Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8: Varia mathematica, Nachträge 1670–1676

Version 4

Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8: Varia mathematica, Nachträge 1670–1676. Version 4. Bearbeitet von Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber und Achim Trunk, hrsg. von der Leibniz-Forschungsstelle Hannover der Niedersächsischen Akademie der Wissenschaften zu Göttingen beim Leibniz-Archiv der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek. Hannover, 4. Oktober 2023.

ZU DIESEM DOKUMENT

Band 8: *Varia mathematica, Nachträge 1670–1676* von Reihe VII: *Mathematische Schriften* der historisch-kritischen Gesamtausgabe *Gottfried Wilhelm Leibniz: Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von der Preußischen Akademie der Wissenschaften u. a., Darmstadt u. a. 1923 ff. (Leibniz-Akademie-Ausgabe), wird die Edition der mathematischen Schriften aus Leibniz' Jahren in Paris abschließen. Die vorliegende Vorausedition gibt den Stand der Arbeiten an diesem Band vom September 2023 wieder.

Die Handschriften wurden von Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber und Achim Trunk bearbeitet. Davide Crippa (Venedig/Prag) stellte während seiner Tätigkeit für das Projekt ANR MATHESIS: Édition et commentaires de manuscrits mathématiques inédits de Leibniz (2017–2021), N° ANR-17-CE27-0018-01 AAP générique 2017, eine Transkription von N. 26 zur Verfügung. Michel Serfati (†, Paris) trug Vorarbeiten zur Edition von N. 41_6 bei. N. 60 beruht auf einer Transkription von Ricardo Rodríguez Hurtado (Murcia). Die Erfassung der Stücke haben Manuela Mirasch-Müller und in Teilen Elisabeth Rinner und Achim Trunk übernommen, teilweise nach Vorarbeiten von Christopherus Ray'onaldo, Jule Schwarzkopf und Yixiao Wang.

Der Satz erfolgte mit dem von John Lavagnino und Dominik Wujastyk entwickelten TEX-Macropaket EDMAC. Um den Editionstext angemessen wiedergeben zu können, wurde im Leibniz-Archiv eine auf die Anforderungen und Bedürfnisse der Edition zugeschnittene Erweiterung entwickelt. Einige Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris generiert und in TEX weiterbearbeitet.

Vorläufigkeit

Bei den Texten der Vorausedition handelt es sich um vorläufige Ergebnisse. Der fertige Band wird in einigen Aspekten von diesem Preprint abweichen. So werden sich die Anzahl und die Reihenfolge der Stücke und damit auch ihre Nummern und Seitenzahlen ändern. Bei Seitenumbrüchen und Zeilenzählung kann es ebenfalls zu Verschiebungen kommen. Schließlich können sich auch inhaltliche Änderungen ergeben; insbesondere sind die Datierungen noch vorläufig.

Versionierung und Langfristigkeit

Im Lauf der editorischen Arbeit an einem Band können geänderte vorläufige Fassungen als Vorausedition zugänglich gemacht werden. Unterschiedliche Fassungen des Dokuments werden durch Versionsnummern gekennzeichnet und sind so eindeutig identifizierbar.

Wir empfehlen ausdrücklich, stets die aktuellen Fassungen der Bearbeitungen der Stücke zu nutzen. Bitte überprüfen Sie deshalb vor der Nutzung auf unserer Webseite, ob eine neuere Version der *Vorausedition* oder der publizierte Band verfügbar ist.

Die Langzeitarchivierung und die langfristige Bereitstellung der Dokumente erfolgen über die Niedersächsische Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, die das Akademien-Vorhaben „Leibniz-Edition“ gemeinsam mit der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften betreut. Die Zitierfähigkeit wird gewährleistet.

Zitierhinweis

Die vollständigen bibliographischen Angaben des Dokuments können der Titelseite entnommen werden. Wir empfehlen, bei Zitaten aus der Vorausedition oder Verweisen auf diese stets die Versionsnummer mit anzugeben. Ein Verweis könnte in einer Kurzform nach dem Muster des folgenden Beispiels gestaltet werden:

> G. W. Leibniz, *De condendis tabulis analyticis* (GWLB LH 35 XIII 1 Bl. 440; vgl. *Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8, Version 1*, dort N. 21 S. 69–70).

Die Signatur der edierten Handschrift findet sich jeweils im Kopf des Stückes.

Kontakt

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Deutschland
Leitung: Michael Kempe
Email: leibnizarchiv@gwlb.de
Internetauftritt: http://www.gwlb.de

ABOUT THIS DOCUMENT

Volume 8: *Varia mathematica, Nachträge 1670–1676* of Series VII: *Mathematische Schriften* (Mathematical Writings) of the historical-critical edition of the complete works of Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz: *Sämtliche Schriften und Briefe*) published by the Prussian Academy of Sciences and other institutions since 1923 (the Academy Edition or *Leibniz-Akademie-Ausgabe*) will complete the publication of the mathematical writings from Leibniz's years in Paris. This *Vorausedition* (advance edition) presents the state of work on this volume as of September 2023.

The texts were prepared from manuscript sources by Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber and Achim Trunk. Davide Crippa (Venice/Prague) provided a transcription of N. 26 during his work for the project ANR MATHESIS: Édition et commentaires de manuscrits mathématiques inédits de Leibniz (2017–2021), Nº ANR-17-CE27-0018-01 AAP générique 2017. Michel Serfati (†, Paris) contributed preparatory work to the edition of N. 41_6. N. 60 is based on a transcription by Ricardo Rodríguez Hurtado (Murcia). Manuela Mirasch-Müller and, in parts, Elisabeth Rinner and Achim Trunk were responsible for inputting the texts, partly on the basis of preparatory work by Christopherus Ray'onaldo, Jule Schwarzkopf, and Yixiao Wang.

The TEX macro suite EDMAC, developed by John Lavagnino and Dominik Wujastyk, was used for typesetting. To facilitate an adequate rendition of the published text, additions to this suite specifically adapted to the requirements and needs of the edition were developed at the Leibniz-Archiv. Some of the figures were initially produced using the WINGEOM and WINPLOT programs created by Richard Parris, and completed using TEX.

Preliminary status

The writings presented in this advance edition are preliminary research results. The finished volume can be expected to diverge from them in some respects. Thus, the quantity and the sequence of the texts will change, as will their numbering and pagination. Likewise, there may be shifts in page transitions and line numbers. Finally, changes may occur to the content itself; the dates assigned to the writings, in particular, are only preliminary.

Versions and long-term availability

Over the course of editorial work, successive preliminary versions may be made available as advance editions. Distinct versions of the document are marked with version numbers and are thus unambiguously identifiable.

We strongly recommend always using the most recently published version of our edition of each text. Please check our website before citing this document to ascertain whether a newer version of the *Vorausedition* or the printed volume has become available.

Long-term archiving and availability of our documents are provided by the Göttingen Academy of Sciences and Humanities in Lower Saxony, which is jointly responsible with the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities for the interacademic project of the Leibniz Academy Edition. Citability will remain assured.

Suggestions for citation

The complete reference of this document can be found on the title page. We recommend always specifying the version number when citing or referring to this advance edition. The following is an example of how such a reference may be provided in an abbreviated form:

> G. W. Leibniz, *De condendis tabulis analyticis* (GWLB LH 35 XIII 1 fol. 440; see *Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8, Version 1*, N. 21 p. 69-70).

The shelfmark for the manuscript source may be found in the introductory notes to each individual text.

Contact

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Germany
Head of department: Michael Kempe
E-mail: leibnizarchiv@gwlb.de
Website: http://www.gwlb.de

INHALTSVERZEICHNIS

VARIA MATHEMATICA, NACHTRÄGE 1670–1676

1. OBSERVATIO DE LOGARITHMIS
[Mitte Februar 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 16 Bl. 4. 1 Streifen 19 × 1,5 cm. 2 Z. auf Bl. 4 r°. — Gedr.: III, 1 N. 4 S. 26 Erl.
Cc 2, Nr. 339

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte kurz nach der in III, 1 N. 4 S. 22 f. erwähnten Unterhaltung mit J. Pell vom 12. Februar 1673 entstanden sein. Leibniz erwähnt das Werk von Briggs in seinen *Observata in itinere Anglicano* (VIII, 1 N. 1 S. 4).

Bridgius in *Trigonometria Britannica*, ubi de Logarithmis, observavit, differentias sinuum numerorum imparium crescere, ut ipsos sinus; parium decrescere, puto. Dixit D^{nus} Pellius.

9 Astronomia Britannica *L ändert Hrsg.*

---

9 observavit: Pell bezog sich vermutlich auf folgende Aussage in H. Briggs, *Trigonometria Britannica*, 1633, S. 36: „Sunt igitur Differentiae Secundae, Quartae, Sextae, Octavae etc. proportionales ipsis Sinubus datis. Et Differentiae Primae, Tertiae, Quintae, Septimae proportionales inter se et Sinubus complementorum Arcuum mediorum.“

2. RÈGLE POUR TROUVER LES FERIES
[Oktober – Dezember 1675]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XII 1 Bl. 182–183. 2 Bl. 8°, die ursprüngl. 1 Bl. 4° bildeten. 1 S. auf Bl. 182, 2 S. auf Bl. 183.
Cc 2, Nr. 1502 B, A

Datierungsgründe: Vgl. die Datierungsgründe zu VII, 3 N. 49. — Eine Datierung auf das Jahr 1675 wird durch den Umstand nahegelegt, dass Leibniz, als er sich mit dem Beispiel 1. Mai 1615 befasst, zunächst versehentlich 1675 schreibt; möglicherweise ist dies also die aktuelle Jahreszahl. Einen konkreten *terminus ante quem* liefert das Stück, indem es den 1. Januar 1676 in der Zukunftsform behandelt. Auch der 15. August 1676 wird in der Zukunftsform behandelt, in einer verworfenen Variante allerdings in der Vergangenheitsform. — Das Wasserzeichen des Papiers ist bislang nur von zwei anderen Trägern bekannt. Auf diesen finden sich VII, 3 N. 49_1, eine gemeinsame Gesprächsaufzeichnung von Leibniz und Tschirnhaus, und VII, 3 N. 49_2, eine Aufzeichnung von Tschirnhaus. Möglicherweise stammt die bei Leibniz seltene Papiersorte also aus Tschirnhausens Besitz. Da Tschirnhaus erst Ende September 1675 in Paris ankommt, können die erwähnten beiden Teilstücke nicht früher entstanden sein. Falls das Papier tatsächlich aus Tschirnhausens Besitz stammt, gilt dies auch für unser Stück, falls nicht, legt die Übereinstimmung der Wasserzeichen zumindest eine Entstehung in derselben Zeit nahe.

[*Erster Ansatz*]

Le cycle solaire peut servir à obtenir la lettre dominicale, et à connoistre ainsi le jour de la semaine qui sera par exemple le premier de mars, ou quelque autre d'un mois donné. Mais on peut l'obtenir plus aisément par la voye suivante: Au nombre 2 soit adjouté le nombre de l'année proposée de l'Epoque vulgaire, et encor le quart du dit nombre de la dite année proposée; negligeant le residu. Divisez la somme de ces trois nombres, $2+b+\frac{b}{4}$

19 obtenir *erg. L* 22 proposée *erg. L*

19 cycle solaire: Die Nummer eines Jahres im 28-jährigen Sonnenzirkel setzt Leibniz offenbar als bekannt voraus, sie kann aber auch mühelos berechnet werden (sie entspricht dem Rest, der bei Division der um 9 vergrößerten Jahreszahl durch 28 bleibt). Der dieser Zahl des Sonnenzirkels zugeordnete Sonntagsbuchstabe und der sich aus diesem ergebende Wochentag eines gesuchten Datums lassen sich dann geeigneten Tabellen entnehmen.

par 7, et le residu sera le nombre du jour de la semaine au quel se rencontre le premier de mars, contant le dimanche pour le premier jour de la semaine, lundi pour le second, etc. Quand il ne restera 0 le premier de Mars sera un samedy.

Si l'on demande la même chose de quelque année avant la naissance de nostre seigneur; alors il faut se servir de la regle suivante.

[*Zweiter Ansatz*]

Regle pour trouver les feries ou le jour de la semaine au quel se rencontre un certain jour du mois donné dans l'année donnée

Adjoutons ensemble,

le nombre de l'année donnée	1676	
son quart (negligeant le residu s'il y en a)	419	
et le nombre constant	2	si c'est un bissexte ou 3 si c'est un autre
La Somme	2097	
divisée par 7 laissera	4	

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	
1	2	3	4	5	6	0	Nombres des feries

Donc le premier janvier de l'an 1676 sera un Mercredi.

Maintenant s'il s'agit de trouver la ferie du 15 d'Aoust de l'an 1676, on n'a qu'à prendre le nombre des jours qui sont depuis le 1. janvier inclusivement jusqu'au 15

3 *Über die* 0 *gesetzt:* rien

7 les feries ou *erg. L* 8 f. donnée *(1)* Par exemple le 15 d'Aoust de l'année 1676 estoit un samedi, tachons de le trouuer par nostre regle, qvi est telle: au nombre 2 *(a)* (si c'est un bissexte) *(b)* ou *(2)* Adjoutons *L* 12 constant 2 *(1)* ou 3. au lieux de 2. si l'an est un bissexte. *(2)* si *L* 18 trouuer *(1)* le 15 d'A *(2)* la ferie *L* 19 janvier *(1)* exclusivement jusqv'au 15 d'Aoust *(2)* inclusivement *L*

1 f. premier de mars: Die im ersten Ansatz festgehaltene Regel zur Bestimmung des Wochentages des 1. März eines beliebigen Jahres ist für den julianischen Kalender gültig, jedoch nicht für den in Paris geltenden gregorianischen. 5 regle suivante: Anstatt eine solche Regel zur Bestimmung des Wochentags von Daten, die vor Beginn der christlichen Zeitrechnung liegen, auszuführen, schneidet Leibniz das Blatt unterhalb der letzten Zeile des ersten Ansatzes durch und notiert den zweiten und dritten auf Vorder- und Rückseite des verbleibenden Papierstückes. 18 15 d'Aoust: Bereits G. SCHOTT, *Organum mathematicum*, 1648, *regula* XI, S. 412–415, dient ein 15. August (der des Jahres 1665) als Beispiel für seine Regel zur Berechnung des Wochentages.

d’Aoust exclusivement sçavoir 227, et y adjouter 4, nombre de la ferie du premier janvier, et il proviendra 231, le quel divisé par 7 laisse 0, donc le 15 d’Aoust 1676 est un Samedi.

La regle se proposera plustost ainsi. Il faut adjouter ensemble le nombre 1676, son

---

1 *Hilfsaufstellung zu den beiden Beispielen:*

Janvier	31 •	31	31
Fevrier	28 ou 29	29	28
Mars	31 •	31	31
Avril	30	30	30
May	31 •	31	120
Juin	31 •	31	
Juill.	30	30	
Aoust	31 •	14	
Sept.	30	227	
Oct.	31 •		
Nov.	30		
Dec.	31 •		

2 *Nebenrechnungen zum Beispiel 15. August 1676:*

$$\begin{array}{r} 1676 \\ 419 \\ \underline{227} \\ \underline{2} \\ 2324 \end{array}$$

$\cancel{2}\cancel{1}$
$\cancel{2}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}$ ⨍ 332, reste, 0. Nombre de la ferie du Samedy.
$\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}$

1 227. *(1)* et les diviser par 7 le residu *(a)* 7 *(b)* 3 adjouté à 4 *(2)* et y adjouter *L*

---

3 regle: Diese Regel ist, da sie ausfallende Schaltjahre wie 1700 unberücksichtigt lässt, nicht auf den gesamten gregorianischen Kalender seit seiner Einführung 1582 anwendbar, sondern gilt so nur für das 16. und 17. Jahrhundert. Ab 1701 müsste sie angepasst werden, indem man vor der Division durch 7 die Anzahl der ausfallenden Schalttage subtrahiert. **10** Juin: Leibniz verwechselt die Länge der Monate Juni und Juli, was sich auf die Berechnung aber nicht auswirkt.

quart 419, negligeant le residu, le nombre des jours de l'année qui precedent celuy dont on cherche la ferie; et enfin le nombre constant 2 si c'est un bissexte, ou 3 si c'est une autre année; le residu de la somme divisée par 7 donnera le nombre de la ferie du jour qu'on cherche.

[*Dritter Ansatz*]

„Regle pour trouver la ferie ou jour de la semaine au quel se rencontre un certain „jour du mois donné dans l'année donnée de la periode julienne.

Au nombre de l'année julienne adjoutez sa quatrieme partie, ou si le residu passe l'unité, le nombre entier prochainement plus grand, negligeant tousjours la fraction. La

---

4 *Berechnung eines weiteren Beispiels für die Regel aus dem zweiten Ansatz:*

1 Maii 1615. Lundi.

$$\begin{array}{r} 1615 \\ 403 \\ 1 \\ \underline{120} \\ 2139 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \quad\;\; 6 \\ \cancel{2}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{1} \;⨍\; 305 \\ \;\;\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \quad\;\; 4 \\ \cancel{2}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{9} \;⨍\; 305 \\ \;\;\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7} \end{array}$$

10 1 Maii *(1)* 1675 *(2)* 1615 *L*   **11–15** *(1)* $\begin{array}{r} 1615 \\ 403 \\ 3 \\ \underline{120} \\ 2141 \end{array}$ *(2)* $\begin{array}{r} 1615 \\ 403 \\ 1 \\ \underline{120} \\ 2139 \end{array}$ *L*

---

8 l'année julienne: Gemeint ist die Jahreszahl nach der von J. J. SCALIGER, *De emendatione temporum*, 1583, S. 198 eingeführten Zeitrechnung. Ihre Epoche ist Montag, der 1. Januar 4713 v. Chr., gerechnet nach dem julianischen Kalender. **11** 1 Maii 1615: Dass der 1. Mai 1615 ein Montag gewesen sei, führt S. MORLAND, *Arithmetick Instruments*, 1673 [Marg.], Abschnitt *An Explanation of the Perpetual Almanack*, auf S. 3 als Beispiel zur Benutzung seines Ewigen Kalenders an. Leibniz prüft an diesem Beispiel die im zweiten Ansatz stipulierte Regel: Er addiert die Zahl 3 für Gemeinjahre und führt die Division durch 7 schriftlich aus (Mitte). Da das Ergebnis den Rest 6 aufweist und somit nicht wie von ihm erwartet ausfällt, ändert er den zu addierenden Wert, indem er statt einen Tag mehr als 2 einen weniger addiert. Die korrigierte Summe dividiert er erneut schriftlich (rechts). Doch auch diese Division liefert nicht das gewünschte Ergebnis. Tatsächlich ist das erste Ergebnis richtig: Der Rest 6 besagt, dass es sich beim 1. Mai 1615 des gregorianischen Kalenders um einen Freitag handelte. Dementsprechend war der 1. Mai 1615 des julianischen Kalenders — und eben diesen berechnet der Engländer Morland — ein Montag.

somme augmentée de 5, soit divisée par 7; et ce qui restera sera le nombre de la ferie du premier janvier nouveau style de l'année proposée. Lequel estant connu, il est aisé d'avoir la ferie de tel autre jour que l'on voudra, en adjoutant au nombre de la ferie du premier de janvier le nombre de tous les jours de cette année qui precedent le jour proposé. Cette somme divisée par 7 laissera la ferie demandée. Il est aisé de sçavoir le nombre de tous les jours precedans, parce qu'on sçait le nombre des jours de chaque mois qui est tousjours le même excepté que le fevrier au lieu de 28 en a 29, l'an estant bissexte. Or le bissexte de la Periode Julienne se reconnoist, lors qu'en divisant son nombre par 4, il reste 1.

Exemple

1676 est de la periode julienne	6389	$\cancel{3}4$
son quart (negligeant la fraction)	1597	$\cancel{7}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{1}$ $\cancel{7}$ 1141. Reste 4.
Nombre constant	5	$\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}$
	7991	

Donc le premier janvier de cette année est la quatrieme ferie ou un mercredi.

Si vous voulez la ferie du 15 d'Aoust de la meme année, adjoutez à 4 le nombre 227 qui est celuy des jours de cette année bissextile qui precedent le 15 d'Aoust, et la somme 231 divisée par 7 laisse [0] donc le 15 d'Aoust est la septieme ferie ou un samedi.

2 nouveau style: Die im dritten Ansatz vorgestellte Regel ist nicht ganz korrekt; sie erzeugt die Wochentagssprünge jeweils um zwei Jahre versetzt. So ergibt bereits ihre Anwendung auf den Neujahrstag des folgenden Jahres 1677 unzutreffenderweise, dieser sei ein Donnerstag gewesen; tatsächlich handelte es sich um einen Freitag. Die Regel ließe sich ohne weiteres ertüchtigen — etwa, indem man die Julianische Jahreszahl vor der Addition ihres Viertels um 2 erhöht und nach dieser Addition den ganzzahligen Anteil dann nur noch um 3 vergrößert. Doch auch eine in dieser Form verbesserte Regel wäre, so wie die aus dem zweiten Ansatz, nur bis 1700 gültig.

