in parallela, MH, NPI, OQK, BRE, aliud vero atque aliud transversalis, GM, HP, IQ, KR punctum ei respondeat (: quod ut mox dicam, facile effici potest :) necesse erit ipsas MH etc. mutatione punctorum intersectionis M etc. in transversalibus GM etc. sursum deorsumque secundum longitudinem ipsius AB duci ac reduci quod facile intelligi potest ex fig. 3.

8 per *(1)* GM, *(2)* parallelas *L* 8 dextrorsum *erg.* *L* 9 deprimetur | sinistrorsum *erg.* | reduci: *(1)* Regulas autem transversales parallelis occurrentes, eas per *(2)* Eodem *L* 10 transversalium *(1)* GM, HI, OK, per parallelas sustinentes *(2)* GM *L* 11 M, P, Q, R *erg.* *L* 12 f. intersectionis *(1)* in recta *(2)* M, P, Q, R *L* 15 MH etc. *(1)* motu *(2)* mutatione *L*

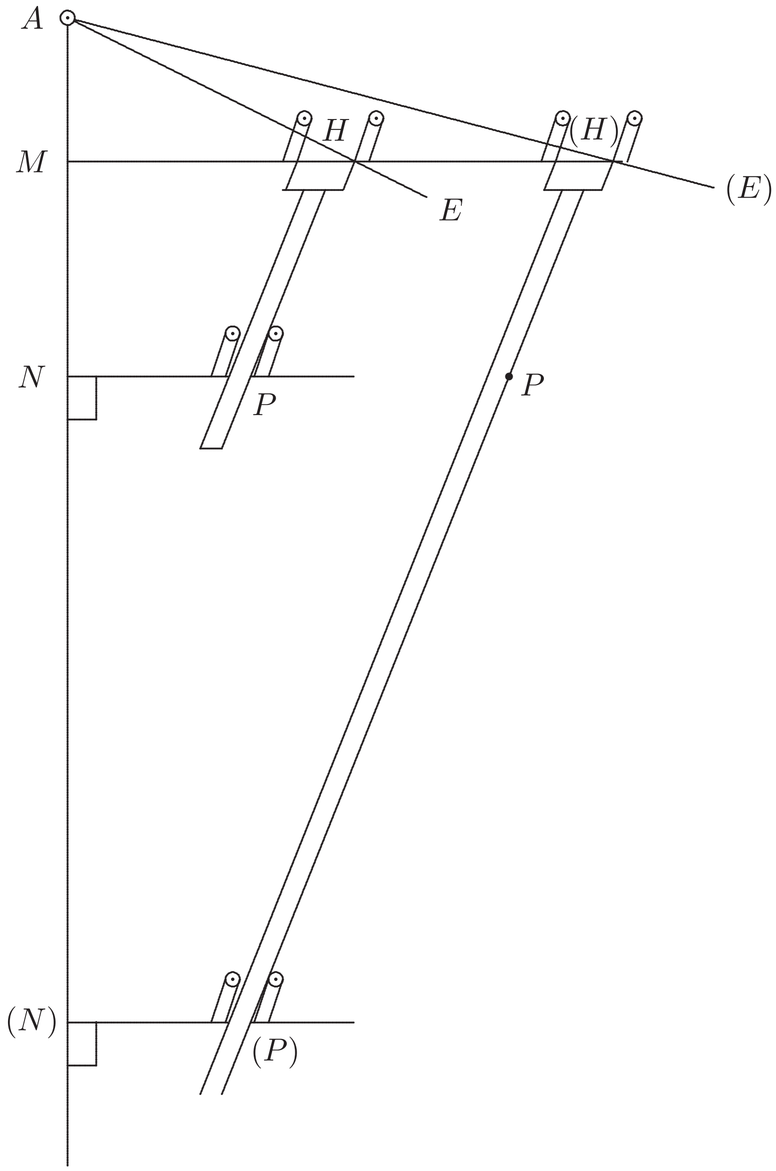


fig. 3

Pone enim in MH, ipsam HP; vestigiis suis parallelam incedere dextrorsum ope i n c r e n a t u r a e H. et NP ipsi MH parallelam esse. Manente puncto fixo P. in recta

1 *Neben* fig. 3: NB.

2 dextrorsum *erg. L*

NP necesse est ipsam NP descendere ad $(N)(P)$. Nam si mansisset ubi erat, a recta HP in $(H)(P)$ promota in puncto P non amplius secaretur. Ut autem recta HP rectam NP non nisi in P. secare possit, duobus obicibus ex ipsa NP, perpendiculariter ad planum NMH exeuntibus effici potest, inter quos ipsa HP inclusa libere ludit, prorsus ut in exiguis naviculis remi inter duos obices manu agitantur, ita utcunque recta HP inter hos duos obices sursum deorsumque agatur nunquam tamen a puncto P inter eos intercepto dimovebitur. Eodem modo efficitur ut recta AE translata in $A(E)$ punctum H et cum eo recta HP transferatur in (H) vel $(H)P$. Neque vero aliud quicquam hoc loco postulavimus. Ut autem motus eo facilior pariter et exactior sit; regulae ipsae inter obices interceptae aciebus suis obicem alterutrum motui scilicet obstantem perpetuo prement; obex autem quilibet annulo sive tubulo sive si placet cylindro circa axem in quo fixus est obex, mobili, indutus erit ut fricanti regulae facilius cedat. Alterutrum autem, aciem vel cylindrum ex chalybe durato esse fabricatum rationis est, altero ex aere fuso; quo minus motuum reciprocationibus alterantur. Apparet quoque, ut ad f i g. 1. redeamus, ab obice utrobique regulam motricem includente effici, ut quemadmodum elevatione ipsius AE aperitur machina, ita ejus depressione rursus claudatur.

Quod si quis veretur, ne vacillationibus regulae motricis intra obices punctum intersectionis velut H, aut P, instabile reddatur; is consideret quantacunque sit latitudo vel libertas regulae intra obices ludentis; punctum tamen intersectionis unum tantum censeri, verbi gratia quo acies regulae cylindrum obici circumdatum aut ut mox dicam annulum quendam obicibus interjectum tangit; quod semper durante motu, eodem in loco, aut aequipollente evenit. Fateor punctum contactus habere latitudinem quandam, et repetitis contactibus; una scilicet regula aliam ducente, latius errorem propagari; sed fieri tamen arte potest, ut posterior error priorem non augeat, sed quodammodo compenset; certa semper lege, quamdiu acies aut cylindros tritu non diminutos ponimus: cum etiam ipsa diminutio temporis tractu facta quae tamen ita subito non sentietur. Supra remedium non sit. At inquies punctum contactus non esse idem in reducendo quod in ducendo, quia oppositus tunc obex premitur: sed hoc nihil turbat; quia in qua operatione ductuum ratio habetur, in ea reductuum non habetur. Effici tamen etiam potest, id-

10 suis *(1)* chalybe durato *(2)* ferratis *(3)* ex aere in obices perpetuo prement *(4)* obicem *L* 13 durato *(1)* factum, alterum *(2)* esse *L* 19 intersectionis *(1)* illud demum *(2)* unum *L* 20 f. aut … interjectum *erg. L* 22 aeqvipollente *(1)* contingit; et punctum contactus physic *(2)* evenit *L* 25 cylindros *(1)* nondum tritu consumi *(2)* tritu *L* 29–109,1 habetur. *(1)* Fateor deniqve *(2)* Ut increnaturae in crenis non vacillent *(3)* Effici | tamen *erg.* | etiam potest, | idqve malim, *erg.* | ut *L*

que malim, ut regula obicibus intercepta sit instar prismatis Triangularis trium acierum, quarum duobus obices oppositos; una annulum quendam in P nonnihil incisum et circa centrum suum in rectave axem NI mobilem tangat, ita punctum P, semper erit idem tam in ducendo quam in reducendo praesertim cum ipsa HP, durante operatione eundem semper faciat angulum ad ipsam NI, adeoque ad incisuram in qua est annulus P, quod si pro alia operatione mutetur angulus HPN. Nihil prohibet cochlea exigua etiam annuli P inclinationem mutari, ut scilicet ad axem annuli, angulus rectae HP semper sit rectus. Idem in obicibus quoque locum habet ut in eosdem semper circellos cylindris eorum incisos acies intrent. Facile autem cavebitur ut mutatio inclinationis clausa tantum machina fieri possit, durante motu non possit. Clausa autem machina sponte sua nulla peculiari manuum opera mutatam ipsius *HP* inclinationem consequetur laxato tunc retinaculo quodam, quod alias durante prius motu obstabat inclinationis mutationi.

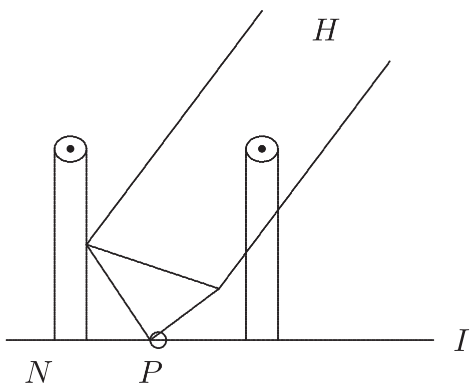


fig. 4

3 in ... NI *erg. L* 8 rectus. *(1)* Innumera alia ab industrio artifice pro re nata *(a)* excogitari possent *(b)* excogitabuntur, ut appareat qvo usqve humana diligentia in elaborando tantae utilitatis instrumento | *(aa)* proficere posset *(bb)* profici liceat *erg.* |, qvo totius pene *(aaa)* Geometriam *(bbb)* Algebrae et Geometriae rectilineae eius certe *(aaaa)* cuius *(bbbb)* qvam Vieta et Cartesius ad analysin reduxere; problemata solvuntur. et omnium curvarum a Cartesio in classes reductarum fructus | hactenus contemplationem non egressus *erg.* | continetur. Exempli praeterea causa, ut impediatur regularum *(2)* Idem *L*

Praeterea ut increnaturarum aut acierum, quibus in crenis aut incisuris moventur regulae, impediatur vacillatio; faciendum est, ut eadem acies diversis incisuris sic satis invicem remotis, at perfecte parallelis et similibus, recipiatur. Nec refert quod ad exactitudinem summam omnia necesse est constructa esse, unde difficilis erit motus, nam cum celeritas non postuletur; magna profecto impedimenta necesse est quae vectis longitudine et si velis agentis vectem cochleae tarditate non vincantur. Cumque necesse sit aliquando puncta quaedam diversarum regularum, dum praeparetur machina ad novam operationem, in eadem esse recta imaginaria, hoc exacte praestari poterit quodam dioptrae genere si perforata in punctis quaesitis utraque regula, lux per omnia puncta radiet; aut videri possit. In elaborandis autem machinae partibus perspicilia adhibere artificem rationis erit; cum sit instrumentum hoc summae exactitudinis specimen futurum.

Innumera alia ab industrio artifice pro re nata excogitabuntur ut appareat quousque humana diligentia in elaborando tantae utilitatis instrumento proficere liceat. Quo omnes algebrae aequationes resolvuntur, et Geometriae rectilineae, ejus certe quam Vieta et Cartesius ad analysin reduxere, problemata solvuntur; et curvarum omnium a Cartesio in classes distributarum fructus hactenus contemplationem non egressus continetur. Sed haec postea exponam. Nunc absolvenda Machinae constructio est motusque, neque enim constructio sine motu commode explicari potest. Nimirum r e d e u n d o a d f i g. 1 elevato primo mobili AE motu circa centrum A regula transversalis GM, procedit in ipsa LG directione seu dextrorsum, quod fieri non potest, quin parallela (horizonti) MH moveatur in recta ANB directioni NB seu deorsum. Interea temporis transversalis HP, ob eandem ipsius AE elevationem movetur in MH sinistrorsum; quare parallela NPI cui HP occurrit in P, et ibi inter duos obices modo explicato intercipitur descendet. Eodem modo eodem tempore; transversales, IQ, KR, et si quae aliae sequuntur movebuntur sinistrorsum, parallelae OQK, BRE etc. deorsum, quod ludi genus continuabitur, quousque postulabit necessitas, et salva exactitudine sufficient vires.

2 vacillatio; *(1)* effici potest, ut eadem acies diversis locis simul *(2)* faciendum *L* 5 qvae *(1)* vecte adhibito *(2)* vectis *L* 8 poterit *(1)* adhibitis dioptris *(2)* qvodam *L* 10 partibus *(1)* microscopium aut *(a)* certe *(b)* certe *(2)* perspicilia adhibere *(a)* intererit *(b)* artificem *L* 12 nata *(1)* excogitari possunt *(2)* excogitabuntur *L* 18 f. Nimirum | r e d e u n d o a d f i g. 1. *erg.* | elevato *(1)* AE, circa centrum *(a)* E *(b)* A, movetur GM, directione sinistrorsum. Ergo MH deorsum; eodem tempore ob elevatam AE, movetur HP sinistrorsum; GM *(2)* reg *(3)* primo *L* 20 ipsa *(1)* GM, directione | LG *nicht gestr.* | seu | sinistrorsum *nicht gestr.* | *(2)* LG directione *L* 20 parallela (horizonti) *erg.* *L* 26 qvousqve *(1)* sufficient vires, et *(2)* postulabit *L*

Hactenus hujus plani nempe ABE explicatae partes, explicandae nunc et alterius DCF, ipsi paralleli et similiter positi, partes an plerisque similes. Praeter ea scilicet quae admonebo. Nimirum DS regula immobilis sit ipsi CF, vel BE parallela, et puncta A. D. S. sint in eadem recta. Efficiatur autem arte quadam, ut dum punctum G procedit sinistrorsum vel recedit dextrorsum, ob motum elevationis et depressionis ipsius AE circa centrum A; punctum S, mobile procedat in recta DS in eundem sensum, directione scilicet DS, dextrorsum, (: etsi in pagina sive figura id sit sinistrorsum, quoniam utraque plana ABE, DCF, non in eodem plano jacentia, ut illic repraesentantur, sed parallele erecta censenda sunt :) vel recedat, directione SD, sinistrorsum; ea tantum lege, ut DS. sit semper media proportione inter AL, et LG. et regula quaedam SF, cum puncto S procedens, et tamen circa centrum S. mobilis, sit semper ipsi AE parallela. Quae duo qua ratione obtineri possint, postea explicabo. Nunc eo supposito intelligatur transversalis ST, cum puncto S procedens propellere sursum deorsumque in recta DC. parallelam (horizonti) TV; et motu ipsius SF in ipsa TV, aliam duci transversalem VX a qua rursus parallela $(Y)Z$ in ipsa DC. sursum deorsumque ducatur. Idem intellige de transversalibus $Z\alpha$, $\beta\gamma$, $\delta\theta$, quae in parallelis $(Y)Z$, $\lambda\beta$, $\mu\delta$, ab ipsius SC motu huc illuc ducuntur, eodem angulo servato; et parallelas, (unaquaeque ei in qua ducitur inferiorem,) $\lambda\alpha\beta$, $\mu\gamma\delta$, $C\theta F$ in recta DC. sursum deorsumque agunt. Puncta autem T. X. α. γ. θ. sunt in perpendicularium DTC, SX, $V\alpha$, $Z\gamma$, $\beta\theta$ (quae omnes excepta prima imaginariae sunt,[)] et parallelarum, quae omnes reales rigidaeque sunt VT, $ZX(Y)$, $\beta\alpha\lambda$, $\delta\gamma\mu$, $F\theta C$, intersectionibus.

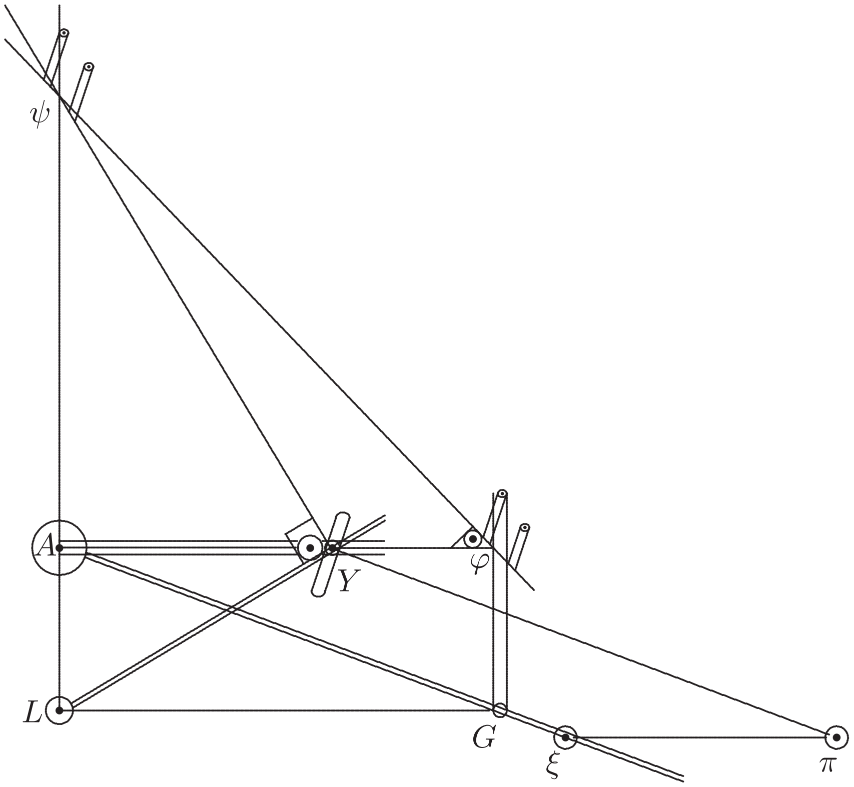
Superest ut explicetur transitus de plano in planum, seu modus quo efficitur, ut DS sit media proportionalis inter AL et LG. et ut SF perpetuo maneat parallela ipsi AE. Porro recta AL durante motu manet situ et magnitudine eadem, at LG perpetuo

2 ipsi ... partes *erg.* *L* 2 similes. *(1)* Nempe supponendum tantum arte qvadam (: postea explicanda :) effici, *(a)* ut dum LG decresci *(b)* ipsa LG crescit decrescitve immobili, *(aa)* ob plani praecedentis ipsius AE *(bb)* ob ap *(cc)* ob motum elevationis et depressionis ipsius AE, crescente aut decrescente etiam DS crescere ea tamen lege, ut *(2)* praeter *L* 3 regula immobilis *erg.* *L* 4 qvadam | (: postea explicanda :) *gestr.* | ut *L* 6 in recta DS *erg.* *L* 7 scilicet DS *(1)* sinistrorsum *(2)* dextrorsum *L* 7 sit *(1)* sinistrorsum *(2)* dextrorsum *(3)* sinistrorsum *L* 9 directione SD, *(1)* dextrorsum *(2)* sinistrorsum *L* 10 et LG. *(1)* id qva ratione fieri possit, postea explicabo, nunc eo supposito *(2)* et *L* 13 sursum deorsumqve *erg.* *L* 14 (horizonti) *erg.* *L* 16 f. ducuntur, *(1)* serv *(2)* suis semper vestigiis parallelae *(3)* eodem *L* 18 recta DC. *(1)* propellunt *(2)* sursum *L* 19 perpendicularium | imaginarium *erg. u. gestr.* | DTC *L* 20 omnes *(1)* rigidae seu solidae sunt, *(2)* reales *L* 24 situ et magnitudine *erg.* *L*

mutatur magnitudine, manet situ; idemque erit de recta DS, caeterae situm pariter et magnitudinem mutant. Jam parallelismum ipsarum AE, SF perpetuum, ita obtinebimus; ponatur Y in recta AY ipsi BE parallela punctum Y ita procedere, ut recta AY semper aequetur ipsi DS, seu ut sit media proportione inter AL et LG. quod modo postea explicando, obtinebimus. Eo autem supposito intelligatur alicubi in recta AE, punctum quoddam fixum ξ, unde dextrorsum prodeat recta indefinita, parallela ipsi BE, inque ea sumatur $\xi\pi$ aequalis ipsi AY jungantur puncta Y et π regula solida $Y\pi$. Patet manente AY, utcunque elevetur aut inclinetur AE, latera opposita rhomboeidis $A\xi\pi Y$. manere parallela; quemadmodum instrumenti quo vulgo ad parallelas ducendas utuntur, quod ab officio rectissime parallelogrammum appelles. Hic vero illud praeterea addendum est, ut latus $Y\pi$ in rectis indefinitis AY, $\xi\pi$ huc illuc incedere possit. Ex punctis Y, et π, exibunt duae lineae rigidae, YS, $\pi\varpi$ duo plana ABE, DCF perpendiculariter jungentes, et regulam $Y\pi$ regulae $S\varpi$ connectentes, unde $S\varpi$ vel SF, ipsi $Y\pi$, vel AE perpetuo parallela incedet, quod faciendum erat.

Ut autem recta AY semper media sit proportionalis inter rectam constantem AL, et continue variatam LG paulo difficilius est: quod tamen ni fallor ita consequemur; inspiciatur fig. 1 aut, quae hanc ejus partem clarius explicat, f i g u r a 5.

3 ponatur *(1)* AY ⊓ *(2)* ipsa AY aeqvalis perpetuo ipsi DS | . Nempe *erg.* | puncto Y perpetuo incedente ex adverso *(3)* Y in *L* 3 ut | recta AY *erg.* | semper *L* 5 recta *(1)* AY punctum qvoddam *(2)* AE *L* 6 unde *(1)* recta prodeat indefinita, aeqvalis *(a)* inqve ea ponatur parallela ipsi AY, *(b)* in qva sumatur horizonti *(2)* dextrorsum *L* 8 opposita *erg. L* 11 possit *(1)* qvoniam rectam AY continue magnitudinem mutare manifestum est, qvoniam et LG. eam *(2)* | ob mutationem ipsius LG. cum sit *nicht gestr.* | AY media propo *(3)* Ex *L* 12 duae *(1)* perpendiculares *(2)* lineae rigidae, *(a)* ad planum Yϖ *(b)* YS *L* 14 parallela *(1)* | erit *nicht gestr.* | *(2)* incedet *L* 17 inspiciatur . . . explicat, | f i g u r a m *ändert Hrsg.* | 5 *erg. L*



[*Fig. 5*]

Punctum G. motu elevationis aut depressionis rectae AE vel $A\xi$ circa A ducat secum perpendicularem $G\varphi$. quae rursus in recta $AY\varphi$ ducat ipsam $\varphi\psi$, angulo $\psi\varphi A$ constante semirecto, quae rectam $LA\psi$ secabit in ψ. Ergo $A\psi$, aequabitur ipsi $A\varphi$ vel LG. Recta $\varphi\psi$ in eodem puncto ψ, secet aliam rectam $Y\psi$ quae recta in radio LY huc illuc moveri possit, servato angulo, constante recto ψYL. Radius autem LY mobilis esto circa centrum L. Ponendo jam rectam $\varphi\psi$ duobus obicibus in ipsa $Y\psi$ plantatis inclusam esse, ut punctum intersectionis ψ in recta $Y\psi$ semper constans esse possit; sequetur rectam $Y\psi$ ab ipsa $\varphi\psi$ duci. Quod si ergo radius LY circa centrum Y mobilis non esset, moveretur ipsa $Y\psi$ secundum longitudinem ipsius LY, ob motum ipsius $\varphi\psi$, sed quoniam desideramus praeterea ut punctum Y semper maneat in eadem recta $A\varphi$; quod fibula quadam ipsi $Y\psi$ infixa, et in rimam ipsius $A\varphi$ intrante, inque ea huc illuc mobili efficietur: ideo ut

11 Aφ; *(1)* ideo ut triangulum rectangulum ψYL. omnes formas induere possit *(2)* qvod *L*

Triangulum rectangulum $\psi\, YL$ omnes formas induere possit, necesse erit LY mobilem esse circa L. Erit ergo AY semper media proportionalis inter AL et $A\psi$ seu inter AL et LG utcunque varietur punctum G. Quod faciendum erat. Unde jam antedicta consequuntur.

Explicata est constructio Instrumenti Algebraici, ut appareret, ex quibus partibus compositum sit, et qua ratione partium motus alter alterum regat. Nunc superest, ut modum quoque tradamus utendi Instrumento ad Aequationum radices Geometrice, in lineis, et quod hinc sequitur Mechanice in numeris quantumlibet vero propinquis, inveniendas. Constat ex iis quae Vieta inprimis et Cartesius, tradidere, omne Problema (ordinarium, rectilineum) determinatum, reduci posse ad aequationem in qua una tantum incognita supersit; secundum quam ordinata aequatio eo usque assurgere censebitur quo usque maxima incognitae dimensio excrevit. Praeterea tradita est a Cartesio methodus efficiendi, ut omnia aequationis loca sint repleta, et ut omnes aequationis radices sint verae, ut ille loquitur, id est affirmativae: quo facto, magno commodo nostro, feliciter evenit, ut signa $+$ et $-$ in aequatione sese alternis sequantur, quod quam sit instituto nostro necessarium mox apparebit. Sumamus in exemplum aequationem ex decem terminis compositam, sive noni gradus, (: raro enim altius assurgetur :) quae ad radices affirmativas praeparata, atque ordinata, ita stabit:

$$y^9 - by^8 + acy^7 - a^2dy^6 + a^3ey^5 - a^4fy^4 + a^5gy^3 - a^6hy^2 + a^7ly - a^8m \sqcap 0$$

et transponendo, ut signa negativa amoveantur:

$$\odot \quad a^8m + a^6hy^2 + a^4fy^4 + a^2dy^6 + by^8 \sqcap a^7ly + a^5gy^3 + a^3ey^5 + acy^7 + y^9$$

Ubi patet duas haberi summas sive formulas aequales inter se, alteram omnium terminorum exponentium parium, 0. 2. 4. 6. 8. alteram imparium, 1. 3. 5. 7. 9. Nec vero necesse est terminum summum, hoc loco y^9 purum esse, nullaque quantitate cognita affectum: cum contra in nostro sit arbitrio purum reddere quemlibet, posito enim a esse unitatem, et omnia dividi per m, fiet aequatio:

$$☽ \quad 1 + \frac{h}{m}y^2 + \frac{f}{m}y^4 + \frac{d}{m}y^6 + \frac{b}{m}y^8 \sqcap \frac{l}{m}y + \frac{g}{m}y^3 + \frac{e}{m}y^5 + \frac{c}{m}y^7 + \frac{1}{m}y^9$$

1 ψYI *L ändert Hrsg.* 5 regat. *(1)* nunc, cuius causa totum hoc negotium susceptum est, usum eius in Algebra, et qvod hinc seqvitur in Geometria imo et in Mechanicis, dicemus. su *(2)* nunc superest, *(a)* ut modum utendi *(aa)* in resolvendis *(bb)* ad resolvendas Aeqvationes adhibendi *(b)* ut *L* 6 ad *(1)* resolvendas *(2)* inveniendas *(3)* Aeqvationum *L* 7 Mechanice *erg. L* 12 ut ... et ut *erg. L* 14 f. qvod ... apparebit *erg. L*

8 tradidere: Vgl. Fr. Viète, *Opera mathematica*, 1646 (*VO*) und R. Descartes, *Geometria*, 1659 (*DGS* I S. 1–118). 11 tradita: *a. a. O.*, S. 70–75.

Illud quoque constat pro Unitate assumi posse quamlibet quantitatem datam, prout commoditas operationis exigere videbitur.

His ita positis, ajo Aequationem ☽ in machina ita perfecte repraesentari, ut satis appareat ipsam rerum naturam, ad hoc construendi genus invitare, subsidiis dudum velut consulto praeparatis, ut facilius exitum reperiret. Nam durante motu, quomodocunque linearum magnitudo varietur, attamen AL appellata 1, et DS appellata y, sive LG, y^2 semper verum erit ab uno latere esse

$$\left\{\begin{array}{l} \quad AL \sqcap 1 \qquad LM \sqcap \dfrac{h}{m}y^2 \qquad MN \sqcap \dfrac{f}{m}y^4 \qquad NO \sqcap \dfrac{d}{m}y^6 \qquad OB \sqcap \dfrac{b}{m}y^8 \\ \text{ab altero latere vero} \\ DT \sqcap \dfrac{l}{m}y \quad T(Y) \sqcap \dfrac{g}{m}y^3 \quad (Y)\lambda \sqcap \dfrac{e}{m}y^5 \qquad \lambda\mu \sqcap \dfrac{c}{m}y^7 \quad \mu C \sqcap \dfrac{1}{m}y^9 \end{array}\right.$$

Quod si ergo durante motu aliquando evenit, ut $DT + T(Y) + (Y)\lambda + \lambda\mu + \mu C$, id est DC, fiat aequalis ipsi $AL + LM + MN + NO + OB$, id est AB, sive ut punctum C plani unius e regione respondeat puncto B plani alterius, id est ut recta imaginaria BC sit utrique plano perpendicularis, quod in media operatione, etiam machina non detecta, ope styli cujusdam impingentis, facile sentiri potest; tunc manifestum est, etiam $1 + \dfrac{h}{m}y^2 + \dfrac{f}{m}y^4 + \dfrac{d}{m}y^6 + \dfrac{b}{m}y^8$ aequari ipsi $\dfrac{l}{m}y + \dfrac{g}{m}y^3 + \dfrac{e}{m}y^5 + \dfrac{c}{m}y^7 + \dfrac{1}{m}y^9$ ac proinde si machina in eo statu sistatur, quae tunc fuerit DS sive y, eam fore quaesitam, cum aequationi propositae satisfaciat.