3. DATUM ET DETERMINATUM
[Erste Hälfte 1676 oder 1678 – 1679 (?)]

Bei den Stücken N. 3_1 und N. 3_2 handelt es sich um Notizen zu den Begriffen *datum* und *determinatum*. Auf dem Träger von N. 3_1 sind auf Bl. 73 v° Namen von französischen Diplomaten notiert. Am 7. November 1672 schreibt Johann Christian von Boineburg an Leibniz, dass er seinen Sohn mit Jean-Antoine d'Avaux, dem *président à mortier*, und mit Honoré Courtin bekannt machen solle (I, 1 N. 194, S. 284). Am 31. März 1673 schreibt Leibniz an Melchior Friedrich von Schönborn, dass er von der Entsendung von Honoré Courtin und Paul de Barillon, der ihm unbekannt sei, als französische Gesandte zum Kölner Friedenskongress erfahren habe (I, 1 N. 225, S. 330). Nach der Verhaftung von Wilhelm Egon von Fürstenberg verließ die französische Delegation Köln am 16. April 1674 zunächst Richtung Maastricht. Leibniz war spätestens ab Oktober 1674 aufgrund seiner juristischen Beratung für die Familie Fürstenberg in die Causa Fürstenberg involviert (vgl. seine Denkschrift zur Befreiung von Wilhelm Egon von Fürstenberg, I, 1 N. 318, S. 469–473). Für den in Nimwegen ab Ende 1676 stattfindenden Friedenskongress wurde von Ludwig XIV. bereits Ende November 1675 als Mitglied der französischen Gesandtschaft Jean-Antoine d'Avaux bestimmt. Es handelt sich hierbei um den Sohn des am 23. August 1673 verstorbenen *président à mortier*, er war zuvor von Mai 1672 bis November 1674 in Venedig und im Dezember 1675 als Gesandter in Brandenburg tätig. Dass Leibniz Kenntnis von der bereits erfolgten Abreise der französischen Delegation Richtung Nimwegen hatte — Leibniz nennt keine Namen —, belegt sein Brief an Melchior Friedrich von Schönborn von Anfang Januar 1676 (I, 1 N. 266, S. 397). Für die beiden Diplomaten Courtin und Barillon lässt sich erst ab Mai 1676 bzw. ab September 1677 wieder eine offizielle Akkreditierung nachweisen: jeweils für die französische Gesandtschaft in London. Die auf Bl. 73 r° festgehaltene Notiz stimmt inhaltlich überein mit einer Aussage in der von den Herausgebern auf Sommer 1678 bis Anfang 1679 datierten Studie VI, 4 N. 25 (S. 74 Z. 9 f.). N. 3 dürfte vorher verfasst sein. Die Nennung der drei französischen Diplomaten weist auf das erste Halbjahr 1676 hin, eine spätere Entstehung ist aber nicht ausgeschlossen. — N. 3_2 dürfte zur selben Zeit entstanden sein.

3_1. DATUM EST DETERMINATUM COGNITUM

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 9 Bl. 73. Zettel 6,35 × 3,4 cm. 5 Z. auf Bl. 73 r°. Auf Bl. 73 v° Cc 2, Nr. 449: Messieurs d'Avaux[,] Courtin, Barillon. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 545.
Cc 2, Nr. 448

Datum est determinatum cognitum. Ex data diametro circuli datur area quadrati inscripti, sed determinatur area circuli.

3_2. DETERMINATUM IDEM QUOD DABILE

Überlieferung: *L* Notiz: LH 4 V 10 Bl. 56 r° (v° leer). Zettel, rechte untere Ecke abgeschnitten, ca 4,4 × 8,5 cm. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 147.
Cc 2, Nr. 00

D e t e r m i n a t u m idem quod d a b i l e. Ita arcus aliquis positione datus est magnitudine determinatus seu dabilis. Etsi magnitudo ejus non sit cognita.

4. EXPRESSIO UNIUS LITERAE PER MULTAS

4. September 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 230. Ein beschnittenes Blatt ca 13,3 × 17,8 cm. 2 S. Bl. 230 bildete ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 14 (= VI, 3 N. 44) ein vollständiges Bl. 2°. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 4 f.
Cc 2, Nr. 740

Expressio unius literae per multas

4 Sept. 1674

Saepe magnitudinem cognitam incognitamve utile est exprimere certo quodam modo, per multas alias in ejus compositionem ingredientes; quod tum ad numeros, tum ad constructiones Geometricas inventorum jam valorum, et ad incognitas quorum valores non dantur, utiliores prae caeteris eligendas utile est. Omnis autem varietas oriri potest, ex combinatione literarum propositarum, inter se et cum forinsecus assumtis.

Exempli causa, datae sunt literae tres a. b. y. Et quaestio est de exprimenda aliqua magnitudine, cujus explicatio in nostro est arbitrio; tunc fateor infinitae sunt varietates, sed tamen re intra certos limites comprehensa varietates illae sunt numerabiles. V. g. a. b. y. ab. ay. by. aby. Singulae harum duci possunt in aliam quandam arbitrariam; nec refert multiplicando an dividendo. Sed postea ad arbitrarias accedentes veniemus. Nunc datis literis inhaereamus: Assurgant omnes ad quadratum: $a^2 + b^2 + y^2$. Hae inter se, et cum prioribus combinationibus jungi possunt. Et ita si ad altiora ascendatur. Hactenus incognita non nisi multiplicando dividendoque ex propositis literis formata est.

Jam jungi possunt inter se, et multiplicationes divisionibus misceri. Possunt jam de foris numeri literaeque accedere. Sed una litera numeros quoslibet comprehendet. Novae literae additio totidem producet varietates, quot sunt si plures essent ab initio propositae. Sufficeret ergo Tabulas texi, pro combinationibus possibilibus literarum, duarum: trium, quatuor. Et cuilibet combinationi resolutionem cujus est capax, pro varia literarum explicatione. Sed cum ista sint pene infinita, Methodi quaerendae sunt quibus ex

18 refert | addendo *ändert Hrsg.* | an *L* 20 possunt. *(1)* Primum inter se *(a)* addere *(b)* m *(2)* Hactenus omni *(3)* Et *L* 21 dividendoqve *(1)* ex datis *(2)* ex *L* 22 misceri. *(1)* Deniqve prae *(2)* Hactenus repetitiones praescidimus *(3)* possunt *L*

tot combinationibus utiles ab initio eligantur.

Breviter Tabulae analyticae formandae essent procedentes ordine per omnes formulas, non considerando literarum qualitatem sed numerum, v. g. $\frac{a^2-y^2}{a+y}$. Jam y. potest significare $2a$.

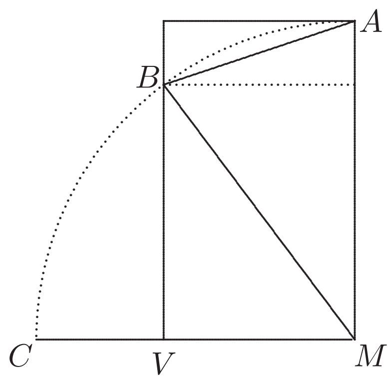
Ita inchoandum esset: a. ab. abc. $abcd$. $\frac{a}{e}$ $\frac{ab}{e}$ etc. $\frac{a}{ef}$ $\frac{ab}{ef}$ etc. Terminus, ut in numeratore pariter ac nominatore non sint ultra quatuor literae. Jam conjungantur inter se, ea lege, ne maximus numerus Terminorum nominatoris et terminorum denominatoris excedat 10. Ecce basin, jam in qualibet basi literis licet tribuere diversos valores; v. g. ab. licet annotare, si b. intelligatur a, fieri inde formulam a^2 cujus radix a. Nec obliviscendae forte formulae in quibus ipse nominator vel numerator rursus continent fractiones. Sed quoniam istorum spes nulla, nec forte operae pretium est, superest formulas illustriores hac methodo disponi, ut si qua theoremata nova reperiantur, inseri possint suo loco.

5 $\frac{\text{ab}}{\text{ef}}$ etc. *(1)* Summus *(2)* Terminus *L* 7 maximus *(1)* literarum *(2)* numerus *L* 9 licet *(1)* facere b. *(2)* annotare, *(a)* aliqvando b esse, *(b)* si b. intelligatur |a^2 *ändert Hrsg.*|, fieri *L* 10 nominator *(1)* ac numerator compositi sunt *(2)* vel *L* 12 qva *(1)* denuo *(2)* theoremata *L*

5. DE CHARACTERUM IMPERFECTIONE
[September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 122–123. 1 Bog. 4°. 7 Z. auf Bl. 123 r°. — Auf dem Rest des Bogens VII, 5 N. 10 u. VII, 6 N. 5.
Cc 2, Nr. 843

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Anfang September bis November 1674 belegt. N. 5 dürfte im selben Zeitraum entstanden sein wie VII, 5 N. 10 u. VII, 6 N. 5.



[*Fig. 1*]

Si a sectore *AMBA*, auferas Triangulum *AMB*, restat segmentum *ABA*. Id sane patet ex figura inspecta, sed non paret ex ipsis literis sive characteribus, unde patet eos esse imperfectos aliosque inveniendos. Eodem modo si a sectore duplicato auferas Rectangulum *VMA*, restabit segmentum duplicatum, necesse esset ista ex characteribus posse detegi, ne inspecta quidem figura.

6. GENERALIA GEOMETRICA
[Mai – Oktober] 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 47. 1 Bl. 4°. 2 S. Geringe Textverluste durch Tintenfraß sowie aufgrund einer Papierfalte. — Gedr.: 1. COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 144–146; 2. (engl. Teilübers. nach 1.) WIENER, *Selections*, 1951, S. 5.
Cc 2, Nr. 866

Datierungsgründe: Im vorliegenden Stück referiert Leibniz seine Leistungen auf dem Gebiet der Geometrie — unter anderem eine von ihm wenige Tage zuvor gefundene Lösung eines Konstruktionsproblems der Dreieckslehre. Die ausformulierte Lösung ließ sich in seinen Handschriften bislang nicht finden, doch enthält das auf den 25. August 1674 datierte Stück VII, 1 N. 47_{10} eine Skizze, die sich möglicherweise auf jenes Problem bezieht. Die Vermutung ist zulässig, dass er das Problem im August 1674 behandelt und kurz danach unser Stück verfasst hat. — Des weiteren erwähnt Leibniz eine Schrift zur *méthode des universels*, die er kurz zuvor geschrieben habe. Die drei hierfür in Frage kommenden Schriften (VII, 7 N. 10, 11 oder 14) sind auf Mai oder Juni, auf Juni respektive auf Mitte 1674 zu datieren. Unser Stück ist somit nicht vor Mai 1674 abgefasst worden. — Eine vergleichbare Darstellung seiner mathematischen Errungenschaften gibt Leibniz auch an anderer Stelle: Dem Stück III, 1 N. 38_2, das von den Herausgebern auf Oktober 1674 datiert wird, erteilt er nachträglich den einschlägigen Titel *Propria inventa analytico-geometrica*. In ihm beschränkt er sich aber im Bereich der Geometrie auf seine arithmetische Kreisquadratur und erwähnt die *méthode de l'universalité* nicht mehr, sondern führt statt dessen eine neue, analytische Methode zur Behandlung zahlentheorischer Probleme an. Offenbar ist jenes Stück also nach unserem verfasst worden, womit dieses spätestens im Oktober 1674 entstanden ist. — Auch das auf September oder Oktober 1674 zu datierende Stück VII, 6 N. 7, in welchem Leibniz seine arithmetische Kreisquadratur darstellt, greift (wie III, 1 N. 38_2) einleitend die in unserem Stück vorgenommene Kategorisierung geometrischer Probleme auf und verwendet dabei recht ähnliche Formulierungen. Es baut hierbei offenkundig auf unserem Stück auf und ist also ebenfalls jünger als dieses.

1 6 7 4. P a r i s

Generalia Geometrica: de meis accessionibus et methodo universalitatis

Les Theoremes n'estant que pour abreger ou diriger la solution des problemes, puis-

26–29 1 6 7 4. P a r i s | *(1)* imperfectum *(2)* Generalia ... universalitatis *erg.* | *(a)* Les problemes Geometriqves *(b)* Les Theoremes *L* 29 ou diriger *erg. L* 29–13,1 puisqve ... practiqve *erg. L* que toute la theorie doit servir à la practique. Il suffit d'estimer la varieté de la Geometrie, par celle des problemes. Les problemes de Geometrie, sont ou Rectilignes ou Curvilignes. Les Problemes rectilignes sont, dans les quels on ne demande ny suppose que la grandeur de quelques lignes droites ou espaces rectilignes. Les curvilignes supposent ou demandent la grandeur de quelque ligne courbe, ou de quelque espace curviligne. Les problemes des centres de Gravité et par consequent quantité de problemes de la Mechanique sont, de la derniere sorte. Ainsi on peut dire, qu'il y a comme deux E⟨sp⟩eces de la Geometrie, celle d'Apollonius, et celle d'Archimede; la premiere renouvellée par Viete et des Cartes; l'autre, par Galilei et Cavalieri.

Les problemes Rectilignes se reduisent à la Resolution de quelque ⟨E⟩q⟨u⟩ation dont il faut tirer les racines, analytiquement par le calcul, ou Geometriquement par l'intersection des lieux; exactement, ou par approximation. Mais les Curvilignes ne sont pas encor sujets à l'analyse connue, e⟨t⟩ si on les vouloit reduire à une equation, on la trouveroit de ⟨l⟩'infinitesieme degré.

Or ⟨a⟩yant fait quelques remarques assez extraordinaires dans l'une aussi bien que dans l'autre espece de Geometrie, j'ay bien voulu en toucher icy quelques unes en peu de mots.

Dans la Geometrie des Rectilignes; j'ay trouvé enfin le moyen de tirer les racines de toutes les Equations cubiques; c'est à dire

7 sorte. *(1)* On peut dire qve *(2)* de sorte qv *(3)* Ainsi *L* 8 d'Apollonius, *(1)* et l *(2)* qvi est des problemes Rectilignes, qvi se resolvent a la verité par l'intersection *(3)* et celle *L* 8 f. des Cartes; *(1)* second par *(2)* l'autre *L* 10 Rectilignes se *(1)* resolvent *(2)* reduisent *L* 11 par le calcul *erg. L* 11 f. par ... lieux *erg. L*

---

7 deux Especes: Die hier getroffene Unterscheidung zwischen gerad- und krummlinigen geometrischen Problemen sowie ihre historische Einordnung nimmt Leibniz auch anderorts vor: Sie findet sich sowohl in seinen wohl im Oktober 1674 für Mariotte verfassten Ausführungen über seine mathematischen Entdeckungen (III, 1 N. 38_2 S. 139 f.) als auch in den einleitenden Bemerkungen eines wahrscheinlich zwischen dem 10. September und Ende Oktober 1674 entstandenen Stückes, welches die Bestimmung der Kreisfläche mit Hilfe einer unendlichen Reihe rationaler Zahlen darstellt (VII, 6 N. 7, S. 88 f.).
19 Equations cubiques: Gemeint ist womöglich die Schrift *De aequationum transformationibus cubicarum et quadrato-quadraticum* aus dem September 1674 (VII, 1 N. 127 S. 818 ff.). Auch in der Schrift *Schediasma de radicibus cubicis* von Oktober 1674 (VII, 1 N. 139) sowie in dem (allerdings unvollendeten und dann verworfenen) Konzept VII, 1 N. 133, das wohl auf den September 1674 zu datieren ist, beschäftigt sich Leibniz mit der Lösung kubischer Gleichungen.

de rendre toutes les Equations cubiques pures; en sorte que pour les resoudre il ne faut que tirer la racine cubique d'un solide connu. Scipio Ferreus a trouvé le premier des regles propres à tirer les racines de quelques especes des Equations cubiques, Cardan a publié sa methode. Et Viete aussi bien que Mons. des Cartes ont desesperé de pouvoir venir ⟨au⟩ bout des autres. J'ay eu le bonheur d'y voir quelque jour. Et ce la estant on peut dire que la resolution de toutes les Equations cubiques ou quarrequarrées est achevée, et qu'on les peut construire toutes Geometriquement par l'invention de deux moyennes proportionelles.

Je ne repete pas icy ce que je viens de dire dans un papier àpart de la Methode des universels; qui nous abrege le calcul comprennant plusieurs cas soubs un seul, qui nous fait decouvrir des harmonies dans les figures et qui nous donne le moyen de les ranger en classes par des idees generales.

Touchant les lieux, j'ay observé quelques moyens extraordinaires d'obtenir des aequations *ad circulum* dans les problemes proposés, à fin d'en donner des constructions courtes et be⟨l⟩les, comme par exemple je donna[y] il y a quelques jours une construction

4 Et *(1)* Mons. Viete et *(2)* Viete *L* 6 dire qve *(1)* l'Analytiqve les *(2)* la resolution *L* 7 par *(1)* le moyen de *(2)* | la seule invention *nicht gestr.* | *(3)* l'invention *L* 10 comprennant ... seul *erg. L* 12 par | *(1)* qvelqves notions *(2)* des idees | generales *L* 14 les *(1)* proposés, *(2)* problemes proposés, *L* 15 et *(1)* nettes *(2)* be⟨l⟩les, *L* 15–15,1 jours *(1)* la construction du probleme: *(2)* une qvi n'est qve ⟨de deux⟩ mots *(3)* | une *erg. Hrsg.* | construction fort courte de ce probleme: *(a)* L'Hypothénuse d'un Triangle rectangle *(b)* un costé *L*

3 Equations cubiques: Vgl. G. Cardano, *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, 1545, Bl. 31 (G. Cardano, *Opera* IV, S. 251.) 9 papier: Gemeint ist wahrscheinlich der Mitte 1674 entstandene *Essay de la méthode des universels* (VII, 7 N. 14), denn die Bezeichnung *méthode des universels* verwendet Leibniz nur dort. Üblicherweise spricht er dagegen von der *méthode de l'universalité*. So lautet auch der Titel der beiden grundlegenden, auf Mai oder Juni 1674 zu datierenden Schriften zu diesem Ansatz, in welchen er — deutlicher und im Wortlaut dem obigen ähnlicher als im *Essay* — sowohl die Verkürzung des Rechenaufwandes als auch die Aufdeckung von Harmonien mittels seiner neu ersonnenen Methode anspricht (vgl. etwa VII, 7 N. 10 S. 76 § 2 u. S. 79 § 7; N. 11 S. 114 f.). Die Bemerkung könnte sich also auch auf eines dieser beiden Konzeptpapiere beziehen.

fort courte de ce probleme: Un costé d'un Triangle estant donné et l'angle qui luy est opposé, trouver le ⟨T⟩riangle en sorte que ses costés soyent en proportion harmonique.

Viete nous a donné la methode de tire⟨r⟩ les racines des Aequations par d e s n o m b r e s approchans aux veritables; mais personne a ce que [je] sçache a donné des a p p r o x i m a t i o n s G e o m e t r i q u e s ; ⟨j⟩e croy pourtant d'y avoir reussi, et de pouvoir resoudre l⟨e⟩s problemes solides par approximations en n'employan⟨t⟩ que des droites ou cercles; et cette methode a cela au dessus d⟨e⟩ l'exegese numerique de Viete, qu'elle nous donne toutes les racines de l'Equation proposée tout à la fois; au lieu que l'exegese par nombres n'en donne qu'une.

Quant à la Geom⟨et⟩rie des Curvilignes je pre⟨tend⟩s d'y avoir fait quelque chose d'ext⟨r⟩aordinaire. Sans parler de la quadrature d'un segment oblique ⟨d⟩e la Cycloeide;

1 f. et ... opposé *erg. L* 2 trouuer *(1)* les deux costés, de sorte qv *(2)* tous les coste *(3)* le ⟨T⟩riangle *L* 2 f. harmoniqve *(1)* et j'ay ob *(2)* Viete *L* 5 G e o m e t r i q u e s ; *(1)* j'en ay trouué *(2)* j'ay pourtant trouué *(3)* j'a *(4)* ⟨j⟩e croy *L* 9 f. qv'une *(1)* Dans la Geometrie des curvilignes *(2)* Qvant à *L* 11 de la *(1)* dimension *(2)* qvadrature *L*

---

1 probleme: Mit Konstruktionsproblemen der Dreieckslehre befasst sich Leibniz im Jahr 1674 mehrfach. In VII, 1 N. 11 etwa, das die Herausgeber auf August 1674 datieren, sind zwei Seiten und die Fläche eines gesuchten Dreiecks vorgegeben. In dem bislang auf Ende 1674 datierten Teilstück VII, 1 N. 14_1 sind dagegen die Basis des gesuchten Dreiecks und ein an der Basis anliegender Winkel sowie das Produkt der beiden anderen Seiten gegeben. Und im bislang auf Frühjahr 1675 datierten Teilstück VII, 1 N. 14_2 greift Leibniz das letztgenannte Problem erneut auf, ändert dann aber die Fragestellung und setzt nun nicht mehr einen an der Basis anliegenden, sondern den der Basis gegenüberliegenden Winkel als gegeben voraus. Dieses Problem kann er elegant konstruktiv lösen. Das in unserem Stück genannte Problem lässt sich auf eine sehr ähnliche, wenngleich geringfügig aufwendigere Weise lösen. Seine Bearbeitung ist nicht überliefert. Aus diesem Grund und auch, weil Leibniz von einer „construction fort courte" spricht, liegt die Vermutung nahe, dass er tatsächlich die Konstruktion aus VII, 1 N. 14_2 meint. Womöglich geht er davon aus, dass diese Konstruktion ohne Änderung auch das hier genannte Problem löst. Weil VII, 1 N. 14_1 und 14_2 aus einer Reihe von Gründen neu datiert und nun in die erste Hälfte des Jahres 1674 gestellt werden, steht ihre Datierung dieser Interpretation nicht mehr entgegen. 3 methode: Vgl. Fr. Viète, *De emendatione aequationum*, 1615 (VO S. 82–161). 4 approximations Geometriques: Leibniz denkt hier womöglich an eine Verknüpfung seiner Lösung der soliden Probleme durch Kegelschnitte mit der Umformung der Kegelschnittgleichungen in eine Kreisgleichung; vgl. seine wohl im September 1674 verfasste Schrift *De aequationibus ad circulum inveniendis* (VII, 1 N. 130). 11 Cycloeide: Den Segmentsatz an der Zykloide formuliert Leibniz erstmalig in III, 1, N. 29, zu datieren auf den Sommer 1674, auf S. 115. Vorarbeiten finden sich in VII, 4 N. 17, wohl aus dem späten Frühjahr 1673. Den Beweis liefert er in VII, 5 N. 31, zu datieren auf März bis Dezember 1675.

de la dimension de la courbe décrite par l'evolution du cercle (ayant trouvé que l'arc evolu est la moyenne proportionelle entre le diametre et la courbe décrite)[;] de la dimension de la surface du solide parabolique fait par la parabole revolüe à l'entour de la touchante du sommet; j'ay observé deux methodes fort estendues, l'une de donner la dimension des figures superieures en supposant celle des inferieures; l'autre de reduire l'aire d'une figure à la somme d'une progression de nombres rationaux. Ce qui est traduire la difficulté de la Geometrie à l [*bricht ab*]

3 de la *(1)* super *(2)* surface *(a)* d'un solide Hyp *(b)* du solide *L* 4 l'une de *(1)* revoqver *(2)* donner *L* 4 dimension des *(1)* courbes *(2)* figures *L* 6 somme *(1)* de progressio *(2)* d'une progression *L*

1 l'evolution du cercle: Vgl. das wahrscheinlich im Frühjahr 1673 entstandene Konzept VII, 4 N. 10_1 S. 141 u. 143 sowie III, 1 N. 29 S. 116. 3 solide parabolique: Vgl. das wohl aus dem Sommer 1673 stammende Konzept *Triangulum characteristicum ellipsis* (VII, 4 N. 28, hier S. 509–515) sowie den auf den 3. Oktober 1674 datierten ersten Teil der Schrift *Schediasma de superficiebus conoeidum* (VII, 5 N. 6). 4 l'une de: Leibniz bezieht sich hier möglicherweise auf sein im August 1673 verfasstes, *Methodus tangentium inversae seu De functionibus* überschriebenes Konzept VII, 4 N. 40. 5 l'autre: Diese Bemerkung bezieht sich auf Transmutation und Reihenentwicklung; vgl. etwa das aus der ersten Hälfte des Jahres 1674 stammende Stück zur arithmetischen Kreisquadratur VII, 6 N. 4. 6 difficulté: In VII, 6 N. 7 S. 89 Z. 2 f. formuliert Leibniz den hier abgebrochenen Gedanken zu Ende: „. . . la difficulté des Curvilignes est transferée de la Geometrie à l'Arithmetique par les progressions."