Quod si Aequatio $\odot$ commodior videatur ad usum, quam aequatio ☽, ne scilicet omnia per m dividere necesse sit; aut etiam si alium quemlibet terminum potius quam ultimum purum reddere velimus, id factu facillimum erit, si modo tunc postuletur, ut punctum C respondeat ex adverso non ipsi puncto B, sed puncto ω, sumta recta $B\omega$ tali, ut sit differentia inter terminum cognitum sive ultimum, et unitatem; sumta inquam recta $B\omega$ a B versus A, cum unitas est major termino ultimo, aut in contrarias partes, producta AB ultra B, cum est minor. Quod, si ad aequationem $\odot$. applicetur, posito a

1 qvantitatem datam *erg. L* 4 appareat *(1)*, vix aliq *(2)* ipsam *L* 4 subsidiis *(1)* in eam rem *(2)* dudum *L* 5 reperiret. *(1)* Nam si *(a)* modo ipsi AB (fig. 1) adjicias rectam *(aa)* a – m *(bb)* Bω, cuius valor sit a – m *(b)* modo in recta AB (fig. 1) producta si opus est, sumas rectam Bω, cuius valor sit a – m, directione *(2)* nam AL valebit *(3)* Nam *L* 6 AL ... y^2 *erg. L* 7 erit *(1)* Nam ab uno latere AL valebit 1. LM $\sqcap$ *(2)* ab *L* 13 f. id ... perpendicularis *erg. L*

esse unitatem, sive 1, erit terminus ultimus sive cognitus, m. cumque necesse sit AL + vel − $B\omega$ aequari termino cognito m, ut scilicet caeteris rectis, LM, MN etc. reliquos terminos repraesentantibus, tota aequationis ⊙ portio sinisterior, sive exponentium parium, a recta $A\omega$ repraesentetur; ideo + vel − exprimendo per signum ambiguum $\dagger$ habebimus, $1 \dagger B\omega \sqcap m$ sive $\dagger B\omega \sqcap m-1$, vel $B\omega \sqcap \dagger m \ddagger 1$ id est $B\omega$ erit differentia inter m et 1. et quando m major quam 1. tunc pro $B\omega \sqcap \dagger m \ddagger 1$. scribemus $B\omega \sqcap m-1$. Eritque $m \sqcap 1 + B\omega$ adeoque $B\omega$ non subtrahetur ipsi AB, sed addetur, sive sumetur in recta AB producta ultra B. Contra quando 1 major quam m, tunc pro $B\omega \sqcap \dagger m \ddagger 1$, scribetur $B\omega \sqcap 1-m$, adeoque erit $m \sqcap 1 - B\omega$. Quod significat $B\omega$, a recta AB subtrahendam, sive in contrarias partes sumendam esse regrediendo a B versus A. Itaque regula mobilis parallela BE, ascendendo descendendove secum aget affixam sibi, et in ipsa AB mobilem regulam $B\omega$ et ex ejus puncto ω exiens perpendiculariter stylus impinget in punctum C regulae mobilis FC, tunc cum rectae $A\omega$, et DC, fiant aequales, seu cum DS est quaesita. Cumque manifestum sit quamlibet cognitam sumi posse pro unitate sive AL, et terminum quoque cognitum sive ultimum aequationis cujusdam valorem quemlibet pro arbitrio nostro accipere posse; sub literis quoque $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m$, intelligi posse quantitates cognitas quaslibet; et in aequatione qualibet effici posse, ut quantitas cognita alicujus termini sit data, ideo imposterum formula ⊙ uti suffecerit cum caeteras omnes comprehendat.

Explicandum ergo nunc est, qua ratione Instrumentum aequationi cuilibet propositae accommodetur, sive quomodo effici possit, ut sit:

$$☿\left\{\begin{array}{l}
\qquad AL \sqcap 1 \quad LM \sqcap hy^2 \quad MN \sqcap fy^4 \quad NO \sqcap dy^6 \quad OB \sqcap by^8\\
B\omega \sqcap \dagger m \ddagger 1, \quad \text{adeoque } A\omega \sqcap m + hy^2 + fy^4 + dy^6 + by^8\\
\text{et vicissim ut sit ex altero latere}\\
\qquad DT \sqcap ly \quad T(Y) \sqcap gy^3 \quad (Y)\lambda \sqcap ey^5 \quad \lambda\mu \sqcap cy^7 \quad \mu C \sqcap y^9\\
\text{adeoque } DC \sqcap ly + gy^3 + ey^5 + cy^7 + y^9
\end{array}\right.$$

1 cognitus, m *(1)*, et $B\omega \sqcap \natural$ *(2)* $B\omega$, esse $1-m$; | *dazu gestr. Nebenbetrachtung am oberen Rand:* $1 + B\omega \sqcap m$. Ergo $B\omega \sqcap m-1$ / $1 - B\omega \sqcap m$. Ergo $B\omega \sqcap 1-m$ $\quad m-1+1 \sqcap m \quad 1-m$. | *(a)* ideo cum ne *(b)* ideo *(3)* cumqve necesse sit *(a)* $AL + B\omega$ aeqvari termino *(b)* AL *L* 4 repraesentetur; *(1)* appellemus + vel $-B\omega$ *(2)* ideo + vel − *(a)* $B\omega$ appellando *(aa)* $\ddagger$ *(bb)* $\natural$ $B\omega$, ut scilicet signum *(b)* appellando $\dagger$, ut *(c)* exprimendo *L* 12 mobilem *(1)* rectam *(2)* regulam *L* 13 regulae mobilis FC *erg.* *L*

Ut scilicet in casu aequalitatis rectarum $A\omega$, DC incognita y haberi possit. Hoc autem ita praestabitur, in fig. 1. regula LG moveatur, sursum deorsumve in recta AB, donec fiat AL aequalis ipsi a. seu unitati assumtae. Quo facto et radius AGE, tamdiu moveatur circa centrum A, donec rectam LG ita secet in puncto G, ut fiat LG aequalis ipsi AL, sive unitati. Jam regula transversalis GM, circa punctum G, in CM regulae increnatura qua per ipsam LG incedit fixum eousque moveatur, donec ipsi LMB occurrat in puncto M tali, ut ipsa LM valeat h. Quo obtento in eo situ sive inclinationis angulo LGM, ita firmabitur regula transversalis GM, ut durante motu sive operatione exempli praesentis inde dimoveri non possit. Idemque de caeteris transversalibus intelligendum est, earum inclinationem manuum opera mutari pro lubitu posse, quando Machina operationi praeparatur; durante operatione mutari non posse, quod effectu facillimum esse, nemo dubitat. Itaque angulus LGM, vel distantia regularum LG, MH sumatur talis, ut sit $LM \sqcap h$. Eodem modo angulus MHP vel NIQ, vel OKR talis ut distantia MN sit f, NO sit d, OB sit b. Quid simplicius? In altero plano similiter anguli DST, TVX, $(Y)Z\alpha$, $\lambda\beta\gamma$, $\mu\delta\theta$, tales sumantur, ut sint distantiae, $DT \sqcap l$, $T(Y) \sqcap g$, $(Y)\lambda \sqcap e$, $\lambda\mu \sqcap c$ et $\mu C \sqcap AL \sqcap 1$. Quo facto Instrumentum erit praeparatum, et ajo perpetuo eventurum, durante machinae motu, utcunque elevetur aut deprimatur radius AE, circa centrum A, ut manente $AL \sqcap 1$ et DS continue variante appellata y, locum habeant aequationes sive valores rectarum LM, MN, etc. item DT, TY, etc. recensiti sub signo ☿.

Quod ita demonstro, etsi Geometrae intelligenti, rem sine demonstratione ex dictis manifestam putem. Ex punctis G, H, I, item $s.\ v.\ z.\ \beta$ in rectas MאH, NPבI, OQגK, BRE item TדV, $(Y)X$הZ, $\lambda\alpha$לβ, $\mu\gamma$שδ, $C\theta F$ demittantur perpendiculares imaginariae GאP, HבQ, IגR, SדX, Vהα Zלγ, βשθ. Jam vero cum sit $AL \sqcap 1$, $DS \sqcap y$, erit $LG \sqcap y^2$, quia LG inter AL et DS proportione media est, ex constructione. Hinc sequitur LM esse

2 regula LG *(1)* ita moveatur, ut fiat AL aeqvalis ipsi a, sive unitati *(2)* moveatur *L* 12 dubitat. *(1)* Jam puncta in qvibus rectae | imaginariae *erg.* | ipsi BE perpendiculares sive verticales, GאP, HבQ, IגR, a realibus, horizontalibus, sive regulis MאH, NבI OגK | secantur *erg.* | appellemus א, ב, ג. erit ipsa Gא (id est LM) $\sqcap$ h, et qvoniam | ut *erg.* | AL ad LG. ita Gא ad אH, et ex hypothesi AL $\sqcap$ LG, erit et אH $\sqcap$ h. sumta ergo LM $\sqcap$ h. *(2)* Itaqve *L* 12 distantia *(1)* LM sumetur talis, ut *(2)* regularum *L* 14 simplicius? *(1)* Similiter *(2)* In altero plano *(a)* , manifestum est etiam DS fore aeqvalem ipsi AL, vel LG, seu unitati, cum inter duas qvantitates aeqvales AL, LG media qvoqve proportionalis DS sit aeqvalis, de caetero *(b)* similiter *L* 21 putem. *(1)* Cum AL est 1, et DS, y erit LG $\sqcap$ y^2, ex constructione, supra explicata, qva efficitur ut sit DS media proportionalis inter *(a)* 1 et y^2 *(b)* AL et LG. *(2)* Ex *L* 22 BRE *erg. L* 22 CθF *erg. L* 24 qvia *(1)* ⟨DS⟩ inter duas priores proportione media est, *(2)* LG inter *L*

hy^2 quoniam initio motus cum LG esset unitas $\sqcap AL$, puncto G in (G) existente, et puncto M in (M) erat $L(M) \sqcap h$. Patet ergo angulum GLM, aequalem semper angulo $(G)L(M)$ esse talem, ut LM sit aequalis producto ex multiplicatione ipsius LG per f. Nam LM est ad $L(M)$ seu ad h ut LG ad $L(G)$ seu ad 1. Ergo $LM \sqcap \dfrac{LG \text{ multiplicata per } h}{\text{divisa per } 1}$. Et quia $LG \sqcap y^2$ ex dictis, erit $LM \sqcap hy^2$.

Eadem methodo et caetera demonstrantur, nam quia LM vel $G\aleph$ est hy^2, ideo $\aleph H$ erit hy^4, cum in quolibet Triangulo ipsi ALG simili, quale est $G\aleph H$, altitudo ut $G\aleph$ per y^2 multiplicata det basin ut $\aleph H$. quandoquidem $\aleph H$ est ad $G\aleph$, ut y^2 ad 1. seu ut LG ad AL. Adeoque $\aleph H \sqcap \dfrac{G\aleph y^2}{1}$ sive hy^4. Porro cum y^2 esset 1. seu $LG \sqcap AL$ tunc $\aleph H$ erat h. eodem autem tempore per praeparationem instrumenti paulo ante factam MN, sive $\aleph P$ erat f. Idem autem semper manet angulus $\aleph HP$, etiam in progressu operationis, ergo ut $\aleph P$ erat ad $\aleph H$ tunc cum y vel y^2, esset 1, seu ut h ad f, ita nunc quoque quocunque assignabili motus momento, qualiscunque sit y^2 vel LG; $\aleph P$ ad hy^4, sive $\aleph H$ erit; nempe $\dfrac{\aleph P}{hy^4} \sqcap \dfrac{f}{h}$. ergo $\aleph P \sqcap fy^4 \sqcap MN$. Iisdem prope verbis ostendetur NO, vel $\beth Q$ semper valere dy^6, et OB, by^8. In altero plano, patet DT esse ly, nam tunc cum DS vel y esset 1. DT erat l, ergo tunc erat DT ad DS, ut l ad 1. At eadem perpetuo manet ratio ob eundem semper angulum DST, ergo nunc quoque cum DT valet y. DS vel $S\daleth$ valebit ly. Hinc porro sequitur, $\daleth V$ valere ly^3 quoniam SF, parallela ipsi AB, unde Triangulum $S\daleth V$ simile Triangulo ALG, adeoque $\daleth V$ ad ly seu $S\daleth$, seu ut AL ad LG seu y^2 ad 1. Unde $T(Y)$ vel $\daleth X \sqcap gy^3$. Nam quando y est unitas $\daleth V$ sive ly^3, erit l, jam ex praeparatione, quando y est 1, $\daleth X$ aut $T(Y)$ est g. Est ergo tunc $\daleth X$ ad $\daleth V$ ut g ad l. Jam eadem semper manet ratio, quoniam idem durante motu angulus $\daleth VX$. et

1 initio motus *erg. L* 7 hy^4, *(1)* cum *(a)* angulus *(aa)* ALG, *(bb)* G$\aleph$H, ipsi ALG aeqvalis semper efficit, ut multiplicet per y^2, sive efficiat, ut G$\aleph$ in *(b)* Triangulum G$\aleph$H, ipsi ALG simile *(c)* angul *(d)* in Triangulo, *(2)* qvia *(3)* cum *L* 12 seu … ad f, *erg. L* 14 $\sqcap$ MN. *(1)* simili methodo demonstratur *(2)* totidem *(3)* iisdem *L* 15 by^8. *(1)* et DT, *(a)* LY *(b)* ly, et TY, gy^3, et Yλ, ey^5, et $\lambda\mu$, cy^7, et et μC, y^9, qvoniam ex hypothesi tunc cum y esset unitas valebant d, b, l, g, e, c, 1, ex hypothesi factae praeparationis, *(aa)* Triangula autem *(bb)* anguli autem transversalium ad parallelas, durante motu iidem semper mansere. *(2)* In *L* 18 vel S$\daleth$ *erg. L* 18 f. SF. … unde *erg. L* 19 S$\daleth$, *(1)* | ut *nicht gestr.* | y^2 ad 1 *(2)* seu *L* 20 Unde *(1)* demonstratur $\daleth$X vel *(2)* T(Y) vel *L* 20 unitas $\daleth$V *(1)* valebit l. ⟨et⟩ *(2)* (: id est ly^3 :) *(3)* sive *L* 21 f. ut l ad g. *L ändert Hrsg.*

proinde Triangulum $V\daleth X$ semper simile manet; quare semper $\daleth X$ ad ly^3 sive ad $\daleth V$ ut g ad l, sive $\dfrac{\daleth X}{ly^3} \sqcap \dfrac{g}{l}$, unde $\daleth X \sqcap gy^3 \sqcap TY$. Iisdem prope verbis ostendetur $Y\lambda$ sive הa valere ey^5, et $\lambda\mu$, cy^7, et μC, y^9. Ac proinde veritas aequationum omnium sub signo ☿ recensitarum ostensa est.

Quoniam vero eadem aequatio plures habere potest radices reales, hinc etiam toties durante machinae motu evenire debet, ut $A\omega$ et BC, fiant aequales, ac proinde una eademque operatione invenientur radices Aequationis omnes, quod in numerosa potestatum resolutione qualem Vieta invenit, non procedit; hoc loco autem in numeris non minus quam lineis praestatur. At, inquies, ignorari quousque motus continuari debeat, ad radices omnes inveniendas. Respondeo per doctrinam de Aequationum determinationibus sive limitibus facile praefiniri terminos, quos y inutiliter excedat: Sed et sine calculo, manifestum est, cum hoc loco omnes radices sint verae, maximam ex ipsis, esse termino cognito secundo, summae scilicet omnium, minorem. Quare inventis etiam aliquot ex ipsis, facile et summa residuarum, quam maxima ex ipsis excedere non possit, cognoscitur. Quantitatem autem qualibet aequationis propositae radice minorem haberi necesse est, non enim perinde decrescendo, ut crescendo in infinitum iri potest; facile enim ad finem motus regrediendo sive claudendo machinam pervenietur; ut proinde radicem si qua est inferior unitate, occurrere necesse sit. Porro inventae in lineis radices, facile in numeris habentur, quantumlibet exactis, si circino ad scalam quandam quantum satis est subdivisam transferantur. Unum desiderari dicet aliquis, ut scilicet radices in numeris veris habeantur, quando sunt rationales, quod praestat calculus Vietae. Sed quanquam ad usum, id necesse non sit, ausim tamen ab hac quoque machina promittere. Nam statim agnoscetur, si divisores ultimi termini, inventis radicibus proximi, aequationem multiplicatione producere potuerunt. Idem etiam re ad numeros non reducta (: constructio enim per instrumenti naturam pure Geometrica est :) ad radices aequationum literalium rationales, si quae sunt, facile agnoscendas sufficit. Breviter ab hoc Instrumento unico tantum momento praestatur in lineis quantum prolixis et variis praeparationibus

18–20 Porro ... transferantur *erg.* *L* 26 f. instrumento *(1)* exacte elaborato *(2)* unico tantum | momento *erg.* | praestatur *L* 27 qvantum *(1)* omnium curvarum in Geometriam a Cartesio introductarum *(2)* omnibus prolixis curvarum praeparationibus *(3)* prolixis *L*

8 invenit: Fr. VIÈTE, *De numerosa potestatum resolutione*, 1600 (*VO* S. 163–228).

curvarum omnium in Geometriam a Cartesio introductis; et in numeris quantum calculo praeclare sane sed mire anxio et impedito, a Francisco Vieta invento: ut nesciam an in eo genere aliquid ultra exactam Instrumenti elaborationem vel optari possit. F i n i s.

2 praeclare sane sed *erg. L*

25. DE TABULIS ANALYTICIS CONDENDIS
[24. Dezember 1674 – Anfang 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 444. 1 Bl. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 444 v°, Bl. 444 r°. Cc 2, Nr. 899

Datierungsgründe: **[noch]**

De Tabulis Analyticis condendis

Cum Calculo Analytico sive literali per instrumenta vix subveniri possit (: excepto unico meo, quod Machinam Combinatoriam appello :), danda opera est, ut Tabulae quaedam condantur, quibus habitis pleraque facile exequi liceat. Eae vero Tabulae longe alterius erunt naturae, quam Algebrista quispiam sibi persuasurus fuisset. Neque enim sufficit Aequationes unius incognitae ad aliquot usque dimensiones exhibere, earumque dare radices; item formularum recensere divisores. Sed ad aequationes etiam, imo potissimum, plurium incognitarum ascendendum est. Porro quod attinet formularum divisores rationales, non puto opus esse tabulis, nam ope artificii Huddeniani, nunc unam nunc aliam literam pro incognita sumendi, facile judicari potest, an formula quaedam sit divisibilis. Sed et in aequationibus tam literalibus quam numericis, divisores rationales si qui sunt, momento exhibet instrumentum meum Algebraicum, quoniam exhibitis reapse radicibus statim ostendit, quinam termini ultimi divisores ei proxime accedant. Idem instrumentum meum ad calculorum comprobationes more servit, ipsum enim errori nullo

8 f. qvaedam *(1)* oper *(2)* condantur *L* 10 qvispiam *(1)* communis – *(2)* sibi *L* 10 fuisset. *(1)* Neqve enim id *(a)* est *(b)* magni facio *(aa)* aeqvationes ordi *(bb)* aeqvationum formulas recensere, earumqve divisores recensere; *(2)* Neqve *L* 11 incognitae *(1)* exhi *(2)* ad *L* 12 divisores. *(1)* Nam qvod ad radices attinet, eae si sunt irrationales, *(a)* nunc qvide *(b)* separatae sunt tractationis, *(2)* sed *L* 13 est. *(1)* Primum *(2)* Porro *L* 14 esse *(1)* mul *(2)* tabulis *L* 15 an *(1)* ae *(2)* formula *L* 15 f. divisibilis. *(1)* In *(a)* numeris *(b)* numericis qvoqve aeqvationibus qvoniam radix in numeris *(2)* Sed *L* 17 qvoniam *(1)* statim e *(2)* exhibitis *L*

8 Machinam Combinatoriam: Vgl. N. 29. 14 ope artificii Huddeniani: Vgl. J. Hudde, *De reductione aequationum*, 1659, *DGS* I S. 406–506, insbesondere Regel 21, S. 496 f. 17 instrumentum meum Algebraicum: Vgl. N. Cc 2, Nr. 827, Cc 2, Nr. 815 und Cc 2, Nr. 816.

subjectum est, saltem non magno; etsi minus exacte Elaboratum poneretur. Sed quod attinet ad divisores irrationales, eorum velim tabulam condi, ut appareat, an formula quaedam proposita dividi possit per irrationalem, minoris dimensionis quam quae est ipsius formulae. Nam si ipsi formulae dimensione est aequalis: comprehendetur in Tabula generali radicum irrationalium omnium aequationum, quam inveniri posse non despero. Velim ergo primo dari Aequationum omnium unius incognitae generalissime expressarum radices irrationales, dimensione aequales, ad 10^{mum} v. g. gradum usque, aut 100^{mum} si velis; credo enim habitis aliquot, in caeteris progressionem apparituram. Deinde velim exhiberi earum certo modo affectarum radices irrationales dimensione inferiores si qui sunt. Inde velim exhiberi formularum quarundam nobiliorum divisores rationales; a divisoribus progrediendum erit ad componentes; nempe eadem formula in multas alias resolvi potest infinitis fere modis, ex quibus quaedam etiam irrationales; ibi vero sufficiet formularum nobiliorum exhiberi componentes. Cumque etiam Aequatio turbari possit; seu ex Aequatione converti in Analogiam; specimina elegantiorum exemplorum dari intererit sed haec de componentibus et analogiis pro parergis habenda. Primarium enim est, ut data aequatione, inveniamus incognitae valorem. Itaque primum aequationum unius incognitae, utcunque affectarum recensendae radices; sive incognitarum valores puri. Inde ascendendum ad aequationes duarum incognitarum, ubi primum aequationes duarum incognitarum, quae sunt ad eundem locum, recensendae; ut scilicet aliae oblatae ad eas reducantur; et hic erit catalogus Curvarum Analyticarum in plano descriptibilium. Loca autem intelligenda sunt, rectarum ad curvarum terminatarum, quae omnes vel parallelae inter se, vel in uno puncto concurrentes; et si parallelae vel angulos ad directricem facientes rectos, vel obliquos. Post

2 irrationales, *(1)* eos velim *(2)* eorum *L* 6 dari *(1)* Aeqvationum omnium unius incognitae Radices *(2)* Tabulam Aeqvationum omnium unius incognitae *(3)* Aeqvationum *L* 7 irrationales, *(1)* qvales ad 20^{mum} *(2)* dimensione *L* 9 exhiberi *(1)* earum di *(2)* memorabiliores ex ipsis divisores *(3)* earum divisores irrationales *(4)* earum *L* 9 f. affectarum, *(1)* ration *(2)* radices *L* 13 infinitis fere modis *erg.* *L* 15 f. Analogiam; *(1)* exemplo *(2)* specimina *L* 17 habenda. | Itaqve *gestr.* | primarium *L* 20 f. ubi *(1)* explicanda erunt prima loca *(2)* primum *L* 22 catalogus *(1)* plana *(2)* Curvarum *L* 23 sunt, *(1)* para *(2)* ductarum ex a *(3)* rectarum *L*

curvarum catalogum, quales Huddenius proximo supra Conicas gradu ait esse circiter 50. Nimirum primo exhibebuntur aequationes secundi gradus duarum incognitarum; inde tertii gradus duarum incognitarum; inde quarti, etc. et ita catalogus omnium curvarum Geometricarum ad gradum usque decimum aut ultra. Adjici poterunt earum tangentium, centrorum, focorum, dimensionum aliarumque functionum calculi sive Tabulae, describendi quoque modi illustriores; et theoremata insignia. Recensitis aequationibus duarum incognitarum, et ad certa loca sive curvas reductis; veniendum est ad combinationem duarum aequationum duarum incognitarum. Et exhibitis aequationum catalogis, positis scilicet duabus aequationibus duarum incognitarum inter se combinatis, e regione ponendus est cujuslibet incognitae valor absolutus. Jam progrediendum ad aequationes trium incognitarum, seu ad loca ad superficiem, et exhibendus primum Catalogus omnium superficierum Analyticarum ad certum usque gradum, ut appareat determinatus earum numerus; adjiciendae earum tangentes, functiones; centra, foci, etc. et theoremata nobiliora ex calculi natura pendentia. Post catalogum locorum trium incognitarum veniendum ad combinationes duarum aequationum trium incognitarum ut appareat quomodo reduci possint, ad aequationes duarum incognitarum scilicet nunc hac nunc illa incognita elisa, unde quaelibet regulariter combinatio aequationum 2 incognitarum poterit revocari tribus modis diversis ad duas aequationes duarum incognitarum. V. g. si duae aequationes et tres incognitae, v. g. x. y. z. potest elidi z, et restabunt duae aequationes in quibus non nisi x. et y. Eodem modo elidi potest x, vel y. Ubi rursus considerandum est fieri posse, ut inter illas tres aequationes jam sint, in quibus non sunt omnes incognitae. Tandem veniendum est ad con3nationes aequationum trium incognitarum, et singularum dandus

1 f. catalogum, *(1)* exhi *(2)* qvales Huddenius | proximo *erg.* | supra ... 50. *(a)* ipsae aeqvationes erunt recensendae. explicandumqve. Forte *(b)* Nimirum *L* 5 dimensionum *erg. L* 5 functionum | et describendi modi *erg. L*, *streicht Hrsg.* | calculi *L* 5 f. describendi ... insignia *erg. L* 11 superficiem, *(1)* qvarum exhibendus *(2)* et *L* 15 appareat *(1)* qvot *(2)* | qvod modis *ändert Hrsg.* | reduci *L* 17 regulariter *(1)* aeqvatio trium c *(2)* combinatio *L* 18 ad *(1)* aeqvatio *(2)* duas *L* 18 incognitarum. *(1)* Inde veniendum *(2)* V. g. *L* 20 y. *(1)* vel aliter *(2)* Eodem *L* 20 vel | y. *ändert Hrsg.* | *(1)* potest etiam fi *(2)* Ubi *L* 22 ad *(1)* conternationes *(2)* con3nationes *L*

1 Huddenius ... ait: Eine Methode Huddes zur sukzessiven Generierung von Kurven höherer Ordnung stellt Schooten im Abschnitt *De lineis curvis superiorum generum* in Fr. v. SCHOOTEN, *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, 1657, S. 475–480 vor. 21 tres aequationes: Bislang hat Leibniz in diesem Stück nur Kombinationen aus zwei Gleichungen betrachtet.

valor purus. Eodem modo ad altiores praecedendum v. g. ad decimum usque gradum, et in singulis procedendum ordine, v. g. aequatio 6 dimensionum primum 6 terminorum, deinde 5 terminorum etc. et si 5 terminorum decent vel secundus, vel tertius, vel quartus etc. Quando autem loquor de aequationum formulis loquor de plane absolutis seu generalibus, v. g. $y^3 + ly^2 + amy + a^2n \sqcap 0$. ut omnibus accommodari possint. Itaque ego meam aequationem eodem tractans modo novas habebo aequationes collatitias, nam v. g. si sint aequationes duae (: vide schediasmata Xb. 1674. *De trochoeidibus* :)

$$\begin{array}{llll} x^3 + 2ax^2 + 4afx + 2af^2 \sqcap 0. & \text{et} & x^2 - 2f\ x + f^2 \sqcap 0 \\ \quad + 2f \quad + \ f^2 & & \quad -2\frac{y^2}{a}.. - y^2 \\ \qquad\qquad - 4z^2 & & \end{array}$$

quaero in Tabula harum duarum aequationumcombinationes:

$$x^3 + lx^2 + amx + a^2h \sqcap 0 \quad \text{et} \quad x^2 + nx + ap[\sqcap 0]$$

Elidendo x, invenietur in Tabula aequatio haec:

12 *Dazu am Rand:* NB. pro $2af^2$, pone a^2h.