7. SUR LE CALCUL DES PARTIS
7. Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 14 Bl. 5–8. 2 Bl. 4° u. 1 Bog. 2°. 7 S. Bl. 8 v° leer bis auf 1 Z. — Gedr.: 1. Parmentier, *L'estime*, 1995, S. 113–145: 2. (span. Übers.) Leibniz, *Obras filosóficas y científicas*, Bd. 7 B, 2015, S. 669–687.
Cc 2, Nr. 1259

7. Janvier 1676

Le Chevalier de Meslé fut le premier qui donna l'ouverture pour le calcul des partis, que Messieurs Pascal et Huguens ont entrepris par apres. On croyoit que s'il y avoit par exemple trois partis à gagner, pour gagner l'argent, qui estoit mis, ou trois partis à gagner, pour gagner le jeu, et si l'un avoit gagné deux partis et l'autre un; que $\frac{2}{3}$ du jeu

11 partis; *(1)* qve $\frac{2}{3}$ du jeu luy appartenoient *(2)* et l'autre *L*

---

8 Meslé: Gemeint ist Antoine Gombaud (1607–1684), genannt Chevalier de Méré. 8 partis: Das *problème des partis*, zu deutsch Teilungsproblem, besteht darin, eine „gerechte“ Aufteilung des Einsatzes bei einem in mehreren Runden auszutragenden Spiel zu finden, wenn dieses abgebrochen werden muss, bevor einer der Spieler die für den Gesamtsieg vereinbarte Anzahl Runden gewonnen hat. Es gilt als klassisches Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie. 9 Pascal: Nachdem Méré das Problem an Pascal herangetragen hat, erörtert dieser es 1654 in seinem Briefwechsel mit Fermat. Eine Abhandlung Pascals, die die Lösung des Problems präsentiert, wird nach seinem Tod abgedruckt: Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [Marg.], Abhandlung III: *Usage du triangle arithmetique, pour determiner les partys qu'on doit faire entre deux Joueurs qui jouent en plusiers parties* (*PO* III, S. 478–498). Leibniz besitzt wohl schon seit 1672 ein Exemplar dieses Buches (vgl. N. 41) und bezieht sich hier offensichtlich auf diese Abhandlung. Ihre Ergebnisse hat er jedoch nicht zur Kenntnis genommen. Pascals Briefe an Fermat — der vom 29. Juli 1654 präsentiert seine eigene Problemlösung, der vom 24. August 1654 referiert jene Fermats — werden drei Jahre nach Entstehung des vorliegenden Stückes in P. de Fermat, *Varia opera*, 1679 [Marg.], S. 179–188, veröffentlicht. Im Juni 1675 und wohl ab Januar 1676 kann Leibniz verschiedene Stücke aus Pascals Nachlass einsehen (vgl. N. 33 sowie III, 1 N. 53, 54 u. 74), gewinnt jedoch auch dabei keine nähere Kenntnis von der Behandlung des Problems durch Pascal und Fermat. 9 Huguens: Vgl. Chr. Huygens, *De ratiociniis in ludo aleae*, in: Fr. van Schooten, *Exercitationum mathematicarum*, 1657, S. 517–534, insbesondere prop. IV–VII.

appartenoient au premier. Mais il refusoit cela, par ce qu'il ne me faut qu'un parti pour gagner tout, et il ne me faut que la perte d'un, pour rendre tout egal, et pour revenir au premier estat, donc $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$ m'appartenant au commencement, et en cas de perte du 4^{me} jeu; et le tout, ou $\frac{4}{4}$ m'appartenant en cas du gain du 4^{me} jeu, ou du 3^{me} parti; il est donc manifeste qu'avant que de le gagner ou perdre j'ay $\frac{3}{4}$ de l'argent mis sur la table. Car ce jeu me peut faire gagner $\frac{2}{4}$, et me peut faire perdre $\frac{2}{4}$, dont il vaut $\frac{1}{4}$ ou la moitié de $\frac{2}{4}$. Donc avant ce jeu j'avois $\frac{3}{4}$.

Le chevalier de Melé gentilhomme du Poictou, grand joueur, et homme d'esprit.

Cela a lieu au piquet où l'on joue des partis liez, et qu'il faut gagner 3 fois par exemple ou 4 fois, pour amener l'argent. NB. Si on joue à trois partis, il faut necessairement qu'un gagne en 5 jeux ou partis. Il peut arriver que l'un gagne trois partis de suite; | | | *item*

1 faut qv'un *(1)* jeu pour *(2)* parti *L* 4 du 4^{me} *(1)* parti *(2)* jeu *L* 6 gagner *(1)* $\frac{1}{4}$, *(2)* $\frac{2}{4}$, et ... il *(a)* faut *(b)* vaut *L* 7 j'avois *(1)* $\frac{1}{2}$ *(2)* $\frac{3}{4}$ *L* 10 joue *(1)* trois jeux *(2)* à trois partis *L* 11–19,1 suite; *(1)* item qv'il en gagne *(2)* | | | item qv'il gagne *(a)* • | | | vel | • | | vel | | • | vel *(b)* | | • | *(aa)* vel | • | | vel • | | | *(bb)* ou *L*

---

1 appartenoient: Eine solche Aufteilung des Gewinns im Verhältnis der jeweils gewonnenen einzelnen Spielrunden schlägt L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni, et proportionalita*, 1494, Bl. 197 r° vor. Es handelt sich hierbei um die erste Behandlung des Problems durch einen namentlich bekannten Autor in der Literatur. 1 refusoit: Nicht erst Méré weist Paciolis Teilungsregel zurück; bereits G. Cardano, *Practica arithmetice*, 1539, cap. 68, § 5 und N. Tartaglia, *La prima parte del general trattato di numeri, et misure*, 1556, lib. XVI, Bl. 265, § 206 kritisieren sie und stellen eigene Teilungsregeln auf. 4 parti: Die Verwendung der Begriffe *jeu* und *parti* ist anfangs inkonsistent; *jeu* steht meist für das gesamte Spiel, hier aber für eine einzelne Runde, *parti* meint in der Regel eine Spielrunde, hier aber eine gewonnene Runde bzw. einen Gewinnpunkt (später auch als *coup* oder *point* bezeichnet). 5 manifeste: Der hier am Beispiel referierte Ansatz zur Lösung des Teilungsproblems stimmt mit jenem von Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. 525, prop. IV überein. 6 dont: Für die im modernen Französisch *donc* geschriebene Konjunktion verwendet Leibniz in diesem Stück, ohne einer ersichtlichen Regel zu folgen, öfters auch die Schreibweise *dont* (die an anderen Stellen aber auch für das gleichgeschriebene Pronomen steht). 9 piquet: Dies ist ein im 17. Jahrhundert populäres Kartenspiel französischen oder spanischen Ursprungs für zwei Personen.

qu'il gagne ||•| ou |•|| ou •|||. Et s'il gagne en 5 jeux il peut gagner ainsi: ••||| |••|| ||••| •||•| •|•|| |•|•|. *Ecce modos omnes quibus vinci potest. Et notandum hoc combinationis plane singularis genus. Nunc ut ex meis rem principiis examinem*, je mets pour asseuré, qu'en gagnant un parti je fais un tiers de ce qu'il faut faire, pour gagner l'autre moitié de l'argent qui est mise au jeu; car une moitié m'appartient déjà. Donc l'argent mis au jeu estant: a, et le nombre des partis qu'il faut gagner pour amener tout l'argent estant p, 1 parti vaudra $\dfrac{a}{2p}$ et 2 partis gagnez vaudront: $\dfrac{a}{p}$. Les quels joints à $\dfrac{a}{2}$ j'aurois alors $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{p}$ de tout l'argent. Mais mon adversaire gagne le 3$^{\text{me}}$ parti, c'est à dire, il gagne par là: $\dfrac{a}{2p}$, et il a ainsi $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2p}$. Donc mon droit sur l'argent tout entier est au sien, comme $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{p}$ est à $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2p}$ ou comme $\dfrac{ap+2a}{2p}$ est à $\dfrac{ap+a}{2p}$, ou comme $p+2$ est à $p+1$. Par consequent il faut diviser a en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme $p+2$ est à $p+1$, et p estant $\sqcap$ 3, il faut a diviser en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme 5 à 4. C'est à dire divisant toute

5 gagner *(1)* la moit *(2)* l'autre *L* 6 estant: *(1)* ⟨b⟩ argent ayant gagné un pa *(2)* a *L*
8 vaudront: *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}}{4\mathrm{p}}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{p}}$ *L*

6 estant: Die Bezeichnung a für die Gewinnsumme findet sich bereits bei Huygens, und auch p tritt dort in ähnlicher Bedeutung auf wie hier bei Leibniz; vgl. Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. 523. 9 gagne: Der hier verfolgte Ansatz widerspricht der Voraussetzung, dass die Summe der Gewinne beider Spieler konstant a ist. Dies belastet die weitere Überlegung und wirkt sich insbesondere in S. 20 Z. 4 f. aus.
12 $p+2$ est à $p+1$: Eine Regel für die Aufteilung des Gewinns kann als hinreichend „fair" gelten, wenn sie mindestens drei Bedingungen erfüllt: Erstens sollte sie bei Gleichstand zum Zeitpunkt des Spielabbruchs beiden Spielern den gleichen Anteil zusprechen; zweitens sollte sie demjenigen Spieler, der als erster die für den Gesamtsieg geforderten Runden gewonnen hat, den gesamten Gewinn zusprechen; und drittens sollte sie sicherstellen, dass jede zusätzlich gewonnene Runde den Anteil am Gewinn vergrößert. Die beiden ersten Bedingungen sollten sich dabei als Randwerte aus der Regel ergeben und nicht lediglich *per definitionem* gelten. Man kann die „gerechte" Aufteilung auch noch strenger definieren, indem man verlangt, dass diese genau im Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten zu erfolgen hat. Unausgesprochen verfolgt Leibniz das Ziel, eben hierfür eine Regel zu finden. Die hier untersuchte Aufteilung des Gewinns im Verhältnis $(p+g):(p+f)$ bei einem Spielstand von $g:f$ im Augenblick des Abbruchs erfüllt allerdings bereits die zweite der Mindestbedingungen nicht: Nach dieser Regel stünde dem Verlierer stets mindestens ein Drittel des Gewinns zu.

la somme en 9 parties celuy qui a gagné 2 partis aura $\frac{5a}{9}$, et celuy qui n'a gagné qu'un aura $\frac{4a}{9}$. Mais nous verrons incontinent si ce calcul est juste car si celuy qui a gagné 2 partis, gagne encor un, c'est à dire $\frac{a}{2p}$, c'est à dire $\frac{a}{6}$, p estant $\sqcap$ 3, il aura a tout entier, mais $\frac{5a}{9} + \frac{a}{6}$ ne fait pas a. De meme s'il perdoit un, il n'auroit que $\frac{a}{2}$, or $\frac{5a}{9} - \frac{a}{6}$ ne fait pas $\frac{a}{2}$. C'est pourquoy il y a du sophisme dans nostre calcul.

Et il faut un tout autre principe d'analyse. Le principe general est, que deux joueurs ont un droit egal sur une somme qui est au jeu, lors qu'il est aussi aisé à l'un qu'à l'autre de gagner ou de perdre. Donc au commencement du jeu tout est commun. C'est à dire si la société venoit à se rompre chacun en auroit la moitié. De plus si un des joueurs a tant de partis, sur son adversaire, que le nombre des partis qu'il luy faut pour gagner tout est égal au nombre de ceux qu'il doit perdre pour revenir à l'egalité; il aura gagné la moitié de l'autre moitié outre la sienne. Ainsi supposé qu'il faille 5 partis pour amener l'argent. J'en ay gagné 3, et mon adversaire 1. Si j'en gagne encor deux, j'amene l'argent, si j'en perds deux nous revenons à l'egalité, donc en ce cas ils m'appartiennent $\frac{3}{4}$ de l'argent. On voit par là que ce n'est pas la meme chose, que j'aye gagné 3 partis et l'autre 1, et que j'aye gagné 2 partys et l'autre rien. Car au premier cas, il m'appartient $\frac{3}{4}$, au second cas, il me faut 3 partis pour gagner, et il ne faut que perdre deux pour revenir

2 f. qvi *(1)* gagne *(2)* a gagné … encor | un *gestr. L, erg. Hrsg.* | , c'est *L* 6 principe *(1)* du jeu *(2)* general *L* 10 adversaire, qve *(1)* ce qv'il *(2)* le nombre *L* 10 f. gagner | tout *erg.* | est égal *(1)* à ce qvi luy faut *(a)* pour *(b)* de perte pour *(2)* au nombre L 13 deux, *(1)* je gagne *(2)* j'amene *L*

11 gagné: Auch in der Verallgemeinerung — einem Spieler fehlt noch eine bestimmte Zahl an Punkten zum Gesamtsieg und sein Vorsprung beträgt ebensoviele Punkte — ist der direkte Weg zum Gesamtsieg genauso wahrscheinlich wie der direkte Weg zum Gleichstand. Doch gibt es nun eine Anzahl weiterer Spielverläufe, die hier nicht berücksichtigt werden. Das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler kann so nicht korrekt bestimmt werden. Auch im weiteren beschränkt sich Leibniz auf die Betrachtung spezieller Konstellationen, bis er auf S. 34 den Blick dann auf alle Spielverläufe ausweitet.

au premier estat d'egalité. Donc l'apparence de gagner $\frac{a}{2}$ est à l'apparence de gagner 0, comme 2 à 3. Et il faut voir si je puis dire, que j'ay gagné autant de $\frac{1}{5}$ mes de $\frac{a}{2}$, qu'il y a d'apparences de gagner, sçavoir 2. Il faut que mon adversaire gagne 5 partis pour gagner $\frac{a}{2}$. Et il faut gagner 2 pour venir à l'egalité. Ce qui est paradoxe. Et on ne pourra pas dire icy que l'apparence de gagner est à l'apparence de l'egalité, comme 2 à 5, donc je n'ose pas parler comme cela, non plus dans la personne de celuy qui a gagné: car il faut de maniere de parler qui convienne à tous deux. Il est bien vray icy que l'un ayant gagné autant de partis, que l'autre tout est égal; mais il n'est pas vray, qu'adjoutant autant de

3 2. Il faut *(1)* 5 à mon adversaire, *(a)* dont *(b)* donc à qve *(2)* qve mon *L* 4 paradoxe, *(1)* ⟨don⟩ *(2)* et il ne faut parler comme cela; et même il faut considerer *(3)* Et on *L* 6 cela, *(1)* donc *(2)* non plus *L*

4,14 m'appartiennent: Wenn sich die Aufteilung des Gewinns am Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten bemessen soll, mit denen die beiden Spieler das gesamte Spiel gewinnen, ist zunächst danach zu fragen, ob man ein exaktes Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten angeben kann, mit welchen sie eine einzelne Runde für sich entscheiden. Bei Spielen wie etwa dem Münzwurf kann dieses Verhältnis mit 1 : 1 angesetzt werden. Bei einem Spielstand von 3 : 1 und fünf Gewinnrunden ist der Einsatz dann im Verhältnis 13 : 3 aufzuteilen, wie sich mit den Ansätzen von Pascal oder Fermat leicht berechnen lässt und wie es bei Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. 526, prop. VII nachzulesen ist. Auch Bl. Pascal, *a. a. O.*, S. III, 7 (= *PO* III, S. 488 f.) behandelt dieses Beispiel. Bei dem hier betrachteten Kartenspiel Piquet haben die beiden Spieler jedoch im Allgemeinen nicht die gleiche Chance, eine Runde zu gewinnen, so dass sich die Frage stellt, wie ihre jeweiligen Spielstärken zu bemessen sind. Falls man davon ausgeht, dass der Zwischenstand von 3 : 1 die unterschiedlichen Spielstärken abbildet und man daher auch das Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten in einer einzelnen Runde so ansetzt, müsste eine Verteilung des Gewinns im Verhältnis von 63 : 1 erfolgen. In der Regel sind die genauen Spielstärken aber unbekannt. Das Problem setzt in seiner überlieferten Form stillschweigend gleiche Spielstärken und Erfolgswahrscheinlichkeiten in jeder Einzelrunde voraus, und Leibniz folgt dieser Vorgabe. 1 apparence: Der methodische Ansatz zur mathematischen Behandlung von Wahrscheinlichkeiten besteht im vorliegenden Stück darin, das Verhältnis zweier *apparences* zueinander zu betrachten. Die *apparence* — die Häufigkeit, mit der ein ungewisses Ereignis eintritt — wird also nicht als für sich stehende Größe betrachtet, sondern sie ist stets in eine Relation zu setzen. Dies gilt in diesem Stück gleichermaßen auch für die als *facilité*, *difficulté* oder *probabilité* bezeichneten Größen. 4 paradoxe: Für eine analoge Betrachtung aus der Sicht des zurückliegenden Spielers ist die Zahl an Runden, die dieser gewinnen muss, damit wieder Gleichstand herrscht (hier 2), in Relation zur Zahl der Runden, die er verlieren muss, damit er das Gesamtspiel verliert (hier 3), zu setzen. Dementsprechend wäre im vorliegenden Beispiel sein eigener Anteil im Verhältnis von 3 : 2 aufzuteilen. Der Ansatz führt also, ob man nun den führenden oder den zurückliegenden Spieler betrachtet, tatsächlich zum gleichen Ergebnis.

partis à l'un qu'à l'autre tout demeure egal, car celuy qui est déja le plus avancé gagnera en ce cas. C'est pourquoy un jeu estant disputé il y aura bien de la difference entre dire que tous deux ont gagné, et que pas un n'a gagné. On ne sçauroit bien demonstrer cela sans des definitions exactes. Cependant je croy que nous avons la regle. Le nombre des partis necessaires est p, le nombre des partis gagnez g. Donc de ceux qui restent à gagner le nombre est $p-g$. Donc si vous perdez g, vous reviendrez à l'egalité, si vous gagnez $p-g$, vous amenez l'argent. Or l'apparence de gagner est à l'apparence de perdre en raison reciproque du nombre des jeux qu'il faut gagner, au nombre des jeux qu'il faut perdre, ou comme g à $p-g$; et par consequent l'apparence d'amener l'argent, est à l'apparence de revenir à l'egalité, comme g à $p-g$. Mais comme est l'apparence d'amener l'argent à l'apparence de revenir à l'egalité de même est la partie de l'argent de mon adversaire sur la quelle un droit m'est acquis, à la partie de son argent qui reste dans la communauté. Donc si le jeu se doit separer en cet estat, j'aurois preferablement de l'argent de mon adversaire une partie qui sera à l'autre partie comme g est à $p-g$. Le reste sera divisé egalement. Et par consequent l'argent est a, la moitié de mon adversaire est $\frac{a}{2} \sqcap \frac{pa}{2p} \sqcap \frac{ga+pa-ga}{2p}$. Ainsi j'auray en cas de separation;

$$\frac{a}{2} + \frac{pa-ga}{4p} + \frac{ga}{2p} \sqcap \frac{3ap+ga}{4p}$$

Avant que de venir au theoreme il faut aussi comprendre dans le calcul le cas où tous deux ont gagné quelque partis; l'un en a gagné g, l'autre en a gagné f, et je suppose f moindre que g. Il faut à G, c'est à dire celuy qui a gagné g, le nombre $p-g$; pour amener

5 partis *(1)* est p. le nombre des partis *(2)* qv'il fa *(3)* necessaires *L* 6 donc *erg. L* 7 p − g. vous *(1)* gagnez *(2)* amenez l'argent. *(a)* donc *(b)* or *L* 7 perdre *(1)*, comme le nombre *(2)* en raison *L* 9 comme *(1)* p − g *(2)* p *(3)* g à p − g; et par conseqvent *(a)* le gain sur la moitié de vostre ⟨nom⟩ *(b)* l'apparence *L* 11 même est *(1)* le gain *(2)* le droit acqvis sur l'argent de mon adversaire, un droit *(3)* la partie *L* 17 f. $\frac{\mathrm{3ap+ga}}{\mathrm{4p}}$ *(1)* Donc nous pourrons faire un theoreme. Deux joueurs *(a)* ayant mis *(b)* estant tombés d'accord qve celuy *(2)* Avant *L* 18 aussi *(1)* toucher *(2)* comprendre *L* 20 gagné | f, *ändert Hrsg.* | le nombre *L*

15 divisé: Der hier verfolgte Ansatz verlangt, den Einsatz des zurückliegenden Spielers im angegebenen Verhältnis zwischen den beiden Spielern aufzuteilen. Demzufolge bleibt weder unverteiltes Geld im gemeinsamen Besitz übrig, noch ist jener Teil des Einsatzes, der dem zurückliegenden Spieler verbleibt, hälftig auf beide Spieler zu verteilen. Leibniz entwickelt seinen Gedanken konsequent weiter, bis er in S. 24 Z. 7 diese Inkonsistenz erkennt.

l'argent; et il faut que l'autre F gagne $g - f$ pour venir à l'egalité donc l'apparence de gagner sera à l'apparence d'egalité comme $g - f$ est à $p - g$. Par consequent il faut diviser $\frac{a}{2}$ en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme $g - f$ est à $p - g$. Pour cela: $\frac{a}{2} \sqcap \frac{ga - fa + pa - ga}{2g - 2f + 2p - 2g \sqcap 2p - 2f}$. Donc ces deux parties seront: $\frac{ga - fa}{2p - 2f}$, et $\frac{pa - ga}{2p - 2f}$. Donc $\overset{\text{☽}}{\frac{ga - fa}{2p - 2f}}$ appartient preferablement à celuy qui a gagné g, et du reste il luy appartient $\frac{a}{2}$, sa moitié, et la moitié du reste de la moitié de l'adversaire $\frac{pa - ga}{4p - 4f}$, c'est à dire $\frac{a}{2} + \frac{pa - ga}{4p - 4f} \sqcap \overset{\odot}{\frac{3pa - 2fa - ga}{4p - 4f}}$, et à luy preferablement ☽. Donc joignant $\odot +$ ☽, il proviendra $\overset{\text{☿}}{\frac{3pa + ga - 4fa}{4p - 4f}}$, qui appartient à G, et à F, il n'appartient que $\overset{\text{♃}}{\frac{pa - ga}{4p - 4f}}$. Donc joignant ☿ et ♃, nous aurons $\frac{\begin{matrix} 4pa + ga - 4fa \\ - ga \end{matrix}}{4p - 4f} \sqcap a$.

Donc nous pourrons faire un theoreme: Deux joueurs estant tombés d'accord que celuy qui auroit fait le premier un certain nombre de jeux (points), (p) ameneroit la somme d'argent mise au jeu (a) et le jeu venant à estre rompu legitimement lors que celuy qui a fait le plus de points n'en a fait qu'un nombre moindre que celuy qu'on demande (p) sçavoir (g) et celuy qui en a fait le moins en a (f). Il s'agit de sçavoir comment il faut faire les partis, c'est à dire comment il faut partager la somme a, entre ces deux joueurs, au sortir de ce jeu imparfait? Je dis que la somme a, doit estre partagée

1 et *(1)* il faut à celuy qvi a *(2)* il faut *L* 7 $\frac{\text{3pa} - \text{2fa} - \text{ga}}{\text{4p} - \text{4f}}$, $\odot$ *(1)* celu *(2)* ce qvi appartient aussi à son adversaire, *(3)* et à luy *L* 7 preferablement *(1)* $\frac{\text{ga} - \text{fa}}{\text{2p} - \text{2f}}$ *(2)* ☽. donc *L* 11 jeux | (points) *erg.* |, (p) *(1)* ga *(2)* gagneroit *(3)* ameneroit *L* 12 f. lors qve *(1)* l⟨'un en⟩ a f *(2)* celuy *L* 14 f. sçavoir *(1)* combien il faut faire les partis, c'est à dire combien il faut ⟨avoir⟩ *(2)* comment *L* 16 Je dis *(1)* qve celuy qvi a fait (g) points ⟨am⟩ *(2)* qve la somme *L*

en deux: $\overset{☿}{\dfrac{3p+g-4f}{4p-4f}}\,a$, et $\overset{♃}{\dfrac{p-g}{4p-4f}}\,a$ et que la premiere ☿ doit estre donnée à celuy qui aura fait (g) points, l'autre ♃ à celuy qui n'en aura fait que (f).

Il est premierement manifeste que g et f estant egaux, ou tous deux egaux à rien, tout doit estre partagé egalement. Mais nostre calcul ne comprend pas ce cas, donc il faut qu'il y ait de la faute là dedans, dont je voys la raison à present. Je ne luy donne pas seulement preferablement sur son adversaire $\dfrac{ga-fa}{2p-2f}$, qui est $\sqcap$ à 0, lors que $g \sqcap f$ mais je luy donne encor la moitié de $\dfrac{pa-ga}{2p-2f}$. Donc il gagne en ce cas cette somme, et neantmoins il ne doit rien gagner, donc la regle est fautife, et il faut retrancher cette moitié. L'erreur est venue de ce que j'avois pris l'argent mis au jeu comme une somme dont le reste doit estre divisé, lors que celuy qui a gagné le plus de points a pris son preciput. Ce que les loix de cette societé faite pour le jeu, ne portent pas. Je n'y vois pas même de la societé; et il n'est point necessaire de considerer l'argent mis sur la table; il faut seulement considerer que celuy qui gagne le plus de points, a obligé l'autre à quelque chose, et a un droit acquis sur quelque chose, qu'il faut determiner, et quand les points sont egaux l'apparence de gagner toute est egale de part et d'autre, et l'obligation est compensée. Donc il faut dire: comme l'apparence de gagner la somme à la quelle mon adversaire s'oblige en cas de perte, est à l'apparence de revenir à l'egalité, ou à l'apparence de rien gagner, de même doit estre le gain au sortir du jeu imparfait, à ce que l'adversaire retient. Or l'apparence de gagner est à l'apparence de revenir à l'egalité en raison reciproque des points à faire. C'est à dire l'apparence de faire $p-g$ points; e[s]t à l'apparence de perdre $g-f$ points comme $\dfrac{1}{p-g}$ points à $\dfrac{1}{g-f}$ points, parce que l'apparence de les faire est d'autant moindre, que le nombre à faire est plus grand. Donc l'apparence de gagner est à l'apparence de rien gagner comme $g-f$ est à $p-g$. Donc le

2 f. fait qve (f) *(1)* Axiomes: lors qve l'apparence de gagner de l'un et de l'autre costé est commune, le droit est egal Le droit du parti, est *(a)* qve chacun *(b)* qv'un joueur *(2)* Le fondement doit estre, qve l'argent doit estre divisé en deux parties, *(3)* Le fondement *(a)* doit *(b)* est, *(4)* il est *L* 3 f. rien, *(1)* le droit *(2)* tout *L* 9 moitié. *(1)* |Et *nicht gestr.*| generalement |la *nicht gestr.*| *(2)* L'erreur *L* 10 plus de *(1)* partis a *(2)* points *L* 15 toute *erg. L* 18 estre le *(1)* parti *(2)* partis au sortir du jeu imparfait *(3)* gain *L* 20 points *(1)* faits *(2)* à faire c'est à dire *(a)* est en raison *(b)* l'apparence *L* 23 l'apparence de *(1)* revenir *(2)* rien *L*

gain doit estre au residu, comme $g - f$ à $p - g$. C'est à dire la somme que mon adversaire a mis au jeu doit estre divisé en deux parties, dont l'une est [à] l'autre comme $g - f$ à $p - g$, et mon adversaire est obligé de me donner la partie qui est comme $g - f$, le reste luy demeure. Mais j'avoue que cela a besoin d'estre demonstré rigoureusement. De plus la difficulté s'augmentera ainsi, posons que les obligations des joueurs soyent inegales; c'est à dire que l'un s'oblige à perdre plus qu'il ne sçauroit gagner. Il est manifeste qu'à lors en cas d'egalité; il n'y a point d'obligation mais en cas de gain je gagne la somme que mon adversaire a mis, quoyque plus grande que la mienne. Donc si j'ay gagné quelques points et mon adversaire aussi, il faut calculer tout de même sur la somme que mon adversaire a mis. Je ne voy pourtant pas encor la chose assez clairement, par ce que si je le voyois dans la derniere simplicité, je devois estimer combien un point gagné m'avance en nostre cas et combien un point perdu avance mon adversaire. Il faut voir si on peut expliquer la chose ainsi. Je gagne un certain nombre de points et en raison de ces points j'ay un droit acquis sur l'argent de mon adversaire; je conte comme si mon adversaire n'avoit rien gagné; car ce qu'il aura gagné sera conté apart sur mon argent; et nous pouvons faire comme si à chaque coup nous payions autant que chacun a de droit acquis sur son adversaire, et nous verrions au bout du conte, le quel auroit gagné. Je gagne dont g points, il me restent à gagner $p - g$ points, l'apparence de les gagner est en raison reciproque des points à gagner car la difficulté croist avec le nombre, dont la facilité décroist avec le nombre (+ il faut pourtant demonstrer cecy rigoureusement +). rigoureusement +). Mais

2 estre *(1)* à la somme *(2)* divisé *L* 5 posons qve *(1)* l'un s'oblige *(2)* les obligations *L* 6 f. manifeste qv' *(1)* en ce cas tout révenant à rien *(2)* à lors ... d'egalite; *(a)* chacun reprend *(b)* il n'y a *L* 13 de | ses *ändert Hrsg.* | points *L* 14 f. conte *(1)* si mon adversaire n'avoit rien gagné; car si *(2)* comme *L* 20 rigoureusement +). *(1)* donc l'apparence de gagner est a g *(2)* ⟨–⟩ *(3)* Au contraire *(4)* Mais *L*

2 divisé: Die hier aufgestellte Teilungsregel für einen Spielstand von $g : f$ im Augenblick des Abbruchs lässt sich auch mit der Formel $(p+g-2f) : (p-g)$ wiedergeben. Diese erste Leibniz'sche Teilungsregel erfüllt die drei genannten Mindestanforderungen an eine „faire“ Aufteilung. 15 conté apart: Die folgenden Überlegungen betrachten die von einem Spieler gewonnene Anzahl an Runden separat und unabhängig von der Anzahl an Runden, die sein Gegner gewonnen hat. Leibniz erwägt dabei verschiedene Vorschriften, dieser Anzahl jeweils einen Anteil des Gewinns zuzuordnen. Schreibt man die Gewinnanteile hintereinander auf, bilden sie, je nach Vorschrift, eine umgedrehte harmonische Folge, eine arithmetische oder eine geometrische Reihe. Allerdings erfüllen Teilungsregeln, die auf einer solchen Getrenntbetrachtung basieren, die zweite Mindestbedingung nicht, da sie dem Verlierer des gesamten Spiels regelmäßig einen Teil des Einsatzes seines Gegners zusprechen.

cela ne me dit pas encor combien j'auray. Car il faut deux termes pour faire cette raison reciproque, et d'où prendrons nous l'autre terme; si j'avois gagné $g+1$ points il reste $p-g-1$; l'apparence de gagner tout au premier cas, est à l'apparence de gagner tout au second cas comme $\dfrac{1}{p-g}$ est à $\dfrac{1}{p-g-1}$, ou comme $p-g-1$ à $p-g$. Et enfin si j'avois gagné tous les points quasi comme si le nombre des points gagnez estoit $g+\beta$, et la difference entre p et $g+\beta$ quasi nulle, l'apparence de gagner tout en cas des points g gagnez est à l'apparence de gagner tout, ou d'amener mon argent, en cas des points $g+\beta$ gagnez, comme $p-g$ est à $p-g-\beta$; c'est à dire si $p-g-\beta \sqcap 0$, l'apparence de gagner en cas de tous les points gagnez, sera à l'apparence de gagner tout en cas de quelques points gagnez, comme quelque chose à rien, ce qu⟨i⟩ est inepte. C'est pourquoy il y a encor du manquement la dedans, et comme la chose est tres considerable, il est important de l'examiner à fonds.

11 *Am unteren Seitenrand:* Voyez 7 Janvier 1676 partie II[de]

1 j'auray. *(1)* Car l'apparence de gagner p − g est *(2)* Car *L* 2 f. il reste p − g − 1 *erg. L* 4 comme *(1)* $\dfrac{1}{\mathrm{p-g-1}}$ est à $\dfrac{1}{\mathrm{p+1}}$ *(2)* $\dfrac{1}{\mathrm{p-g}}$ *L* 5 comme si *(1)* p − g − 1 *(2)* le nombre *L* 6 tout *erg. L* 8 p − g − β; *(1)* donc *(2)* c'est … $\sqcap$ 0. *(a)* comme *(b)* l'apparence *L*

25,**19** difficulté: Bei *facilité* und *difficulté* handelt es sich um zwei weitere Schlüsselbegriffe des Stückes. Leibniz definiert sie jedoch nicht explizit, sondern arbeitet mit einem impliziten Verständnis, das er für evident hält. Diesem zufolge verhält sich die *difficulté*, r Runden zu gewinnen, zu der *difficulté*, s Runden zu gewinnen, wie $r:s$, und das Verhältnis der entsprechenden *facilités* zueinander beträgt $\frac{1}{r}:\frac{1}{s}$ bzw. $s:r$ (vgl. Z. 2–4, S. 30 Z. 9 f. u. S. 38 Z. 14 f.). In S. 27 Z. 10 führt Leibniz zudem den Begriff *des-apparence* als Synonym für *difficulté* ein, und in S. 30 Z. 9 f. gebraucht Leibniz *facilité* und *apparence* als Synonyme. Meist verwendet er *apparence* im vorliegenden Stück aber im oben genannten, weiter gefassten Sinn. 4 $p-g-1$ à $p-g$: Diese Aussage ergibt sich aus dem Konzept der *facilité*. Das Verhältnis zweier Wahrscheinlichkeiten zueinander wird durch sie im Allgemeinen jedoch nicht zutreffend beschrieben. Notiert man die *facilités* hintereinander, erhält man eine Reihe, die einer umgedrehten harmonischen Folge sehr ähnelt. Die Glieder dieser Reihe geben die relativen Gewinnanteile, die dem Spieler im Abhängigkeit vom Punktestand zugesprochen werden, wieder. Der Sieg in einer Runde führt hierbei zu einem jeweils größeren Zuwachs als ein Sieg in der vorangehenden Runde. Allerdings wird dem Spieler bereits ein Gewinnanteil zugesprochen, bevor er überhaupt eine Runde gewonnen hat (vgl. auch S. 30 Z. 14–16). Problematisch ist zudem, wie Leibniz im folgenden bemängelt, die Zuteilung für den Fall $g=p$.

7 Janvier 1676.

P a r t i e I I[de]

Il ne faut donc pas dire que les apparences de gagner sont en raison reciproque des points qui restent à gagner pour amener l'argent, car si cela estoit, l'apparence de gagner, et par consequent le droit acquis sur l'argent de mon adversaire lors que j'ay tous les points qu'il faut, seroit à l'apparence de gagner, lors que j'ay tous les points horsmis 3, comme 3 à 0. Et par consequent celuy qui a tous les points prenant tout ce que son adversaire a mis au jeu, celuy qui auroit tous les points horsmis 3, n'obtiendroit rien. Donc il ne faut pas faire les apparences en raisons reciproques des points à faire. Mais plustost les des-apparences ou les difficultez, en raisons directes des points qui restent à faire. Et les des-apparences sont proportionelles à ce qui reste de droit à mon adversaire, sur son argent. Et les points qu'il a à faire, sont la des-apparence qu'il y a qu'il conserve son argent, et par consequent elles sont proportionelles au droit qu'il a perdu. Donc: ayant gagné (g) points, et ayant à gagner $p-g$ points, il ne faut que dire que l'argent de mon adversaire doit estre partagé en 2 parties dont l'une est à l'autre comme g à $p-g$, et la partie comme g m'appartiendra. Jusques icy j'ay supposé que mon adversaire n'ait rien gagné. Ainsi supposons que j'aye gagnez g points et que j'en doive gagner $5p$ pour

9 il | ne *erg. Hrsg.* | faut *(1)* dire qve *(2)* pas faire *L* 11 proportionelles *(1)* aux *(2)* non pas au *(3)* à ce qvi *L* 12 argent. *(1)* Dont ayant fait (g) points *(2)* Et les *L* 14 gagné *(1)* p *(2)* (g) points *L* 17–28,4 gagné. *(1)* Apresent contons ce qv *(2)* Ainsi ... gagnez | 3 *ändert Hrsg.* | points et qve j'en *(a)* faille *(b)* doiuue ... du party *(aa)* gagnant le *(bb)* et qv'il ait mis *(aaa)* 5 *(bbb)* 10a, je gagne *(aaaa)* 3g, donc son argent doit estre divisé en 2 parties 3g. et *(aaaaa)* 5g *(bbbbb)* 5p − 3g *(aaaaaa)* et j'aurois $\frac{3\text{ga}}{5\text{p}-3\text{g}}$. et il luy resteront *(bbbbbb)* Sçavoir a $\sqcap$ $\frac{3\text{ga}+5\text{p}-3\text{ga}}{5\text{p}}$ *(bbbb)* 1g, donc ... Sçavoir *(aaaaa)* a $\sqcap$ $\frac{1\text{ga}+5\text{pa}-1\text{ga}}{5\text{p}}$, et j'auray $\frac{1\text{ga}}{5\text{p}}$. il luy resteront $\frac{5\text{pa}-1\text{ga}}{5\text{p}}$ *(bbbbb)* 10a $\sqcap$ $\frac{1\text{g}10\text{a}+5\text{p}\,|\,10\ \textit{erg. Hrsg.}\,|\,\text{a}-1\text{g}10\text{a}}{5\text{p}}$ *L*

2 P a r t i e : Die Gliederung des Stückes in drei Teile ist nicht inhaltlich, sondern durch die Papierträger begründet. Jeder Teil entspricht dem auf einem der drei Träger niedergeschriebenen Text. Tatsächlich endet der erste Teil mitten im Satz nach „comme la chose est tres considerable“ und der zweite beginnt mit „il est important“; der besseren Lesbarkeit halber wird hier der gesamte Satz im ersten Teil wiedergegeben. 4 restent: Wendet man den hier verworfenen Ansatz, zwei *facilités* zueinander ins Verhältnis zu setzen, nicht auf die Gewinnanteile des einen Spielers, sondern auf den Spielstand $g:f$ an, so erhält man eine besonders einfache und alle Mindestbedingungen erfüllende Teilungsregel, nämlich die Teilung im Verhältnis von $(p-f):(p-g)$. (Vgl. auch S. 37, Anm. zu Fig. 4.)

amener tout, mais que nous convenions, de nous payer à chaque coup à proportion du party et qu'il ait mis $10a$, je gagne $1g$, donc son argent doit estre divisé en 2 parties $1g$, et $5p - 1g$. Sçavoir $10a \sqcap \frac{1g\,10a + 5p\,10a - 1g\,10a}{5p}$, et j'auray $\frac{1g\,10a}{5p}$, il luy resteront $\frac{5p\,10a - 1g\,10a}{5p}$. Je gagne encor $1g$, donc c'est comme si nous recommencions et s'il n'avoit mis au jeu que $\frac{5p\,10a - 1g\,10a}{5p} \sqcap R$, qui luy restent, donc au lieu de $\frac{1g\,10a}{5p}$ que j'avois gagné auparavant, je gagneray $\frac{1gR}{5p}$. C'est à dire je gagneray $\frac{1g\,5p\,10a - 1g^2\,10a}{25p^2}$ au deuxieme coup et la somme des deux coups gagnez sera:

$$\frac{25p^2\,10a\ \boxed{-5p\,1g\,10a + 1g\,5p\,10a}\ - 1g^2\,10a}{25p^2}$$

Donc si je ne m'estois pas fait payer au premier coup, et si j'avois attendu jusqu'au 2[me], et si alors le jeu avoit esté rompu, il faudroit que j'eusse gagné la meme somme, que

---

7 *Zwischen die Zeilen gesetzte Anmerkung:* (Erreur: on ne peut pas comme cela conter sur les restes, voyez la 3[me] partie.)

4 donc *(1)* ⟨en⟩ *(2)* je gagneray *(3)* c'est *L* 5 $\sqcap$ R. *erg. L*

11,17 $5p$: Lies „im Beispiel 5, im Allgemeinen p". $10a$ oder $1g$ sind entsprechend zu interpretieren. 6 $\frac{1gR}{5p}$: Da der Spieler nach g gewonnenen Runden nur noch $(5p - g)$ weitere gewinnen muss, um den Gesamtsieg zu erringen, stünde ihm beim Gewinn weiterer g Runden folgerichtig ein zusätzlicher Anteil von $\frac{1gR}{5p - g}$ zu. Dies entspricht eben $\frac{1g\,10a}{5p}$; der hier verfolgte Ansatz, welcher jede gewonnene Runde mit einem gleichen Teil des Gewinns belohnt, wird also im folgenden mit einem untauglichen Argument verworfen. In der bereits in Hannover verfassten Schrift *De incerti aestimatione* kehrt Leibniz im September 1678 zu diesem Ansatz einer arithmetischen Reihe zurück (vgl. VI, 4 N. 34, S. 101 Z. 10 bis 12). 8 $\frac{25p^2\,10a\ \boxed{-5p\,1g\,10a + 1g\,5p\,10a}\ - 1g^2\,10a}{25p^2}$: Das Ergebnis der Addition lautet konsequent gerechnet $\frac{2g\,5p\,10a - 1g^2\,10a}{25p^2}$. Der Fehler fällt nicht mehr ins Gewicht.

je gagne en me faisant payer chaque deux coups. Voila une belle preuve de ces sortes de raisonnemens mais selon nostre regle, j'aurois gagné $\dfrac{2g\,10a}{5p}$, ce qui est bien different de $\dfrac{25p^2\,10a - 1g^2\,10a}{25p^2}$. C'est pourquoy pour venir à bout d'une question aussi difficile que cellecy; je vois qu'il faut proceder tout autrement. Et tous ces sauts aux proportionalitez ne sont que des sophismes, qui nous doivent estre suspects. Et je vois par là qu'Euclide a eu raison de demonstrer rigoureusement les theoremes des triangles semblables et choses semblables. Voila la veritable methode, à ce que je crois.

Le nombre des points qu'il faut gagner est p. L'argent que mon adversaire a mis au jeu est a. Supposons que je ne mette rien de mon costé car cela peut arriver; et mon adversaire peut conter le plaisir qu'il a de jouer contre moy, pour quelque chose. Quoyqu'il y ait de la difficulté, car c'est alors plustost un prix proposé, s'il faut que je gagne dans un temps prefix et s'il n'y a point de temps, c'est un salaire, car humainement parlant je ne manqueray jamais de gagner que si nous mettons de deux costez, on peut concevoir l'un comme salarié de l'autre; et le salaire cessera lors que l'un de deux aura fait un certain nombre: mais cela n'est pas dans notre cas; donc cette supposition ne servira de rien.