1 praecedendum *(1)* Hoc *(2)* v. g. *L* 2 v. g. *(1)* primum aeqv *(2)* aeqvatio 6 *(a)* incognita *(b)* dimensionum *L* 5 ut | postea *gestr.* | omnibus *L* 8–11 $\sqcap$ 0 *(1)* suppono pro priore *(2)* qvaero *L* 11 Tabula *(1)* has *(2)* harum *L* 12 amx+ *(1)* $2af^2$ *(2)* a^2h *L* 13 elidendo *(1)* fiet *(2)* x, *(a)* fiet aeqvatio hoc *(b)* invenietur *L* 13–125,1 haec *(1)* $\frac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap + n^2ap}{2af^2 - lap + nam - ln^2 + n^3} \sqcap \frac{-2af^2 + lap - nap}{am - ap - ln + n^2}$ *(2)* $\frac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap + n^2ap}{ha^2 - lap + nam - ln^2 + n^3} \sqcap \frac{-ha^2 + lap - nap}{am - ap - ln + n^2}$ *L*

7 *De trochoeidibus*: VII, 5 N. 18. 11–125,3 quaero ... $\frac{f^2 - y^2}{a}$: Ein eigenständiges Werk von Leibniz mit solchen Kombinationen zweier Gleichungen konnte nicht gefunden werden. Den Lösungsansatz des allgemeinen Problems, bestehend aus den Gleichungen und der Beziehung, die sich aus der durch Vorzeichenfehler beeinträchtigten Elimination von x ergibt, übernahm Leibniz aus VII, 5 N. 18 S. 166 Z. 18 bis S. 167 Z. 7. Dabei wurde nachträglich, wie in der Randnotiz in Z. 14 vermerkt, $2af^2$ durch a^2h ersetzt. Richtig müsste die linke Seite der Gleichung von S. 125 Z. 1 lauten: $\frac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap - n^2ap}{-ha^2 + lap - 2nap + nam - ln^2 + n^3}$. — Hier und in den folgenden Gleichungen (Z. 12 – S. 125 Z. 3) bezeichnet a sowohl einen der Koeffizienten des zu lösenden Problems aus Z. 8–10 als auch denjenigen des generellen Problems in Z. 12 und seines Lösungsansatzes.

$$\frac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap + n^2ap}{ha^2 - lap + nam - ln^2 + n^3} \sqcap \frac{-ha^2 + lap - nap}{am - ap - ln + n^2}$$

Quae aequatio jungatur novis assumtis aequationibus:

$$l \sqcap 2a + 2f. \mid am \sqcap 4af + f^2 - 4z^2. \mid a^2h \sqcap 2af^2. \mid n \sqcap -2f - \frac{2y^2}{a}. \mid p \sqcap \frac{f^2 - y^2}{a}.$$

Habemus ergo aequationes 6. incognitas 7. ex quibus elisis caeteris retinendae, seu pro cognitis sumendae y. et z. Atque ita rursus in tabula sub 6 aequationum conjunctione, invenies statim sine calculo valorem. Ubi maximus apparet usus dispersionis in minuta seu multas aequationes particulares, ut sine calculo inveniatur valor. Video jam, non videri necessarium, ut separatim exhibeantur conternationes et combinationes 4 aequationum; semper enim eas quas elidere non vis cognitas finges, et res semper reducetur ad casum problematis determinati. Sufficit ergo tantum in Tabulis exhiberi omnium incognitarum valores datis totidem aequationibus.

2 aeqvatio *(1)* conferatur novis *(a)*: *(b)* assu *(2)* jungatur *L* 3 f^2 |+ *ändert Hrsg.* | 4z^2 *L*
5 z. *(1)* Et huc jam illud video non esse. *(2)* Atqve *L* 8 exhibeantur *(1)* redu *(2)* conternationes *L*
8 f. aeqvationum; *(1)* qvoniam *(2)* semper *L*

4–7 Habemus ... valor: In den Überlegungen zur Lösung des benannten Gleichungsproblems in Z. 1–3 wirkt sich die doppelte Verwendung des Koeffizienten a aus. Zudem ordnet Leibniz hier die Koeffizienten des ursprünglichen Problems von S. 124 Z. 8–11 den Unbekannten zu.

26. DE SOLIDIS ANALYTICIS
[Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 17 Bl. 11+17. 1 Bog. 2°. $\frac{1}{3}$ S. auf Bl. 17 v°. — Auf dem restlichen Bogen N. 24U1.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: N. 26 ist vor dem auf Dezember 1674 datierten N. 24U1 auf den Bogen geschrieben worden, vermutlich in Zusammenhang mit den Exzerpten aus J. Wallis, *Mechanica*, 1670–1671 (VIII, 2 N. 8).

Solida Analytica possunt homogenea esse figuris quadratricibus non analyticis. Imo id quotidie evenit, quia solidorum elementa sunt spatia quorum spatiorum saepissime non habetur quadratura.

Cylindri Hyperbolici residuum ungula semiquadrantali absecta est homogeneum figurae logarithmorum. Idem de aliis solidis facile fingi potest. Hinc etiam quoties problema quoddam Mechanicum eo redactum est, ut quaeratur descriptio cujusdam figurae quadratricis, exhibeatur solidum quoddam Geometricum, id figurae quaesitae homogeneum erit. Et dici poterit vires esse ut solidorum ejusmodi portiones.

9 analyticis. | Exemplum in Hyperbola dari potest. *gestr.* | Imo *L* 12 f. homogeneum *(1)* figurae qvae sit f *(2)* figurae *L*

---

12 ungula semiquadrantali: Leibniz kennt den Ausdruck aus J. Wallis, *Mechanica*, 1670–1671, pars 2, S. 547 f. (*WO* I S. 918 f.); vgl. VII, 6 N. 34 S. 385.

27. NOTA AD SOVERUM
[Oktober 1676 – März 1679 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XI 18 A S. 439–440. 1 paginierter Zettel 17,5 × 2,5 cm. 1 S. auf S. 439, S. 440 leer.

Datierungsgründe: Leibniz notierte sich in der zweiten Oktoberhälfte 1676 Informationen über das Buch von Soverus aus dem Gregory-Collins-Briefwechsel (III, 1 N. 88_2 S. 487). Möglicherweise hat Leibniz bereits damals ein Exemplar in der Royal Society konsultiert, spätestens dürfte er die Notizen anhand des aus dem Nachlass von Martin Fogel für die herzogliche Bibliothek in Hannover erworbenen Exemplars (Nm-A 754) gemacht haben, in das er auf den S. 373 u. 377 Randbemerkungen eingetragen hat. Am 10./(20.) März 1679 hat Leibniz ausgehend vom Beweis der Prop. 4 in Buch 6 (S. 378 f.) seine Untersuchung *Tentamen ad dimensionem arcus alicujus circularis* (LH 35 VII 1 Bl. 34–48) begonnen.

Bartholomaeus Soverus in proportione curvi ad rectum promota defendit motum esse Geometricae tractationis. Quaedam demonstrat theoremata, ut ostenderet quibus Datis habituri essemus Quadraturam Circuli. Jam observavit illam in Hyperbola numerorum decretionem. Editus est ejus liber 1630. apud Variscum Varisci. Patavii 4°.

---

13 defendit: B. SOVERUS, *Curvi ac recti proportio promota*, 1630, S. 271–276, 361. 13 demonstrat: *a. a. O.*, S. 371–373 [Marg.]. 14 f. observavit: *a. a. O.*, S. 359 f.

28. MEA GEOMETRIA
[Juli – September 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 14 Bl. 21. **[Größe: noch]**. 3 Zeilen auf Bl. 21 v°. Vorderseite leer. — Gedr.: Cc 2, Nr. 991.
Cc 2, Nr. 991.

Datierungsgründe: Ausschlaggebend bei der Datierung erweisen sich Leibniz' Vergleiche seiner eigenen Leistungen mit denjenigen Descartes. Anfangs verweist Leibniz lediglich auf Bewertungen der Arbeiten von Descartes durch Fachkollegen (VII, 1 N. 6_3, 110, 114 (= VII, 4 N. 16_4); VII, 4 N. 36; VII, 7 N. 10, 11, 15) oder geht Hinweisen auf Unzulänglichkeiten des Werks nach (z. B. VII, 7 N. 48), ohne seine eigenen Beiträge zur Geometrie im Vergleich dazu einzuordnen. Mit den fortschreitenden Arbeiten zur Kreisquadratur erarbeitet Leibniz sodann ein Narrativ, in dem er seine Abweichungen gegenüber Descartes und seine Neuerungen in der Konzeption der Geometrie und der Systematisierung von Kurven durch ein Anknüpfen an andere Traditionslinien motiviert (so z. B. III, 1 N. 38, 39; VII, 3 N. 38_{12}; VII, 4 N. 36; VII, 5 N. 26; VII, 7 N. 49; VII, 8 N. 6). Gleichzeitig vermeidet er, direkte Kritik an Descartes zu äußern, seine eigenen Leistungen explizit zu benennen oder sie gar als überlegen zu bezeichnen. Für den Sommer 1676 ist schließlich eine intensive Beschäftigung mit der inversen Tangentenmethode belegt (III, 1 N. 89; VII, 5 N. 88–91). Leibniz ist überzeugt, im Vergleich zu Descartes eine in jeder Hinsicht vorzuziehende Methode entwickelt zu haben, die insbesondere die nach allgemeiner Auffassung bestehenden *difficilia* und *impossibilia* des descartesschen Ansatzes zu lösen im Stande sein soll (VII, 5 N. 90, 91; VII, 6 N. 51). Kontrastierend zur noch kurz zuvor stets sachlich formulierten inhaltlichen Kritik (z. B. VII, 6 N. 20) weist er bei der Lösung der 2. Debeauneschen Aufgabe zudem wiederholt darauf hin, dass er Descartes in der Geschwindigkeit der Lösung nun um ein Vielfaches übertreffen könne (VII, 5 N. 90, 91; VII, 6 N. 49_1, 51). In der Kritik an Descartes nimmt er außerdem Gedanken aus einem wohl Ende Mai 1676 von Collins an Tschirnhaus gerichteten Brief (III, 1 N. 82) auf, die schließlich den letzten Baustein eines neuen Narrativs ausmachen. Bereits im August 1676 wird dieses durch einen Brief an Oldenburg (III, 1 N. 89) einem größeren Personenkreis sichtbar. Wenn auch deutlich weniger konkret in seiner Kritik und um vieles zurückhaltender im Tonfall, weist das vorliegende Stück eine große Übereinstimmung mit dem Grundtenor dieses neuen Narrativs auf. Zudem besteht im letzten Satz des Stücks eine Ähnlichkeit in der Formulierung mit VII, 5 N. 91 S. 605 Z. 4–6 von Juli 1676. Somit kann das vorliegende Stück mit aller Vorsicht in die Zeit von Juli 1676 bis zu Leibniz' Abreise nach England datiert werden.

Mea Geometria

Jam eo mihi videor pervenisse ut non habeam cur sim amplius de Geometria valde solicitus. Possum nunc non minus audacter loqui quam Cartesius et fortasse majori jure. Praesertim cum absolverim quae video ei difficilia visa, et partim impossibilia.

34 absolverim | multa *gestr.* | qvae *L* 34 ei *(1)* difficilis imposs *(2)* difficilia *L*

29. DE MACHINA COMBINATORIA, SIVE ANALYTICA

[September 1674 – Anfang 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 26 Bl. 13. 1 Bl. 4°. 1 1/2 S. Auf Bl. 13 v° am rechten Rand unten quer geschriebene Notiz in unbekannter Hand: ad. 50.
Cc 2, Nr. 818.

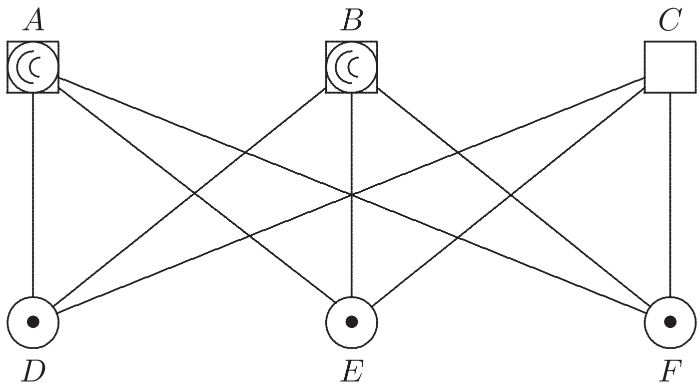
Datierungsgründe: Leibniz nutzt die Bezeichnung *Machina Analytica* erstmals in VII, 1 N. 8. Obwohl die Bezeichnung im später entstandenen Stück VI, 3 N. 44 im Desiderat einer *Machina, quae pro nobis faciat operationes analyticas,* erneut anklingt, findet sich diese oder eine andere Bezeichnung der dort beschriebenen *machina* im gesamten Stück nicht. Durch die Charakterisierung der Funktionen wird deutlich, dass VI, 3 N. 44 dieselbe *machina* wie das vorliegende Stück zum Gegenstand hat. Aufgrund der fehlenden Bezeichnung und der zugleich auftretenden Unterschiede zur in VII, 1 N. 8 benannten *Machina Analytica* kann VI, 3 N. 44 als Auftakt zur Arbeit an der im vorliegenden Stück als *Machina Analytica sive Combinatoria* titulierten *machina* gewertet werden. Die Entstehung von VI, 3 N. 44 stellt somit einen *terminus post quem* für N. 29 dar. Versteht man die Verwendung von *Machina Combinatoria* als alleinige Bezeichnung in N. 25 als Aufgabe der in VII, 1 N. 8 für eine in ihren Grundprinzipien abweichende *machina* verwendeten Bezeichnung *Machina Analytica,* um eine bessere Unterscheidbarkeit beider Ideen zu erzielen, so ist die Entstehung von N. 25 nach derjenigen von N. 29 anzusetzen. Eine solche Datierung zwischen VI, 3 N. 44 und N. 25 ist insofern stimmig, als dass Leibniz im vorliegenden Stück *signa ambigua* erwähnt, mit denen er sich im relevanten Zeitraum intensiv beschäftigt. Auch die Ausführung der Darstellungen der Kugeln im Diagramm stimmt mit der Art und Weise in anderen Handschriften derselben Zeit überein. Ebenso werden in diese Zeit Stücke datiert, in denen er sich intensiv und systematisch mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt und die Lösung von Systemen mehrerer Gleichungen behandelt.

Saepe cogito de Machina Combinatoria, sive Analytica, qua et calculus literalis perficiatur. Ut si sint aliquot aequationes, et totidem incognitae, id agitur ut omnes ordine incognitas tollamus usque ad unam. Omnis calculus iste redit ad additionem subtractionem Multiplicationem et divisionem.

25 ut *(1)* inveniamus valorem abs *(2)* omnes *L*

---

24 f. perficiatur: Einzelheiten eines instrumentellen Ansatzes zur Lösung desselben technischen Problems führt Leibniz in VII, 1 N. 142 aus.



[*Fig. 1*]

Sint plurima frusta, *A*. *B*. *C* tot scilicet quot ad summam membra habere potest calculus qui faciendus est. Haec frusta poterunt quidem facile ad numerum millenarium ascendere; pro calculis complurium incognitarum, sed et ille sufficiet credo. Sint totidem globi, *D*. *E*. *F*. quot literae sive cognitae sive incognitae. Ex quolibet globo exeat filum ad quodlibet frustum, quo filo regetur forma aenea vel stannea gerens literae characterem. Cum globum tanges in omnibus frustis litera ejus apparebit, si modo omnibus frustis laxata sunt frena. Nam in quibus laxata non sunt non apparebit. Quod Elaterioli ope fieri potest, quod cedet, tunc cum totum resistet. Aliisque multis modis pro multitudine scilicet frustorum, simplicioribus: aperies autem tot frusta quot membra calculus habere debet. Imo statim ab initio utile erit plura aperire frusta pro uno eodemque calculo; ita ut idem membrum appareat saepius, ut si debeat multiplicari $\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}$ in $\begin{matrix}d\\e\\f\end{matrix}$ in $\begin{matrix}g\\h\\r\end{matrix}$, novem aperiantur frusta pro ipso *a* novem alia pro ipso *b*, et totidem pro *c*. Erunt ergo aperta 27 frusta nam et sub finem calculi tot erunt termini. Inde ex his frustis ipsius *a*, tria, item ex frustis ipsius *b* tria, et ex frustis ipsius *c*. itidem tria tantum aperiantur, quando trahimus globum *d*, et quando globum *e*, et quando globum *f*. Denique horum 27. frustorum triens aperietur cum tanges per *g*, et alius triens cum tanges *h*, et alius cum tanges *r*.

2 A. B. C *erg. L* 3 est, *(1)* sint f *(2)* Haec *L* 4 calculis *(1)* decem incognitarum *(2)* complurium *L* 6 regetur *(1)* character *(a)* ge *(b)* pergerens *(2)* forma *L* 6 gerens *(1)* nomin *(2)* nomen charact *(3)* literae *L* 10 membra *(1)* |ad *nicht gestr.*| rem *(2)* calculus *L* 12 in *(1)* $\begin{matrix}\mathrm{g}\\\mathrm{h}\\\mathrm{l}\end{matrix}$ *(2)* $\begin{matrix}\mathrm{g}\\\mathrm{h},\\\mathrm{r}\end{matrix}$ *(a)* novem *(b)* sex *(c)* novem *L* 14 a, *(1)* pari *(2)* tria, *L* 17 cum |tangens *ändert Hrsg.*| h, *L*

Sed quoniam calculus ostendere potest longe post debere adhuc id ipsum multiplicari per aliam quantitatem ut $\begin{matrix} m \\ n \\ p \end{matrix}$ tunc quilibet ex terminis prioribus, ut *aer* rursus debet triplicari, vel si mavis m, 27^{cuplari}, et n itidem, et p itidem: et tunc non globos, sed frusta illa 27. in quibus *adg*, *adh*, etc. trahes, horum fila ad globos respondentia, mediantibus globis rursus trahent quidem ubique, sed non nisi apertis in locis apparebunt, ut primum in omnibus 27. ipsius m, post in omnibus 27 ipsius n, et denique ipsius p. In hoc ergo consistet artificium potissimum, ut non tantum trahantur frusta sed et trahant. Ita enim totus calculus factus momento propagari potest. Aperire frusta poterimus v. g. deprimendo nonnihil, ita, ut ipsa tractura facta rursus in statum ordinarium se restituant. Signa peculiari filo in singulis frustis repraesentari possunt, $+$. opus habet nullo, sed pro filo $-$ hoc fieri potest, ut bis tractu se mutet in $+$ seu abeat, tertia tractura se restituat. Idem poterit esse de quibuslibet aliis signis ambiguis litera repraesentatis. Cum idem globus saepius tactus idem quoque frustum saepius trahit cum effectu fit ut in eo frusto eadem litera ad plures ascendat dimensiones. Sed cum rursus ipso frusto aliud frustum trahimus, difficile mihi videtur efficere, ut idem numerus dimensionum in frusto quoque tracto sit. Et vix aliud concipi poterit medium quam hoc; ut eo ipso dum repetitis initio tractionibus crevit in frusto nunc trahente literae trahendae columna. An forte rectius fila plura ab eodem globo ad idem frustum ibunt parallela inter se, sed uno tractu non nisi unum habebit effectum (nulla nova apertura, sed ex natura rei) et ita unum post alterum, etsi literae non multiplicetur character forte, sed in eodem charactere numerus circumgyratione quadam. Quando autem trahitur frustum non per globum sed per aliud frustum, omnia fila quae in frusto trahente jam velut c a p t a sunt simul agent, etsi globum tantum trahant, et per globum aliud frustum, plus tamen ut faciant fieri potest, quam si traheret ipse globus, quia forte facere possumus, ut prolixius seu longius vel brevius attrahatur; quam si globum manu tetigissemus. Et ita cesset artificium

1 qvoniam *(1)* ex *(2)* calculus *L* 1 longe post *erg. L* 2 qvantitatem *(1)* Ubi utile *(2)* ut *(a)* 3 *(b)* $\begin{matrix} \mathrm{m} \\ \mathrm{n} \\ \mathrm{p} \end{matrix}$ *L* 2 ut | ael *ändert Hrsg.* | rursus *L* 4 horum *(1)* gl *(2)* fila *L* 4 respondentia, *(1)* per *(2)* mediantibus *L* 5 ut *(1)* in *(2)* primum *L* 9 ipsa *erg. L* 9 in *(1)* totum *(2)* statum *L* 10 habet *(1)* 0 *(2)* nullo *L* 13 cum effectu *erg. L* 15 dimensionum *erg. L* 17 columna | , seu filum eius ita factum brevius *gestr.* | . An *L* 18 rectius | ut *nicht gestr.* | | filo cuilibet additum sit aliud filum *gestr.* | fila *L* 21 qvadam. *(1)* Ut an *(2)* Sed *(3)* Qvando *L* 23 trahant, *(1)* sed p *(2)* tamen plus *(3)* et *L* 24 si *(1)* traherent ipsum frustum *(2)* traheret *L*

singularitatis filorum. Sed nondum satisfacit, subvenit tandem aliud artificium, nimirum globus trahit v. g. ter, literam cujusdam frusti. Ergo quaedam notae ut respondeant in frusto fieri potest. Ergo cum postea hoc frustum elevabitur filum illud transiens has notas ter vellicabitur, et ita exprimet tres dimensiones: et ita de caeteris, et hoc credo fere unicum esse remedium.

Porro eadem methodo etiam dividere poterimus; vel contrario motu, vel potius quia fila non possunt esse rigida atque adeo non servit regressus trahendo altius, seu longius. Sed tunc aperiemus non nisi ubi multiplicationis limitem tractio praeteriit, ne scilicet simul multiplicet et dividat.

Porro quoniam utile est non tantum conclusionem sed et vestigia calculi extare in charta, ideo impressoria arte, ex his characteribus semper exprimemus quae sunt ibi. Cum fiat, ut ex diversis multiplicationibus, idem membrum saepius confletur, hinc facilitate opus ad ista in unum jungendum aut destruendum. Ideo jam opus esset quoad frusta, ut in plano in quo sunt moveri sibique adjungi aut dejungi possint. Sed hoc caeterorum difficillimum, ob chordas sese implicantes.

Nota plura frusta non possunt simul elevari, alioqui idem globus simul tangeretur a pluribus quod confunderet. Nota etiam rectius deprimi quam elevari frusta.

Non ausim sperari hanc transpositionem in instrumento fieri posse.

1 satisfacit, *(1)* nimirum non *(2)* subvenit *L* 1 f. nimirum *(1)* filum *(2)* globus *L* 2 ut *erg. L* 5 fere *erg. L* 6 eadem *(1)* opera *(2)* methodo *L* 9 f. dividat. *(1)* Sed qvoniam labor describen *(2)* Porro *L* 12 multiplicationibus, *(1)* iidem *(2)* idem *L* 13 esset *erg. L* 13 f. frusta, *(1)* ut etsi summitas eorum sit in eodem plano, alia tamen aliis profundius per descendant *(2)* ut *L* 16 possunt | simuli *ändert Hrsg.* | elevari *L*

11 impressoria arte: vgl. die Überlegungen zur technischen Umsetzung einer Verbindung von Setzen und Drucken in VII, 1 N. 56.

30. GENERALIS DIATYPOSIS
Ende 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 249. 1 Bl. 4°. 2 S. Der Träger des Stückes hing ursprünglich mit jenem von N. 41 zusammen.
Cc 2, Nr. 00

Sub finem anni 1676

Generalis Diatyposis Methodorum mearum circa Mathesin puram

Methodi quas habeo sunt vel calculi, vel constructionis. Calculi initium est, ut nomina omnibus formis imponamus; ut absolvamus Tabulam formarum, et quomodo formae ex se invicem ducantur. Tabulae multiplicationum et divisionum; tum si literae aequiformes $a.\,b.\,c.$ tum si sint affecti progressionis Geometricae unius vel plurium $a + bx + cxx$, vel $a + bx + cy + dxy$, etc. Quin et Tabulae Differentiarum et Summarum ex quibus appareat quomodo plura in unum addita aliquando dent formulas satis simplices. Tabulae potestatum et regressus ex ipsis seu methodus extrahendi radices rationales, ex formulis. Summae et differentiae potestatum. Methodi directae sunt multiplicare, exaltare, differentias invenire. Methodi recip⟨rocae⟩ seu regressuum, sunt dividere, extrahere, summas invenire. Hae non semper absolvi possunt, nisi Signis praefixis. Huc pertinet quantitates in speciem impossibiles reducere ad possibiles, quando id fieri potest, vel saltem notare quod ad eas reducantur virtualiter.

De Rationibus et proportionibus, item de ratione replicata et communi mensura.