Je reviens tousjours à cela, qu'ayant gagné 1 coup, ou 1 point, j'ay gagné quelque chose. Appellons cela l (*lucrum*). Mon adversaire a mis a sur la table, je gagne de son argent l le premier coup, donc il reste $a - l$, l'argent qui est sur la table que nous appellerons (a), donc le second coup je gagneray (l) qui seroit à l comme $(a) \sqcap a - l$ est à a. C'est à dire $(l) \sqcap \dfrac{al - l^2}{a}$. Et ainsi autant de fois qu'il y a des unitez en p, et la

6 demonstrer *(1)* Geometriq *(2)* rigoureusement les *(a)* proportions *(b)* les *(c)* theoremes *L* 18 l. (lucrum.). *(1)* Donc l'argent gagné *(2)* Mon adversaire *L* 19 a − l. *(1)* pour le second *(2)* je gagne le second coup *(3)* l'argent *L* 20 appellerons *(1)* l *(2)* a *(3)* (a) donc … gagneray | (L) *ändert Hrsg.* | qvi seroit à | L *ändert Hrsg.* | comme *L* 21 c'est a dire *(1)* L $\sqcap$ a^2 − al *(2)* (l) $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{al} - \mathrm{l}^2}{\mathrm{a}}$ *L*

6 demonstrer: Vgl. EUKLEIDES, *Elementa*, VI.

somme de tous les l, (l) doit estre egale à a, ou $a \sqcap l + (l) + ((l))$ etc. Mais cela suppose une chose dont je ne suis pas bien seur, sçavoir que je gagne autant à proportion par le second coup sur l'argent qui reste apres celuy j'ay emporté par le premier coup; que j'ay gagné au premier coup sur tout l'argent de mon adversaire, ce qui n'est pas. Mais voila ce qu'on peut dire: j'ay emporté une certaine partie de l'argent de mon adversaire le premier coup: par exemple l. Il reste donc $a - l$. Donc apres cela, c'est comme si mon adversaire avoit mis sur la table $a - l$, à gagner en 4 points. Supposons que je ne mette rien, et que mon adversaire mette de l'argent a, à gagner en 5 points consecutifs; or je suppose que la facilité de gagner en 5 points consecutifs, est à l'apparence de gagner en 4 points consecutifs en raison reciproque du nombre des points. Ce principe estant posé, nous calculerons le party en cas qu'on laisse le jeu imparfait: Le nombre des points à gagner est p, l'argent mis est a. Je gagne un coup, ou 1 point, et je gagne par là quelque chose que nous appellerons l. Donc il reste $a - l$: à gagner en $p - 1$ points. Il faut considerer icy une chose estrange, qui est, que cette condition estant accordée, il m'appartient quelque chose si un cas survenant m'empechoit de commencer même à jouer; car j'ay tousjours un droit acquis et il est possible que je gagne. Et il est assez difficile d'estimer la probabilité qu'il y a que je gagne 5 fois consecutifes à la probabilité

1 somme *(1)* | de *nicht gestr.* | tous, doit estre êgale à a. *(2)* de tous les l. | (l) *erg.* | doit *L* 2 à proportion *erg. L* 5 emporté *(1)* un certain argent *(2)* une certaine *L* 9 qve la *(1)* difficulté *(2)* facilité *L* 11 imparfait: *(1)* Ayant gagné 1 point il est asseuré *(2)* Le nombre *L* 17 qve je *(1)* trouue *(2)* gagne *L*

1 $a \sqcap l + (l) + ((l))$: Leibniz legt hier den jeweils erreichten Gewinnanteil über eine geometrische Reihe fest. Der Sieg in einer Runde führt dabei zu einem jeweils kleineren Zuwachs als ein Sieg in der vorangehenden Runde. Allerdings konvergiert die von ihm definierte Reihe — unabhängig davon, wie groß der Anteil l von a gewählt wird — gegen a. Damit ist jede ihrer Partialsummen kleiner als a. Eine Teilungsregel, die auf dieser Reihe basiert, kann also die zweite der Mindestbedingungen (dass der Gesamtsieger den gesamten Gewinn erhält) niemals exakt erfüllen. 17 probabilité: Auch die *probabilité* wird in diesem Stück als Größe angesehen, die nicht absolut zu betrachten ist, sondern ihre Bedeutung als Teil eines Zahlenverhältnisses erhält. Zwar hat Leibniz bereits 1665 in seiner *Disputatio de conditionibus posterior* (in einem rechtstheoretischen Zusammenhang also) eine Vorform eines genormten Wahrscheinlichkeitsmaßes entwickelt: Der *conditio impossibilis* ordnet er dort die 0 zu, der *conditio necessaria* die 1 und der *conditio incerta* einen Bruch zwischen 0 und 1 (vgl. VI, 1 N. 6 S. 139; ganz ähnlich auch in den *Specimina juris* von 1667–69, ebd., N. 11 S. 420). Hier knüpft er an diesen Gedanken jedoch nicht an. 17 5 fois consecutifes: Das im Anschluss behandelte Beispiel verlangt nur vier in Folge zu gewinnende Runden. Es ist als Zusatzspiel im Rahmen des eigentlichen Spiels konzipiert. Eine vergleichbare Anforderung besteht aber auch etwa bei einem 0 : 3-Rückstand und vier Gewinnrunden.

qu'il y a que je perde une seule fois. Au premier jeu il est aussi probable que je perde que, que je gagne, donc une probabilité pour mon adversaire, l'autre est encor incertaine, car ayant gagné, il est encor aussi probable que je perde le second jeu, qu'il n'est probable que je le gagne; donc encor 1 degrez de probabilité asseuré pour mon adversaire, l'autre controversé entre luy et moy, car ayant gagné le second jeu, je peux encor ou perdre le troisieme, ce qui est asseuré pour mon adversaire, ou le gagner, ce qui est controversé entre moy et l'adversaire, et ainsi tousjours, jusqu'au dernier qui m'asseure de la victoire, $D \sqcap 0 \infty 1$.

$$A\begin{cases}0\\ B\begin{cases}0\\ C\begin{cases}0\\ D\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

[*Fig. 1*]

∞ *est signum disjunctivi, aut, quo nondum in calculo usi sumus.* $C \sqcap 0 \infty D \sqcap 0 \infty 0 \infty 1 \sqcap 2\,\overline{0} \infty 1$. $B \sqcap 0 \infty C \sqcap 0 \infty 2\,\overline{0} \infty 1 \sqcap 3\,\overline{0} \infty 1$. Et $A \sqcap 4\,\overline{0} \infty 1$.

2 gagne, *(1)* dont *(2)* donc ayant gagné, *(3)* donc *L* 2 l'autre *(1)* pour moy *(2)* est encor *L* 3 qve je *(1)* gagne le second jeu, *(a)* qve *(b)* qv'il n'est probable qve je perde; *(2)* perde *L* 4 f. encor 1 | degrez ... asseuré *erg.* | pour ... , l'autre *(1)* pour moy *(2)* controversé *L* 5–7 jeu, | il peut *ändert Hrsg.* | encor ... pour | son *ändert Hrsg.* | adversaire, ... entre | luy *ändert Hrsg.* | et ... qvi | l' *ändert Hrsg.* | asseure *L* 7 f. victoire, *(1)* C $\sqcap$ *(a)* $0 - 1$. *(b)* $0 \infty 1$ ∞ est signum disjunctivi | , aut *erg.* | , qvo nondum in calculo usi sumus. B $\sqcap 0 \infty$ C $\sqcap 0 \infty 0 \infty 1 \sqcap 2\,\overline{0} \infty 1$. A *(2)* D $\sqcap 0 \infty 1$ *L*

10 *Fig. 1:* *(1)* $\mathrm{A}\begin{cases}0\\ \mathrm{B}\begin{cases}0\\ \mathrm{C}\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}$ *(2)* $\mathrm{A}\begin{cases}0\\ \mathrm{B}\begin{cases}0\\ \mathrm{C}\begin{cases}0\\ \mathrm{D}\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$ *L*

10 Fig. 1: In diesem Schema lässt sich jede geschweifte Klammer als einzelne Spielrunde betrachten, *A* stellt den Spielstand zu Beginn des Zusatzspiels dar (vgl. S. 35 Z. 3), *B*, *C* und *D* sind Zwischenstände, bei denen es fortgesetzt wird, und 0 und 1 sind die möglichen Endresultate. Dabei bedeutet 1, dass der Spieler eine Serie von vier Runden in Folge gewonnen hat, 0 dagegen, dass ihm dies nicht geglückt ist. Ein fast identisches Zerlegungsschema findet sich als fragmentarische Notiz in dem ebenfalls im Januar 1676 verfassten Stück *De numero jactuum in tesseris* (N. 10 S. 59 Z. 16 f).

Donc $4p$ points estant proposez à estre gagnez consecutivement, l'apparence de les gagner à celle de ne pas gagner au commencement du jeu, est comme 1 est à $4p$. Ainsi

2 à celle … gagner *erg. L* 2 comme *(1)* 4p est à 1. *(2)* 1. est à 4p. *(a)* Rappeler *(b)* ainsi *L*

31,11 signum disjunctivi: Leibniz verfolgt das Programm, nach den Regeln einer *ars characteristica* universell einsetzbare Zeichen zu bilden. Das neu geschaffene Symbol ∞ steht jedoch nicht allgemein für *aut* (… *aut*), also exklusives „oder" (wofür die moderne Logik verschiedene Symbole kennt, etwa $\veebar$ oder $\oplus$), sondern es hat eine engere Bedeutung: Es stellt die einander ausschließenden Ausgänge einer Spielrunde nebeneinander. Dabei stehen links wie rechts des Symbols jeweils als gleichwahrscheinlich betrachtete Möglichkeiten; seine symmetrische Gestalt versinnbildlicht dieses Gleichgewicht. Das Symbol ∞ kann in eine Reihe mit den *signa ambigua* gestellt werden, wie sie Leibniz Mitte 1674 in seinen Schriften zur *méthode de l'universalité* (VII, 7 N. 10 u. 11) definiert. Auch bei diesen gibt es exklusive Fallunterscheidungen, die sich weiter aufzweigen. So steht etwa das Symbol ⍭ für die Aussage „im einen Fall $+$, im anderen Fall entweder $-$ oder $+$" (vgl. VII, 7 N. 11 S. 124). Noch zwei Jahrzehnte später nennt Leibniz *notae ambiguitatis* und *notae disjunctivorum* im selben Atemzug (vgl. Leibniz an Wernher, 6./16. Oktober 1697; III, 7 N. 148 S. 598). **31,11** $C \sqcap 0 \infty D$: In den zum Schema aufgestellten Gleichungen haben die Größen A bis D andere Bedeutungen als im Schema selbst. Sie stehen nicht mehr für einen Spielstand, sondern für die Gesamtheit der als gleichwahrscheinlich vorausgesetzten Ausgänge, die sich aus diesem Spielstand ergeben können. Sie geben somit eine Art Erwartungswert an. Die Kurzschreibweise $C = 2\,\overline{0} \infty 1$ für $C = 0 \infty 0 \infty 1$ behandelt die Gleichung, als ob sie äquivalent zu $C = (0 \infty 0) \infty 1$ wäre; tatsächlich steht sie aber für $C = 0 \infty (0 \infty 1)$, was aufgrund der fehlenden Assoziativität der durch ∞ begründeten Verknüpfung nicht das Gleiche ist. In der Folge zählt die Kurzschreibweise nur die ungünstigen Endresultate und stellt sie dem einen günstigen Endresultat gegenüber. Bei der Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten führt sie in die Irre (vgl. Z. 2), da sie nicht zwischen den einzelnen ungünstigen Endresultaten, die jeweils unterschiedlich wahrscheinlich sind, differenziert. 1 $4p$: Lies „im Beispiel 4, im Allgemeinen p". 2 1 est à $4p$: Leibniz übersetzt die Gleichung $A = 4\,\overline{0} \infty 1$ in die unzutreffende Aussage, dass vom Spielstand A ausgehend das Endresultat 0 (Misserfolg) viermal so häufig auftrete wie das Endresultat 1 (Erfolg). Noch im selben Monat gelangt er an anderer Stelle aber zu einem korrekten Ergebnis: Unter dem Zerlegungsschema in N. 10 (S. 59 Z. 17) notiert er die Gleichungen $D = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{8}$ und $A = \frac{1}{16}$ (in jenem Schema sind B und C vertauscht). Die Größen A bis D erhalten dabei erneut eine andere Bedeutung; sie lassen sich als Erwartungswert des Zusatzspiels interpretieren, wenn der mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Spielstand erreicht worden ist. Der Erwartungswert (*valor expectationis*, eingeführt von Chr. Huygens, *a. a. O.*, 1657, S. 521 f.) ist ein Konzept, mit welchem Leibniz auch zweieinhalb Jahre später in *De incerti aestimatione* arbeitet. Dort berechnet er ihn für den Spielstand 1 : 0 und zwei Gewinnrunden über den Ansatz $\frac{\frac{1}{2}+1}{2}$ (vgl. VI, 4 N. 34 S. 100 Z. 4–6). Die Gleichungen in N. 10 lassen sich leicht auf analogem Wege aus den oben aufgestellten Gleichungen erhalten, indem man die Notation $D = 0 \infty 1$ in $D = \frac{0+1}{2}$ umschreibt, dann $C = 0 \infty D$ in $C = \frac{0+\frac{1}{2}}{2}$ überführt und entsprechend fortfährt.

celuy qui joue, a au commencement $\frac{1}{p}$ de la somme proposée. Le Reste est au jeu, c'est à dire, commun aux deux joueurs, s'il[s] les ont mis tous deux; ou à celuy qui a mis cet argent: celuy qui a gagné 1 point consecutif a $\frac{1}{p-1}$ de la somme proposée, celuy qui a 2 points consecutifs, a $\frac{1}{p-2}$ de la somme proposée. Donc la question se peut concevoir ainsi: deux joueurs mettent chacun une somme egale au jeu, à condition, que celuy qui gagnera un certain nombre de coups consecutifs, par exemple 4, gagnera tout. Par exemple jouant triomphe, ils demeurent d'accord apart, que celuy qui pendant le jeu principal gagnera le premier quatre fois consecutives, tirera outre ce qu'il gagne au jeu principal, une certaine somme qu'ils ont mise pour cet effect. Il s'agit de sçavoir le party qu'il faut faire de cette somme, lors que [le] jeu cesse, selon le nombre des points que celuy qui a gagné le dernier a gagné. Cette condition a cela de remarquable qu'on ne sçauroit finir que l'un de deux n'emporte quelque chose de la somme. Car celuy qui a gagné le dernier a détruit tout ce que l'autre a fait. Et ainsi, n'ayant qu'un point pour le moins

3 argent: *(1)* aux deuxiême coup *(2)* celuy qvi a gagne *(a)* deux points consecutifs *(b)* 1 point *L* 6 exemple 4. *(1)* amenera *(2)* gagnera *L* 7 f. celuy qvi *(1)* aura le premier *(a)* 5 *(b)* 4 *(2)* pendant le jeu principal *(a)* aura le premier *(b)* gagnera *L* 8 f. outre ... principal *erg. L* 9 sçavoir *(1)* si *(2)* combien *(3)* le party *L* 11 dernier a *(1)* amené *(2)* gagné *L* 12 finir *(1)* (dans les jeux ou pas un ne peut passer *(2)* qve l'un *L*

---

4 consecutifs: Die hier beschriebene Zuteilung der Gewinnanteile folgt unmittelbar aus der unzutreffenden Annahme, die Häufigkeit eines Misserfolgs sei, wenn p Siege in Folge gefordert sind, p-mal so hoch wie die eines Erfolges. Konsequent betrachtet müsste der Spieler allerdings mit einem Anteil von $\frac{1}{p+1}$ (und nicht von $\frac{1}{p}$) starten. Die Gewinnanteile im Zusatzspiel entsprechen dann den Gliedern einer umgedrehten harmonischen Folge. Die Frage nach dem „fairen" Einsatz für ein solches Spiel — die Leitfrage von N. 10; vgl. S. 71 Z. 1–4 — greift Leibniz an dieser Stelle nicht auf, obwohl sein Ergebnis eine Antwort impliziert. 7 triomphe: Dieses einfache, in zeitgenössischem Deutsch als „Trumpffspiel" bezeichnete Kartenspiel ist zu jener Zeit in Frankreich populär; die Zahl der Spieler ist variabel (vgl. La Marinière, *La maison des jeux académiques*, 1665, S. 43–45). Es existiert auch eine Variante für genau zwei Spieler (vgl. ebd., S. 46). 8 quatre fois consecutives: Durch die geänderten Bedingungen des Zusatzspiels — es ist nun symmetrisch angelegt, wird bei Misserfolg fortgesetzt und als Endresultat ist auch ein Unentschieden möglich — wird ein ganz neues Problem gestellt. Die geänderten Bedingungen und insbesondere der zusätzlich zu berücksichtigende Parameter machen die Berechnung der Gewinnchancen deutlich aufwändiger.

lors que le jeu cesse, il luy appartiendra à proportion. Question: deux joueurs mettent ensemble une somme egale, qui sera à celuy qui aura gagné quatre fois consecutives au jeu principal. Il s'agit de sçavoir combien de la somme appartiendra à celuy qui aura gagné le dernier un certain nombre de coups consecutifs, lors qu'on se separe sans avoir achevé le nombre qui luy faut.

$$
A\left\{\begin{array}{l}
b\left\{\begin{array}{l}
(b)\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{array}{l} b\\ c\end{array}\right. \\ c\left\{\begin{array}{l} b\\ c\end{array}\right.\end{array}\right. \\
(c)\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{array}{l} b\\ c\end{array}\right. \\ c\left\{\begin{array}{l} b\\ c\end{array}\right.\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
c\left\{\begin{array}{l}
b\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{array}{l} b\\ c\end{array}\right. \\ c\left\{\begin{array}{l} b\\ c\end{array}\right.\end{array}\right. \\
c\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{array}{l} b\\ c\end{array}\right. \\ c\left\{\begin{array}{l} b\\ c\end{array}\right.\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\qquad\qquad
A\left\{\begin{array}{l}
B\left\{\begin{array}{l} D\left\{\begin{array}{l} H\\ L\end{array}\right. \\ E\left\{\begin{array}{l} M\\ N\end{array}\right.\end{array}\right. \\
C\left\{\begin{array}{l} F\left\{\begin{array}{l} O\\ P\end{array}\right. \\ G\left\{\begin{array}{l} Q\\ R\end{array}\right.\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

[*Fig. 2*]

1 f. proportion. *(1)* Lors qve la condition *(2)* qvestion deux joueurs mettent *(a)* une somme *(b)* ensemble ... egale, *(aa)* pendant *(bb)* qvi *L* 2 fois | consecutifs *ändert Hrsg.* | *(1)* dans le jeu *(2)* au jeu *L* 3 combien *(1)* aura gagné celuy *(2)* de la somme *L* 4 le dernier *erg.* *L* 5 nombre *(1)* qv'il faut *(2)* qvi *L*

---

4 le dernier: Man betrachte als Beispiel ein Spiel, in welchem für das Hauptspiel sechs Gewinnrunden vereinbart worden sind und für das Zusatzspiel vier Gewinnrunden in Folge. Wird das Hauptspiel nun beim Stand von 2 : 2 abgebrochen, wobei der eine Spieler die beiden letzten Runden gewonnen hat, so würde die in Z. 1 angeregte Teilung *à proportion* nahelegen, dass der Einsatz im Verhältnis 3 : 1 zu seinen Gunsten zu teilen wäre. Tatsächlich beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Sieges dieses Spielers im Zusatzspiel jedoch $\frac{39}{128}$ und die seines Gegners $\frac{12}{128}$; eine „faire" Aufteilung müsste also im Verhältnis 155 : 101 erfolgen. 7 Fig. 2: Mit diesem Schema, das einem modernen Baumdiagramm sehr ähnlich ist, nimmt Leibniz nun auch die weiteren möglichen Spielverläufe in den Blick. *A* lässt sich auch als jener Spielstand interpretieren, bei dem ein Spiel, in welchem maximal noch vier bzw. drei Runden zu spielen sind, abgebrochen werden muss.

S'ils la mettent de sorte que celuy qui gagne le premier quatre fois; la peut prendre; alors, on peut faire de même: Car en 2 fois autant de jeux, qu'il y a de points demandés; l'un des deux doit gagner: A est l'estat au quel on commence le jeu. Puisque le nombre des jeux necessaires à chacun est p, le nombre des jeux qui doivent determiner la chose est $2p$. Et chaque jeu est $b \infty c$, *id est* favorable à la personne b ou à la personne c, egalement. Il y aura donc: $2p\,\overline{b \infty c}$ au commencement c'est à dire $2pb \infty 2pc$. Mais (g) jeux estant gagnés par b, le nombre des jeux qui restent est $2p - g$. Le nombre des jeux qui restent à gagner à b est $p - g$. Le nombre des jeux, qu'il faut que c gagne est $p + g$. Or il peut arriver par autant de manieres differentes que b gagne, qu'il y a de com$\boxed{p-g}$naisons dans le nombre $2p - g$, considerant, qu'il peut gagner chaque jeu; car ainsi il peut autant de fois gagner ces $p - g$ jeux qui luy restent, qu'on peut prendre differentes fois le nombre de $p - g$ dans $2p - g$ choses. De même accordant à l'autre c, aussi, qu'il peut gagner chaque jeu, comme il doit gagner $\overline{p + g}$ fois pour tirer l'argent. Mais je trouve encor un paralogisme là dedans, il ne faut pas examiner combien des fois il peut gagner le nombre des jeux qui luy restent, dans le nombre des jeux qui restent à jouer; mais combien des fois il les peut gagner le premier, par exemple dans le nombre $2p - g$. Combien des fois on peut conter $p - g$ pour l'un avant qu'on ait conté $p + g$ pour l'autre. Soit le nombre des jeux qui restent à jouer $2p - g \sqcap 5$, le nombre des jeux que l'un doit gagner $p - g$, le nombre des jeux que l'autre doit gagner n'est pas $p + g$ comme j'avois dit, mais encor p, s'il n'a rien gagné, et $p - f$, s'il en a fait f.

2 alors, *(1)* il faut *(2)* on peut *L* 2 Car *(1)* ⟨en 3 fo⟩ *(2)* en *(a)* 3 *(b)* 2 fois *L* 3 f. Puisqve *(1)* cha *(2)* le nombre des *(a)* jeux est 2p. *(b)* jeux *L* 5 est 2p. *(1)* Dont il faudroit *(2)* Et *L* 6 egalement | Dans le nombre *gestr.* | , il y aura *L* 6 Mais *(1)* 1 jeu estant gagné, *(2)* (g) | jeu estant gagné *ändert Hrsg.* | | par b *erg.* | , *L* 12 De même *(1)* consider *(2)* accordant *L* 13 jeu, *(1)* neantmo *(2)* comme *L* 14 Mais je *(1)* m'a *(2)* trouue *L*

2 en 2 fois: Leibniz springt unvermittelt vom Zusatzspiel zurück zum Hauptspiel. Die Aussage trifft jedoch weder auf das eine noch das andere zu. 5 $2p$: Tatsächlich hat nach spätestens $(2p-1)$ Runden ein erster Spieler p Siege erzielt; vgl. auch S. 18 Z. 10 f. 10 com$\boxed{p-g}$naisons: Dieser Begriff bezeichnet ungeordnete Stichproben von $(p-g)$ Elementen aus einer gegebenen Grundmenge; vgl. N. 25 S. 159 Z. 21 bis S. 160 Z. 2. Hier sind also Kombinationen von $(p-g)$ aus $(2p-g)$ Elementen ohne Wiederholung, in moderner Darstellung $\binom{2p-g}{p-g}$ an der Zahl, gemeint. Mit Fig. 4 greift Leibniz diesen Ansatz wieder auf. 18 $2p - g$: Die Anzahl der bei einem Stand von $g : f$ und p Gewinnrunden maximal noch zu spielenden Runden m beträgt tatsächlich $(2p - g - f - 1)$. Leibniz richtet in der Folge in den Figuren ⊕ und 4 mehr Spalten ein als erforderlich.

$$
\begin{array}{rllllll}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\oplus\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. &
\begin{array}{l} B \\ C \\ (1) \\ (2) \\ \hline (1) \end{array} &
\begin{array}{l} b \\ c \\ b \\ c \\ \hline c \end{array} &
\begin{array}{l} b \\ c \\ \\ b \\ \hline c \end{array} &
\begin{array}{l} b \\ c \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{l} b \\ c \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{l} b\ \text{etc.} \\ c\ \text{etc.} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

[*Fig. 3*]

Supposons $p \sqcap 4$, $g \sqcap 3$, $f \sqcap 2$, le nombre des jeux à jouer 5. Le nombre des jeux à gagner par b, sera 1. Le nombre des jeux à gagner par c, sera 2. Or il faut considerer combien des fois on peut conter $1\,b$, avant que d'avoir conté $2\,c$ dans la figure $\oplus$. Et on voit, que cela ne se peut qu'en deux manieres, marquées de (1) et de (2). Mais $2\,c$ ne se peut conter qu'une seule fois, en commençant par c c, avant que d'avoir dit une fois b. Donc la possibilitez de l'un est double de la possibilité de l'autre. Et l'argent tout entier qui est au jeu sera partagé en trois parties egales, dont l'un aura $\frac{2}{3}$, l'autre $\frac{1}{3}$, sans se mettre en peine d'autre chose. Prenons un tel exemple. On a proposé une somme d'argent a, à celuy de deux joueurs seuls jouans, qui gagnera le premier 5 jeux. L'un b, en ayant déja gagné 3, et l'autre c, un seulement, il est manifeste que si b gagne 2, il aura tout; et s'il perd deux, il n'aura que la moitié de l'argent mis au jeu. Dont l'autre moitié se doit partager en deux, et l'un ayant 3, l'autre 1. Celuy qui a gagné 3, aura gagné $\frac{3}{4}$. Ce qui est un cas connu. Voyons si nous pouvons deriver cela de nostre principe. Le nombre

1 1 ... 5 *erg. L* 6 $\overline{(1)\,|\,\mathrm{b\ b}}$ *ändert Hrsg.* | *L* 8 f $\sqcap$ 2. *(1)* et il *(a)* en faut 1 point *(b)* faut 2 points à *(2)* Le nombre *L* 10 dans *(1)* les figures *(2)* la figure $\oplus$ *L* 11–13 Mais | 2. *ändert Hrsg.* | ne se ... par | b b, *ändert Hrsg.* | avant ... fois | c. *ändert Hrsg.* | donc *L* 16 joueurs seuls jouans *erg. L* 16 premier *(1)* 6 *(2)* 5 jeux *L* 17 manifeste qve *(1)* s'il *(2)* si b *(a)* perd *(b)* gagne *L* 19 f. gagné *(1)* $\frac{1}{2}$ *(2)* $\frac{3}{4}$. *(a)* Mais *(b)* Ce qvi *L*

13 double: Leibniz betrachtet hier die möglichen weiteren Spielverläufe bis zur Entscheidung — die *possibilités* —, zählt zusammen, wieviele davon mit einem Gesamtsieg des führenden Spielers enden und wieviele mit dem Sieg seines Gegenspielers, und setzt das Verhältnis dieser *possibilités* mit dem der *probabilités* gleich. Dies würde allerdings voraussetzen, dass jede *possibilité* mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt, was nicht der Fall ist. Tatsächlich sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten in diesem Beispiel die gleichen wie in jenem am Anfang des Stückes (S. 18 Z. 5), wo Leibniz sie korrekt angibt.
20 connu: Leibniz bezieht sich hier auf seine unzutreffenden Überlegungen in S. 20 Z. 9–14.

des jeux à jouer au commencement estoit 10. On en a joué 4, dont b a gagné 3, et c en a gagné 1. Il en restent donc 6 à jouer, et 2 à gagner pour b, et 4 à gagner pour c. Donc ayant accordé à l'un aussi bien qu'à l'autre de gagner egalement chaque jeu; il faut voir quelle consequence il peut tirer de cette permission.

	1	2	3	4	5	6
	b	b	b	b	b	b
	c	c	c	c	c	c
(1)	b	b				
(2)	c	b	b			
(3)	c	c	b	b		
(4)	c	c	c	b	b	
(5)	b	c	b			
(6)	c	b	c	b		
(7)	c	c	b	c	b	
(8)	b	c	c	b		
(9)	c	b	c	c	b	
(10)	b	c	c	c	b	

(1)	c	c	c	c	
(2)	b	c	c	c	c
(3)	c	b	c	c	c
(4)	c	c	b	c	c
(5)	c	c	c	b	c

[*Fig. 4*]

5 1 ... 6 *erg. L*

18 Fig. 4: Leibniz verfolgt weiterhin den Ansatz der *possibilités*. Bei höchstens m noch zu spielenden Runden und einem Stand von $g : f$ enden $\binom{m}{p-g}$ Spielverläufe mit einem Gesamtsieg des in Führung liegenden Spielers und $\binom{m}{p-f}$ mit seiner Niederlage. Die Aufteilung soll nun im Verhältnis dieser Zahlen erfolgen, wobei Leibniz allerdings keine Formel zu ihrer Berechnung angibt. Gekürzt ergibt sich eine Teilung im Verhältnis von $(p - f) : (p - g)$. Leibniz gelangt hier also auf dem Umweg über kombinatorische Erwägungen — und ohne sich dessen gewahr zu werden — zu einer der einfachsten und nächstliegenden Teilungsregeln. Diese Regel erfüllt die genannten Mindestanforderungen; da sie unterschiedlich wahrscheinliche Spielverläufe gleich gewichtet, erfolgt die Aufteilung allerdings im Allgemeinen nicht im Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten der beiden Spieler zueinander. Dies leistet dagegen die kanonisch gewordene Lösung von Pascal und von Fermat aus dem Jahr 1654. Fermats Ansatz dabei liegt nur einen Schritt von jenem, den Leibniz hier verfolgt, entfernt: Er ergänzt ein Schema wie das obige so, dass es sämtliche Spielverläufe, die in der maximal noch zu spielenden Anzahl an Runden möglich sind, wiedergibt (gleichgültig, ob diese Runden tatsächlich alle gespielt werden müssen, um den Sieger zu ermitteln). Diese Spielverläufe betrachtet er dabei als jeweils gleichwahrscheinlich, und er zählt zusammen, in wie vielen davon der Führende den Gesamtsieg erringen würde und in wie vielen sein Gegenspieler. Die Teilung erfolgt im Verhältnis dieser Zahlen (vgl. P. de FERMAT, *a. a. O.*, S. 184).

Donnons à la personne *b* le pouvoir de gagner toutes les fois qu'il veut; il ne peut gagner qu'en 10 manieres selon les loix et circomstances du jeu: donnons à l'autre le même pouvoir sur la fortune, il ne peut gagner qu'en 5 manieres differentes: dont ostant à tous deux ce pouvoir, et les remettant dans l'estat des hommes ordinaires, les apparences de gagner, seront comme les possibilitez, et les possibilitez comme le nombre de plusieurs cas egalement possibles. Voila icy l'objection car on peut dire les differens cas ne sont pas egalement possibles. Je reponds qu'ouy, par ce qu'il y a dans l'un autant de requisits que l'autre, car dans tous les dix cas favorables à *b*, on ne demande que deux fois le gain de *b*, et dans tous les cas favorables à *c* on ne demande que quatre fois le gain de *c*. Mais je voy par là que mon opinion avoit besoin de correction, et que un cas favorable à *b*, est bien plus possible qu'un cas favorable à *c*, par ce qu'il faut quatre succes à un cas de *c*, et il n'en faut que 2 à un succes favorable à *b*. Donc les facilitez estant en raison reciproque des nombres, et 10 estant double de 5, et 4 double de 2, l'avantage de *b* sera à l'avantage de *c*, comme 4 à 1. Il est manifeste de soy meme qu'il est plus aisé de faire 2 coups que d'en faire 4, en raison reciproque de 2 à 4. Et il est bien manifeste aussi qu'il est bien plus aisé de rencontrer une des dix manieres, que de rencontrer une des 5. Si le partage doit estre fait en deux parties qui sont en raison des apparences de gagner;

---

1 *Über* le pouvoir de gagner *gesetzte Anmerkung:* chapeau de Fortunatus

2 manieres *(1)* dont l'une est aussi possible qv *(2)* selon *L* 7 possibles *(1)* Car un cas des *(2)* Je reponds *L* 9 gain de c. *(1)* Donc je vois a prese *(2)* Mais *L* 15 faire 4. *(1)* Or qvand il y a *(2)* en ... de *(a)* 4 a 2 *(b)* 2 a 4. *L* 16 f. manieres, *(1)* | qve de rencontrer une des *(a)* 4 *(b)* 10 *nicht gestr.* | *(2)* qve de rencontrer un des *(a)* 4 *(b)* 5. *(aa)* Si le droit *(aaa)* est *(bbb)* acqvis est egal à l'apparence de gagner; et l'apparence de gagner est en raison des cas comme *(bb)* Si *L*

---

18 chapeau: Das Wunschhütlein ist eine magische Requisite in dem ersten eigenständigen Prosaroman deutscher Sprache, dem aus unbekannter Feder stammenden *Fortunatus*. Mit Hilfe des Hutes kann sich sein Besitzer an jeden beliebigen Ort der Erde wünschen; vgl. O. V., *Fortunatus*, 1509, Bl. 60.
14 manifeste: Das Verhältnis der *facilités* zueinander beträgt $(p - f) : (p - g)$; es entspricht also genau dem der *possibilités* und somit auch der oben zunächst vorgeschlagenen Teilungsregel. Da Leibniz für diese Regel jedoch keine Formel aufstellt, sondern sie nur anhand des Beispiels veranschaulicht, entgeht ihm die Übereinstimmung.

et les apparences de gagner, comme les nombres des cas egalement aisez, ou en raison composée du nombre des cas et de leur facilité, il est manifeste qu'il est aussi aisé que *b* gagne dans le premier des cas qui luy sont favorables que dans le second.

On peut considerer la meme chose lors qu'il y a plus de joueurs que deux, ce que Mons. Pascal n'a pas examiné, et qui est bien plus embarrassé. Car s'il y en a trois par exemple; il ne faut pas prendre le double du nombre des jeux à gagner, pour le nombre des jeux à jouer, mais le triple, *item* il faut faire le partage en trois parties proportionnelles aux apparences, et pour estimer les apparences il faut avoir egard à deux obstacles, par exemple non seulement venant de *c*, mais aussi de *d* troisieme joueur. On peut considerer que deux jouent, et qu'on demande d'un certain nombre de partis à l'autre, un autre; pour gagner. Il peut estre que l'un aye mis plus au jeu, dont il a quitté la proprieté, pour acheter le droit de gagner en moins de coups.

1 f. gagner; *(1)* en raison des possibilitez *(2)* comme *(a)* le nombre *(b)* les nombres des cas egalement *(aa)* possibles; ou en raison *(bb)* aisez, ou en raison *(aaa)* reciproqve *(bbb)* recip *(ccc)* composée *L* 4 qve deux *erg. L* 8 egard a *(1)* trois *(2)* deux *L* 9 seulement *(1)* de *(a)* b, *(b)* c, mais aussi *(2)* venant *L* 12–40,1 acheter *(1)* | par *nicht gestr.* | la des *(2)* le droit ... moins de *(a)* part *(b)* coups. *(aa)* Si *(aaa)* un *(bbb)* b aya *(bb)* S'il y a trois *(aaa)* parties, et b a gagné *(bbb)* poi *(ccc)* jeux *L*

1 f. raison composée: Die hier aufgestellte zweite Leibniz'sche Teilungsregel, die eine Aufteilung im Verhältnis der Produkte aus *facilité* und *possibilité* vorsieht, lässt sich mit der Formel $(p-f)^2 : (p-g)^2$ wiedergeben. Diese Regel erfüllt die genannten Mindestanforderungen. Die von Leibniz zunächst erwogene Aufteilung im Verhältnis der *possibilités* spricht dem in Führung liegenden Spieler stets einen geringeren Anteil zu, als es der Wahrscheinlichkeit seines Gesamtsieges entspricht; die um den Faktor der *facilité* erweiterte Regel liefert demgegenüber eine bessere Annäherung an das Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten. 5 pas examiné: Leibniz bezieht sich hier auf die genannte Abhandlung III in Pascals *Traité du triangle arithméthique*, 1665 [Marg.]. Dass diese die Aufteilung unter zwei Spielern behandelt, geht aus ihrem Titel hervor. Mit der Teilungsregel, die Pascal in dieser Abhandlung auf S. III, 6 f. (= *PO* III, S. 488) beschreibt und welche sich mit der Formel $\sum_{n=0}^{p-f-1} \binom{m}{n} : \sum_{n=p-f}^{m} \binom{m}{n}$ wiedergeben lässt, befasst sich Leibniz nicht. Die Verteilung des Gewinns unter drei Spielern diskutiert Pascal ausführlich an anderer Stelle (vgl. Pascal an Fermat, 24. August 1654, in: P. de FERMAT, *Varia opera*, 1679 [Marg.], S. 185–188). Der Inhalt dieses Briefes ist Leibniz, als er das vorliegende Konzept niederschreibt, offensichtlich noch nicht bekannt. 7 triple: Tatsächlich beträgt bei drei Spielern die maximal zu spielende Anzahl an Runden $(3p-2)$. 12 acheter: Bei einer solchen Vereinbarung stellt sich unmittelbar die Frage nach dem „gerechten" Einsatz, also die Leitfrage von N. 10.

S'il y a trois jeux à gagner, et b en a gagné 2, c en a gagné 1, et si b gagne 1, il a tout, s'il perd un, il a la moitié de ce qui est au jeu, donc le gain d'un coup luy donnant a et la perte d'un coup le remettant à $\frac{a}{2}$, il semble que le jeu luy doit donner autant qu'il luy peut oster. Mais si ce calcul n'a point d'autre principe, il est malfondé; parce qu'il s'agit non seulement du nombre des points mais encor de la primauté. Et par même raison, on prouveroit qu'il est la même chose que deux joueurs gagnent tous deux, ou perdent tous deux en cas de jeu contesté; ce qui n'est pas icy.

$$\begin{array}{cccll}
b & b & b & & \\
c & c & c & & \\
\cline{1-3}
b & & \multicolumn{1}{c|}{} & c & c \\
c & b & \multicolumn{1}{c|}{} & &
\end{array}$$

[*Fig. 5*]

Donc selon mes principes en ce cas le party de b sera au party de c, comme 4 à 1. L'autre opinion semble estre confirmée par cecy: quand il y a autant de hazard de gagner, qu'il y en a de perdre; le droit qu'on acquireroit en gagnant, doit estre egal au droit qu'on quitteroit en perdant. Mais cette maxime n'est pas bien constante. Nous le pouvons voir. Soit trois coups à gagner; je gagne 1 coup. Et je suppose d'avoir gagné par là, l. Si je l'avois perdu, j'aurois perdu l. Avant que de jouer j'avois $\frac{a}{2}$. Ayant gagné le premier coup, j'ay $\frac{a}{2}+l$. Ayant perdu le premier coup, j'aurois $\frac{a}{2}-l$. Apres avoir gagné le premier coup, je gagne aussi le second coup, qui me donne (l). Si je l'avois perdu, j'aurois $\frac{a}{2}+l-(l)$. Or en ce cas, l'autre auroit gagné autant que moy, et nous serions égaux, donc j'aurois $\frac{a}{2}$, donc $\frac{a}{2}+l-(l) \sqcap \frac{a}{2}$, *id est* $(l) \sqcap l$. Donc le second coup

2 un, il *(1)* n'a rien, et to *(2)* a la moitié *L* 2 f. gain d'un *(1)* point *(2)* coup luy donnant *(a)* $\frac{\mathrm{a}}{2}$ *(b)* a ... coup *(aa)* | luy *nicht gestr.* | donnant $\frac{\mathrm{a}}{2}$ *(bb)* le remettant *L* 3 semble qve *(1)* l'apparence *(2)* le jeu *L* 10 f. $\begin{array}{ll|l} \overline{\text{b}\quad\ } & & \text{c c} \\ \text{c b} & & |\,\text{b c c}\ \textit{gestr.}\,| \end{array}$ *L* 15 gagner | qvelqve chose *gestr.* | , qv'il ... perdre; *(1)* et qvand on gagne, $\frac{\mathrm{a}}{2}$. *(2)* le droit *L* 16 constante. *(1)* Car il est asseuré, qv'on peut gagner un jeu ⟨aya⟩ *(2)* Nous *L* 18 perdu l. *(1)* Si je gagne le *(2)* avant *L* 20 donne (l). | si je l'avois perdu *streicht Hrsg.* | si *L*

me fait avoir $\frac{a}{2} + 2\,l$. Il m'en osteroit autant. Il faut examiner si la difficulté de gagner une somme en trois jeux, ou 4, est proportionnelle au nombre de jeux.

On propose à b et c de gagner une somme d'argent, en sorte que celuy, qui fera le premier trois jeux; l'emportera. Il est manifeste, qu'au commencement tout est égal; dont l'un a autant de droit que l'autre sur la somme proposée; et la somme est tout entiere à tous deux, parce qu'ils ne manqueront pas de gagner, l'un ou l'autre, donc la moitié appartient à chacun.

(1) b b	(1) c c c		
(2) c b b	(2) b c c c	$\frac{15a}{23}$	$\frac{8a}{23}$
(3) c c b b	(3) c b c c		
(4) b c b	(4) c c b c		
(5) c b c b			
b	c c c	$\frac{9a}{10}$	$\frac{1a}{10}$
c b			
c c b			
b	c c	$\frac{4a}{5}$	$\frac{1a}{5}$
c b			

[*Fig. 6*]

1 f. me *(1)* donne 2 l *(2)* fait ... +2 l. *(a)* À present le troisiême coup me donne ((1)), si je l'avois perdu j'aurois *(b)* il ... autant *(aa)* donc *(bb)* A present voyons *(cc)* il faut examiner *(aaa)* | s'il est *nicht gestr.* | aussi aisé de gagner les *(bbb)* si la ... trois jeux, | ou 4, *erg.* | est proportionnelle *(aaaa)* à la somme de la gagner *(bbbb)* au nombre *L* 5 somme | est *gestr. L, erg. Hrsg.* | *(1)* à *(2)* tout *L*

2 proportionnelle: Eine Gleichheit $(l) = ((l))$ lässt sich auf analogem Wege nicht zeigen. Tatsächlich wird die allgemeine Forderung, dass jede einzelne Runde eines Vorsprungs einen gleich großen Zugewinn einbringen, für den Sieger also gleich viel wert sein soll, ausschließlich durch die erste Leibniz'sche Teilungsregel, formuliert in S. 25 Z. 1–4, erfüllt. Die Forderung dagegen, dass ein Spieler in einer einzelnen Runde stets ebensoviel gewinnen wie verlieren können soll (vgl. auch S. 40 Z. 14–16), dass also der Wert dieser Runde für beide Spieler gleich sein soll, wird nur durch die Teilungsregel von Fermat und Pascal erfüllt. Eine allgemeine Regel, die beide Forderungen gleichzeitig erfüllt, existiert nicht. 18 Fig. 6: In der Tabelle fehlt der sechste Spielverlauf, durch den der in Führung liegende Spieler ausgehend vom Spielstand von 1 : 0 bei drei Gewinnrunden gewinnen kann, nämlich b c c b. Dementsprechend müsste der zweiten Leibniz'schen Teilungsregel folgend der Gewinn nicht im Verhältnis von 15 : 8, sondern von 9 : 4 aufgeteilt werden. Die sich aus dem Irrtum ergebenden Zahlenwerte werden bis S. 45 verwendet.

Je suppose que b gagne 1 jeu, il restent 2 jeux à gagner à luy, et trois à gagner à son adversaire; voyons combien il y a plus d'apparence, qu'il en emporte les deux premiers, que l'autre les trois premiers. Parce qu'il faut que b gagne 2, avant que c gagne trois, voyons combien de fois cela peut arriver, que b gagne deux avant que l'autre trois, or il y a 5 manieres favorables à b, et il y en a 4, à c, donc l'apparence pour b est à l'apparence pour c, comme 5 à 4. Mais encor parce que le nombre des jeux que b demande, est au nombre des jeux que c demande comme 2 à 3, donc l'apparence est en raison de 3 à 2 et toute l'apparence est en raison composée, c'est à dire de $\frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}$, c'est à dire comme 15 à 8. Donc divisant l'argent en 23 parties $\frac{15a}{23}$ seront à b, et $\frac{8a}{23}$ à c.

Supposons de plus, que b gagne aussi le second coup, il ne luy restera qu'un à gagner, et à son adversaire encor trois, donc les manieres estant comme 3 à 1, et la raison reciproque des coups aussi comme 3 à 1. Les apparences seront comme 9 à 1, c'est à dire b aura $\frac{9a}{10}$, et c, $\frac{a}{10}$ de la somme. Si b avoit perdu le second coup tout seroit revenu à l'egalité.