7 Methodorum *(1)* meorum *(2)* mearum *L* 7 f. puram *(1)* Sunt | Methodi, *erg.* | vel Calculi vel Constructiones. Et co *(2)* Methodi ... sunt vel *(a)* communes Numeris et lineis, vel propriae *(aa)* lineis *(bb)* Numeris, vel propri *(b)* calculi, vel constructionis. *(aa)* Calculus *(bb)* Calculi *L* 9 imponamus; *(1)* qvod ostendi *(2)* ut ... formarum; *(a)* Calculus directus *(b)* et qvomodo *L* 10 f. multiplicationum *(1)* et *(a)* formae *(b)* potestatum formulae; *(2)* et divisionum; ... aeqviformes *(a)*, tum si sint affecti ejus *(b)* a. b. c. *L* 12 Tabulae *(1)* Summarum, seu qvae *(2)* Differentiarum *L* 13 simplices. *(1)* ⟨Calculus regressus⟩ *(2)* qvorsum et Differentialia *(3)* Tabulae *L* 15 exaltare *(1)* reciproce, dividere *(2)*, differentias *L* 16 seu regressuum *erg.* *L*

De aequationibus et aequationum radicibus, seu radicibus affectis, et quando exacte extrahi possunt. De Resolvendo et ejus resolutione. De aliis resolvendi modis per extractiones utrinque. De extractionibus vel exactis vel per seriem infinitam, qualis et in potestatibus puris succedit. De aequationibus aequationem propositam dividentibus, de radicibus aequalibus. De uniformiter crescentibus aliisque. De aequationibus plurium incognitarum. Et primum fingendo eandem literam velut diversam, ita ut omnia reducantur ad aequationes rectangulares simplices quae si incompletae videndum quomodo suppleri possint. Hac methodo videtur compendiose obtineri posse resolutio aequationum, seu reductio radicum affectarum ad puras. Ordinaria vero methodus tollendi incognitas in eo consistit, ut semper exaltetur aequatio multiplicando eam per literam tollendam. Et omnes exaltatas componendo inter se, ut tollantur ordine potentiae altiores omnes. Methodus investigandi generalia pro seriebus indefinitis. Quod fit gradatim ascendendo ut obtineatur progressio. Hoc jam ante opus ad resolutiones aequationum unius incognitae. Methodus tollendi incognitam unam ex aequationibus duabus duarum incognitarum, coincidit cum extractione radicis per seriem infinitam tum scilicet tantum valor purus invenitur. Promovendus gradus ad tollendas incognitas plurium aequationum. Et inveniendos valores puros. Habita Tabula Tollendarum incognitarum, prope omnis calculus Algebraicus in potestate est, terminos Tabulae tantum explicando in nostris exemplis. Hinc jam veniendum ad methodum tollendi irrationales; et quomodo aequationis radix irrationalis exprimi possit per formulam. Jam veniendum ad problemata diophantea pro integris et pro numeris rationalibus. Et duplex solvendi methodus, una qua usu sum pro

1 aeqvationibus et *(1)* aeqvalis *(2)* aeqvationum divisoribus, et qvando *(3)* radicibus, *L* 3 f. de extractionibus... succedit *erg. L* 5 aliisqve. *(1)* De Methodo tollendi *(2)* de aeqvationibus *L* 10 tollendam *erg. L* 11 omnes. | Hac methodo etiam extrahitur radix pro seriebus infini *erg. u. wieder gestr.* | Methodus *L* 15 f. tum ... invenitur *erg. L* 16 tollendas *(1)* aeqvatio *(2)* incognitarum *(3)* incognitas *L* 18 est, *(1)* ⟨Tabulas⟩ *(2)* terminos Tabulae tantum *(a)* exprimendo *(b)* explicando *L* 19 f. qvomodo *(1)* aeqvatio qvae radices rationales non habet *(2)* aequationis *L* 20 formulam. *(1)* Item *(a)* ⟨qvo⟩ *(b)* de modo ⟨aeqv⟩ *(2)* Jam *L* 21 rationalibus *erg. L*

---

20 problemata diophantea: Leibniz scheint sich vor allem im Zeitraum von August bis Oktober 1674 intensiver mit diophantischen Gleichungen beschäftigt zu haben (vgl. VII 1, S. 468). Sie sind der Gegenstand einer Reihe an Stücken, die in VII, 1 gedruckt sind. So untersucht er dort in N. 116–124 Methoden, um diophantische Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen und in rationalen Zahlen zu lösen. In N. 116 behandelt er dabei auf S. 715 insbesondere auch ihre Beziehung zu Kegelschnitten.

reducenda novissime Curva Conica ad Quadraturam rationalem; altera, reducendi rem ad integros, et integros, exhibendo, donec ex progressione aliorum semper minorum integrorum necessaria, appareat in integris solvi non posse. De divisibilibus, de Numeris primitivis, ubi methodus mea ex progressione Geometrica inveniendi an datus numerus sit primitivus, aut quos habeat divisores. De summis numerorum, ubi de Numeris Combinatoriis. Item de Methodo pro summis ex summis radicum aequationibus, et rectangulorum, nam et summae rectangulorum ex potestatum summis; et ex summis rectangulorum, caeterarum formularum eodem modo compositarum omnium. De summis quantitatum ex progressione Geometrica derivatarum, id est ⟨cum⟩ Abscissae progressionis Geometricae, quaeritur summa ordinatarum. Item pro progressione Arithmetica, ubi est utile, procedere per $x-1$, x, $x+1$. De calculo differentiali serierum; seu ex data differentiarum proprietate invenire seriem. Quo pertinet inventio summarum. Ostensio quod quaedam talia Algebraice impossibilia exhiberi. De serierum Terminationibus et duarum serierum Concursu. De seriebus replicatis. Cum seriei progressio determinatur per Terminos praecedentes. De quantitatibus in quibus exponens indeterminata ingreditur exponentem, de tollenda incognita ex exponente per seriem infinitam. De modo reducendi series infinitas ad finitas, quando id licet. Sive de modo agnoscendi quando series infinita sit reducibilis ad aequationem finitam, vel algebraicam vel transcendentem. Item quia omnia problemata in non transcendentibus terminis concepta, revera tamen transcendentia reduci possunt ad summam seriei infinitae absolutae, vel terminationem Concursumve cum alia seriei replicatae; potest semper fingi aequatio homoptotos ad aliquam Parametrum, vel etiam aequatio cujus differentialis sit data. Restat duplex Methodus pro exhibendis optime quantitatibus determinatis, v. g. ratione Circuli ad qua-

2 ad integros, et *(1)* solvendo in integris *(2)* integros *L* 7 nam *(1)* ex summis, rectangulorum et *(2)* et summae *L* 9 f. id est ⟨cum⟩ *(1)* Numeri *(2)* Term *(3)* Abscissae progressionis *(a)* Arithmeticae *(b)* Geometricae *L* 11 ubi *(1)* opus est consc *(2)* est utile *L* 13 talia *erg. L* 13 exhiberi. *(1)* De Qvantitatibus Transcendentibus *(2)* | de *nicht gestr.* | qvantitatibus *(3)* de serierum *L* 14 Concursu | , seu *gestr.* | de seriebus *L* 14 Cum *(1)* series dantur supponendo *(2)* seriei *L* 15 indeterminata *(1)* oritur *(2)* ingreditur *L* 18 aeqvationem *(1)* incog *(2)* finitam *L* 21 aeqvatio *(1)* ⟨homoeoptotis⟩ *(2)* ⟨homoeoptotis⟩, seu *(3)* homoioptotos *(4)* homoptotos *L* 22 Restat *(1)* una *(2)* duplex *L*

1 reducenda: Vgl. VII, 6 N. 31 S. 368 u. N. 51 S. 618–621 (Quadratura prop. 43 sowie Scholium). 3 De divisibilibus: Vgl. VII, 1 N. 86–92. 21 homoptotos: Es handelt sich um eine spezielle Kurve; vgl. VII, 1 N. 6_1 S. 61 Z. 18–21.

dratum circumscriptum, quae determinat etiam, utrum sit possibile exhibere per finitam Algebraicam, et una quidem est per quotientes replicatos, ubi semel habebitur methodus, et contra inveniendi quotientes replicatos ex data aequatione, et contra ab aequatione ad series replicatas regrediendi. Altera methodus non minus determinata, sed ad praxin utilior, est reducere ad infinitos terminos progressionis Geometricae, vel bimalis, quod simplicissimum vel alterius, ut decimalis. Sed optimum erit loco decimalium sumere bimalis potentias, ut octonariam vel sedecimalem progressionem; vel etiam altiorum; et has unius ejusdemque progressionis progressiones conferre inter se. Hac ratione exprimantur omnes quantitates, quarum in praxi usus. Hinc quia omnis fractio exprimitur per seriem infinitam terminorum ex progressione Geometrica excerptorum periodicam, investiganda periodus, quam et jam inveni, et ope considerationis primitivorum, referendo ad divisiones terminorum progressionis Geometricae. Eodem modo progressio pro irrationalibus investiganda, ubi est periodi alteratio aliqua perpetua. Et hinc pro omnibus aequationibus algebraicis, denique pro transcendentibus. Hic methodus duplex calculandi, una admodum exotica nec dum satis excussa, per perpetuas Alternativas; altera per egregium compendium additionis characterum, cujus occasionem dedit Examen abjectionis Novenarii. Cum enim summa characterum certa lege inita, numeri divisibilis per alium; sit divisibilis per summam characterum, eadem lege initam numeri divisoris. Et quae in unum addita aliquid componunt, eorum characterum summae etiam characterum alterius summam, eodem modo componant; hinc cum idem incognitum, ex diversis modis

2 f. replicatos, *(1)* exhib *(2)* ubi ... methodus *(a)* ex qvotientibus replicatis regrediendi ad aeqvationes *(b)*, et contra *(aa)* ex his datis *(bb)* inveniendi *(aaa)* per *(bbb)* Qvotientes *L* 7 etiam *(1)* progressionem *(2)* altiorum *L* 9 omnes *(1)* Numeri *(2)* qvantitates *L* 9 usus. *(1)* ⟨Hinc vel⟩ *(2)* Hic opus ⟨ex–⟩ ⟨inv⟩ *(3)* Hinc *L* 10 infinitam *(1)* geometrice *(2)* geometric⟨am vel⟩ periodicam *(3)* terminorum *(a)* progressionis *(b)* ex progressione *L* 11 inveni *(1)* ope divisionis et considerationis *(2)*, et ope *L* 13 Et *(1)* deniqve *(2)* hinc *L* 14 Hic *(1)* egregius da *(2)* egregia *(3)* methodus *L* 14 f. calculandi, *(1)* ali⟨us⟩ admodum exoticus *(a)* per *(b)* nec dum satis excussus *(2)* una *L* 16 f. dedit *(1)* proba *(2)* Examen abjectionis Novenarij. *(a)* Hac Methodo si tot hab *(b)* Cum *L* 17 characterum *(1)* certo modo *(2)* certa lege inita, *(a)* aeqvatur *(b)* numeri *L* 18 divisoris. *(1)* Hinc si idem numerus ex pluribus dividi possit, vel eo *(2)* Hin *(3)* Et si duo characteres summentur *(4)* Et aeqvalium characterum *(5)* Et qvae *L* 19 eorum *(1)* summae etiam characteres *(2)* characterum *L* 20 idem *(1)* incognitis, *(2)* incognitum, ex *(a)* pluribus cognitis *(b)* diversis *L*

16 compendium: Vgl. VII, 5 N. 7, insbesondere S. 58.

ex cognitis componi possit, certa quadam lege variationis servata, hinc si finiti ejus characteres (quod fit reductis omnibus ad integros rationales, si quidem quaesitum haberi potest) finito numero compositionum determinabuntur, sin vero infiniti, etiam infinitis modis variandum erit, servata certa progressione, donec habeatur characterum progressio. Caeterum est et alia Methodus pro inveniendis quaesitis determinatis per radicem aequationis Algebraicae (vel transcendentis) finitae quando id fieri potest. Si id quod quaeritur determinatum habeatur per aequationem infinitam pluribus communem; seu duarum incognitarum, et deinde fingatur adhuc nova aequatio duarum incognitarum; et harum duarum aequatione tollatur una incognita, quod si jam alterius incognitae valor inde haberi potest per seriem finitam, explicando arbitrariam sic, ut progressio terminetur; habebitur quaesitum. Sin minus seu id impossibile demonstratur, tunc etiam impossibile est reduci id quod quaeritur ad aequationem finitam algebraicam.

Haec methodus serviet etiam ad altiora; pro aequationibus duarum incognitarum infinitis, reducendo ad aequationes duarum incognitarum finitas, quando id fieri potest. Nimirum aequatio duarum incognitarum quaesita revocetur ad aequationes duas infinitas trium incognitarum, ipsam determinantes, seu a loco ad lineam, ad locum ad superficiem. Et fingendo aequationem finitam etiam trium incognitarum, harum trium aeqationum ope, eam conferendo cum una infinitarum inveniatur aequatio finita duarum incognitarum, et conjungendo cum altera infinitarum debet prodire aequatio finita duarum incognitarum eadem quae ante.

Applicatio hujus calculi ad Geometriam sequitur, et quae in lineis propria. Et primum methodus generalis problemata Geometri[c]a revocandi ad calculum, hoc fit tot sumendo aequationes quot sunt loca, quorum intersectione habetur quaesitum. Demonstrationes habebuntur optime aquationes revocando ad lineas rectas et earum rationes quod semper fieri potest, perpetuo triangula similia adhibendo. Omnis formula enim hoc modo considerari potest quasi compositum ex lineis rectis. Constructio quaerenda per

1 f. characteres *(1)* vel periodici; hinc *(2)* (qvod *L* 4 f. progressio. *(1)* Est et ali *(2)* Caeterum *L* 6 potest. *(1)* Nimirum, v. g. si qvaerat *(2)* Si id *L* 7 communem; *(1)* et deinde fingatur aeqvatio nova *(2)* seu duarum *L* 9 et *(1)* huius ope *(2)* harum *(a)* tollarum op *(b)* duarum aeqvatione *(aa)* toll *(bb)* tollunt unam incognitam *(cc)* tollatur *L* 10 finitam, *(1)* sumendo ar *(2)* explicando *L* 15 Nimirum *(1)* fingatur *(2)* fingantur *(3)* aeqvatio *L* 18 ope, *(1)* toll *(2)* eam *L* 18 aeqvatio *(1)* infinita trium *(2)* finita duarum incognitarum, *(a)* qvam jungendo *(aa)* cum *(bb)* ipsa fict⟨a⟩ habebitur aeqvatio duarum incognitarum, finita qvaesita, *(b)* et conjungendo *L* 19 aeqvatio *(1)* infinita eadem *(2)* finita *L* 22 fit *(1)* per intersec *(2)* tot *L* 24 optime *(1)* rationes *(2)* aeqvationes *L*

locorum intersectiones: De variis modis exhibendi loca, inprimis loca ad Circulum, rectam, et Conicas. De locis ad superficiem et horum intersectionibus. Quomodo sciatur gradus problematis propositi; si planum est quomodo optime per rectam et circulum vel plures rectas pluresque circulos, praeparatorios, qui denique ultimos circulos producant ultimas rectas, construentes, construi possit. Ubi enumerationes omnes possibiles habentur, et ex illis seligi possunt optimae. Idem pro Conicis utilem pro altioribus non est operae pretium. De modo seligendi incognitas quas quaeri utile est, de modo revocandi problema ad loca plura, libere seu a se invicem independenter enuntiata. De catalogo curvarum; de modo eas describendi per organa apta. De generali descriptione curvarum per intersectionem duarum rectarum parallele diversimode motarum, de aliis curvas describendi modis. De focis. De Tangentibus curvarum, et de proprietatibus earum conferendo ipsarum diversas ordinatas inter se. Ubi et de proprietatibus paradoxis, seu quae an possibiles sint magna dubitandi ratio est, donec contrarium appareat. Tangentes respondent differentiis, de calculo differentiali seu de tangentibus, vel de angulis curvae. De Curvedine seu quantitate anguli contactus plane nova, aliaque universalia. De curvarum proprietatibus, ut de earum parallelismo. De quadraturis et summis. De quadraturarum aliarum reductione ad rationales, et de rationalium gradibus, et quomodo ad Hyperbolas imaginarias reducantur, et videndum an res ita semper redeat ad Logarithmos. De curvis transcendentibus, et earum tangentibus mira. De calculi differentialis theorematibus generalibus. De summis summarum et differentialibus differentialium. Semper tolli possunt summae, ut maneant solae differentiae. De variis aequationibus differentialibus

2 horum *(1)* intersectionis *(2)* intersectionibus. *(a)* Geometria ⟨in⟩ *(b)* ⟨de lo⟩ *(c)* de ae *(d)* qvomodo *L* 4 f. deniqve *(1)* ultimum circulum *(2)* ultimos circulos producant *(a)* ultimam rectam, construentem, pro *(b)* ultimas *L* 8 enuntiata. *(1)* De curvilineo *(2)* De curvarum tangentibus seu differentiis *(a)* seu de modo *(b)* seu de collatione ordinatarum ejusdem *(3)* De catalogo *L* 9 De generali *(1)* conside *(2)* descriptione *L* 10 diversimode *(1)* mod⟨o⟩ *(2)* motarum *L* 13 f. appareat *(1)* de mod *(2)* Tangentes respondent differentiis, de *(a)* modo ex *(b)* calculo differentiali seu de *(aa)* modo ex data tangentium proprietate inveniendi curvam, seu ex angulo eius. *(bb)* tangentibus. *(aaa)* et *(bbb)* est *(ccc)* vel de *(aaaa)* angulo curvae *(bbbbb)* angulis curvae. *L* 16 ut *erg. L* 19 mira *(1)*; et Qvomodo differentiale *(2)*. De calculi *L*

11 De focis: Vgl. VII, 7 N. 33. 15 Curvedine: Vgl. VII, 1 N. 32. 16 parallelismo: Vgl. VII, 7 N. 53 u. 54. 16 De quadraturis et summis: Vgl. VII, 3 N. 38. 17 f. Hyperbolas: Vgl. VII, 7 N. 58. 18 f. De curvis transcendentibus: Vgl. deren Behandlung in VII, 6 N. 51 sowie in VII, 7 N. 49.

ex eadem aequatione ducibilibus. Si aequatione differentiali data quaeratur ejus summatrix seu absoluta, id fieri potest pluribus modis, unus est reducendo ad seriem infinitam, quod semper fieri potest, et tunc quaerenda infinitae reductio ad finitam methodo supra dicta. Quaerenda tamen methodus esset serierum infinitarum se cum licet finientium. Alius modus est effingendo seriem absolutam quasi jam habitam, sive algebraicam sive transcendentem, et inde ducendo differentialem, ea combinetur cum data differentiali et sublatis differentialibus. Habebitur denique absoluta adhuc semel, quae coincidere debet cum efficta. Alius modus pro quadraturis est specialiter per polygona; ubi res redit ad seriem replicatam terminorum finitas differentias habentium. Et quaerenda est parameter et aequatio seriei absoluta vel algebraice vel transcendenter; sed ut terminatio inveniatur alia methodus certo analytica haec est, si diversis methodis infinitis polygonorum progressiones sumendo quaeratur calculus generalis progressionem exhibens variis gradis communis, et tunc ipsam incognitam plerumque in exponentem ingredientem, licebit pro arbitrio sic explicare.

Nondum hic egi de mirabili nova characteristica geometriae, qua omnia effici possunt quae calculo, sic ut characteres perpetuo, situm et motum exprimant. Hoc admirandi usus pro Machinis inveniendis, et machinis a natura adhibitis divinandis.

Utile adhiberi semper eas series, quae, si finibiles, se ipsas finiunt ut idem ex terminis primis fiat quod ex secundis. Haec methodus incognitas absolute transcendenter exhibet, etiam incognitas determinatas, et ejus quoque ope inveniri poterit, an aliquando aequatio determinata transcendens solubilis in numeris. Constructio transcendentium, motu curvarum materialium se rectis ⟨vel⟩ aliis curvis applicantium. Fingantur aequationes plurium incognitarum plures; et ponendo quasdam incognitas esse curvas. Assumta curva algebraica generali et substituendo differentias in differentialibus, ut obtineatur differentialis data.

1 aqvatione *(1)* ducibilis *(2)* ducibilibus. *(a)* Data *(b)* Si *L* 3 tunc *(1)* methodo sae *(2)* qvaerenda *L* 5 sive *(1)* simpliciter Tran *(2)* algebraicam *L* 8 f. seriem *(1)* finitam *(2)* replicatam *L* 10 absoluta *(1)*. Qvae si *(2)* vel *L* 10 transcendenter; *(1)* si *(2)* vel etiam *(3)* sed *L* 20 an | an *streicht Hrsg.* | aliqvando *(1)* expo *(2)* problema transcendens solubile *(3)* aeqvatio *L* 22 applicantium. *(1)* Fingatur aeqvatio generalis *(2)* Fingantur *L*

8 f. seriem replicatam: Vgl. VII, 4 N. 40. 15 nova characteristica geometriae: Vgl. VII, 1 N. 9.

31. EXTRAIT D'UN FRAGMENT DE PASCAL
[Januar – September 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Abschrift einer nicht aufgefundenen Vorlage: LH 35 XV 1 Bl. 13. 1 Bl. 4°. 1 S. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Desargues und Pascal*, 1892, S. 202–204; 2. *PO* IX, 1914, S. 291–294; 3. Pascal, *Oeuvres complètes* (Chevalier), 1954, S. 602–604; 4. Itard, *L'introduction*, 1962, S. 269–286, Faksimile S. 276–277; 5. Pascal, *Oeuvres complètes* (Lafuma), 1963, S. 359; 6. Itard, *L'introduction*, 1962, S. 270–272, Faksimile S. 276–277; Nachdruck, 1964, S. 103–107, Faksimile S. 104–105; 7. Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), III, 1991, S. 435–437; 8. (dt. Übers., teilw.) Zwierlein, *Pascal*, 1997, S. 126–128; 9. Pascal, *Oeuvres complètes* (Le Guern), I, 1998, S. 140–142, 1041–1042; 10. Descotes, *Géométries de Port-Royal*, 2009, S. 85–90; 11. (mit ital. Übers.) Pascal, *Opere complete* (Romeo), 2020, S. 278–283.
Cc 2, Nr. 1501

Datierungsgründe: Leibniz hat G. Filleau des Billettes vermutlich bereits 1672 kennengelernt. 1679 erinnert er sich in einem Brief an N. Malebranche (II, 1 N. 207, S. 724 f.), dass er A. Arnauld und Filleau des Billettes „un petit dialogue" gezeigt habe. Es handelt sich dabei mit Sicherheit um die *Confessio philosophi* (VI, 3 N. 7), von der er im November/Dezember 1672 eine Reinschrift anfertigen ließ. In der *Theodicée* erwähnt Leibniz, dass er Arnauld die *Confessio philosophi* ungefähr 1673 gegeben hatte (*Theodicée* Praef., Gerhardt, *Phil. Schr.* 6, S. 43). Filleau des Billettes lebte im Haus von Arnauld. Unter den Schriften von Pascal aus dem Besitz von Arnauld befinden sich auch Abschriften von der Hand Filleau des Billettes' (vgl. Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), III, 1991, S. 430). Leibniz hat Handschriften von E. Périer zu den Kegelschnitten im Januar 1676 erhalten und im August zurückgegeben, nachdem er Exzerpte daraus angefertigt hatte. Falls die Bemerkung am oberen Rand zu diesen Exzerpten nicht wesentlich später entstanden ist als die vorliegende Abschrift, hat Leibniz letztere nicht vor Januar 1676 angefertigt.

Extrait d'un Fragment de l'Introduction à la Geometrie de Mons. Pascal, que Mons. des Billets m'a communiqué

Premiers principes et definitions

Principe 1. L'objet de la pure Geometrie est l'espace, dont elle considere la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, les quelles on distingue par les noms de longueur[,] largeur et profondeur en donnant indifferemment chacun de ce noms à chacune de ces dimensions, pourveu qu'on ne donne pas le même à deux ensemble. Elle suppose que tous ces termes là sont connus d'eux mêmes.

[+ Etendu est ce qui a des parties sensibles tout à la fois. Partie est une chose la quelle avec une autre chose; est le même qu'une troisieme que nous appellons Tout. Successif est ce qui a toutes ses parties Sensibles, en autant de temps differens. L'espace est une chose ëtendue et rien d'avantage. Un corps est une chose estendue capable d'agir. Agir est estre cause d'un changement. Cause est une chose prise dans un certain estat dans le quel elle ne peut estre sans qu'une autre arrive; et peut estre entendue parfaitement avant l'autre. L'autre s'appelle l'effect. Ou: *Effectus est, quicquid sequitur alio posito, et est natura posterius ipso. Natura prius est, quod ante alterum perfecte intelligi potest*. Deux choses sont continües

1–3 *Am oberen Rand:* Alia Pascalii vide in Conicis.

1 Extrait ... de l' *erg. L* 9 f. mêmes. [+ *(1)* l'espace est *(a)* une chose etendue d'un certain *(b)* un lieu etendu *(aa)* d'un certain point *(bb)* d'une partie en tous sens; ou c'est un lieu *(aaa)* dans leqvel un point peut estre pris et *(bbb)* qvi a des parties *(aaaa)* de tous *(bbbb)* en tous sens, d'un point qvi y peut estre pris. *(2)* Etendu *L* 13 differens. *(1)* Le lieu *(2)* L'espace *L* 14 estendue *(1)* sensible. *(2)* capable *L* 14 Agir est *(1)* causer *nicht gestr.* *(2)* estre cause d' *L* 15 chose *(1)*, dont *(a)* une certaine qvalité estant *(b)* un certain mode est *(2)* la qvelle prise d'un *(3)* prise *L* 15 f. autre *(1)* svit aussi en même temps *(2)* arrive *L* 18 prius | posteriusve *gestr.* | est, ... potest |, aut non potest *gestr.* | Deux *L*

1,19 Alia ... Conicis: Vgl. VII, 7 N. 60–64 u. 72. 10–142,4 [+ ...]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

quand elles ont une partie commune. Le Lieu est une chose dont l'espace a une partie qui est la même avec l'espace d'une autre chose. L'espace d'une chose est dont l'étendue est égale et semblable à celle de la chose; et chaque partie de l'une de ces étendues est apperceue avec chaque partie de l'autre.]

Princip. 2. L'espace est infini selon toutes les dimensions.

Princip. 3. Et immobile en tout et en chacune de ses parties.

Definition du corps Geometrique de la surface, de la ligne, du poinct, Princip. 4. 5. 6.

Princip. 7. Les poincts ne different que de situation; 8. les lignes de situation, de grandeur, et de direction. Les droites par le plus court chemin.

Princip. 9. La distance de deux poincts est la ligne droite.

Princip. 10. Les surfaces peuvent differer de situation, de longeur, de largeur, de contenu, de direction. Les surfaces planes sont bornées de toutes parts par des lignes droites, et qui s'etendent directement de l'une à l'autre.

(: *An minimae superficierum inter datas lineas. An cujus partes quibuslibet congruere possunt, ut et recta.* :)

Avertissement, nous ne considerons icy que les plans. Une ligne est egale à une autre quand l'etendue de l'une est egale à celle de l'autre.

Theoremes connus naturellement

1. Les lignes droites egales entre elles ne different que de situation, l'une estant quant au reste toute semblable à l'autre.

2. Les cercles qui ont les semidiametres égaux, sont égaux. Et les cercles égaux ne different que de situation.

1 commune *(1)* Estre eloigné *(2)* Le lieu *(a)* est un pa *(b)* d'un corps, et *(3)* Le Lieu est *(a)* la partie d'un espace qvi sert à trouuer une *(b)* une chose dont l'espace *(aa)* contient *(bb)* comprend l'espace d'une autre chose. Comprendre est estre le même en tout ou en partie. *(aaa)* Ergo ⟨me⟩ *(bbb)* donc ainsi plustost: *(4)* Le Lieu *L* 2 avec *(1)* la partie *(2)* l'espace *L* 4 f. l'autre. | *(1)* Et ⟨alors⟩ on peut dire qve le corps est dans l'Espace *(2)* Une chose est Dans une autre qvand toutes les parties de la premiere ne *(a)* sont sensibles *(b)* peuuent estre apperceues qv'avec au tant de parties de l'autre. Ainsi *(aa)* un tout est *(bb)* une partie est dans son tout: le corps dans une Vase aux *bricht ab* *(3)* NB. on ne dira pas qve l'espace est dans le corps qvi le remplit. Estre dans une chose, est estre placé en sorte qve pour estre avec l'un, il faut estre | auparavant *erg.* | avec l'autre *gestr.* | Princip. *L* 7 f. 4. 5. 6. | prop. *ändert Hrsg.* | 7. *L* 8 poincts *(1)* sont *(2)* ne different *L* 9 de *(1)* forme *nicht gestr.* *(2)* direction. *L* 11 f. largeur, *(1)* de forme, *(2)* de contenu, *L*

3. Les arcs égaux de mémes cercles ne different que de situation.

4. Les chordes des arcs egaux de deux cercles egaux ou d'un même cercle, ne different (: que de situation :) ou sont egales entre elles.

5. Tout diametre divise la circomference en deux portions égales dont chacune est appellée demycercle.

6. L'intersection de deux lignes est un poinct.

7. Si par un poinct pris au dedans d'un espace borné de toutes parts par une ou par plusieurs lignes passe une ligne droite infinie, elle coupera les lignes qui bornent cet espace en deux points pour le moins.

8. S'il y a deux points l'un au deça, l'autre au dela d'une ligne droite; alors une ligne droite qui tend d'un point à l'autre coupe la ligne droite qui est entre [les] deux, en un poinct, et en un seul.

9. La ligne droite infinie qui passe par un poinct qui soit au dedans d'un cercle coupe la circomference en deux points et en deux seulement.

10. La circomference qui passe par deux poincts, l'un au dedans d'un autre cercle, et l'autre au dehors, le coupe en deux points, et en deux seulement.

11. Si deux circomferences ont reciproquement des points l'un au dedans de l'autre, elles s'entrecouperont en deux points, et en deux seulement.

12. Si une circomference a un de ses poincts au-deçà d'une ligne droite infinie, et son centre au dela ou dans la même ligne droite, elle coupera la même ligne droite en deux points.

19 poincts | au dela *ändert Hrsg.* | d'une *L*

32. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM

32_1. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM, PARTES PRIMA ET SECUNDA
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 34 Bl. 1–4. 2 Bg. 2°. 8 S. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 16–36.
Cc 2, Nr. 900.

Januar. 1675.

De formulis omnium dimensionum:

novo analyseos et characterum genere ex artis combinatoriae principiis.

Et calculus explicationis per binomium

De intercalatione numerorum combinatoriorum

Tentandum est, an Analysis promoveri possit longius adhibitis formulis, quae sint simul omnium dimensionum. Ut pro $by^4 + acy^3 + a^2dy^2 + a^3ey + a^4f$, scribemus: $by^z + acy^{z-1} + a^2dy^{z-2} + a^3ey^{z-3} + a^4fy^{z-4}$. etc. Quod si ponamus $z \sqcap 4$. seu $z - 4 \sqcap 0$. patet y in ultimo termino omitti posse: et etc. quoque omitti debere. Sin minus continuari poterit, donec fiat exponens ipsius y ipsi 0. aequalis. Quemadmodum autem hic incepi a summo, ita incipi potuisset ab imo, hoc modo:

$$a^zf + a^{z-1}ey^{+1} + a^{z-2}dy^2 + a^{z-3}cy^3 + a^{z-4}by^4 \text{ etc.}$$

Ponamus jam quantitatem y exponente z affectam esse explicandam sive esse $y \sqcap x + b$. quo modo generaliter explicabimus: y^z? Jam repertum est dudum a edoctissimis

10 f. novo ... binomium *erg. L* 12 De ... combinatorium *erg. L* 13 est, *(1)* ad *(2)* an *L* 18 f. modo: *(1)* $a^4f + a^3ey^{+1}$ *(2)* $a^zf + a^{z-1}ey^{+1} + a^{z-2}dy^2 +$ *(a)* $a^{z-3}dy^3 + a^{z-4}cy^4$ *(b)* $a^{z-3}cy^3 + a^{z-4}by^4$ *L* 20 f. $y \sqcap$ *(1)* $a + b$ *(2)* $x + b$ *L*

21–145,1 edoctissimis Geometris: Welche Ereignisse Leibniz als Entdeckungen der figurierten Zahlen ansieht, konnte nicht ermittelt werden. Die im Folgenden genannten Personen führt Leibniz zum Verweis auf weitere Eigenschaften der figurierten Zahlen und des arithmetischen Dreiecks auf.

Geometris, numeros quos vocant Figuratos, 1. 2. 1. 1. 3. 3. 1 etc.

			triang.	pyram.	▽▽	▽P				
A						*D*				
	1	1	1	1	$^{(D)}1$	$^{(G)}1$	1	1	1	1
	1	2	3	$^{(F)}4$	$^{(D)}5$	6	7	8	9	
	1	3	$^{(C)}6$	$^{(F)}10$	15	21	28	36		
B										
	1	$^{(E)}4$	$^{(C)}10$	20	35	56	84			
C	$^{H}1$	$^{(E)}5$	15	35	70	126				
	$^{H}1$	6	21	56	126					
	1	7	28	84						
	1	8	36							
	1	9								
	1									

1–3 Figuratos, *(1)* 1. 1. *(2)* 1. 2. 1. 1. 3. 3. | 4 *ändert Hrsg.* | *(a)* itaqve *(b)* etc. | triang. . . . ▽P *verschiebt Hrsg. um eine Spalte nach rechts* | A 1 *(aa)* 2 *(bb)* 1 *L* 4 $^{(F)}4$ *(1)* $^{(C)}5$ *(2)* $^{(D)}5$ *L* 8 f. 126 *(1)* $^{H}1$ *(2)* 1 *L* 11–146,1 9 | 45 *gestr.* | 1 | 10 55 *gestr.* | *(1)* itaqve x + b,^{4} ⊓ 1x^4+ *(a)* x *(b)* 4x^3 + 6 *(2)* itaqve *L*

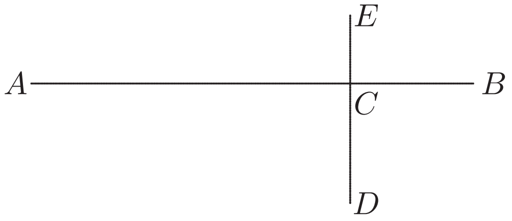
Itaque

$$x + b,^4 \sqcap 1x^4 + 4x^3b^1 + 6x^2b^2 + 4x^1b^3 + 1b^4.$$

Jam si dimensionis exponens non sit 4, sed universalis exempli causa z. explicanda ratio est, per quam ex data z exhibeantur caeteri numeri transversales, nempe quomodo ex data 8, inveniantur 28, 56, 70, et ex data 9 inveniantur 36, 84, 126. et ita in caeteris. Hoc vero fieri poterit, non quidem per unam quandam aequationem, attamen per unam quandam regulam; nam per Theorema a Maurolyco, Fermatio, Pascalio aliisque observatum. In progressione naturali ab unitate incipiente numerus quilibet ductus in proxime

---

1 *Am Rand:*



$AB \sqcap a$. $BC \sqcap x$. $AC \sqcap a - x$. sit $EC \sqcap z$. erit $\dfrac{CD}{z} \sqcap \dfrac{a-x}{x}$ et $CD \sqcap \dfrac{za - xz}{x}$.

10 a − x *(1)* erit *(2)* sit EC $\sqcap$ z. erit *(a)* $\frac{\text{EC}}{\text{CD}}$ *(b)* EC *(c)* $\frac{\text{ED}}{}$ *(d)* $\frac{\text{CD}}{\text{z}}$ *L* 3 si *(1)* non dimension⟨um⟩ *(2)* dimensionis *L* 5 70 *(1)* 56, et ex data 9, 36 *(2)* et *L* 8 proxime *(1)* minorem *(2)* majorem *L*

---

10 fig: Die Figur zeigt Spuren der Überarbeitung: Leibniz ersetzt eine etwas weiter links ausgeführte und wieder getilgte vertikale Linie, die in ihrem oberen Abschnitt von Text unterbrochen ist, durch *DE*. Das obere Ende der getilgten Linie wurde ebenfalls mit *E* gekennzeichnet. Leibniz wählt Lage und Länge der Strecken derart, dass die in der begleitenden Rechnung auftretenden Verhältnisse im Diagramm eingehalten werden. Insbesondere gilt $CD : AC = CE : CB$. Die Endpunkte der getilgten Linie liegen mit *B* und *E* bzw. *A* und *D* jeweils auf gedachten Geraden, die gemäß den im Diagramm auftretenden Streckenverhältnissen zueinander parallel sind. Oberer und unterer Abschnitt der getilgten Senkrechten stehen somit im selben gleichen Verhältnis zum rechts bzw. links vom gemeinsamen Schnittpunkt befindlichen Abschnitt von *AB* wie die entsprechenden Abschnitte *DE*. 7 Maurolyco: vgl. F. Maurolyco, *Arithmeticorum libri duo*, 1575, S. 5, Buch 1, Propositio 7. 7 Fermatio, Pascalio: Fermats Beobachtung wurde veröffentlicht als Observatio D. P. F., in: *Diophanti Alexandrini De Multangulis Numeris Liber Unus*, 1670, S. 16 (*FO* I S. 341). Zuvor hatte Fermat seinen Befund Mersenne in einem Brief von Anfang Juni 1638 (*FO* II S. 70; *CM* VII S. 279) mitgeteilt. Im Anschluss an seine eigene Formulierung als Proposition 11 in Bl. Pascal, *Traitté des ordres numeriques*, 1665, S. 5 [Marg.] (*PO* III S. 509–510) verweist Pascal auf Fermats ihm aus der Korrespondenz bekannte Fassung und gibt diese in französischer Übersetzung wieder. Diese Version von Fermats Beobachtung ist die Grundlage für Leibniz' Übersetzung in Z. 8 – S. 147 Z. 3.

majorem producit duplum sui trianguli; idem numerus ductus in $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ proxime majoris, producit triplum pyramidis; idem numerus ductus in pyramidem proxime majoris producit quadruplum Triangulo-Triangularis etc. Sed jam video offerri propius theorema ad usum nostrum; nempe consequentiam 12$^{\text{mam}}$ tractatus Pascalii de Triangulo Arithmetico, nempe observat ille, in linea quadam transversa (ipse vocat basin) numerum quendam E, ut 4, esse ad proxime superiorem C, ut 6. ut numerus unitatum CB ad numerum BA sive ut numerus cellarum inferiorum quarum summa E, ad numerum cellularum superiorum quarum infima C.

Itaque sit dimensionis numerus, z, v. g. E. seu 4. numerus unitatum AC seu numerus numerorum transversalium lineae CD est $z+1$. Unde si auferatur BC seu γ, nempe 2 vel 3. vel 4, fiet $z+1-\gamma$, et erit $\dfrac{\text{Numerus datus}}{\text{ad proxime sequentem in eadem transversali}} \sqcap \dfrac{\gamma}{z+1-\gamma}$. Unde si $E \sqcap z$. et quaeratur C, fiet $\dfrac{C}{z} \sqcap \dfrac{z+1-\gamma}{\gamma}$ et $C \sqcap \dfrac{z^2+z-\gamma z}{\gamma}$, ubi $\gamma \sqcap 2$. et fiet: $C \sqcap \dfrac{z^2+z-2z}{2} \sqcap \dfrac{z^2-z}{2}$, et rursus $\dfrac{F}{C}$ seu $\dfrac{F}{z^2-z \smile 2} \sqcap \dfrac{z+1-3}{3}$, sive $F \sqcap \left.\begin{array}{r} z^3-1z^2 \\ -2..+2z \end{array}\right\} \smile 2,3.$ porro $\dfrac{D}{F}$ sive $\dfrac{D,2,3}{\ldots\ldots} \sqcap \dfrac{z-3}{4}$ et fiet $D \sqcap \left.\begin{array}{r} z^4-1z^3 \\ -2...+2z^2 \\ \hline -3...+3.. \\ +6..-6z \end{array}\right\} \smile 2,3,4$ quam formulam si rursus multiplices per $\dfrac{z-4}{5}$ fiet:

1 proxime *(1)* minoris *(2)* majoris *L* 3 f. ad | idem *gestr.* | usum *L* 6 numerus *(1)* BC ad numer *(2)* | unitatum *erg.* | CB *L* 9 sit *(1)* Numerus AC $\sqcap$ z. *(2)* dimensionis *(a)* z numerus, 4 *(b)* numerus, *L* 9 AC *(1)* est z *(2)* seu *L* 10 f. 2 | vel *erg.* | 3 *L* 11 fiet *(1)* $\mathrm{z}-\gamma$ *(2)* $\mathrm{z}+1-\gamma$ *L* 11 erit *(1)* $\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{C}} \sqcap$ *(2)* $\dfrac{\text{Numerus datus}}{\text{ad} \ \ldots \ \text{transversali,}}$ *(a)* ut γ ad *(b)* $\sqcap \dfrac{\gamma}{\mathrm{z}+1-\gamma}$. *L*

4 consequentiam 12$^{\text{mam}}$: Vgl. Consequence douziesme in Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmetique*, 1665, S. 7–8 (*PO* III S. 455–457).

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
z^5 & - & 1z^4 & & & & & & & \\
 & - & 2.... & + & 2z^3 & & & & & \\
 & - & 3.... & + & 3... & & & & & \\
 & & & + & 6... & - & 6z^2 & & & \\
 & - & 4.... & + & 4... & & & & & \\
 & & & + & 8... & - & 8.. & & & \\
 & & & + & 12... & - & 12.. & & & \\
 & & & & & - & 24.. & + & 24z &
\end{array}\right\} \smile 2,3,4,5 \sqcap G.$$

Hinc patet semper fieri summam $\sqcap$ 0. si sit $z \sqcap 1$.

Nimirum,
$$\begin{array}{lll}
E & \sqcap & z \\
C & \sqcap & z \frown \dfrac{z-1}{1} \\
F & \sqcap & \dfrac{z}{1}, \dfrac{z-1}{2}, \dfrac{z-2}{3} \\
D & \sqcap & \dfrac{z}{1}, \dfrac{z-1}{2}, \dfrac{z-2}{3}, \dfrac{z-3}{4} \\
G & \sqcap & \dfrac{z}{1}, \dfrac{z-1}{2}, \dfrac{z-2}{3}, \dfrac{z-3}{4}, \dfrac{z-4}{5}.
\end{array}$$

Unde patet hos numeros, ut 1, 5, 10, 10, 5, 1. esse productos continuorum, seu fractionum, quarum numerator decrescit, nominator crescit arithmetice. Unde pendet praxis notabilis Ganierii apud Pascalium pag. 32. tractatus de combinationibus. Observavit Huddenius hoc sane memorabile, si haec series 1 −2 +1 multiplicetur per progressionem Arithmeticam quamcunque, productum semper fieri aequale nihilo. Videamus an propositio sit universalior, sive an sequens

$$\begin{array}{lrrrr}
 & 1 & -3 & +3 & -1. \\
\text{ducta in} & 1 & 3 & 6 & 10 \\
\hline
\text{faciat productum:} & +1 & -9 & +18 & -10
\end{array}$$

nihilo aequale, idque verum est. Hinc illud sequitur memorabile. Si qua sit aequatio quae tres habeat Radices

9 1. *(1)* z *(2)* | I *nicht gestr.* | 1 *(3)* | Nimirum, *erg.* | E ⊓ z *L* 15 1 | 3, *ändert Hrsg.* | *(1)* 30, *(2)* 10, *L* 17 notabilis | Domini *gestr.* | Ganierii *L* 18 si *(1)* propositio *(2)* haec *L*

17 Ganierii: A. de Gagnières; vgl. Bl. Pascal, *Combinationes*, 1665, S. 32–33 (*PO* III S. 586–593). 18 Huddenius: Vgl. J. Hudde, *Epistula secunda de maximims et minimis*, 1659, *DGS* I S. 508.

aequales eam multiplicari posse per numeros triangulares, sive earum generator sit unitas, sive alius quilibet, et nihilominus aequationem manere. Porro aequationes trium radicum aequalium serviunt tum ad inventiones Tangentium parallelarum, et perpendicularium, seu maximas et minimas ordinatas; exemplo eorum quae de Conchoeidis puncto flexus apud Schotenium dixit Heuratius. Eodem modo de caeteris sive numeris sive seriebus sive potestatibus facilis est, et sane memorabilis demonstratio.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ \hline 0 & -3 & +9 & -6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrrr} 1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ 20 & 10 & 4 & 1 & 0 \\ \hline +20 & -40 & 24 & -4 & 0 \end{array} \sqcap 0$$

Nota quoniam series transversalis semper finita, perpendicularis infinita, ideo satius multiplicare infinitam per finitam demonstrandi theorematis causa.

Caeterum si multiplicatio instituatur alio modo alia orietur productorum repraesentatio, nempe:

$$z \frown z-1 \sqcap z^2 - z.$$

$$z \frown z-1 \frown z-2 \sqcap z^2 - z \frown z-2 \sqcap \begin{array}{l} z^3 - 2z^2 \\ \quad - z^2 + 2z \end{array}$$

$$z \frown z-1 \frown z-2 \frown z-3 \sqcap z-3 \frown \ldots\ldots\ldots\ldots \sqcap \begin{array}{rrr} z^4 & -3z^3 & \\ & -2z^3 & +6z^2 \\ & -\ z^3 & +3.. \\ & & +2.. \ -6z \end{array}$$

et hoc rursus multiplicando per $z-4$ fiet:

$$\begin{array}{rrrrr} z^5 & -\ 4z^4 & & & \\ & -\ 3.... & +\ 12z^3 & & \\ & -\ 2.... & +\ 8... & & \\ & -\ 1.... & +\ 4... & & \\ & & +\ 6... & -\ 24z^2 & \\ & & +\ 3... & -\ 12z^2 & \\ & & +\ 2... & -\ 8z^2 & \\ & & & -\ 6z^2 & +\ 24z \end{array}$$

4 maximas | ad *ändert Hrsg.* | minimas *L*   10 finita, *(1)* altera *(2)* perpendicularis *L*

---

5 apud ... Heuratius: Vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 259–262.

Multa in hoc dispositione memoranda, sed quae omnia ex hoc capite pendent, quod nimirum terminus cujuslibet lineae multiplicatus per 2. vel 3, vel 4, dat sequentem, non ergo considerandi nisi qui lineas incipiunt, hi enim per $1+2$ vel $1+3$, vel $1+4$, etc. multiplicati dant reliquos, sunt autem:

1.	vel	1		vel	1			vel	1				nempe	1				
			-1			-2			.	-3					1.	2.	3.	
						-1				-2						2	3	6
							$+2$			-1								6
										.	$+6$							
											$+3$							
											$+2$							
											.	-6						

Piget adhuc unum calculare, etsi res forte mereatur. Caeterum inspiciendo apparet hoc calculandi modo non in summa tantum, sed et per partes idem quod ante provenisse. Caeterum summis initis fiunt aequationes:

$$1z. \qquad 1z^2 - 1z \qquad 1z^3 - 3z^2 + 2z \qquad 1z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z$$

et denique: $1z^5 - 10z^4 + 35z^3 - 50z^2 + 24z$. Porro semper numeri cujuslibet termini inter se juncti sunt aequales nihilo, multiplicetur haec formula, per $z-5$,

---

16 *Am Rand:*

8	$\sqcap$	8
8	$\sqcap$	$4+4$
7	$\sqcap$	$4+3$
		$3+4$

3 per *(1)* $1+3$ *(a)* multiplica *(b)* vel $1+2$, *(2)* $1+2$ *L* 5 1. vel *(1)* $1-1$. vel *(a)* $1-2+$ *(b)* $1-2$ *(2)* 1 *L* 13 calculare, *(1)* credo vero *(2)* etsi *L* **19** 8 $\sqcap$ *(1)* $2 \frown 4$ *(2)* 8 *L* 18 per *(1)* $-1+$
z − 4, fiet:

	z^6	$-$	$10z^5$	$+$	$35z^4$	$-$	$50z^3$	$+$	$24z^2$		
		$-$	$4.\,.\,.\,.\,.$	$+$	$40.\,.\,.\,.$	$-$	$140.\,.\,.$	$+$	$200.\,.$	$-$	$96z$
seu	$1z^6$	$-$	$14z^5$	$+$	$75z^4$	$-$	$190z^3$	$+$	$224z^2$	$-$	$96z.$
	$\cancel{1}$		$\cancel{4}$		$\cancel{3}$		$\cancel{8}$		$\cancel{8}$		$\cancel{3}$

Ubi notandum omnes *(a)* te *(b)* numeros simul sumtos semper aeqvari nihilo. *(2)* $z-5$, *L*

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{fiet}\left\{\right. & 1z^6 & - & 10z^5 & + & 35z^4 & - & 50z^3 & + & 24z^2 & & \\
 & & - & 5\ldots\ldots & + & 50\ldots\ldots & - & 175\ldots & + & 250 & - & 120z \\
\hline
\text{seu} & 1z^6 & - & 15z^5 & + & 85z^4 & - & 225z^3 & + & 274z^2 & - & 120z \\
 & \cancel{1} & & \cancel{3} & & \cancel{4} & & 0 & & \cancel{4} & & \cancel{6}
\end{array}$$

Ubi notandum inductione apparere, quod semper crescent cognitae terminorum, usque ad penultimum, qui est omnium maximus; at ultimus rursus decrescit. Termini secundi sunt numeri triangulares, 0. 1. 3. 6. [10.] 15. Termini ultimi, 1. 2. 6. 24. 120. sunt producti numerorum continui deinceps ab unitate, nempe 1. (1, 2) 2. (1, 2, 3) 6. (1, 2, 3, 4) 24. (1, 2, 3, 4, 5) 120.

Sed reliquorum difficilior determinatio, v. g. tertiorum: 2. 11. 35. 85 etc. Patet tamen eos esse quodammodo sumtos ex pyramidalibus, 1. 4. 10. 20. 35. 56. 84. Quarti sunt 6.
2 11 35 85
50. 225. etc. qui quomodo ex Triangulo-Triangularibus deriventur non ita facile judicatur; et opus est prolixis inductionibus ad ista indaganda.

Si in qualibet formula in seriem ipsarum cognitarum seu numerorum inquiramus, omisso ultimo, ut,

$$\begin{array}{llllllllllllllllllllll}
1. & & 1. & & 3. & & 1. & & 6. & & 11 & & 1. & & 10. & & 35. & & 50. & & 1. & & 15. & & 85. & & 225. & & 274 \\
 & & & 2 & & & & 5. & & 6 & & & & 9 & & 25 & & 25 & & & & 14. & & 70 & & 140 & & 49 & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & & & 16 & & 0 & & & & & & 56 & & 70 & & 91 & &
\end{array}$$

---

15 *Am linken Rand:*

$$\begin{array}{r} 7 \\ \underline{7} \\ 49 \\ \underline{7} \\ 343 \\ \underline{7} \\ 2401 \end{array}$$

15 *Am rechten Rand:* $5^0 \frown 3 \sqcap 3$. NB.

14 in *(1)* qvolibet termino *(2)* qvalibet *L*

---

17 f. 5. 6 ... 16 0: Einzelne Differenzen sind fehlerhaft. Die Fehler setzen sich in den nachfolgenden Zeilen fort.

Sed his nunc quidem missis redeamus ad nostras formulas generales:

Esto formula quaelibet:

$$\frac{by^z + ca^1y^{z-1} + da^2y^{z-2} + ea^3y^{z-3} + fa^4y^{z-4}}{gy^z + hay^{z-1} + ka^2y^{z-2} + la^3y^{z-3} + ma^4y^{z-4}}$$

Quaeratur ejus differentia a formula quae hoc solo ab ista differat, quod pro y ponatur $y+\beta$: ut autem res in numeris habeatur et vitetur error calculi, scribemus:

$$\frac{\begin{array}{lllll} 2b\ 625y^{4z} & +\,7ca125y^{4z-1} & +\,5da^2 25y^{4z-2} & +\,4ea^3 5y^{4z-3} & +\ \ 8fa^4 5^0 y^{4z-4} \\ 4\ 2401 & \quad 5\quad 343 & \quad 8.\,.\ \ 49 & +\,2.\,.\ \ 7 & +\,10\quad 7^0 \end{array}}{\begin{array}{lllll} 10g5^4y^{4z} & +\,11ha5^3y^{4z-1} & +\,13ka^2 5^2 y^{4z-2} & +\,14la^3 5y^{4z-3} & +\,16ma^4 5^0 y^{4z-4} \\ 11\ \ 7 & +\,13\quad 7 & +\,14\quad 7 & +\,16\quad 7 & +\,17\quad 7^0 \end{array}}$$

Numerator Termini proxime majoris ejusdem seriei, in qua $y+4\beta$ ponatur in locum ipsius y, erit:

6 2b $625y^{4z}+$ *(1)* 5 *(2)* $7ca125y^{4z-1}+$ *(a)* 4 *(b)* 5 *L* 6 343 *(1)* 7 *(2)* 8 *L* 6 $13ka^2 5^2$ | y^{z-2} *ändert Hrsg.* | + *L* 7 Numerator *erg. L*

$$
\begin{array}{lllll}
2b5^4y^{4z} & +\ 2b\ \ 4z4\beta^1 5^3 y^{4z-1} & +\ 2b\ \ 4\beta^2 6\llcorner\llcorner\frac{z,z-1}{1,2}\lrcorner\lrcorner 5^2 y^{4z-2} & +\ 2b\ \ 4\beta^3 4\llcorner\llcorner\frac{z,z-1,z-2}{1,2,3}\lrcorner\lrcorner 5^1 y^{4z-3} & +\ 2\ b\ \ 4\beta^4 1\ \llcorner\llcorner\frac{z,\ldots,z-3}{1,2,3,4}\lrcorner\lrcorner\ 5^0 y^{4z-4} \\
4\vdots 7\ . & 4.\qquad 7\ . & .\ 4.\quad .\qquad\qquad 7\ . & 4.\quad \ldots\qquad\qquad 7 & 4\ .\quad ..\qquad\qquad 7 \\
\vdots & +\ 7\,ca\underline{\qquad}\ \ldots & +\ 7\,ca\ \ 4\beta 3\ \llcorner\llcorner z-1\lrcorner\lrcorner\ \ldots.. & +\ 7\,ca\ \ 4\beta^2 3\ \llcorner\llcorner\frac{z-1,z-2}{1,2}\lrcorner\lrcorner\ \ldots. & +\ 7\ ca\ \ 4\beta^3 1\llcorner\llcorner\frac{z-1,.,z-3}{6}\lrcorner\lrcorner\ \ldots. \\
\vdots & +\ 5\,..\qquad \ldots & 5 & 5 & 5 \\
\vdots & & +\ 5da^2\underline{\qquad\qquad\qquad}\ \ldots. & +\ 5da^2\ \ 4\beta 2\quad \llcorner\llcorner\frac{z-2}{1}\lrcorner\lrcorner\quad \ldots. & +\ 5\ da^2 4\beta^2 1\ \llcorner\llcorner\frac{z-2,z-3}{2}\lrcorner\lrcorner\ \ldots. \\
\vdots & & 8 & 8 & 8 \\
\vdots & & & +\ 4ea^3\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ \ldots. & +\ 4\ ea^3\ \ 4\beta 1\quad \llcorner\llcorner\frac{z-3}{1}\lrcorner\lrcorner\quad \ldots. \\
\vdots & & & 2 & 2\ .\quad \ldots \\
\vdots & & & & +\ 8\ fa^4\underline{\qquad\qquad\qquad}\quad \ldots. \\
\vdots & & & & 10\ .
\end{array}
$$

Nominator ejusdem manet idem, mutatis tantum quibusdam literis, nempe cognitis, scilicet

$$
\begin{array}{lllll}
10g\bullet\ .. & +10g\quad \bullet\ .\quad .\ \bullet & +10g\quad ..\ .\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +10g\quad \ldots\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +10\ g\quad \ldots\qquad \ldots\qquad \bullet\ \bullet \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
 & +11ha\qquad .\ \bullet & +11ha\quad .\quad .\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +11ha\quad \ldots\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +11\ ha\quad \ldots\qquad \ldots\qquad \bullet\ \bullet \\
 & +13\,.. & 13 & 13 & 13 \\
 & & +13ka^2\underline{\qquad\qquad\qquad}\bullet\ \bullet & +13ka^2\quad \ldots\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +13\ ka^2\quad \ldots\qquad \ldots\qquad \bullet\ \bullet \\
 & & 14 & 14 & 14 \\
 & & & +14\ la^3\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\bullet\ \bullet & +14\ \ la^3\quad \ldots\qquad \ldots\qquad \bullet\ \bullet \\
 & & & 16 & 16 \\
 & & & & +16ma^4\underline{\qquad\qquad\qquad}\quad \bullet\ \bullet \\
 & & & & 17
\end{array}
$$

---

1 *Am Rand:* $z,..,z-3 \sqcap z,z-1,z-2,z-3$.

1 $2b5^4y^{4z}$ *(1)* $+2b4z5^3y^{4z-1} + 2b6\llcorner\llcorner\frac{z,z-1}{1,2}\lrcorner\lrcorner 5^2y^{4z-2} + 2b4\llcorner\llcorner\frac{z,z-1,z-2}{1,2,3}\lrcorner\lrcorner 5^1y^{z-3} + 2b1\llcorner\llcorner\frac{z,\ldots,z-3}{1,2,3,4}\lrcorner\lrcorner 5^0y^{4z-4}$4.7.4.7. .4. .7.4. . . . 74. . .7 + $7ca3\llcorner\llcorner z-1\lrcorner\lrcorner$. . . . . *(2)* $2b4z4\beta^1 5^3y^{4z-1}$ *L* 5 $5da^2 4\beta^2 1$ | $\llcorner\llcorner\frac{z-2,.,z-4}{2}\lrcorner\lrcorner$ *ändert Hrsg.* | . . . . *L* 7 $4ea^3 4\beta 1$ | $\llcorner\llcorner\frac{z-3,z-4}{1}\lrcorner\lrcorner$ *ändert Hrsg.* | . . . . *L*

Differentia harum duarum fractionum quaerenda esset multiplicatione per crucem, sed cum illa futura sit prolixissima, sufficiet singulos terminos cum aliis de quibus mox loquar, conferendos excerpi.

Terminus summus I $\ddagger\, 2\,b \quad 10\,g \quad 5\,y^{②\,4z}$
Numeratoris $\quad 4\,. \quad 11\,. \quad 7\,\bullet$
$\ddagger\,.\;.\quad ..\;.\quad .\,\bullet\bullet\;\bullet$ $\Big\}\ \sqcap 0$

Term. II $\ddagger\,\dfrac{2\,b}{4}\,\boxed{\dfrac{10\,g\quad 4\,z\,4\,\beta}{11}} \quad \ddagger\,\dfrac{10\,g}{11}\,\boxed{\dfrac{2\,b\quad 4z\,4\beta}{4}}\,\sqcap 0$ $\Big\}$ Unde habemus

$\boxed{\dfrac{11\,ha}{13}}$ ——— $\qquad \boxed{\dfrac{7\,ca}{5}}$ ———

$\boxed{\dfrac{7\,ca\;10\,g}{5\quad 11}}$ ——— $\qquad \boxed{\dfrac{11\,ha\;2\,b}{13\quad 4}}$

demonstrationem Theorematis, de evanescentibus semper duobus Terminis maximis Numeratoris differentiae.