Supposons maintenant que b perde le 3^{me} coup, car s'il gagne il a a tout entier. S'il perd, il luy reste 1 coup à gagner, et à son adversaire il en reste deux. Les manieres comme 2 à 1, et les coups de meme donc les avantages comme 4 à 1, et b aura $\frac{4a}{5}$ et c, $\frac{a}{5}$. Voila tous les cas possibles à trois jeux. Pour examiner cela, voyons si le meme proviendroit, en supposant qu'un homme b, gagne trois coups de suite; et qu'on luy paye chaque foy, ce qu'il peut avoir gagné de droit par ce coup. Le premier coup luy donne $\frac{15a}{23}$

2 voyons *(1)* qvel *(2)* qvelle apparence il y a, qv *(3)* combien *L* 2 emporte les *(1)* trois *(2)* deux *L* 3 faut qve *(1)* celuy *(2)* b *L* 8 composée, c'est à dire *(1)* comme 10 à ⟨5⟩ *(2)* de $\frac{5}{4}$ *L* 9 $\frac{15\,|\,\text{a } \textit{erg.}\,|}{23} \ldots \frac{8\,|\,\text{a } \textit{erg.}\,|}{23}$ *L* 11 donc *(1)* le nombre des manieres *(2)* les manieres *L* 13 Si *(1)* j'avois *(2)* b avoit *L* 14 f. l'egalité. — *(1)* de plus *(2)* Supposons *L* 18 $\frac{\text{a}}{5}$. *(1)* Ecce omnes casus possibiles in tre *(2)* voila *L* 19 b *erg.* *L*

et à son adversaire $\frac{8a}{23}$, dont prenant $\frac{7a}{23}$ preferablement et laissant $\frac{8a}{23}$ au jeu, aussi bien que son adversaire, il restera au jeu $\frac{16a}{23}$. Et c'est comme si l'on avoit proposé à gagner $\frac{16a}{23}$ à deux en sorte que l'un fut obligé à gagner 2 coups, l'autre à gagner trois pour l'emporter. Mais je voy apresent que ce seroit injuste comme cela, car ayant payé à celuy qui a gagné l'avantage qu'il a eu sur l'autre, il ne faut pas luy laisser encor de l'avantage, c'est pourquoy il faut que l'un gagne autant de fois que l'autre. Et on peut dire que celuy qui a gagné renonce à son coup, en recevant ce que je viens de dire. Et puisque ils sont rendus égaux, il s'agit de sçavoir, s'il faut faire en sorte que tous deux soyent obligez de gagner le residu en trois coups; ou tous deux en deux coups. Je dis que cela n'importe. Et selon la justice puisque ils sont égaux, c'est à eux de choisir la maniere qui leur plaist. Donc si encor tous deux s'obligeoient à gagner trois coups, et si on payoit tousjours son coup, à celuy qui gagneroit, continuant cecy à l'infini; la somme de toutes ses fractions infinies doit estre egale à la somme proposée toute entiere. Si tous deux s'obligeoient à gagner seulement deux coups; et b gagne le premier, il ne luy reste qu'un coup, et deux à son adversaire, donc les manieres et les coups estant doubles; l'avantage e[s]t quadruple, et par ce second coup, b aura sur $\frac{16a}{23}$ qui reste au jeu, que nous appellerons (a), $\frac{4\,(a)}{5}$, et c $\frac{1\,(a)}{5}$. Donc, b prendra preferablement $\frac{3\,(a)}{5}$, et il restera au jeu $\frac{2\,(a)}{5} \sqcap \frac{32a}{5,23}$, le quel appartient à tous deux egalement. Si on les obligeoit de jouer tousjours à trois coups, et

1 f. adversaire $\frac{8\,|\,\mathrm{a}\ \textit{erg. Hrsg.}\,|}{23}$, ... $\frac{7\,|\,\mathrm{a}\ \textit{erg.}\,|}{23}$ ... $\frac{8\,|\,\mathrm{a}\ \textit{erg. Hrsg.}\,|}{23}$ ... $\frac{16\,|\,\mathrm{a}\ \textit{erg.}\,|}{23}$ *(1)* dont gagnant le second coup *(2)* Et *L* 3 obligé a *(1)* jouer *(2)* gagner *L* 4 ayant *(1)* donné a celuy qvi *(2)* payé *L* 7 dire. *(1)* Et il s'agit de sçavoir si selo *(2)* Et puisqve *L* 15 et les *(1)* nombres *(2)* coups *L*

9 n'importe: Während die Entscheidung für zwei weitere Spielrunden (und anschließend eine einzelne Runde) ein Modell für das Spiel mit drei Gewinnrunden liefern kann, impliziert die Entscheidung für drei weitere Runden einen von der ursprünglichen Spielidee deutlich abweichenden, unendlichen Spielverlauf. 12 l'infini: Dieser Spielmodus entspricht letztlich dem auf S. 29 Z. 18 – S. 30 Z. 1 entwickelten Ansatz unter Ausweitung auf unendlich viele Spiele. 15 manieres: Leibniz wendet erneut seine zweite Teilungsregel an, ersetzt nun aber den Begriff *possibilité* durch *maniere*, und anstelle von *facilité* oder *difficulté* spricht er nun einfach von den benötigten *coups*.

de vendre tousjours le coup; b gagnant tousjours, il auroit premierement $\frac{15a}{23}$, et $\frac{15\,(a)}{23}$. *Sed si* $(a) \sqcap \frac{16a}{23}$, *et* $\frac{15\,((a))}{23}$, *si* $((a)) \sqcap \frac{16\,(a)}{23}$ *sive* $((a)) \sqcap \frac{16,16a}{23,23}$, et ainsi: b auroit eu $\frac{15a}{23} + \frac{15}{23}, \frown \frac{16a}{23}\,„ + \frac{15}{23} \frown \frac{16,16a}{23,23}$, et ainsi en progression geometrique perpetuelle à l'infini. Donc b gagnant tousjours; la difference de son gain, et du tout deviendroit moindre qu'aucune grandeur assignable, c'est à dire il gagneroit tout dans un temps infini. Or la somme de 1. $\frac{16}{23}$. $\frac{16^2}{23^2}$ *etc. est geometricae seriei* $\frac{1}{1-y} \sqcap 1+y+y^2+y^3$ *etc. Ergo* 1. $\frac{16^1}{23^1}$. $\frac{16^2}{23^2}$ *etc.* $\sqcap \frac{1}{1-\frac{16}{23}} \sqcap \frac{23}{7}$. *Jam* $\frac{23}{7} \frown \frac{15a}{23} \sqcap \frac{15a}{7} \sqcap 2a + \frac{a}{7}$. Donc b gagneroit plus qu'il n'y a à gagner, ce qui est absurd, donc le principe l'est aussi. Ou il faut qu'il aye une erreur dans le calcul. Ce que je trouve aussi.

7. Janvier 1676.

Partie III^me

Ce qui est aussi car b a premiêrement preferablement non pas $\frac{15a}{23}$, mais $\frac{7a}{23}$. Il reste $\frac{16a}{23} \sqcap (a)$. De (a) il gagne de même $\frac{7\,(a)}{23} \sqcap \frac{7,16a}{23,23}$, et il reste $\frac{16\,(a)}{23} \sqcap \frac{16,16a}{23,23} \sqcap ((a))$. Au troisiême coup, b gagne, $\frac{7\,((a))}{23} \sqcap \frac{7,16,16a}{23,23,23}$, et il reste $\frac{16\,((a))}{23} \sqcap \frac{16,16,16a}{23,23,23}$, etc.

---

9 *Am unteren Seitenrand:* Voyez Partie III^me 7. Janvier 1676

1 $\frac{15\,(\mathrm{a})}{23\,|\,\mathrm{a}\ \textit{streicht Hrsg.}\,|}$ *L* 2 $\frac{16,16\mathrm{a}}{23,23\,|\,\mathrm{a}\ \textit{streicht Hrsg.}\,|}$ *L* 3 eu *erg. L* 4 donc *(1)* | la *nicht gestr.* | differ *(2)* b gagnant *L* 5 dans *(1)* toute l'eternité *(2)* un temps *L* 7 $\frac{23}{7} \frown \frac{15\mathrm{a}}{23} \sqcap$ *(1)* $\frac{15}{7} \sqcap 2\frac{1}{7}$ *(2)* $\frac{15\mathrm{a}}{7} \sqcap 2\mathrm{a} + \frac{\mathrm{a}}{7}$ *L* 14 gagne, *(1)* non pas *(2)* $\frac{7\,((\mathrm{a}))}{23}$ *L*

Ainsi les gains continuels estant la progression geometrique 1. $\frac{16}{23}$. $\frac{16,16}{23,23}$. $\frac{16^3}{23^3}$ etc. $\sqcap \frac{23}{7}$ multipliée par $\frac{7a}{23}$, c'est à dire a. Ainsi b gagnant tousjours à l'infini gagnera a tout entier. Cette methode sert à trouver une infinité de fractions de tout autre egales à des fractions en progression geometrique. Car on peut faire croistre continuellement le nombre des jeux il faut jouer. Cependant tout cecy ne me donne pas encor une marque dont je puisse juger de la bonté de ma supposition; et de la methode dont je me sers de calculer.

Et il faut réver s'il n'y a point d'autre methode qui nous mene à la même connoissance. C'est pourquoy commençons des cas le[s] plus simples: a argent mis au jeu. Joueurs, b et c. Celuy gagnera a qui aura fait le premier deux coups. Supposons que b gagne un coup, et supposons qu'il gagne par là l. C'est à dire, qu'il luy faut payer l, pour luy payer son droit acquis. Preferablement, le reste demeurant au jeu, sera $a - l$, dont il luy appartiendra la moitié, sçavoir $\frac{a-l}{2}$. Or $\frac{a-l}{2} + l \sqcap \frac{a+l}{2}$, donc son droit sur toute la masse sera $\frac{a+l}{2}$. Si son adversaire gagne le second coup, il est manifeste, qu'il acquerira tout autant de droit sur toute la masse, car il n'importe pas le quel des deux a fait le premier 1 coup, par ce qu'il importera seulement de sçavoir le quel de deux aura le premier deux coups; dont le droit de c sera aussi $\frac{a+l}{2}$. Or $\frac{a+l}{2} + \frac{a+l}{2} \sqcap a$, car leurs droits joints ensemble font le droit tout entier dont $l \sqcap \frac{a}{4}$.

3 sert a *(1)* prouuer *(2)* trouuer *L* 10 coup. *(1)* il est manifeste s'il gagne encor 1. coup, *(2)* et supposons *L* 10 par la *(1)* (l) *(2)* l *L* 11 acqvis. *(1)* il s'agit de sçavoir la valeur de l. il *(a)* luy *(b)* est manifeste qv'il luy faut un coup, encor pour avoir *(2)* Si c gagne le deuxiême coup, il gagne le même droit qv'avoit b. *(3)* preferablement *L* 17 droits *(1)* sont egaux; dont l $\sqcap \frac{\mathrm{a}}{4}$ *(2)* joints *L*

11 demeurant: Diese Definition von l oder *lucrum* weicht von der ursprünglichen in S. 29 Z. 18 f. ab. Während l dort den Gewinnanteil meint, den der Verlierer einer Runde theoretisch an deren Gewinner zu entrichten hätte, steht es hier für den Anteil, welchen der Rundensieger entnehmen könnte, so dass beide Spieler gleiche Anteile zu dem im Spiel verbleibenden Einsatz beisteuern (vgl. S. 43 Z. 1 f.). Dieses *lucrum* ist doppelt so groß wie jenes.

Donc nous avons une solution parfaite du premier cas, lors qu'on joue à deux coups. Selon l'autre methode ayant gagné 1 coup, il vous n'en faut qu'un, et il en faut 2 à vostre adversaire, donc vostre avantage est double; de même il est encor double par une autre raison, parce que vous avez deux manieres, et luy n'en a qu'une. Donc vostre avantage est quadruple du sien, dont il appartient à vous, Monsieur b, la $\frac{4}{5}$ et à c $\frac{1}{5}$, au lieu qu'au paravant nous avons prouvé, qu'il appartient à b, la somme $\frac{a+l}{2} \sqcap \frac{a+\frac{a}{4}}{2} \sqcap \frac{5}{8}\,[a]$. Or la methode posterieure est demonstrative et convaincante, et ne laisse point de doute; venons au jeu à 3 coups. b gagne 1 coup, son droit acquis $\frac{a+l}{2}$. Si c gagne autant son droit acquis est égal sçavoir $\frac{a+l}{2}$, donc $l \sqcap \frac{a}{4}$. Si b gagne 2 coups il aura gagné $l+(l) \sqcap L$, et il aura encor $\frac{a-L}{2}$. Or $\frac{a-L}{2} + L \sqcap \frac{a+L}{2}$. Si son adversaire gagne aussi deux coups,

---

3 *Am Rande:* $\begin{array}{c|c} b & cc \\ bc & \end{array}$

7 *Am Rande: imo error ut statim sequitur*

1 lors qv'on *(1)* gagne *(2)* joue *L* 2 gagné *(1)* 2 coups *(2)* 1. | coups *ändert Hrsg.* | , il *L* 5 vous, *(1)* b; *(2)* Monsieur b, ... à *(a)* luy *(b)* c *L* 9 il *(1)* restera $\frac{\mathrm{a}-\mathrm{L}}{2}$. ou a *(2)* aura *L*

29,17 $l \sqcap \frac{a}{4}$: Aus $\frac{a+l}{2} + \frac{a+l}{2} = a$ ergibt sich richtig gerechnet $l = 0$, was kein sinnvolles Ergebnis ist. Es kommt dadurch zustande, dass nach der zweiten Runde der Zugewinn des einen Spielers dem anderen nicht abgezogen wird, so dass beiden Spielern, obwohl der Gesamtgewinn a konstant ist, ein Gewinn gegenüber dem Stand bei Spielbeginn zugesprochen wird. Dieser in Z. 9 und in S. 47 Z. 1 erneut begangene Fehler belastet die weiteren Überlegungen des Stückes. Korrigiert man ihn, so erhält man die Gleichung $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, aus der sich keine Aussage über die Größe l ableiten lässt. Tatsächlich hängt l von der vorgeschlagenen Teilungsregel ab und lässt sich nicht umgekehrt dazu nutzen, eine solche zu finden. Sofern man l im zuerst definierten Sinn versteht (vgl. S. 29 Z. 18 f.), beträgt im gewählten Beispiel sowohl bei einer Aufteilung gemäß der ersten Leibniz'schen Teilungsregel als auch bei Anwenden der Regel von Pascal und Fermat der Zugewinn durch jede gewonnene Runde tatsächlich $l = \frac{a}{4}$.

il aura aussi $\frac{a+L}{2}$. Or $\frac{a+L}{2}+\frac{a+L}{2} \sqcap a$. Donc $L \sqcap \frac{a}{4}$. Or $L \sqcap l+(l)$, et $l \sqcap \frac{a}{4}$. Donc $L \sqcap \frac{a}{4}+(l)$. Or $L \sqcap \frac{a}{4}$. Donc $\frac{a}{4}+(l) \sqcap \frac{a}{4}$. Donc $(l) \sqcap 0$, ce qui est absurd. D'où il s'ensuit que ce droit acquis ou cet l est une chose impossible ou chimere, estant pris absolument, sans relation aux jeux qui restent à jouer. Cependant ce n'est pas repondre *in forma* à l'objection. Et il s'ensuit necessairement que b n'a pas plus acquis par 2 coups, que par un. Tout ce qu'on peut repondre à cela, c'est de nier que les droits de tous deux joints ensemble, fasse[nt] le droit sur toute la masse. Par ce que selon le droit du jeu, ils sont obligez de jouer 6 jeux. Et il faut concevoir comme si un troisiême leur avoit mis cet argent à jouer. Cet argent ne sera pas à eux qu'en cas, qu'ils le gagnent, et s'ils sont interrompus il ne leur appartient que l'avantage qu'ils ont acquis par leurs jeux; et celuy qui a mis l'argent reprendra le reste. Cependant il est vray aussi, que lorsque tous deux ont mis l'argent, en cas de rupture; leurs droits joints ensemble font le droit tout entier. Cependant on peut aussi former la question en sorte, qu'un troisiême propose [un] prix, et leur commande de jouer autant de coups de suite, qu'il faut pour gagner; un accident les empechant de continuer, il est asseuré qu'ils ont acquis quelque droit, et que l'equité veut qu'ils en tirent quelque avantage quoyque à la rigueur; le proposant puisse dire qu'il a demandé la condition tout entiere. Il peut pourtant aussi s'obliger de leur laisser en cas d'interruption l'avantage qu'on leur pourra attribuer. Estant proposants eux mêmes on les peut considerer neantmoins comme un troisiême quant à cet égard, et raisonner tout de même.

3 acqvis *(1)* absolument *(2)* ou *(a)* ce *(b)* cet L 14 jouer *(1)* 6 coups *(2)* autant *L* 16 rigueur; *(1)* il puisse dire, qve *(2)* le proposant *L*

8 6 jeux: Unter diesen Voraussetzungen sind maximal fünf Runden zu spielen.

8. FRACTIONES SEXAGENARIAE
[Mitte 1674 – Ende 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III A 26 Bl. 17. Unregelmässig zugeschnittenes Fragment, ca 10 cm × 9 cm. Text auf Bl. 17 r°, rückseitig 1 Z. mit dem Titel.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz beschäftigt sich in der vorliegenden Notiz mit den rechnerischen Grundlagen des Sexagesimalsystems. Hierbei knüpft er an Überlegungen an, die er in N. 9, welches dem gleichen Gegenstand gewidmet ist, entwickelt hat. Es darf daher vermutet werden, dass die Notiz kurz nach N. 9 entstanden ist. Da dieses Stück wahrscheinlich im Zeitraum zwischen Mitte 1674 und Ende 1676 verfasst worden ist, wird das Gleiche auch für die vorliegende Notiz angenommen. **Die Gegenstücke zu den unregelmäßigen Schnittkanten des Papierfragmentes, auf welchem die Notiz niedergeschrieben ist, sind bislang noch nicht gefunden worden; eine automatisierte Suche im Rahmen des beantragten Projektes zur digitalen Rekonstruktion von Textzusammenhängen bei Leibniz erscheint hier vielversprechend. Aus ihren Resultaten können sich neue Hinweise zur Datierung ergeben.** [noch]

Fractiones sexagenariae

$$\frac{13}{60} \quad + \quad \frac{24}{60^2} \quad + \quad \frac{15}{60^3}$$

$$\begin{array}{cc} 13 & 24 \\ 36 & 6 \end{array}$$

Pour reduire les primes et secondes aux troisiesmes, c'e[s]t àdire pour reduire les fractions sexagenaires à un meme denominateur, il faut multiplier les primes par 36, les

16 Fractiones sexagenariae *erg. L auf Bl. 17 v°*

17 $\frac{13}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{15}{60^3}$: Vgl. diesen Ausdruck mit der Summe $\frac{2}{60}[+]\frac{1}{3600}[+]\frac{7}{216000}$, welche Leibniz in N. 9 S. 56 Z. 3 betrachtet. 21 denominateur: Mit dem beschriebenen Verfahren rechnet man eigentlich eine dreistellige Sexagesimalzahl, so wie in N. 9 gefordert, in eine Dezimalzahl um: Man multipliziert die erste Stelle mit 36 und die zweite mit 6. Um die drei oben genannten Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, ist dagegen der erste Bruch mit 3600 zu erweitern und der zweite mit 60. Die zum Gleichnamigmachen erforderlichen Nullen fügt Leibniz dem Ergebnis der Nebenrechnung zu S. 49 Z. 2 f. nachträglich noch hinzu, lässt den Haupttext aber unverändert.

secondes par 6, les 3[mes] par 1. Multiplier par 36[,] c'est multiplier par $40 - 4$, multiplier par 6, c'est multiplier par $4 + \frac{4}{2}$. *Ergo primae multiplicentur per* 4[,] *producto adjiciatur 0, et inde detrahatur ipsum productum, secundae multiplicentur per 4, producto addatur ipsius dimidium, sed brevius sufficit secundas multiplicari per 6.*

---

2 f. *Nebenrechnung:*
$$\begin{array}{r} 13 \\ \underline{4} \\ 520 \\ \underline{52} \\ 46800 \end{array}$$

3 f. *Gestrichene Nebenrechnung:*
$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{4} \\ 96 \\ \underline{48} \\ 4 \end{array} \quad L$$

5–9 *Gestrichene Nebenrechnung: (1)*
$$\begin{array}{r} 13 \\ \underline{40} \\ 520 \\ \underline{52} \\ 468 \end{array}$$
(2)
$$\begin{array}{r} 13 \\ \underline{4} \\ 520 \\ \underline{52} \\ 46800 \end{array} \quad L$$

9. MULTIPLICATIO NUMERORUM SEXAGESIMALIUM
[Mitte 1674 – Ende 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 27. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 27 v°, Vorderseite leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Der Gegenstand des Stückes — ein Verfahren zur Multiplikation einer im Sexagesimalsystem ausgedrückten dreistelligen Zahl mit einem unechten Bruch — legt nahe, dass es in zeitlicher Nähe zu N. 8 entstanden ist. Leibniz nimmt seine Aufgabe offenkundig in Angriff, bevor er sich näher mit Stellenwertsystemen befasst hat; dies belegt jedoch nur, dass er das Stück vor März 1679 abgefasst hat. Einen genaueren Hinweis liefert das Papier: Es stammt aus Paris, und sein Wasserzeichen ähnelt anderen Wasserzeichen, die vor allem in der frühen Pariser Zeit auftreten. Auch der Symbolgebrauch gibt einen Hinweis in diese Richtung: Ganz überwiegend setzt Leibniz als Gleichheitssymbol das Zeichen ⨍ ein, teils in einer leicht stilisierten Form, teils als simples handschriftliches *f*. Diese letztere Variante kommt überwiegend, allerdings nicht ausschließlich, bis Anfang 1673 vor. Die dreimalige Verwendung des Gleichheitssymbols $\sqcap$ dagegen spricht unzweideutig für eine Niederschrift nach Mitte 1674. Somit ist gesichert, dass das Stück in Paris verfasst worden ist; trotz der Hinweise auf eine Entstehung zu Beginn der Pariser Zeit gibt der Gebrauch des stilisierten Waagebalkens letzlich den Ausschlag für den *terminus post quem* Mitte 1674.