---

6 *Am linken Rand:* I $\ddagger z.\ \ddagger z \quad \dfrac{5y^{②\,4z-1}}{7} \quad \ddagger\, z, +z-1.\ \ddagger\, z-1, z.$

2 prolixissima, *(1)* utile erit ea *(2)* eo *(3)* sufficiet *L* 4 summus *(1)* Nominatoris *(2)* Numeratoris *(a)* $+\dfrac{2b\,10g\,5y^{②4z}}{-4\,.\,11\,.\,7\,.}$ $\sqcap$ $\dfrac{20n\,5y^{②4z}}{44\;\;7}$ idemqve *(aa)* $+\dfrac{2b}{+4\,.}$ $\sqcap$ $\dfrac{20n}{44\,.}$ *(bb)* $\dfrac{10g}{11\,.}$ *(b)* $\ddagger\dfrac{2b\,10g\,5}{4\;\;11}$ *(c)* I $\ddagger\dfrac{2b\,10g\,5y^{②4z}}{4\,.11\,.7\,.}$ *(aa)* $\sqcap$
$\ddagger\,.\,.\,.\,.\,.\,.\bullet\bullet\bullet$
I $\dfrac{20n\,5y^{②4z}}{44\;\;7}$ idemqve *(bb)* $\Big\}\ \sqcap 0$
I $\dfrac{10n\,5y^{②4z}}{44\;\;7}$: ergo n $\sqcap$ 0
L 15 *(1)* 4, 1, 1, 4 $y^{②4z-1}$ 3, 2, 2, 1 $y^{②4z-2}$ *(2)* II *(3)* I $\ddagger$z, | + z *gestr.* | $\ddagger$ | z, *gestr.* | z $\dfrac{5y^{②4z-1}}{7}$ $\ddagger$z, +z − 1. $\ddagger$z − 1, z. | III $\dfrac{5y^{②4z-2}}{7}$ $\ddagger$z, z − 2.z − 1, z − 1 *gestr.* | *L*
7 $\ddagger\,\dfrac{2b}{4}\,\boxed{\dfrac{10g\quad 4z4\beta}{11}}\,|\,\boxed{\dfrac{5y^{②4z-1}}{7}\;.\bullet\bullet\bullet\bullet\;.\bullet\bullet\bullet\bullet}$ *gestr.* | $\ddagger\,\dfrac{10g}{11}\,\boxed{\dfrac{2b\quad 4z4\beta}{4}}$ *L*
$\boxed{\dfrac{11ha}{13}}$ ——— $\quad \boxed{\dfrac{7ca}{5}}$ ———
$\boxed{\dfrac{7ca\,10g}{5\quad 11}}$ ——— $\quad \boxed{\dfrac{11ha2b}{13\quad 4}}$
14–155,1 differentiae. | Exponentes Term I. *(1)* $\ddagger$, zSA + zIP, , $\ddagger$, zIP + zSA $\sqcap$ 0 T *(2)* ② 4z − 1 $\sqcap$ $\ddagger$, zSA + zIP, , $\ddagger$, zIP + zSA $\sqcap$ 0 Term II. ② 4z − 2 $\sqcap$ $\ddagger$ *erg. u. gestr.* | Sed *L*

Sed antequam pergamus, tentemus rescindere laborem calculi inutilem, inde ab initio: ad hoc enim praestandum generales ejusmodi formulae sunt in primis utiles, cum ea ratione plerumque etiam theoremata memorabilia offerantur; nam exempli causa, Methodus Huddeniana de Maximis et Minimis ejusmodi r e s c i s s i o n u m consectarium est, ut Hugenius quoque ex Fermatiana Methodo ostendit.

Itaque formulam Anteriorem, sive sumtam, appellabimus $\underline{A}$. Posteriorem seu in qua pro y substituimus $y + \beta$. appellemus $\underline{P}$. Numeratorem quia Superior in qualibet formula appellemus S, Nominatorem quia inferior vocemus I. Termini autem qui reperiuntur in AS, vel AI, vel PS, vel PI. nominabuntur ab exponentibus nempe zAS. $z-1, AI$. $z-2, PS$ etc. Jam primum hos terminos inter se comparabimus: nempe Terminos ipsius P, operae pretium erit explicare per terminos ipsius A. nempe

3–5 Methodus: J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. 5 Hugenius ... ostendit: Chr. Huygens, *Demonstratio regulae de maximis et minimis*, 1667 (Ms., gedr. in *Ouvrages*, 1693, S. 326 bis 330; *HO* XX S. 228–241).

$$PS_{\overline{y}}z \quad \sqcap bASz$$
$$.\;I\;. \qquad g\,.\,I\,.$$
$$PS_{\overline{y}}z-1\sqcap bASz \qquad \frown z \qquad \beta+caASz-1$$
$$.\;I\;. \quad .\;g\,.\,I\,. \qquad . \qquad .\,+ha\,.\,I\,.-.$$
$$PS_{\overline{y}}z-2\sqcap bASz \; \frac{z,z-1}{1,2}\;\beta^2+caASz-1\;\frac{z-1}{1}\;\beta+da^2ASz-2$$
$$.\;I\;. \quad .\;g\,.\,I\,. \qquad . \qquad +ha\,.\,I\,.\quad . \qquad . \qquad +ka^2\,.\,I\,.\quad .$$
$$PS_{\overline{y}}z-3\sqcap bASz\;\frac{z,.,z-2}{1,2,3}\;\beta^3+caASz-1\;\frac{z-1,z-2}{1,2}\;\beta^2+da^2ASz-2\;\frac{z-2}{1}\;\beta+ea^3ASz-3$$
$$I \qquad g\quad I \qquad\qquad ha\quad I \qquad\qquad ka^2\quad I \qquad\qquad la^3\quad I$$
$$PS_{\overline{y}}z-4\sqcap bASz\;\frac{z,.,.,z-3}{1,2,3,4}\;\beta^4+caASz-1\;\frac{z-1,.,z-3}{1,2,3}\;\beta^3+da^2ASz-2\;\frac{z-2,z-3}{1,2}\;\beta^2+ea^3ASz-3\;\frac{z-3}{1}\;\beta+fa^4ASz-4$$
$$I \qquad g\quad I \qquad\qquad +ha\quad I \qquad\qquad ka^2\quad I \qquad\qquad la^3\quad I \qquad\qquad ma^4\quad I$$

155,11–156,8 nempe *(1)* $\underset{.\,I\,.}{PSz} \sqcap \underset{.\,I\,.}{ASz}$ | $\underset{.\,I\,.\quad .}{PSz-1} \sqcap \underset{.\,I\,.\quad .}{ASz} \frown z\,\beta + \underset{.\,+\,.\,I\,.\,.\,.}{ASz-1}$ *(a)* $\underset{.\,I\,.\,.\,.}{PSz-2}$ *(b)* $\underset{.\,I\,.\,.\,.}{yPSz-2}$ *(2)* $\underset{.\,I\,.}{PS_{\overline{y}}z} \sqcap \underset{.\,I\,.}{ASz}$ | $\underset{.\,I\,.\quad .}{PS_{\overline{y}}z-1} \sqcap \underset{.\,I\,.}{ASz} \frown z\,\beta + \underset{.\,.\,+\,.\,I\,.\,.\,.}{ASz-1}$

$\underset{.\,I}{PSz-3}$ $\underset{.\,I}{yPSz-3}$

$$\underset{.\,I\,.\,.\,.}{PS_{\overline{y}}z-2} \sqcap \underset{.\,I\,.}{ASz}\;\underset{.}{\frac{z,z-1}{1,2}}\;\beta^2 + \underset{+\,.\,I\,.\quad .}{ASz-1}\;\underset{.}{\frac{z-1}{1}}\;\beta + \underset{+\,.\,I\,.\quad .}{ASz-2}$$

(3) $PS_{\overline{y}}z$ *L*

$$\underset{.\,I}{PS_{\overline{y}}z-3} \sqcap \underset{I}{ASz}\;\frac{z,.,z-2}{1,2,3}\;\beta^3 + \underset{I}{ASz-1}\;\frac{z-1,z-2}{1,2}\;\beta^2 + \underset{I}{ASz-2}\;\frac{z-2}{1}\;\beta$$

Atque ita habemus formulam quae una est ex utilissimis totis Analyseos, continuata enim exhibet generaliter Explicationem formulae cujuscunque per binomium. Unde facile habetur et explicatio trinomii, scilicet explicando rursus ipsam β. per binomium; et per consequens habetur explicatio formulae cujuscunque per polynomium quodcunque. Progressiones hic occurrunt et harmoniae quocunque te vertas, et sufficiet inspexisse Tabulam, ad eas advertendas. Quot autem harmoniae, tot deteguntur theoremata generalia omnibus formulis communia, quae manifestum est, ex ipsa combinationum natura suam originem habere.

Illud praeterea notandum est videri posse in hac Tabula sive formula generali vel literas $\begin{matrix} b\,c\,d \\ g\,h\,k \end{matrix}$ vel exponentes terminorum, ut ASz. $ASz-1$. $ASz-2$. superfluas, cum una alterae indigitentur: verum usum hunc habet earum conjunctio, ut ex ipsa statim Tabula appareant exponentes pariter et literae. Literae quidem, ut reliquus calculus literarum absolvi possit, exponentes, ut generalia de exponentibus theoremata facilius condantur. Omisi autem numeros probatorios hoc loco, ne formulam plane novam, et per se multiplicem adhuc magis onerarem; praesertim cum in his formulis ipsis numeris probatoriis careri possit; nam ipsae series non interruptae neque dissimiles sibi probationis sunt loco. Operae pretium autem est formulam hanc inventam scribere paulo distinctius, ut ejus constitutio magis oculis objiciatur:

1 f. Analyseos, *(1)* exhibet enim *(2)* |continuata enim *erg.*| exhibet generaliter *(a)* Potestatem binomii cuiuscunqve *(b)* Explicationem *L*   5 qvodcunqve *(1)* progressio hic occurrit *(2)* Progressiones *L*   6 et *(1)* loco *(2)* sufficiet *L*   9 est *(1)* tametsi *(2)* videri posse *(a)* vel literas *(b)* in *L*   10 vel *(1)* series *(2)* exponentes *L*   12 appareant *(1)* series *(2)* exponentes *L*   12 literae. *(1)* Expo *(2)* Literae *L*   12 literarum *erg.* *L*   13 ut *(1)* reliqvus calcul *(2)* generalia *L*

Formula Explicatrix formulae cujuscunque:

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
P\left\{\begin{matrix} S\,\overline{y}^{\,z} \\ I\ .\ \cdot \end{matrix}\right. \sqcap \left\{\begin{matrix} b\ A \\ g\ . \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} S\,z\,1 \\ I\ . \end{matrix}\right. \quad \beta^0 & & & & \\
P\left\{\begin{matrix} S\,\overline{y}^{\,z-1} \\ I\ \cdot\ . \end{matrix}\right. \sqcap \left\{\begin{matrix} b\ A \\ g \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} S\,z\,z \\ I \end{matrix}\right. \quad \beta^1 & + \left\{\begin{matrix} ca\ A \\ ha \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} S\,z-1\,1 \\ I \end{matrix}\right. \quad \beta^0 & & & \\
\cdot\ :\ \cdot^{\,z-2} \sqcap\ :\ \cdot\ :\ \cdot\ \frac{z,z-1}{1,2} \quad \beta^2 & +\ :\ \cdot\ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-1}{1} \quad \beta^1 & + \left\{\begin{matrix} da^2\ A \\ ka^2 \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} S\,z-2\,1 \\ I \end{matrix}\right. \quad \beta^0 & & \\
\cdot\ :\ \cdot^{\,z-3} \sqcap\ :\ \cdot\ :\ \cdot\ \frac{z,.,z-2}{1,2,3} \quad \beta^3 & +\ :\ \cdot\ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-1,z-2}{1,2} \quad \beta^2 & +\ :\ \cdot\ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-2}{1} \quad \beta^1 & \begin{matrix} +\,ea^3\ A\,S\,z-3\,1 \\ la^3\quad I \end{matrix} \quad \beta^0 & \\
\cdot\ :\ \cdot^{\,z-4} \sqcap\ :\ \cdot\ :\ \cdot\ \frac{z,.,.,z-3}{1,2,3,4}\ \beta^4 & +\ :\ \cdot\ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-1,.,z-3}{1,2,3}\ \beta^3 & +\ :\ \cdot\ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-2,z-3}{1,2}\ \beta^2 & +:\ \cdot\ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-3}{1}\ \beta^1 & \begin{matrix} +\,fa^4\ A\,S\,z-4\,1\ \beta^0 \\ ma^4\quad I \end{matrix}
\end{array}
$$

Ubi considerandum est simplicissimum constructionis Tabulae fundamentum sumendum esse non tam in perpendiculari aut horizontali etsi hic quoque non desunt harmoniae, sed transversali, ita enim transversaliter habetur: z. $z-1$. $z-2$. $z-3$. $z-4$. et 1 1 1 1 1. | | et $\frac{z}{1}$. $\frac{z-1}{1}$ $\frac{z-2}{1}$ $\frac{z-3}{1}$ | | $\frac{z,z-1}{1,2}$. $\frac{z-1,z-2}{1,2}$. $\frac{z-2,z-3}{1,2}$ | | $\frac{z,.,z-2}{1,2,3}$. $\frac{z-1,.,z-3}{1,2,3}$ | | $\frac{z,.,.,z-3}{1,2,3,4}$ |. Eodem modo crescunt decrescuntve transversaliter potentiae ipsarum β et a. Sed et notandum z parentheticum semper tot esse dimensionum, quot β ascriptum, v. g. in $\frac{z,.,z-2}{1,2,3}\beta^3$, id est $\frac{z,z-1,z-2}{1,2,3}\beta^3$ ductis his in se invicem assurgetur ad z^3. ubi notandum est, maximum numerum dividentem, ex his, 1, 2, 3. esse 3. Innumerae id genus observari possent harmoniae sed ut ad rem denique nostram veniamus, examinandum jam est, si formula explicatrix ducatur per crucem in explicatam quid inde proveniat: Nimirum Numerator producti erit † Aggregatum Combinationum omnium Terminorum AS cum omnibus Terminis PI, singulorum unius cum omnibus alterius; † aggregatum Combinationum omnium Terminorum AI, cum omnibus Terminis PS. Nominator vero: combinationes omnium terminorum AI, cum omnibus PI. Ex his combinationibus eas in unum colligemus, quae ad unum assurgunt ipsius y exponentem z. Et quidem maximus omnium $2z$. Nam combinationibus fiunt multiplicationes quantitatum, et additiones exponentium. Habebimus ergo terminos hos: $2z$. $2z-1$. $2z-2$. $2z-3$. $2z-4$. $2z-5$. $2z-6$. $2z-7$. $2z-8$. etc. Jam $2z$. componi potest non nisi ex $z+z$, ut scilicet neuter terminorum excedat z. Itaque fiet

$$\begin{array}{l} DS2z \sqcap \dagger b\,AS, z + PI, z \\ \qquad\quad \dagger g\;.\;I\;.+.\;S\;. \end{array}$$

1 Tabulae *erg. L* 4 $\frac{z-3}{1}$ *(1)* $\frac{z-4}{}$ *(2)* | | $\frac{z,z-1}{1,2}$ *L* 5 $\frac{z-1,.,z-3}{1,2,3}$ | | | $z,.,.,z-3$ *ändert Hrsg.* | |. Eodem *L* 11 proveniat: *(1)* Nimirum faciendae sunt omnes Terminorum AS, cum omnibus terminis PI, et contra om *(2)* Nimirum *(a)* Nominator *(b)* Numerator producti erit *(aa)* Combinat *(bb)* † *L* 14 Terminorum *(1)* PI *(2)* AI *L* 15 terminorum *(1)* AS *(2)* AI *L* 15 omnibus *(1)* A *(2)* PI. *L* 17 exponentium. *(1)* Combi *(2)* habebimus *L* 18 2z − 4. *(1)* Ex 2z − 5. 2z − 6 *(2)* 2z − 5. *L* 20 excedat z. *(1)* Eodem modo eadem *(2)*, itaqve *L* 21–160,1 DS2z ⊓ *(1)* †⌞AS, z+PI, z⌟†⌞AI, z+PS, z⌟ *(2)* $\begin{array}{l}\dagger\ AS, z+PI, z\\ \dagger\ .\ I\ .+.\ S\ .\end{array}$ *(3)* $\begin{array}{l}\dagger\ bAS, z+PI, z\\ \dagger\ g\ .\ I\ .+.\ S\ .\end{array}$ *(a)* nempe terminum superiorem cuius exponens sit 2z, differi Numer *(b)* s⟨–⟩ *(c)* id est *L*

Id est in <u>D</u>ifferentiae parte <u>S</u>uperiore seu Numeratore; terminum cujus exponens $2z$. componi ex duabus quantitatibus; una Signo $\dagger$ altera Signo $\ddagger$ affecta ita ut prior fiat ex ductu termini exponentem habentis z in <u>A</u>nterioris formulae nempe explicandae <u>S</u>uperiore parte seu Numeratore reperti; in terminum ejusdem exponentis, z, in PI, seu <u>P</u>osterioris formulae, nempe explicatricis parte <u>I</u>nferiore seu Nominatore reperti. Jam explicando PI, z et PS, z per valores supra inventos, fiet $DS2z \sqcap 0$.

$$\begin{array}{llll} DS, 2z-1 \sqcap & \dagger\, b & AS, z & +PI, z-1 \\ & \ddagger\, g & .\ I\ . & +\ .\ \ S \\ & \dagger\, ca & AS, z-1 & +PI\ \ z \\ & \ddagger\, ha & \ \ I & \qquad S \end{array}$$

Ubi rursus explicando $\underset{A}{PI}, z-1.$ et $\underset{A}{PI}, z$ per valores supra inventos fiet $DS, 2z-1 \sqcap 0$.

3 termini *(1)* AS (id est anteri *(2)* exponentem *L* 3 nempe explicandae *erg. L* 4 reperti; *(1)* ⟨–⟩ in ⟨–⟩ *(2)* In *L* 7–10 $DS, 2z-1 \sqcap$ *(1)* $\dagger AS, z + PI, z-1 \ddagger AS, z-1 + PI, z$ $\ddagger AI, z + PS\underset{\cdot}{z}$ $.\ddagger\ .\ I\ .\ \ .+.\ S\ .$ *(2)* $\begin{array}{ll} \dagger AS, z & +PI, z-1 \\ \ddagger\ .\ I\ . & +\ .\ S \\ \dagger AS\ \ z-1 & +\ PI\ \ z \\ \ddagger\ \ I & \qquad S \end{array}$ *(3)* $\begin{array}{lll} \dagger\, b & AS, z & +PI, z-1 \\ \ddagger\, g & .\ I\ . & +\ .\ S \\ \dagger\, ca & AS\ \ z-1 & +\ PI\ \ z \\ \ddagger\, ha & \ I & \qquad S \end{array}$ *L*

$$DS, 2z-2\sqcap \begin{cases} \mp b & A \begin{cases} S, z \\ I\,. \end{cases} \\ \mp g & . \end{cases} \quad \boxed{+\ P \begin{cases} I, z-2 \\ .\ S\ .\ . \end{cases}} \quad \boxed{\overset{IIII}{} \begin{cases} gAIz \\ b\ S \end{cases} \frac{z, z-1}{1,2}\ \beta^2} + \begin{matrix} haAIz-1 \\ ca\ S \end{matrix} \overset{III}{} \frac{z-1}{1}\ \beta^1 + \begin{matrix} ka^2AI\ z \\ da^2\ S \end{matrix}\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} ca \\ ha \end{matrix} \cdot \quad : z-1 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-1} \quad \boxed{\overset{III}{}\ : \cdot : \cdot\ \frac{z}{1}\ \beta^1} \boxed{\overset{II}{} +\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ (1)\ \beta^0}$$

$$: \begin{matrix} da^2 \\ ka^2 \end{matrix} \cdot \quad : z-2 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-0} \quad \boxed{: \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}_{I}$$

$$DS, 2z-3\sqcap \ : \begin{matrix} b \\ g \end{matrix} \cdot \quad : z \quad \boxed{+\ \cdot\ : z-3} \quad : \cdot : \cdot\ \frac{z,.,z-2}{1,2,3}\ \beta^3 + \ : \cdot : \cdot\ \overset{V}{}\ \frac{z-1, z-2}{1,2}\ \beta^2 + \ : \cdot : \cdot\ \overset{III}{}\ \frac{z-2}{1}\ \beta^1 + \begin{matrix} la^3 \\ ea^3 \end{matrix} A \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \boxed{z}^{I} - 3\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} ca \\ ha \end{matrix} \cdot \quad : z-1 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-2} \quad \boxed{\overset{V}{}\ : \cdot : \cdot\ \frac{z, z-1}{1,2}\ \beta^2} \boxed{\overset{IIII}{} +\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ \frac{z-1}{1}\ \beta^1} + \ : \cdot : \boxed{\overset{II}{}\ \cdot}\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} da^2 \\ ka^2 \end{matrix} \cdot \quad : z-2 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-1} \quad \boxed{\overset{III}{}\ : \cdot : \cdot\ \frac{z}{1}\ \beta^1} \boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ (1)\ \beta^0}_{II}$$

$$: \begin{matrix} ea^3 \\ la^3 \end{matrix} \cdot \quad : z-3 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-0} \quad \boxed{\overset{I}{}\ : \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}$$

$$DS, 2z-4\sqcap \ : \begin{matrix} b \\ g \end{matrix} \cdot \quad : z \quad \boxed{+\ \cdot\ : z-4} \quad : \cdot : \cdot\ \frac{z,.,.,z-3}{1,2,3,4}\ \beta^4 + \ : \cdot : \cdot\ \cdot\ \overset{VIII}{}\ \frac{z-1,.,z-3}{1,2,3}\ \beta^3 + \ : \cdot : \cdot\ \overset{VI}{}\ 2\ \frac{z-2, z-3}{1,2}\ \beta^2 + \ : \cdot : \cdot\ \overset{IIII}{}\ \frac{z-3}{1}\ \beta^1 + \begin{matrix} ma^4 \\ fa^4 \end{matrix} A \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \boxed{z}_{I} - 4\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} ca \\ ha \end{matrix} \cdot \quad : z-1 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-3} \quad \boxed{\overset{VIII}{}\ : \cdot : \cdot\ \frac{z,.,z-2}{1,2,3}\ \beta^3} + \ : \cdot : \cdot\ \cdot\ \frac{z-1, z-2}{1,2}\ \beta^2 + \ : \cdot : \cdot\ \frac{z-2}{1}\ \underset{V}{}\ 1\ \beta^1\ [+]\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ \underset{II}{}\ 1\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} da^2 \\ ka^2 \end{matrix} \cdot \quad : z-2 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-2} \quad \boxed{\overset{VI}{}\ : \cdot : \cdot\ \frac{z, z-1}{1,2}\ \beta^2} \boxed{\overset{V}{} +\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ \frac{z-1}{1}\ \beta^1} \boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ (1)\ \beta^0}_{III}$$

$$: \begin{matrix} ea^3 \\ la^3 \end{matrix} \cdot \quad : z-3 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-1} \quad \boxed{\overset{IIII}{}\ : \cdot : \cdot\ \frac{z}{1}\ \beta^1} \boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ (1)\ \beta^0}_{II}$$

$$: \begin{matrix} fa^4 \\ ma^4 \end{matrix} \cdot \quad : z-4 \ \boxed{+\ \cdot\ : z-0} \quad \boxed{: \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}_{I}$$

12 f. $\boxed{+ \cdot : z-1}$ | $\boxed{\overset{III}{}\ : \cdot : \cdot\ \frac{z}{1}\ \beta^1}$ *ändert Hrsg.* | + $\boxed{: \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}_{II}$: | $\begin{matrix} \mathrm{fa}^4 \\ \mathrm{ma}^4 \end{matrix}$ *erg.* | $\cdot : z-4$ | $+ \cdot : z-0$ *ändert Hrsg.* | $\boxed{: \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}_{I}$ *L*

$$
\begin{array}{llllll}
DS, 2z-5 \sqcap & \cancel{: \frac{b}{g} \quad \cdot} & \cancel{: z \quad + \cdot} & \cancel{: z-5} \\
& : \frac{ca}{ha} \quad \cdot & : z-1+\cdot & : z-4 \\
& : \frac{da^2}{ka^2} \quad \cdot & : z-2+\cdot & : z-3 \\
& : \frac{ea^3}{la^3} \quad \cdot & : z-3+\cdot & : z-2 \\
& : \frac{fa^4}{ma^4} \quad \cdot & : z-4+\cdot & : z-1 \\
& : \quad \cdot & \cancel{: z-5+\cdot} & \cancel{: z-0} \\
DS, 2z-6 \sqcap & \cancel{: \quad \cdot} & \cancel{: z \quad + \cdot} & \cancel{: z-6} \\
& \cancel{: \quad \cdot} & \cancel{: z-1+\cdot} & \cancel{: z-5} \\
& : \frac{da^2}{ka^2} \quad \cdot & : z-2+\cdot & : z-4 \\
& : \frac{ea^3}{la^3} \quad \cdot & : z-3+\cdot & : z-3 \\
& : \frac{fa^4}{ma^4} \quad \cdot & : z-4+\cdot & : z-2 \\
& \cancel{: \quad \cdot} & \cancel{: z-5+\cdot} & \cancel{: z-1} \\
& \cancel{: \quad \cdot} & \cancel{: z-6+\cdot} & \cancel{: z-0} \\
DS, 2z-7 \sqcap & \left\{ \begin{array}{ll} \dagger & A \\ \ddagger & . \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} S, \cancel{z \quad + P} \\ I \quad \cancel{. \quad . \quad .} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \cancel{I \; z-7} \\ \cancel{S \; . \; . \; .} \end{array} \right. \\
& : \quad \cdot & : \cancel{z-1+\cdot} & \cancel{: z-6} \\
& : \quad \cdot & : \cancel{z-2+\cdot} & \cancel{: z-5} \\
& : \frac{ea^3}{la^3} \quad \cdot & : z-3+\cdot & : z-4 \\
& : \frac{fa^4}{ma^4} \quad \cdot & : z-4+\cdot & : z-3 \\
& : \quad \cdot & : \cancel{z-5+\cdot} & \cancel{: z-2}
\end{array}
$$

---

14 *Darüber:* Plag. 2. Schediasmatis de formulis omnium Dimensionum

1 $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{g}}$ *erg. L* 2 $\frac{\mathrm{ca}}{\mathrm{ha}}$ *erg. L* 3 $\frac{\mathrm{da}^2}{\mathrm{ka}^2}$ *erg. L* 4 $\frac{\mathrm{ea}^3}{\mathrm{la}^3}$ *erg. L* 5 $\frac{\mathrm{fa}^4}{\mathrm{ma}^4}$ *erg. L* 9 $\frac{\mathrm{da}^2}{\mathrm{ka}^2}$ *erg. L* 10 $\frac{\mathrm{ea}^3}{\mathrm{la}^3}$ *erg. L* 11 $\frac{\mathrm{fa}^4}{\mathrm{ma}^4}$ *erg. L* 13 $\cancel{: \cdot : \mathrm{z}-6+\cdot : \mathrm{z}-0}$ | vide seq plag *gestr.* | DS, 2z − 7 *L* 18 $\frac{\mathrm{ea}^3}{\mathrm{la}^3}$ *erg. L* 19 $\frac{\mathrm{fa}^4}{\mathrm{ma}^4}$ *erg. L*

$$
\begin{array}{rccccl}
 & : & \cdot & : & \cancel{z-6+\cdot} & : z-1 \\
 & : & \cdot & : & \cancel{z-7+\cdot} & : z-0 \\
DS, 2z-8 \sqcap & : & \cdot & : & \cancel{z \quad +\cdot} & : z-8 \\
 & : & \cdot & : & \cancel{z-1+\cdot} & : z-7 \\
 & : & \cdot & : & \cancel{z-2+\cdot} & : z-6 \\
 & : & \cdot & : & \cancel{z-3+\cdot} & : z-5 \\
 & : & \frac{fa^4}{ma^4}\cdot & : & z-4+\cdot & : z-4 \\
 & : & \cdot & : & \cancel{z-5+\cdot} & : z-3 \\
 & : & \cdot & : & \cancel{z-6+\cdot} & : z-2 \\
 & : & \cdot & : & \cancel{z-7+\cdot} & : z-1 \\
 & : & \cdot & : & \cancel{z-8+\cdot} & : z-0
\end{array}
$$

Ista assumtio ipsius z. hunc habet usum, ut ipse exponens dimensionis pro arbitrio sumi, et ita problemata alioquin insolubilia forte solvi possint. Hac enim ratione efficitur, ut exponens dimensionis ingrediatur ipsas quantitates. Efficere praeterea possumus, ut cessent omnes destructiones, si scilicet in Nominatore seu I exponens non sit z ut in Numeratore seu S. verum alius, v. g. μ. Ita enim etsi aliquae eveniant destructiones, operae pretium tamen erit eas dissimulare, et sine destructione relinquere; cum duae ita in cujuslibet differentiae Termini quantitate cognita habeantur series, una pendens a z. altera ab μ. et una quaeque valde regularis et simplex, pendens a numeris combinatoriis.

Nota si sit exponens, e. g. $\sqrt{3}$. $\sqcap$ z v. g. $y^{\sqrt{3}}$. et pro y velis ponere $x+\beta$ videamus quomodo $x+\beta$ multiplicari possit in se secundum exponentem $\sqrt{3}$ sane si secundum regulam quandam generalem binomiorum scribas, ut supra; continuanda erit in infinitum operatio. Nam faciendo $z-1$ $z-2$ $z-3$. etc. patet jam 2 esse $\sqcap$ quam z adeoque exponentes fieri nihilo minores; exponentes autem nihilo minores significant divisiones loco multiplicationum; poterit ergo in infinitum continuari progressio; et vicissim seriei hujus infinitae summa erit binomii potentia secundum exponentem z. Itaque si z non sit numerus rationalis, explicatio, subtrahendo ab exponente, unitates fiet semper infinita. Et ecce novam accessionem ad doctrinam de summa serierum infinitarum. Sed quid si

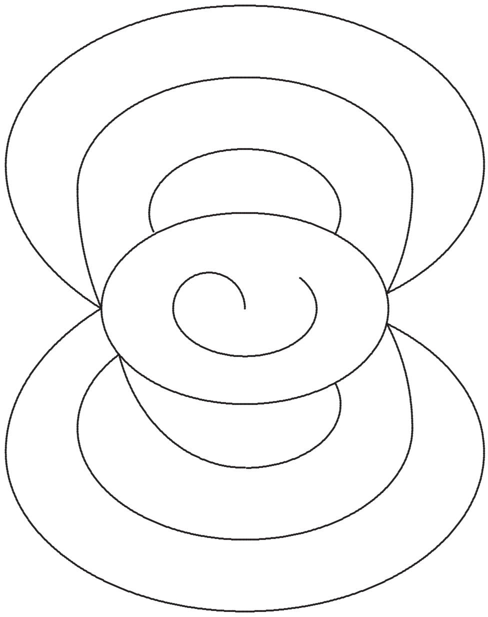
7 $\frac{\mathrm{fa}^4}{\mathrm{ma}^4}$ *erg. L* 12 ut *(1)* ⟨–⟩ *(2)* ipse *(a)* pro *(b)* exponens *(aa)* aeqvationis *(bb)* dimensionis *L* 14 qvantitates. *(1)* Ingrediamur *(2)* Inqviramus itaqve in *(a)* qvanti *(b)* formulam, cuius differentia *(aa)* sit $\frac{1}{\mathrm{y}^2+\frac{\beta}{2}\mathrm{y}\ *}$ *(bb)* sit ea *(aaa)* $\mathrm{y}^{\mathrm{z}}+$ *(bbb)* $\frac{\mathrm{by}^{\mathrm{z}}+\mathrm{cay}^{\mathrm{z}-1}}{}$ *(3)* Efficere *L* 18 in *(1)* qvalibet *(2)* cuiuslibet differentiae *(a)* Cogni *(b)* Termini *L* 23 jam *(1)* z − 2 *(2)* z − 0 *(3)* 2 *L*

ipsam z hoc loco $\sqrt{3}$ dividas in partes aequales pro arbitrario, v. g. $\dfrac{z}{3}$, aut si numerum partium aequalium definire nolis initio: $\dfrac{z}{\mu}$. fiet enim $z - \dfrac{z}{\mu}$. $z - \dfrac{2z}{\mu}$ etc. et μ erit numerus rationalis.

Quid si μ sit numerus irrationalis non video commodum exprimendi modum, quemadmodum et nondum video rationem explicandi binomium, ope exponentis secti in partes inaequales. Illud primo in numeris experiundum, et inde ad caetera traducendum foret: Caeterum ex his in mentem venit, etiam rationalium exponentium potestates explicari posse binomiis infinitis, nempe si sit: $y^{z-\mu}$ $y^{z-2\mu}$. $y^{z-3\mu}$. pone z. et μ. sive rationales sive irrationales esse inter se incommensurabiles aut certe multiplicatos per numeros naturales uno μ, nunquam productum alteri z. coincidere; tunc certe in infinitum producetur explicatio. Ut autem finita sit explicatio non est necesse ipsam μ esse unitatem, sed tantum ipsi z. commensurabilem per numerum naturalem. Sed quidsi jam longius adhuc progrediamur, et loco $-\mu$ -2μ -3μ, adhibeamus: -2μ -4μ -6μ, -8μ. vel etiam incipiendo aliter. $-\mu$ -3μ -5μ -7μ. ubi quaeritur an semper incipiendum sit necessario ab unitate, et an intervallum sumi possit quodlibet.

Nimirum Tabula numerorum combinatoriorum condi potest, non tantum etsi generator non sit unitas, sed etiam etsi sit numerus irrationalis. Finge jam aliud: in Tabula quadam numerorum combinatoriorum quaeri medios, aut bimedios, aut trimedios etc. Sed et finge continua ejusmodi mediarum interpositione describi lineas combinatorias, quibus repraesentantur numerorum figuratorum progressiones. Videndum an secando has lineas in partes inaequales, sed invicem respondentes binomiorum tamen potestates exprimi queant. Tantum sumendum est Triangulum Arithmeticum et in partes inaequales secandum, etc. Ut autem ista universaliter demonstrentur; dividenda quaelibet potestas in infinitas ratiunculas; et ostendendum ista coincidere cum lineis istis combinatoriis.

1 $\dfrac{\mathrm{z}}{3}$, *(1)* seu $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ item qvid si *(2)* aut *L*   6 f. foret: *(1)* nempe y^4 *(2)* Caeterum *L*   8 pone *(1)* μ esse numerum vel *(2)* z *L*   9 incommensurabiles *(1)* usus aut certe multiplicatione *(2)* aut *L*   9 f. numeros *(1)* num *(2)* naturales *(a)* nunqva *(b)* uno *L*   20 qvibus | repraesentur *ändert Hrsg.* | *(1)* numeris figuratis *(2)* numerorum *L*   24 cum *(1)* numeris *(2)* lineis *(a)* figurarum *(b)* istis *L*



[*Fig. 1*]

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$			
$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$			
$\frac{1}{2}$	1	3	6		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$			
$\frac{1}{2}$	1	4			
	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{2}$	1				

Nimirum manifestum est, si generator non sit unitas sed $\frac{1}{2}$ et ita porro subdividendo in infinitum. Adeoque intelligi potest sumto quolibet generatore, si modo unus coincidat coincidere omnes.

3 $\frac{1}{2}$ *(1)* 0 *(2)* 1 *L* 5 $\frac{1}{2}$ *(1)* 0 *(2)* 1 *L* 7 $\frac{1}{2}$ *(1)* 0 *(2)* 1 *L* 9 $\frac{1}{2}$ *(1)* 0 6 *(2)* 1 *L*

2–11 $\frac{1}{2}$ . . . 4 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1: Leibniz versucht, durch Interpolation ein Pascalsches Dreieck mit Basis $\frac{1}{2}$ aus einem Dreieck zur Basis 1 zu erzeugen. Dafür müsste er eigentlich nur wie in S. 171 Z. 2–6 bei allen Einträgen des Dreiecks mit Basis 1 den Nenner $_2$ ergänzen.

Esto ergo Theorema: Figura combinatoria quaelibet coincidit cuilibet, quicunque sit generator, modo unitas sit eadem: Hinc etsi diversa sit unitas omnia tamen proportionalia sunt, sive, diversae Figurae Combinatoriae sunt similes inter se. Figuram autem Combinatoriam voco, cujus curva transit per extremitates omnium rectarum numeros combinatorios, secundum ordines numericos repraesentantium, a d h i b i t a interpolatione indefinite continuata. Si interpolatio in infinitum absolvi intelligatur, et Figurae Combinatoriae reddantur Geometricae (: hactenus enim non nisi Arithmeticae sunt, desinent: Triangulares in parabolam; pyramidales in paraboloeidem cubicam simplicem; et caetera in paraboloeides simplices altiores [:)].

In transversali Tabulae Combinatoriae, ut H. E. C. F. D. G. terminus quilibet, ut E est ad proxime superiorem, ut numerus inferiorum cum ipsa E, ad numerum superiorum cum ipsa C. sive ut numerus ordinis ipsius inferioris E, ad exponentem ordinis ipsius superioris C. nempe ut numerus ipsarum H. E, nempe 2, ad numerum ipsarum C. F. D. G. nempe 4. Summa ergo semper numerus terminorum lineae transversalis hoc loco 6.

Itaque si omnes sequentes, ab aliqua praecedente vel superiore vel inferiore deriventur, et intervallum ordinis primi, quod hoc loco per unitatem repraesentatur appelletur β, et numerus omnium terminorum lineae transversalis vocetur q, tunc uno ex terminis cujus ope scilicet alii investigandi sunt, appellato z, fiet Terminus sequens ad hunc h, ut

1 qvaelibet | concidit *ändert Hrsg.* | cuilibet, *L* 4 f. numeros *(1)* Triangul *(2)* combinatorios *L* 5 f. interpolatione *(1)* in infinitum continuata *(2)* indefinite *L* 7 f. sunt, *(1)* | degenerabunt in *nicht gestr.* | *(2)* desinent *L* 8 cubicam | *(1)* puram *(2)* simplicem *erg.* |; et *L* 9 paraboloeides *(1)* altiores *(2)* simplices *L* 10 In *(1)* basi *(2)* transversali *L* 10 G. *(1)* num *(2)* terminus *L* 11 proxime *(1)* seqventem, ut *(2)* superiorem, *(a)* | ut *nicht gestr.* | *(aa)* G *(bb)* C *(b)* ut *L* 12 ut *(1)* exponens ordinis *(2)* numerus ordinis *(a)* demto ⟨un⟩ *(b)* pri *(c)* inferioris *(d)* ipsius *L* 19 fiet *(1)* z *(2)* ut *(a)* terminus seqvens, ad hunc; ut z, sive hic ipse ad $\mathrm{q}-\mathrm{z}$ adeoqve: Terminus seqvens $\sqcap \dfrac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{q}-\mathrm{z}}$, et terminus tertius seu seqvens seqventem, ad seqventem $\mathrm{z}^2 \smile \mathrm{q}-\mathrm{z}$, ut ipse seqvens $\mathrm{z}^2 \smile \mathrm{q}-\mathrm{z}$, ad $\mathrm{q}, -, \mathrm{z}^2 \smile \mathrm{q}-\mathrm{z}$, sive seqvens seqventem $\sqcap \dfrac{\mathrm{z}^4}{\mathrm{q}^2-2\mathrm{qz}+\mathrm{z}^2} \smile \dfrac{\mathrm{q}^2-\mathrm{qz}-\mathrm{z}^2}{\mathrm{q}-\mathrm{z}} \sqcap$ *(aa)* $\mathrm{z}^4 \smile \mathrm{q}-\mathrm{z} \smile \mathrm{qz}$ *(bb)* $\mathrm{z}^4 \smile \mathrm{q}-\mathrm{z} \smile \mathrm{q}^2-\mathrm{qz}-\mathrm{z}^2 \sqcap \mathrm{z}^4 \smile \mathrm{q}^3 \begin{matrix}-\mathrm{q}^2\mathrm{z}\\-\mathrm{q}^2\mathrm{z}\end{matrix} \boxed{\begin{matrix}-\mathrm{qz}^2\\+\ldots\end{matrix}} - \mathrm{z}^3 \sqcap \mathrm{z}^4 \smile \mathrm{q}^3-2\mathrm{q}^2\mathrm{z}-\mathrm{z}^3$ et ita porro. tamqve *(aaa)* harum *(bbb)* intelligi *(aaaa)* posset *(bbbb)* possit a termino | qvodam in medio sumto vel descendi vel ascendi tunc judicari potest duplicem semper esse valorem harum Qvantitatum. *Dazu, nicht gestr.* Imo, video me committere errorem hoc de qvolibet termino enuntiando, *(aaaaa)* cum sit verum, *(bbbbb)* falsum est enim *(ccccc)* sic ergo redinchoandum: | *(b)* Terminus *L*

p ad $q-p$ adeoque terminus sequens $\sqcap hp \smile q-p$. et sequens sequentem, ad sequentem $hp \smile q-p$, ut $p \ddagger \beta$ ad $q-p \ddagger \beta$ adeoque sequens sequentem erit $\sqcap hp^2 \ddagger hp\beta \smile q-p \smile q-p \ddagger \beta$. Ascenditur autem vel descenditur, prout $q-p$, vel p inferior aut superior, et prout $\ddagger$. significat $+$ aut $-$. Si h sit $\sqcap z$. seu primi ordinis tunc h et q differunt unitate ipsius β. Itaque z adhibere utilius; itaque notandum priora resumi posse, modo pro 1, ponamus 1β, unde fiet v. g. $E \sqcap \dfrac{z}{1}$. $C \sqcap \dfrac{z, \frown z-1\beta}{1,2}$, $D \sqcap \dfrac{z, z-1\beta, z-2\beta}{1,2,3}$ etc. Itaque si sit potestas: y^z. possumus z resolvere in quotcunque β inter se aequales, vel in numeros, vel in alias quantitates rationales vel surdas, vel fractas, ut si z sit 2, seu $y^z \sqcap y^2$, ponendo $y \sqcap x+\gamma$ binomium hoc quadratice in se multiplicatum erit, etiamsi non scribatur: $x^2+2\gamma x+\gamma^2$, sed v. g. pro 1. sumatur $\dfrac{1}{2} \sqcap \beta$ unde binomii hujus quadratum erit compositum ex quatuor terminis, nempe fiet: $y^2 \sqcap \dfrac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \dfrac{4}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{6}{2}\gamma^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}} + \dfrac{4}{2}\gamma^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$. Unde facile intelligi potest, eodem modo etiam explicari posse per binomia, potestatem cujus exponens est irrationalis, v. g. $\sqrt{2}$. dividendo eam in partes quotcunque aequales. Horum omnium veritas tum numeris tum calculo explicari debet. Prioris et calculo et in numeris, posterioris non nisi in numeris. Notandum vero hanc formulam in qua exponens fractus, semper reduci posse ad formulam exponentium integrorum, ope aequationis; sed si exponentes sint irrationales, non videre me modum reducendi ad ordinarios, utcunque formetur aequatio.

Illud tantum superest excutiendum, an aliqua ratione sive arte possint ipsae β. esse inaequales, ut scilicet necesse non sit exponentes crescere vel decrescere aequaliter. Caeterum valor ipsius y^2, ita more Communi expressus, daret: $y^2 \sqcap \dfrac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x^3}\gamma + 3\gamma x + 2\sqrt{\gamma^3}x + \dfrac{1}{2}\gamma^2$. quod facile in numeris experiri licebit, modo x et γ intelligantur

1 seqvens *(1)* $\sqcap$ p $\smile$ q $-$ p *(2)* $\sqcap$ hp $\smile$ q $-$ p *L* 8 rationales | sive fra *erg. u. gestr.* | vel *L* 8 f. $\mathrm{y}^{\mathrm{z}} \sqcap \mathrm{y}^2$, *(1)* mu *(2)* ponendo *(a)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}+\beta$ *(b)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}+\gamma$ *L* 9 hoc *(1)* cubice *(2)* qvadratice *L* 9 f. scribatur: *(1)* y^2 *(2)* x^2+ *(a)* 2β *(b)* $2\gamma\mathrm{x}+\gamma^2$ *L* 10 pro 1. *(1)* compon *(2)* sumatur *L* 10 unde *(1)* binomium *(2)* binomii | huius qvadratum *erg.* | erit *L* 11 fiet: *(1)* $\mathrm{y}^2 \sqcap \frac{1}{2}\beta\mathrm{x}^{\frac{4}{2}} + \frac{6}{2}\beta^{\frac{1}{2}}\mathrm{x}^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{2}\beta^{\frac{4}{2}}\mathrm{x}^{\frac{4}{2}}$ *(2)* $\mathrm{y}^2 \sqcap \frac{1}{2}\beta\mathrm{x}^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\beta^{\frac{1}{2}}\mathrm{x}^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{2}\beta^{\frac{4}{2}}\mathrm{x}^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\beta^{\frac{2}{2}}\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\beta^{\frac{4}{2}}$ *(3)* $\mathrm{y}^2 \sqcap \frac{1}{2}\gamma\mathrm{x}^{\frac{4}{2}}$ *(4)* $\mathrm{y}^2 \sqcap \frac{1}{2}\mathrm{x}^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}\mathrm{x}^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{2}\gamma^{\frac{2}{2}}\mathrm{x}^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{3}{2}}\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$ *L* 13 partes | qvodcunqve *ändert Hrsg.* | aeqvales *L* 21 daret: *(1)* 1γ *(2)* $\frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + (a) 2\mathrm{x}^3 (b) 2\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{x}\gamma} + 3\gamma\mathrm{x} + 2\mathrm{y}^2\sqrt{\mathrm{x}\gamma}$ *(3)* $\mathrm{y}^2 \sqcap$ *L*

esse numeri quadrati, nempe sit $x \sqcap 9$. et $\gamma \sqcap 4$, fiet: $y \sqcap x+\gamma \sqcap 9+4 \sqcap 13$. Jam $13 \frown 13 \sqcap \begin{array}{r} 39. \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$ Unde

$$\begin{array}{llllllllll} y^2 & \sqcap & \frac{1}{2}x^2 & + & 2x\sqrt{x\gamma} & + & 3\gamma x & + & 2\gamma\sqrt{\gamma x} & + \frac{1}{2}\gamma^2 \\ 169 & & \frac{81}{2} \sqcap 40\frac{1}{2} & + & 2 \frown 9\sqrt{36} \sqcap 108 & + & 108 & + & 2 \frown 4 \frown 6 \sqcap 48 & + \ 8. \end{array}$$

Sed hic calculus non consentit.

Ideoque rei investigandae causa scribamus: $bx^2 + cx\sqrt{x\gamma} + d\gamma x + e\gamma\sqrt{\gamma x} + f\gamma^2 \sqcap ax^2 + 2a\gamma x + a\gamma^2$. et junctis in unum irrationalibus caeterisque ordinatis:

$$B\left\{\begin{array}{l} +b\,x^2 \\ -a\,.\,. \end{array}\right. D\left\{\begin{array}{l} +\ d\,\gamma x \\ -2a\ .\,. \end{array}\right. F\left\{\begin{array}{l} +f\,\gamma^2 \\ -a\,.\,. \end{array}\right. \begin{array}{l} -cx\,\sqrt{x\gamma}. \\ \sqcap -e\gamma\ \ .\ .\ . \end{array}$$

et quadrando,

$$\begin{array}{llllllll} B^2\ x^4 & + & 2BD\ x^3\gamma & + & 2BF\ x^2\gamma^2 & & & \\ & & & + & D^2\ \ \ldots & + & 2DF\ x\gamma^3 & +\ F^2\ \gamma^4 \sqcap 0. \\ -\ c^2\ \ \ldots & - & 2ce\ \ \ldots & - & e^2\ \ \ldots & & & \end{array}$$

Jam ponatur $b \sqcap f$. adeoque $B \sqcap F$. item $c \sqcap e$. quod ex ipsa calculi natura pendet, cum enim x et γ. sint indefinita, altera pro altera sumi potest, neque ulla diversitatis ratio intelligi potest, cum non nisi situ sive ordine varient, idem enim est $x+\gamma$. et $\gamma+x$. quare et quadrata eorum eadem, aequatio ergo et pro F ponendo B, et pro e ponendo c, ita stabit

---

4 *Am Rand:*

$$\begin{array}{rrr} 2 & & \\ 9 & 18 & 36 \\ 6 & 6 & 3 \\ \hline & 108 & 108 \end{array}$$

1 fiet: *(1)* y $\sqcap$ x + 9 *(2)* y $\sqcap$ x + γ. *L* 4 169 *(1)* $\frac{96}{2} \sqcap 48$ *(2)* $\frac{81}{2} \sqcap 40\frac{1}{2}$ *L* 14 ponatur *(1)* B $\sqcap$ F. *(2)* b $\sqcap$ f. *L* 17 ergo *(1)* per B^2 sive F^2 divisa, *(2)* ⟨eas⟩ ponendo *(3)* et pro *(a)* f b *(b)* F *L*

$$B^2\ x^4 \left\{\begin{array}{llllllll} + 2BD & x^3\gamma & + 2B^2 & x^2\gamma^2 & + 2BD & x\gamma^3 & + B^2 & \gamma^4 \\ & & + D^2 & & & & & \\ - c^2 & \dots & - c^2 & & - c^2 & & & \end{array}\right. \qquad \odot$$

Jam haec aequatio cum alia simili ejusdem valoris conferatur, scilicet: $x^2+2x\gamma+\gamma^2$, ducatur in $x^2+\dfrac{h}{a}x\gamma+\gamma^2$. productum ducatur in B^2, fiet:

$$\begin{array}{llllllll} B^2\ x^4 & + 2B^2 & x^3\gamma & + B^2 & x^2\gamma^2 & & & \\ & + B^2\dfrac{h}{a} & \dots & + 2\dfrac{B^2h}{a} & \dots & + \dfrac{B^2h}{a} & x\gamma^3 & \\ & & & + B^2 & \dots & + 2B^2 & \dots & + B^2\ \gamma^4 \end{array} \qquad ☽.$$

Hanc formulam priori non similem tantum sed et coincidentem esse, intelligi potest, si fingamus formulam $bx^2+cx\sqrt{x\gamma}$ etc. esse aequationem duarum radicum aequalium potius, quam formulam quadrati binomii. Unde suffecerit eam potius aequalem poni nihilo quam alteri $ax^2+2ax\gamma+a\gamma^2$ adeoque omissa $\underline{a}$. ponemus B et b, vel D vel d, et F vel f. aequales. Aequationes ergo collatitiae oriuntur duae, una, per quam $D \sqcap \dfrac{2B^2a+B^2h-c^2a}{2Ba}$. adeoque

$$\begin{array}{lllll} D^2 \sqcap & + 4a^2\ B^4 & \underset{III}{\boxed{-4a^2\ B^2c^2}} & + a^2\ c^4 & \smile 4B^2a^2 \\ & \underset{II}{\boxed{+4ah}} & -2ah & & \\ & + h^2 & & & \end{array}$$

quem valorem inserendo alteri collatitiae, fiet:

$$\underset{I}{\boxed{\begin{array}{l} 8B^4a^2 \\ -8.\dots\dots \end{array}}}\ \underset{III}{\boxed{+4a^2\ B^2c^2}}\ \underset{III}{\boxed{-4B^4\ ha}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \sqcap 0.$$

4 scilicet: *(1)* $ax^2+2ax\gamma+a\gamma^2$, *(2)* $x^2+2x\gamma+\gamma^2$ *L* 5 in | h *gestr.* | $x^2+\dfrac{h}{a}x\gamma+\gamma^2$. *(1)* fiet: *(2)* productum *L* 9 priori *(1)* et *(2)* non *L* 13 collatitiae *erg.* *L*

3 $-c^2\dots-c^2-c^2$: Hier und im Folgenden bis S. 170 Z. 2 treten einzelne Verschreibungen und kleinere Versehen bei den Umformungen auf, die sich auf die Bestimmung der Gleichungen von S. 170 Z. 10–12 auswirken.

Habemus ergo inventas aequationes duas, unam $D \sqcap \begin{array}{l} 2aB^2 - ac, \\ +\ h \end{array} \smile 2aB$, alteram: $h^2 - \dfrac{2c^2a}{B^2}h + \dfrac{a^2c^2 + 4a^2B^4}{B^2} \sqcap 0$. Unde duae habebuntur arbitrariae, nempe B. et c. quas determinare licebit, si cogitemus si velimus habere qualitatem numerorum combinatoriorum, ut scilicet, ex duobus primo β, ut alias pro Tabula combinatoria appellavimus, sive ut hoc loco vocabimus b; et secundo antea appellato z, hoc loco vero c, caeteri sequantur, proxime scilicet sequentem nempe D (quem supra appellaveramus c) faciendo $\dfrac{z, z-\beta}{1, 2.}$. Imo praeterea necesse est hoc loco c (supra D) seu $\dfrac{z, z-1\beta, z-2\beta}{1, 2, 3}$ aequari ipsi $\underline{c}$ hoc loco $\underline{z}$, ut scilicet numerorum combinatoriorum natura servetur, Denique necesse est ipsam b (supra β) aequari ipsi f sive per numerorum combinatoriorum naturam, ipsi $\dfrac{z, z-1\beta, z-2\beta, z-3\beta}{1, 2, 3, 4.}$. Habemus ergo aequationes: $D \sqcap \begin{array}{l} 2aB^2 - ac \\ +\ h. \end{array} \smile 2aB$, et $h^2 - \dfrac{2c^2a}{B^2}h + \dfrac{a^2c^4 + 4a^2B^4}{B^2} \sqcap 0$ et $D \sqcap \dfrac{c, c-B}{1, 2}$ et $c \sqcap \dfrac{c, c-B, c-2B}{1, 2, 3}$, et denique $B \sqcap \dfrac{c, c-B, c-2B, c-3B}{1, 2, 3, 4}$. Quae aequationes cum sint numero quinque, incognitae autem sint D, h, c, B adeoque quatuor tantum, hinc praesumendum est calculum esse impossibilem, nisi theorema subsit, cujus subtilitate ipsa rerum natura calculo consuluisse putanda sit. Itaque si nihil aliud hoc scilicet ex ejusmodi inquisitione discemus, an scilicet Numerorum Combinatoriorum Tabulam interpolatam potestatibus exponentium fractorum accommodare possibile sit, nam si de fractis impossibilitas detegatur, non erit cur de surdis laboremus.

4 f. appellavimus, *(1)* hoc *(2)* hoc loco vero b. *(3)* sive *L* 6 f. faciendo *(1)* z − *(2)* $\dfrac{\mathrm{z, z} - \beta}{1, 2.}$ *(a)* incognitas ergo habemus D (supra c) B (supra β) c (supra z) *(b)* Imo *L* 7 loco *(1)* e $\sqcap$ c *(2)* c | $\sqcap$ *nicht gestr.* | (supra *(a)* z *(b)* D) *(aa)* aeqvari *(bb)* seu *L* 9 ipsi f *(1)* hoc loco *(2)* sive *L* 11 C $\sqcap$ *(1)* $\mathrm{z, z} - 1$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{C, C - B, C - 2B}}{1, 2, 3}$, *L* 14 subsit, *(1)* in qvo ipsa na *(2)* cuius *L* 16 Tabulam *(1)* Subsectione *(2)* interpolatam *L* 17 fractis *(1)* spes non *(2)* impossibilitas *L*

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{2}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}$			
$\frac{1}{2}$				

Si $y \sqcap x + \gamma$. deberet esse

$$y^{\frac{4}{2}} \sqcap +\frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{2}x^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$$

Sed hoc esse absurdum facile judicari potest, quia ponendo x. et γ numeros esse quadratos, et x imparem et γ parem vel contra; patet non posse non summam esse numerum fractum, cum tamen $y^{\frac{4}{2}}$ sit numerus integer, nisi velis aequationem esse inter $\frac{1}{2}y^{\frac{4}{2}}$ et $\frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}$ etc. quemadmodum $1y^2 \sqcap 1x^2 + 2x\gamma + 1\gamma^2$. Sed nec sic res procedet, fiet enim binomium istud nimis magnum; itaque haec Tabulae Combinatoriae interpolatio locum non habet, per $\frac{1}{2}$.

Generaliter quaestio eo redit, magnitudinis datae potentiam datam, datis magnitudinis et potentiae partibus exprimere. Quod si res per numeros combinatorios exitum reperire non potest, quaerendi sunt alii ope methodi supra praescriptae, per aequationes similes, et inductione aliquot casuum facta. Construatur Tabulae species, quae forte et ad irrationalia poterit extendi.

3 $\frac{1}{2}$ *(1)* $\frac{1}{2}$ *(2)* $\frac{2}{2}$ *L* 4 $\frac{1}{2}$ *(1)* $\frac{3}{4}$ *(2)* $\frac{3}{2}$ *L* 6 f. $\frac{1}{2}$ *(1)* $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$ *(2)* Si *L* 9 hoc *(1)* imposs *(2)* esse *(a)* ge *(b)* absurdum *L* 15 redit, *(1)* datam potentiam cuiusdam literae, aliarum literarum potentia exprimere, *(a)* da *(b)* magnitudine | et *nicht gestr.* | *(aa)* ratione in partes sectis, *(b)* potentia | datis *erg.* | in partes sectis, *(c)* magnitudini *(2)* magnitudinis *L* 19–172,1 extendi. *(1)* $\mathrm{y}^{\frac{4}{2}}$ seu *(2)* $\mathrm{y}^{\frac{4}{2}}$ seu $\sqrt{\mathrm{y}^4}$ *(3)* $\mathrm{y}^{\frac{3}{2}}$ seu $\sqrt{\mathrm{y}^3} \sqcap \beta\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + 1\mathrm{x}^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + 2\mathrm{x}^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \beta$ | x *gestr.* | $\gamma^{\frac{3}{2}}$ *(c)* $\sqrt{\mathrm{y}^3} \sqcap \beta\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + \mathrm{zx}^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + \mathrm{zx}^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \beta\gamma^{\frac{3}{2}}$ *(4)* Qvoniam *L*

Quoniam necesse non est, numeros illos esse combinatorios, et quoniam semper erunt arbitrariae literae, hinc eae ita explicentur semper constante modo, ut inde Tabula numerorum ejusmodi condi possit, etsi plane diversa a combinatoria vel combinatoria interpolata, modo constans. Denique quaerendum est quod inveniri possint expressiones pro exponentibus surdis. Malum est quod tunc ista reductio institui non potest. Sed videtur alia institui posse reductio per appropinquationes perpetuas, pro surdis sumendo fractorum seriem simul appropinquantem more meo, at videndum an ita res reduci possit ad analysin, seu an harum appropinquationum Termini reperiri possint.

Sequitur Schediasma *de Exponentibus Fractis et Surdis*.

32_2. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM, PARTES TERTIA ET QUARTA

Februar 1675

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III A 34 Bl. 5. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 5 r°. Rückseite leer. Cc 2, Nr. 909

Feb. 1675

De formulis omnium dimensionum

De Exponentibus Fractis et Surdis

De infiniti et indefiniti differentia

Vide Schediasma Januarii 1675. *de formulis omnium dimensionum* constans duabus partibus.

Constat si exponentes sint integri aut rationales, numeris combinatoriis valores binomiorum exprimi. At vero si sint fracti, aut irrationales nullam video rationem inter-

1 combinatorios, *(1)* hinc procedendo per omnes series eligatur nova *(2)* et *L* 16 De ... dimensionum *erg. L* 18 De infiniti ... differentia *erg. L* 19 Vide *(1)* pro *(2)* Schediasma *L* 21 rationales, *(1)* eos exprimi numeris combinat⟨–⟩ valores *(2)* numeris *L*

---

7 more meo: vgl. VII, 3 N. 33. 9 *de Exponentibus*: vgl. N. 32_2. 19 *de formulis*: vgl. N. 32_1.

polandi numeros combinatorios, praeter inquisitionem analyticam, non nisi pro fractis tamen tentabilem. Hoc loco vero venit in mentem rationis, quae hoc nititur fundamento, quod omnis numerus irrationalis repraesentari potest infinita serie rationalium; et omnis numerus fractus infinita serie integrorum; quare videamus an numerorum quoque combinat[or]iorum seriebus infinitis uti liceat.

Experiamur primum in finitis, sit $y \sqcap x+b$, videamus quid sit $y^{z-\omega}$, fiet

$$1y^{z-\omega}\ [+]\ \frac{z-\omega}{1}y^{z-\omega-1}\ [+]\ \frac{z-\omega, z-\omega-1}{1,2}y^{z-\omega-2} \text{ etc.}$$

Cumque z et ω sint integri, et posito eorum numero finito etiam $z-\omega$, sit integer, patet modo series numerorum $z-\omega$ etc. sit finita, succedere hunc numerorum combinatoriorum usum.

$$\frac{1}{1+b} \sqcap 1\left(\frac{-b}{1+b}\right) - b\left(\frac{+b^2}{1+b}\right) + b^2 - b^3\frac{+b^4}{1+b}.$$

b autem est integer ideo $b^3 \sqcap b^2$. Sed et $-b+b^2 \sqcap -b^3+b^4$. Itaque non potest demonstrari quod de finitis quotcunque verum est, de infinitorum quoque serie verum esse. Quoniam scilicet posteriora non decrescunt; ideoque nec locum habet ratiocinatio Archimedea, per deductionem ad absurdum; unde sequitur fallacem esse Methodum infinitorum, neque admittendam, nisi quando deductione ad absurdum demonstrari potest; alioqui enim demonstrari posse, ex eo quod in finitorum numero quantocunque res

1 numeros *(1)* combinat⟨–⟩ *(2)* combinatorios, *(a)* nisi qvam nunc *(b)* praeter *L* 1 f. fractis | illic *gestr.* | tamen *L* 5 f. liceat. *(1)* Sit y^{4-1} *(2)* Experiamur ... sit *(a)* y^{4-1} et *(aa)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}+\mathrm{a}$ *(bb)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}+\mathrm{b}$. fiet: $\mathrm{y}^{4-1} \sqcap 1\mathrm{x}^{4-1}+$ *(b)* $\mathrm{y}^{z-\omega} \sqcap$ *(c)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}+\mathrm{b}$ *L* 10 f. usum *(1)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \sqcap$ *(a)* $1+\frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}$ *(b)* $\mathrm{a}\left(\frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)$ *(2)* $\frac{1}{1+\mathrm{b}}$ *L* 12 $\mathrm{b}^3 \sqcap \mathrm{b}^2$. *(1)* Videndum an sit $1-\mathrm{b} \sqcap \mathrm{b}^2-\mathrm{b}^3$ *(2)* Sed et *(a)* $\mathrm{b}^2-\mathrm{b}^3$ *(b)* $-\mathrm{b}^2+\mathrm{b}$ *(c)* $-\mathrm{b}+\mathrm{b}^2$ *L* 12 f. potest *(1)* effici *(2)* demonstrari *L*

6 fiet: Anstatt wie angekündigt y durch $x+b$ zu ersetzen, substituiert Leibniz y mit $y+1$. Dies beeinträchtigt die grundsätzliche Überlegung nicht. 11 $\frac{1}{1+b}$: Auf der rechten Seite der Gleichung wendet Leibniz sukzessive die ersten Schritte einer Entwickung einer Reihendarstellung durch fortgesetzte Division auf $\frac{1}{1+b}$ an. Den Term $\frac{-b}{1+b}$ der ersten Zerlegung von $\frac{1}{1+b}$ stellt Leibniz im darauffolgenden Schritt als $-b+\frac{b^2}{1+b}$ dar, $\frac{b^2}{1+b}$ im Anschluss als $b^2-b^3+\frac{b^4}{1+b}$. Die Streichung der ersetzten Terme kennzeichnet Leibniz, indem er diese einklammert. Die rechte Seite ist somit als $1-b+b^2-b^3+\frac{b^4}{1+b}$ zu lesen. 14 f. ratiocinatio: vgl. ARCHIMEDES, *Quadratura parabolae*, prop. XXIII u. XXIV.

succedit, idem succedere etiam in infinito. Unde sequitur illustri exemplo quantum intersit inter infinitum, et indefinitum. Quod enim de indefinito terminorum numero verum est, non est de infinito. Et certe: indefinitus terminorum numerus est finitus; non ergo infinitus. Indefinitum ergo non est infinitum. Sed si fractio resolvi posset in integros infinitos in infinitum decrescentes; verum foret, quod scilicet numerorum Combinatoriorum adhiberi posset interpolatio; ad numeros potestatum exprimendos; deductione ad absurdum; assumta differentia, si scilicet error adsit et continuata serie ad terminos usque differentia majores; quin etiam etsi termini crescant, si tamen differentiae terminorum $-b^3 + b^4$, etc. concrevissent, idem potuisset demonstrari. Hinc sequitur si qua methodus demonstretur de fractis, eandem demonstrari posse de s u r d i s , hac ad absurdum deductione, quia omnes surdae quantitates possunt resolvi in fractas rationales, ita ut termini continue decrescant. Methodus autem pro fractis videtur indagari posse, ea quam coepi ratione in schediasmate *de formulis omnium dimensionum* parte 2^{da}, nempe per arbitrarias ascriptas, reducta postea aequatione, cum enim sint literae arbitrariae, videtur methodus quaedam generalis ipsius z ope caeteras inveniendi literas haberi posse. Quo semel facto, omnium figurarum quadraturae analyticae poterunt haberi; et laborandum erit postea de reductione expressionum transcendentium, quando id fieri potest.

6 exprimendos; *(1)* demon *(2)* s⟨um⟩ *(3)* deductione *L* 7 error *(1)* absit *(2)* adsit *L* 10 s u r d i s , *(1)* qvia mutato *(2)* hac *L* 11 rationales, *(1)* qvare si qvi possu *(2)* Tantum ergo *(3)* ita *L* 17 reductione *(1)* figura *(2)* expressionum *L*

13 parte 2^{da}: vgl. N. 32_1 ab S. 164 Z. 16.

33. DE AEQUATIONE QUADRATICA
[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 2 Bl. 76–77. 1 Bog. 2°. 2 S. zweispaltig beschrieben. Textfolge Bl. 76 r°, 77 v°. Rest des Bogens leer.
Cc 2, Nr. 849$_1$

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für das Frühjahr 1673 und von Herbst 1674 bis Frühjahr 1675 belegt. In den Jahren 1673–1675 verwendet Leibniz das Gleichheitszeichen = bis Mitte 1674, *Rq* als Quadratwurzelzeichen bis Herbst 1673. Das vorliegende Stück wird durch VII, 2 N. 1 fortgesetzt.

Des Cartes *Geom.* lib. 1. lit. K. pag. 6. edit. 1659.

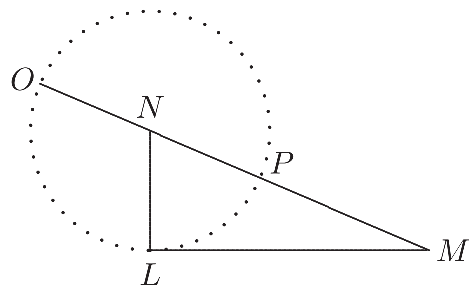
Si habeatur aequatio: $z^2 = az + b^2$. ut inveniam z. facio Triangulum rectangulum NLM. cujus unum latus LM. sit aequale b. radici videlicet $\square^{\text{tae}}$ quantitatis cognitae b^2 alterum autem latus $LN. = \frac{1}{2}a$. Deinde producta MN. base ejusdem Trianguli usque ad O. ita ut NO sit aequalis NL. erit tota $OM = z$. Ergo: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\llcorner \frac{1}{4}a^2 + b^2 \lrcorner}$. Quodsi habeatur $y^2 = -ay + b^2$. a base MN. aufero NP. aequalem NL. eritque reliqua PM. aequalis y. Ita ergo $y = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. (Nota hic Cartesius jungit lineola capiti imminente partes ejusdem quantitatis, ubi potest esse aequivocatio. Item Cartesius semper dicit potius $y^2 = -ay + b^2$. quam $y^2 = b^2 - ay$. ut malit praefigere $-$ initio, quam ordinem illum turbare.)

---

10 *Darüber:* NB. *Transact. Φil.* num. 64 et num. 63 ubi de lib. Slus. et Ferguson num. 49.

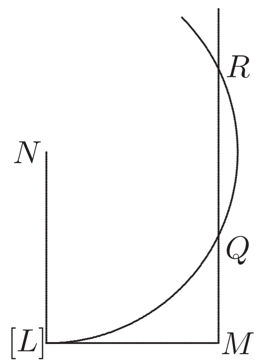
---

10 Des Cartes: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 6 f. **1**,**20** f. Transact. . . . num. 49: Gemeint sind *An account of two books. I. Renati Franc. Slusii Mesolabum*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 903–912; J. Collins, *An account, concerning the resolution of equations in numbers*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 46 vom 12./22. April 1669, S. 929–934; *An Accompt of four books. III. Labyrinthus Algebrae, auct. Joh. Jac. Ferguson*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 49 vom 19./29. Juli 1669, S. 996–999.



[*Fig. 1*]

Denique si habeatur $z^2 = az - b^2$. facio $NL = \frac{1}{2}a$. et $LM = b$. ut ante. Deinde non duco lineam per puncta M et N. ut in duobus aliis casibus sed duco MQR. parallelam ipsi LN. centroque N descripto per L. circulo secante MQR in punctis Q et R. erit MQ. vel MR. aequalis lineae quaesitae z. Hoc enim casu illa duobus modis exprimitur: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ vel $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.



[*Fig. 2*]

Si circulus centrum habens in puncto N. transiensque per punctum L. non secet nec tangat rectam MQR; nullam aequatio radicem admittet, seu problema erit impossibile. Possunt autem hae radices infinitis ferme aliis modis inveniri, sed hae sunt simplicissimae.

Beaunius ad hoc locum duplices annotat demonstrationes, alteras Geometricas, alteras Algebraicas. Missis G e o m e t r i c i s , Algebraicam consideremus. $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ ita demonstrat: Ergo $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} = z - \frac{1}{2}a$. Et = eorum $\square^{\text{ta}}$. $z^2 - az + \cancel{\frac{1}{4}a^2} = \cancel{\frac{1}{4}a^2} + b^2$. Ergo $z^{[2]} = b^2 + az$. Ita demonstrabitur $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Nam ideo $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Et horum $\square^{\text{ta}}$ $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$. Ergo $y^2 = -ay + b^2$. Ita demonstrabitur $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ergo: $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ergo horum $\square$. $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$. Ergo $z^{[2]} = az - b^2$. Ita demonstrabitur quoque ultimus modus tertii casus $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ergo $\frac{1}{2}a - z = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Et $\square^{\text{ta}}$ $\frac{1}{4}a^2 - az + z^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$. Ergo $z^2 = az - b^2$.

Tota inventi ratio eo nititur, ut statuendo incognitos in eodem loco, adscriptoque aliquo cognito posset extrahi Radix. Cum nec Cartesius nec alii dicant hanc aequationes reducendi Methodum ab ipso inventam, nec ego id dicere ausim. Est tum utique summae utilitatis Beaunii demonstratio contraria forma resoluta, monstrat inventi modum. Sed hoc notabile est, quod ex ipsius Cartesii lib. 3. p. 69. annotat Schotenius, eandem aequationem $z^2 = az + b^2$ aliam quoque habere Radicem, minorem quam nihil, nempe loco $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ hanc $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Quod eodem modo demonstratur.

1 ad *(1)* hunc Cartesii *nicht gestr.* *(2)* hoc locum *(a)* duas *(b)* duplices *L*

1 annotat: Fl. de Beaune, *Notae breves*, 1659, *DGS* I S. 112–114. 14 annotat: Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 162 f. u. 281–283.

$z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Ergo $\square$ = sunt: $z^2 + \cancel{\frac{1}{4}a^2} - az = -\llcorner\cancel{\frac{1}{4}a^2} + b^2\lrcorner$. Hic quaestio oritur an jam cum Schotenio istud $-\llcorner\frac{1}{4}a^2 + b^2\lrcorner$ ubi videtur totum $\frac{1}{4}a^2 + b^2$ esse $-$ seu adimi debere nihilo, possit concipi, ut $b^2 - \frac{1}{4}a^2$. Quae quaestio ad aliam redit, an radicis nihilo minoris quadratum possit esse aliquid. Rem in numeris experiamur, si $2 - 4. = 0 - 2.$ ducas in se habebis priore modo $4 + 16 - 16 = 4.$ perinde ac si multiplicasses $4 - 2.$ Si $0.$ adhibeas habebis: $0^2 + 4 - 4. \frown 0.$ en ergo $4.$ Loco numeri ergo nihilo minoris intelligenda ejus inversa. Sed haec innituntur isti regulae $- \frown - = +$. $0 - 4. \frown 0 - 3. = 12.$ Nota cum dicitur $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ cum z. sit minor 0. ideo $0 - z = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} - \frac{1}{2}a =$ aliquid. Et ideo $0 - z$ (etc.) non est semper numerus nihilo minor, si scilicet ipse z. sit nihilo minor. Eodem modo Schotenius admonet $y^2 = -ay + b^2$. habere non tantum radicem $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. sed et pro $+\surd$. ponendo $-\surd$. radicem falsam. Idem in $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. et aliis Schotenius non dicit, sed videtur subintelligi posse,

---

4–7 *Nebenbetrachtung: NB.* additio numeri nihilo minoris est subtractio, et subtractio ejus additio, alterius numeri nihilo majoris.

1 $+\mathrm{b}^2$. *(1)* Ergo $\square$. $\mathrm{z}^2 + \cancel{\frac{1}{4}\mathrm{a}^2} - \frac{1}{2}\mathrm{az} = -\cancel{\frac{1}{4}\mathrm{a}^2} + \mathrm{b}^2$. Ergo $\mathrm{z}^2 - \mathrm{az} = -\mathrm{b}^2$. Ergo $\mathrm{z} = -\mathrm{b}^2 + \mathrm{az}$. Ego ergo ex demonstratione ista reperi errasse Schotenius, non enim oritur ut ipse ait *(2)* Ergo *L*

4 experiamur, *(1)* esto $\mathrm{z} = \frac{1}{2}\mathrm{a} - \sqrt{\frac{1}{4}\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$ (a) esto 1 et b esto: (2). $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{4}}$. Ergo $\mathrm{z} = \frac{2}{4} -$ *(a)* $\frac{17}{4} = (0 - \frac{15}{4})$ *(b)* Rq $\frac{17}{4}$ Ergo $\mathrm{z} - \frac{1}{2}\mathrm{a} = -\sqrt{\frac{1}{4}\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$ $+\cancel{\frac{2}{4}} - \mathrm{Rq}\,\frac{17}{4} - \cancel{\frac{2}{4}} = -\mathrm{Rq}\,\frac{17}{4}$. Ergo $\square^{\mathrm{ta}}$ eorum $\mathrm{z}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{a}^2 - \mathrm{az} = -\llcorner\frac{1}{4}\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2\lrcorner$ $+\llcorner\frac{1}{4} + \frac{16}{4}\lrcorner + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \mathrm{Rq}\,\frac{17}{4} =$ *(2)* si *L*

---

1 $\square$ = sunt: Leibniz erkennt zunächst nicht, dass das Minuszeichen durch das Quadrieren wegfällt, und vermutet einen Fehler bei Schooten. Kurz danach erkennt er seinen Irrtum, korrigiert aber den Text nicht durchgehend.

etsi hoc ille non innuat. Notat Cartesius eodem modo si has aequationes habeas: $x^4 = -ax^2 + b^2$ tunc $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$. Addit Schoten: Si sit $z^4 = az^2 + b^2$ fore $z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$. Item si sit $z^4 = az^2 - b^2$. fore $z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}}$. Radix ex $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a - z^2$.

S c h o t e n a d C a r t e s. l i b. 1. l i t. M. p. 1 6 4. Quoties in problemate Geometrico determinata est unitas, seu linea quaedam quae pro unitate habetur, tunc radicem quadratam extrahere ex linea quadam, est invenire mediam proportionalem inter ipsam et unitatem. (: Addo 1 — 2 — 3 — (6). M u l t i p l i c a r e lineam per lineam eo casu est invenire quartam proportionalem quae ita sit ad secundam, uti tertia ad primam, vel quae ita sit ad secundam, ut prima ad tertiam, ac proinde invenienda est linea, quae ita est ad unam datarum, ut altera datarum est ad unitatem. D i v i d e r e lineam per lineam est 3 — 6 — 1 — (2) itidem invenire quartam proportionalem, 6 — 3 — 1 — $\left(\frac{1}{2}\right)$ seu invenire lineam quae ita sit ad unitatem, ut duae datae sunt inter se. Et haec linea quaesita repraesentat duarum linearum r a t i o n e m. [:)] Quotiescunque in problemate geometrico eadem quantitas ex partibus inaequalium dimensionum componitur, toties necesse est unitatem esse datam; alioquin problema non est Geometricum, sed in Numeris solvendum. Data unitate dimensio minor supponenda multiplicari per unitatem, ut aequetur majori. (: Si unitas data non est tunc multiplicatione linearum et augetur dimensio, divisione et radicum extractione minuitur, ratio est, quia pro unitate supponitur Quadratillum vel Cubulus minor qualibet dabili. :) Caeterum si nobis data sit aequatio Geometrica in qua unitas in linea quadam data est, multiplicatio ista divisioque et differenda est, dum absoluta sit aequationis politura seu reductio. Et reductio facienda est, quasi problema esset in Numeris, facta politura, fiant multiplicationes divisionesque etc. [per] 1 ut adhibita data unitate.

1 Cartesius *(1)* idem esse, si loco *(a)* z = *(b)* $z^2 = az + b^2$. intelligas $z^4 = az^2 + b^4$. fieri enim $z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$ *(aa)* Et si y *(bb)* Et si $x^4 = -a$ *(2)* eodem *L*

S c h o t e n a d C a r t e s. l i b. 1. l i t. M. p. 1 6 4. *G e o m .*

In aequatione data $z^2 = az - b^2$. necesse est b non esse majus quam $\frac{1}{2}a$. alioquin aequatio est impossibilis. Debet enim b^2 subtrahi ex $\frac{1}{4}a^2$. Sed cum sit $z^2 - az = -b^2$. seu $az - z^2 = b^2$. et fiat: $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$ non video quid coegerit Schotenium dicere b^2 subtrahi debere ex $\frac{1}{4}a^2$. cum addantur potius sibi. Idem in numeris experiamur. a esto 6. b esto 4. patet b esse majus quam $\frac{1}{2}a$. Quaeritur z. Cum z. sit $Rq\,\overline{b^2 + \frac{1}{4}a^2}, +a$.

$$b^2 = 16. \quad \frac{1}{4}a^2 = 9. \quad a = 6. \quad \text{Ergo} \quad Rq \ \llcorner b^2 + \frac{1}{4}a^2 \lrcorner \ + \ a$$

$$16 + 9$$

$$\setminus \ /$$

$$Rq \qquad 25 = 5 \ + \ 6 \ = 11.$$

Sed hoc absurdum. Ratio est quod non dicendum $z = Rq \llcorner b^2 + \frac{1}{4}a^2 \lrcorner + a$. quasi fuisset initio quidem $z - a$. Nam quid in eodem jure dici potuisset $a - z$. Utrum ergo eligi debeat ex aequatione determinandum, et aequatio data monstrat a esse majus quam z. quoties b

---

4 f. *Dazu:* Recte Schotenius. Vide sequentem plagulam. NB.

1 S c h o t e n . . . G e o m. *erg. L* 3 $\frac{1}{4}\mathrm{a}^2$. *(1)* Cum fiat $\mathrm{z}^2 + \mathrm{az} - \frac{1}{4}\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{a}^2$ *(2)* sed *(3)* sed *L* 6 f. $+\mathrm{a}$. *(1)* Erit $6 + \mathrm{Rq}$ *(2)* Erit $6 + (\mathrm{Rq}\llcorner$ *(a)* $16 + 9\lrcorner =)$ 5. Ergo z erit 11. probemus *(aa)* $\mathrm{z}^2 = \mathrm{b}^2$ *(bb)* $\mathrm{z}^2 = \mathrm{az} - \mathrm{b}^2$. *(b)* $4 + 9\lrcorner =)$ Rq 13. z = Rq 13 + 6. Ergo $\mathrm{z}^2 = 13 + 36 + \mathrm{Rq}\,156\,(12)$ Ergo

$$\begin{array}{lll} \mathrm{z}^2 = & \mathrm{az} & -\mathrm{b}^2 \\ 61 & 36 + 21 \text{ circiter} & 36 \\ \text{circiter} & \setminus \quad / & \\ & 57\text{c.} & \end{array}$$

(3) $\mathrm{b}^2 = 16$ *L* 12 $\mathrm{z} - \mathrm{a}$. *(1)* sed intelligi debet *(2)* Nam *L* 13 qvam z. *(1)* est enim $\mathrm{z}^2 = \mathrm{az} - \mathrm{b}^2$ *(2)* qvoties *L*

---

4 fiat: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung müsste $-b^2$ stehen. Leibniz glaubt zunächst irrtümlich an einen Fehler bei Schooten, erkennt aber später seinen Irrtum und merkt dies an. Im Folgenden beeinträchtigen weitere Versehen die Rechnungen. 6 $+a$: Richtig wäre $\frac{1}{2}a$. Der Fehler pflanzt sich fort. **6,14** sequentem plagulam: VII, 2 N. 1.

est majus quam $\frac{1}{2}a$. Quod quaeremus ex ipsa aequatione. Necessaria enim ista inquisitio est, ad extrahendas radices ex Apotomis. $z = az - b^2$. Jam z supponitur esse quantitas nihilo major, ergo az est majus quam b^2. Ergo $az = b^2 + bx$. Ergo $\frac{az}{b} = b + x$. Ergo $\frac{az}{b} - b = x$. seu $\frac{az - b^2}{b} = x$. Jam suppon⟨itur⟩ a majus quam b. seu $b + y = a$. Erit $\frac{bz + yz - b^2}{b} = x$. seu $bz + yz - b^2 = xb$. vel $bz + yz = xb + b^2$. vel $z = \frac{xb + b^2}{b + y}$. Sed quaerenda est brevior via.

$z^2 = az - b^2$. Ergo $z = Rq \llcorner az - b^2 \lrcorner$.

$z^2 + b^2 = az$. $\quad z^2 + b^2 + 2zb = az + 2zb$.

$z + b = Rq \llcorner az + 2zb \lrcorner$.

Item: $z^{[2]} + 2az + a^2 = 3az + a^2 - b^2$.

Ergo $z + a = Rq \llcorner 3az + a^2 - b^2 \lrcorner$.

Similiter $2az + b^2 + a^2 = z^2 + 2b^2 + az$.

Ergo $a + b = Rq \llcorner z^2 + 2b^2 + az \lrcorner$.

Sed jam quaeramus $a - b$. quoniam a supposuimus majus quam b. et videamus qualia caetera futura sint. Id ita fiet:

$z^2 + b^2 + a^2 - 2ab = az - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} + a^2 - 2ab$. Ergo

$b^2 + a^2 - 2ab = az - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} + a^2 - 2ab - z^2$. Ergo cumque a sit majus ex hypothesi pro eo supponamus $b + c$. Ergo erit

$$\cancel{b^2} + \cancel{b^2} + c^2 + \cancel{2cb} - \cancel{2b^2} - \cancel{2bc} = bz + cz + \cancel{2b^2} + \cancel{2c^2} + 4cb - \cancel{2b^2} - \cancel{2bc} - z^2.$$

Ergo $c = Rq, bz + cz + 4cb - z^2$.

Ergo $c^2 + z^2 = bz + cz + 4cb$.

$c^2 = bz + cz + 4cb - z^2$.

Ergo $z^2 = bz + cz + 4cb - c^2$.

4 seu *(1)* $\mathrm{a + y = b}$. erit $\frac{\mathrm{az + yz - b^2}}{\mathrm{b}} = \mathrm{x}$ *(2)* $\mathrm{b + y = a}$ *L* 7 Ergo | $\mathrm{z^2}$ *ändert Hrsg.* | = Rq *L* 11 f. $\mathrm{z + a = Rq \llcorner 3az + a^2 - b^2 \lrcorner}$ *(1)* Similiter $\mathrm{z + b^2 + 2zb = az + 2zb}$ Ergo z– *(2)* Similiter *L* 14 jam *(1)* constituamus a– *(2)* qvaeramus *L*

2 $z = az - b^2$: Leibniz weicht ab von der Anfangsgleichung $z = az - b^2$, zu der er ab Z. 7 zurückkehrt. 12 Similiter: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Term $+a^2$, die anschließende Folgerung ist nicht richtig. 18 Ergo erit: Die folgenden Umformungen sind fehlerhaft.

Ergo $\frac{z^2}{z} = z = b + c + \frac{4cb}{z} - \frac{c^2}{b}$.

Ergo si a est majus quam b. tunc z. est majus quam b. item majus quam c. Restat inquirendum an sit majus quam $b+c = a$. Quod sciemus si determinabimus utrum majus sit $\frac{4cb}{z}$ an $\frac{c^{[2]}}{b}$. $\frac{4cb}{z} \mathrel{\underline{\times}} \frac{c^2}{b} = \ldots \frac{4cb^2 - c^2z}{zb}$. $4cb^2$ etc. $= c^2z$ etc. Ergo $\cancel{4}b^2 \frac{\text{etc.}}{c4} = \frac{cz}{4} \frac{\text{etc.}}{c4}$. Ergo $b = \frac{Rq\,cz}{2}$. Ergo $c^2 = z \frown \frac{Rq\,cz}{4} + cz + 4c\,Rq\frac{cz}{2} - z^2$. $c^2 = \frac{Rq\,z^3c}{2} + cz + \frac{Rq\,16c^3z}{2} - z^2$. $c^4 + z^4 + \cancel{2}z^2c^2 = \frac{z^3c}{2} + \cancel{c^2z^2} + \frac{8c^3z}{\cancel{2}}$. Nondum Exitum reperio. Per numeros manifestum est z. non esse majus quam a. sed contra dicendum $a - z = Rq\llcorner b^2 + \frac{1}{4}a^2 \lrcorner = 5$. Ita enim
6
$a = 5 + z$. Ergo $a - 5 = z$. Ergo $z = 1$.

---

4 *Nebenrechnung:* $\frac{4cb^2 - c^2z}{zb}$

8 *Darunter:* Vide seq.

3 $b + c = a$. *(1)* Redeamus ad initia. $z^2 = az - b^2$. si $a = b$. Ergo $z^2 = bz - b^2$. Ergo $z^2 + b^2 +$ *(2)* Qvod *L*   8 $z = 1$. | *(1)* $z =$ *(2)* $z^2 = \underset{6}{az} - \underset{16}{b^2}$ Male calcularam initio *(3)* $\frac{aa + 4zz = 4az}{4}$ $4az - aa = 4a \frown z - a$ $4zz$ $4az-$ *gestr.* | *L*

---

6 $c^4 + z^4 + \cancel{2}z^2c^2$: Leibniz unterlaufen beim Quadrieren Flüchtigkeitsfehler. Er versucht eine numerische Probe.   **8**,**10** Vide seq.: Leibniz setzt die Untersuchung in VII, 2 N. 1 fort.