[*Erster Ansatz*]

$$13 \quad \text{———} \quad \overset{/}{19} \quad \overset{//}{9} \quad \overset{///}{7} \quad \text{———} \quad 17$$

$$\frac{19}{6} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{7}{6} \qquad \frac{17}{13} \text{ ⨍ } 1+\frac{4}{13}$$

$$3\frac{1}{6} \quad 1\frac{1}{2} \quad 1\frac{1}{6} \quad \text{vel} \quad \frac{1\;3\;1}{6} \text{ ⨍ } 2\;1\;\frac{5}{[6]}$$

---

20 *Nebenrechnung:* $\begin{array}{c} 10 \\ \hline 6 \\ \hline\hline 10 \end{array} \qquad \frac{5}{3} \sqcap 2$ [*bricht ab*]

19 13 — *(1)* 14, 13, 18 · *(2)* $\overset{/}{19}\ \overset{//}{9}\ \overset{///}{7}$ *L*   21 $3\frac{1}{6}$ *(1)* $2\frac{1}{2}$ *(2)* $1\frac{1}{2}$ *L*

---

21 1 3 1: Der Status von Zahlen wie dieser als Sexagesimal- oder Dezimalzahl ist für Leibniz nicht eindeutig festgelegt, was er durch (allerdings nicht ganz konsequent durchgeführte) Gesperrtschreibung der Ziffern andeutet. Bei Zahlen, die er als eindeutig hexagesimal ausgedrückt verstanden wissen will, trennt er dagegen die Stellen in der Regel durch Kommata voneinander ab — insbesondere, wenn es sich bei mindestens einer ihrer Ziffern um eine im Dezimalsystem notierte zweistellige Zahl handelt.

$$\frac{12\frac{4}{6}}{13} \qquad \frac{4+\frac{4}{2}}{13} \qquad \frac{4+\frac{4}{6}}{13}$$

$$\frac{76}{13\frown 6} \qquad \frac{120}{13\frown 6} \qquad \frac{28}{13\frown 6}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ 120 \\ \underline{28} \\ \dfrac{8828}{13\frown 6} \end{array} \Bigg| \frac{4414}{13\frown 3} \Bigg| \frac{1471}{13} + \frac{1}{13\frown 3}$$

$$\begin{array}{r} 3\;2\;1 \\ 2\;1 \\ \hline 3\;4\;2\,\frac{5}{6} \end{array} \frown 1 + \frac{4}{13}$$

$$\begin{array}{r} 3\;4\;2 \\ 1\;0\;5 \\ \hline 4\;4\;7\,\frac{19}{39} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ 24,\; 24,\; 28 \\ 30 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \cancel{5}6 \\ \dfrac{\cancel{1}\cancel{1}\cancel{4}}{\cancel{3}\cancel{9}} \end{array} \Bigg| 2\frac{36}{39} \Bigg| \frac{12}{13}$$

---

1 *Nebenrechnung:* $\begin{array}{c} \cancel{1}3 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{8} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} \; ⨍ \; 105 \; \frac{18+20}{6\frown 13} \qquad \frac{38}{78}\Big|\frac{19}{39}$

2 $\frac{76}{13\frown 6}$ *(1)* $\frac{140}{13\frown 6}$ *(2)* $\frac{120}{13\frown 6}$ *L*   4 105 *(1)* $\frac{3}{13}+\frac{20}{6\frown 13}$ *(2)* $\frac{18+20}{6\frown 13}$ *L*

---

1 3 2 1 : Hier ist die Korrektur in der Zeile zuvor nicht berücksichtigt; folgerichtig wäre 3 1 1 .
2 $\frac{120}{13\frown 6}$: Folgerichtig wäre $\frac{36}{13\frown 6}$.   2 4 4 7 $\frac{19}{39}$: Bei der Addition von 3 4 2 $\frac{5}{6}$ mit 1 0 5 $\frac{19}{39}$ ist der Bruchanteil des ersten Summanden verloren gegangen.   3 24, 24, 28: Das gesuchte Produkt der Sexagesimalzahl $(19, 9, 7)_{60}$ mit dem unechten Bruch $\frac{17}{13}$ ist $(25, 2, 41\frac{6}{13})_{60}$. Dass die in der rechten Spalte fortgeführte Berechnung zum falschen Ergebnis $(24, 24, 30\frac{12}{13})_{60}$ führt, ist nicht nur auf Rechenfehler zurückzuführen, sondern grundsätzlich in dem Verfahren begründet, welches Leibniz im vorliegenden Stück ausprobiert: Er behandelt beim Rechnen mit Sexagesimalzahlen diese in einzelnen Rechenschritten wie Dezimalzahlen. Offenbar fühlt er sich hierzu berechtigt, da er eingangs eine Division durch 6 durchführt und am Ende der Rechnung wieder mit 6 multipliziert. Im vorliegenden Ansatz etwa teilt Leibniz im ersten Schritt tatsächlich nicht die Sexagesimalzahl $(19, 9, 7)_{60}$ durch 6, sondern die Dezimalzahl 1997. Sein (nicht ganz korrektes) Ergebnis 3 4 2 $\frac{5}{6}$ multipliziert er sodann wie eine gewöhnliche Dezimalzahl mit $\frac{17}{13}$. Erst bei der abschließenden Wiederversechsfachung seines (ebenfalls nicht korrekten) Produktes 4 4 7 $\frac{19}{39}$ behandelt er dessen Ziffern wie jene einer im Sexagesimalsystem geschriebenen Zahl. Tatsächlich kann ein solches Verfahren keine Umrechnung vom Sexagesimal- ins Dezimalsystem und zurück leisten; es führt im Allgemeinen zu fehlerhaften Resultaten.

$$\begin{array}{l} \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{4}2 \\ \cancel{1}\cancel{4}7\cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} ⨍ \begin{array}{c} 113 \\ 321 \end{array} + \frac{7}{13 \frown 3}$$

Ergo productum,

$$\begin{array}{rrrl} 4, & 3, & 6: & \dfrac{20}{39} \\ & & & \quad 6 \\ \hline & & & \cancel{3}3 \\ 24 & 18 & 36 & \dfrac{\cancel{1}\cancel{2}\cancel{0}}{\cancel{3}\cancel{9}} ⨍ 3\,\dfrac{3}{39} \\ 0 & 0 & 3 & \\ \hline 24, & 18, & 39 & \dfrac{3}{39}\,\Big|\,\dfrac{1}{13} \end{array}$$

[*Zweiter Ansatz*]

$$13 \;\text{———}\; \overset{\prime}{19}, \quad \overset{\prime\prime}{9}, \quad \overset{\prime\prime\prime}{7} \;\text{———}\; 17$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hline \cancel{6} & 6 & \cancel{6} \end{array}$$

---

1 *Nebenrechnungen:* $\dfrac{140}{60}\Big|\dfrac{14}{6}\Big|\dfrac{7}{3} \frown 17$ $\qquad \dfrac{7 + (7 \frown 13)\,91}{13 \frown 3} \sqcap \dfrac{98}{13 \frown 3}\Big|\dfrac{\begin{array}{c}2 \\ \cancel{3}0 \\ \cancel{9}\cancel{8}\end{array}}{\cancel{3}\cancel{9}} ⨍ 2\,[\dfrac{20}{39}]$

4 *Nebenrechnung:* $\dfrac{17}{13} ⨍ 1\dfrac{4}{13}$

11 | $\dfrac{13}{13}$ *ändert Hrsg.* | $⨍ 1\dfrac{4}{13}$ *L*

---

2 24, 18, 39: Auch das Ergebnis $(24, 18, 39\frac{1}{13})_{60}$ ist aus den genannten Gründen — diversen Rechenfehlern sowie der unzulässigen Behandlung von Sexagesimal- als Dezimalzahlen — nicht korrekt.

$$\begin{array}{r} 1\,8\,6\,6 \\ 1\,3\,1 \\ \hline 1\,9\,9\,7 \\ \hline 6 \end{array} ⨍\ 3\,3\,3 - \frac{1}{6} \frown \frac{17}{13}\Big|1\frac{4}{13}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline \cancel{1}6 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{2} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} ⨍\ 102\ \boxed{\frac{36-4}{13\frown 6}}\ \frac{32}{78}\Big|\frac{16}{39}$$

$$\begin{array}{l} 3\,3\,3 - \frac{1}{6} \\ 1\,0\,2 + \frac{16}{39} \\ \hline 4\,3\,5 \end{array}$$

[*Dritter Ansatz*]

$$13 \;\text{———}\; \overset{/}{19},\quad \overset{//}{9},\quad \overset{///}{7} \;\text{———}\; 17 \qquad\Big|\qquad \frac{17}{13} \sqcap 1 + \frac{4}{13}$$

$$\begin{array}{r} 1997 \\ 4 \\ \hline 13)\,7\cancel{9}\cancel{8}\cancel{8} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{5}6 \\ \cancel{1} \end{array} ⨍\ 614\frac{6}{13} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1997 \\ 4 \\ \hline \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{5}6 \\ 7\cancel{9}\cancel{8}\cancel{8} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}3 \\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} ⨍\ 614$$

$$\begin{array}{r} \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1 \\ \cancel{2}\cancel{3} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1997 \\ 614 \\ \hline \cancel{2}\cancel{3} \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1\frac{6}{13} \end{array}$$

---

3 4 3 5 : Die Rechnung des zweiten Ansatzes wird konsequent und fehlerfrei im Dezimalsystem durchgeführt. Ihr Resultat $4\,3\,5\,\frac{19}{78}$ würde mit 6 multipliziert $(24, 18, 31\frac{18}{39})_{60}$ ergeben; auch dies ist nicht das korrekte Ergebnis. 6 $\frac{1997}{4}$: Im dritten und vierten Ansatz verändert Leibniz nun die Reihenfolge der Rechenschritte: Zunächst wird die dezimale Multiplikation von 1997 mit $\frac{17}{13}$ durchgeführt, erst danach folgt die dezimale Division durch 6 und die Wiederversechsfachung im Sexagesimalsystem.

$$\frac{4\;3\;5\,\frac{2}{13}}{24,\ 18,\ 30\,\frac{12}{13}} \qquad\qquad \begin{array}{c} 4\;3\;5\,\frac{2}{13} \\ 24,\ 18,\ 30\,\frac{6}{13} \end{array}$$

[*Vierter Ansatz*]

$$13 \;\text{———}\; \frac{19+9+7}{6} \;\text{———}\; 17$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} & \cancel{1} & \\ \cancel{2} & \cancel{6} & 4 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{9} & \cancel{7} & \cancel{9} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1} & \cancel{1} & \end{array} \;⨍\; 1\;0\;7\;5$$

$$\begin{array}{r} 13979 \\ 1997 \\ \hline 33949 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1997 \\ 17 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{1}6 \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{9} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \end{array} ⨍\; 2611\,\frac{6}{13} \qquad\qquad \begin{array}{r} \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{1}6 \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{9} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \end{array} ⨍\; 2611\,\frac{6}{13}$$

---

4 *Isoliert und ohne direkten Bezug:* 19 9 7

7 *Randnotiz mit aus S. 55 Z. 5 bezogener Ergänzung:* $33949\ \frac{6}{13} + \frac{19}{26}$

7 *Gestrichene Nebenbetrachtung:* $\begin{array}{r} \cancel{3} \\ \cancel{3}\cancel{3}949 \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}6 \end{array} ⨍\ 5658$ *L* **9** $+\frac{19}{26}$ *erg. L*

---

1 $4\;3\;5\,\frac{2}{13}$: Konsequent gerechnet lautet das Zwischenergebnis nach der Division $4\;3\;5\,\frac{19}{78}$. Der Fehler beeinträchtigt im links dargestellten Rechengang das Endergebnis in der folgenden Zeile. Das rechts stehende Endergebnis dagegen verwendet stillschweigend den korrekten Wert des Bruchanteils, vernachlässigt jedoch einen Einerübertrag; folgerichtig gerechnet ergibt sich $(24, 18, 31\frac{6}{13})_{60}$ (vgl. auch den vierten Ansatz, S. 55 Z. 3, rechts). 5 1 0 7 5 : Versehentlich teilt Leibniz hier das Siebenfache anstelle des Siebzehnfachen von 1997 durch 13. Er erkennt den Irrtum und setzt neu an.

$$\begin{array}{r} \cancel{2}\cancel{3} \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1 \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6} \end{array} \quad \frac{1}{13} \qquad\qquad \begin{array}{r} \cancel{2}\cancel{3} \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1 \\ \cancel{6}\cancel{6} \end{array} + \frac{6}{13}$$

$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 5\,\frac{1}{6} + \frac{1}{13} \\ 6 \\ \hline 24,\ 18,\ 31\,\frac{1}{13} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4\ 3\ 5\,\frac{1}{6} + \frac{1}{13} \\ \\ 24,\ 18,\ 31\,\frac{6}{13} \end{array}$$

[*Fünfter Ansatz*]

$$26 \text{ ——— } 1997 \text{ ——— } \frac{17}{26}$$

$$\begin{array}{r} 1997 \\ 17 \\ \hline 13979 \\ 1997 \\ \hline \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}9 \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}1 \\ \cancel{7} \end{array} ⨍\ 1\ 3\ 0\ 5\,\frac{19}{26}$$

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 7\,\frac{3}{6} \\ \hline 12,\ 6,\ 21\,\frac{18}{6}\Big|\,3 \\ \frac{3}{24} \qquad \frac{19}{26} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{7}\cancel{1}1 \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{4}9 \\ \cancel{2}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}6 \\ \cancel{2}\cancel{2}2 \end{array} ⨍\ 1305\,\frac{19}{26}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{1}\cancel{4}3 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{5} \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6} \end{array} ⨍\ 2\ 1\ 7\,\frac{3}{6} + \frac{19}{26}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 12,\ 6,\ 45 \end{array}$$

---

9 *Nebenbetrachtungen:* $\frac{38}{26}$ ⨍ $1\frac{12}{26}$ $\qquad \frac{19}{26} \qquad \frac{3\frac{1}{6}}{26}$

---

5 26: Im fünften Ansatz multipliziert Leibniz im ersten Schritt die Dezimalzahl 1997 nicht mehr mit $\frac{17}{13}$, sondern mit $\frac{17}{26}$ und verdoppelt dafür das Zwischenergebnis vor dessen Versechsfachung im letzten Schritt. 7 $12, 6, 21$: Richtig wäre $12, 6, 42$. Leibniz korrigiert dies nicht, sondern setzt neu an.

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 7 \\ 6 \\ \hline 12,\ 6,\ 42 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4\ 3\ 4 \\ 6 \\ \hline 24,\ 18,\ 24 \end{array}$$

$$\frac{2}{10} \qquad \frac{1}{100} \qquad \frac{7}{1000}$$

$$\frac{2}{60} \qquad \frac{1}{3600} \qquad \frac{7}{21600[0]}$$

[*Sechster Ansatz*]

$$\frac{19}{6}\Big|1\frac{1}{6} \qquad \frac{9}{36}\Big|\frac{1}{4} \qquad \frac{7}{216}\Big|\frac{1}{27} - \frac{1}{216}$$

$$\begin{array}{c} 4\frac{4}{6} \qquad 1 \qquad \frac{4}{27} - \frac{4}{216} \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\frac{19}{6} \qquad \frac{9}{36} \qquad \frac{7}{216}$$

---

3 *Hilfsrechnung:* $\begin{array}{r} 3600 \\ 6 \\ \hline 21600 \end{array}$

6 *Nebenrechnung:* $\begin{array}{l} \ \cancel{2} \\ \cancel{2}\cancel{8}\cancel{6} \text{ ⨍ } 22 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3} \\ \ \cancel{1} \end{array}$

1 *Gestrichene Nebenbetrachtung:* $\begin{array}{l} \ \cancel{1} \\ \cancel{4}\cancel{3}4 \text{ ⨍ } 7\ 1\frac{8}{6} \\ \ \cancel{6}\cancel{6} \qquad , 14 \end{array}$ *L* 2 *(1)* 24, *(2)* $\frac{2}{10}$ *L*

---

3 $\frac{2}{60}$ $\frac{1}{3600}$ $\frac{7}{21600[0]}$: Leibniz vergewissert sich hier noch einmal der Bedeutung von Sexagesimalstellen und verwirft daraufhin die Ausgangsidee, eine Zahl vom Sexagesimal- ins Dezimalsystem zu transformieren, indem man die gesamte Zahl (also unterschiedslos jede Stelle) durch 6 teilt. In den folgenden Ansätzen differenziert er nun bei der Division zwischen den verschiedenen Stellen. 5 $\frac{19}{6}\Big|1\frac{1}{6}$: Richtig wäre $3\frac{1}{6}$. Der Fehler belastet die weitere Rechnung bis S. 57 Z. 2, nach welcher Leibniz noch einmal neu ansetzt.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 13\frac{13}{6} & \frac{13}{4} & \frac{13}{7}-\frac{13}{216} \\ 4\frac{4}{6} & 1 & \frac{4}{7}-\frac{4}{216} \\ & & 17 \quad 17 \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccc} 3+\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{7}-\frac{1}{216} \end{array}$$

seu $39\frac{17}{6}, \quad \frac{17}{4}, \quad \frac{17}{7}-\frac{17}{216}$ *(1)*

[*Siebter Ansatz*]

$$19 \qquad 9 \qquad 7 \qquad\qquad \frac{19}{6} \qquad \frac{\frac{9}{60}}{6} \qquad \frac{\frac{9}{60}}{36}$$

$$\frac{19}{6} \qquad \frac{\frac{9}{6}}{6} \qquad\qquad \frac{19 \quad \frac{9}{6} \quad \frac{9}{36}}{6}$$

$$\frac{19}{6} \qquad \frac{\frac{9}{60}}{6} \qquad \frac{\frac{9}{600}}{6\frown 6}$$

$$24, \ 3 \quad \frac{31\frac{6}{13}}{36}$$

5 *(1)* | seu *nicht gestr.* | 9 *(2)* seu *(a)* $39\frac{13}{6}, \frac{13}{4}, \frac{13}{7}-\frac{13}{216}$ *(b)* $39\frac{17}{6}$, *L* 7 $\frac{\frac{9}{60}}{6}$ *(1)* $\frac{\frac{9}{60}}{\frac{6}{6}}$ *(2)* $\frac{\frac{9}{60}}{36}$ *L* 9 *(1)* $\frac{\frac{7}{600}}{6\frown 6}$ *(2)* $\frac{\frac{9}{600}}{6\frown 6}$ *L*

---

5 $39\frac{17}{6}$: Leibniz multipliziert zunächst die vorangehende Zeile versehentlich mit 13 statt mit 17, korrigiert dies aber umgehend, wobei er allerdings vergisst, die 39 in 51 zu ändern. Zudem muss es $\frac{17}{27}$ anstatt $\frac{17}{7}$ heißen; dieser Fehler stammt aus Z. 1. Die Versehen wirken sich nicht aus, da Leibniz die Rechnung abbricht. 10 24, 3: Leibniz probiert hier am Ergebnis des vierten Ansatzes (S. 55 Z. 3, rechts) die Division der zweiten Stelle durch 6 und die der dritten durch 36 aus.

[*Achter Ansatz*]

$$\begin{array}{rrr} 19 & 9 & 7 \\ & 42 & 42 \\ & 6 & \\ \hline & 252 & \\ & 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 19 & 9 & 7 \\ & & 60 \\ \hline & & 420 \\ & & 6 \\ \hline & & 25200 \\ & & 450 \\ \hline & & 25650 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25650 \\ 17 \\ \hline 17955 \\ 2565 \\ \hline \cancel{1}\cancel{2}\cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{4}7\cancel{5}3 \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{5} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \end{array} \; ⨍ \; 3354$$

$$\begin{array}{l} \cancel{3}\cancel{3}54 \; ⨍ \; 55 : 54 \\ \cancel{6}\cancel{6}0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25650 \\ 17 \\ \hline 17955 \\ 2565 \\ \hline 2 \\ \cancel{1}\cancel{4}0 \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}05 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3} \\ 1 \end{array} \; ⨍ \; 32 \text{ nicht gestr.}$$

2 *(1)* 19 9 7 — $\cancel{54}$ 54 | 54 | $\underline{252}$ | 306

(2) 19 9 7 — 42 42 | 6 | $\underline{252}$ | 60   *L*

3 *(1)* [siehe obige Rechnung] $\cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}05$ ⨍ 32 *nicht gestr.*

(2) $\begin{array}{r} \cancel{1}\cancel{3}\cancel{2} \\ \cancel{1}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{9}4 \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{5} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \end{array}$ ⨍

(a) 3276 *(b)* 3277 $\begin{array}{l} \;\;3 \\ \cancel{3}\cancel{2}77 \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}0 \end{array}$ ⨍ 54 : 37   *(3)* $\begin{array}{r} 8 \\ \cancel{1}\cancel{0}0 \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}05 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1} \end{array}$ ⨍ *(a)* 33 *(b)* 32   *(4)* $\begin{array}{r} 2 \\ \cancel{1}\cancel{4}0 \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}05 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}3 \\ \cancel{1}1 \end{array}$ ⨍ 32   *(5)* $\begin{array}{r} \cancel{1}\cancel{2}\cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{4}7\cancel{5}3 \\ \cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{5} \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{1} \end{array}$ ⨍ *(a)* 3254

(b) 3354 $\begin{array}{l} \cancel{3}\cancel{3}54 \\ \cancel{6}\cancel{6}0 \end{array}$ ⨍ *(aa)* 54 *(bb)* 55 : 54   *L*

---

2 25200: Im achten Ansatz multipliziert Leibniz die dritte Stelle anstatt der ersten mit 3600, addiert aus unklarem Grunde 450 (womöglich denkt er an 540 als dem 60-fachen von 9) und führt sodann die Multiplikation mit $\frac{17}{13}$ durch, wobei eine Dezimalstelle verloren geht. Das Ergebnis der Multiplikation teilt er schließlich wieder durch 6 und beendet die Rechnung ohne brauchbares Resultat.

10. DE NUMERO JACTUUM IN TESSERIS
Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 14 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S. — Auf Bl. 1 r° am oberen Rand Datum und Titel des Stückes. In der oberen Hälfte dieser Seite eine fragmentarische Notiz (s. u.), in der Seitenmitte vier Tabellen (= Teil 1 unseres Stückes). Auf dem Rest der Seite das Stück VII, 1 N. 89, um Notiz und Teil 1 herum gesetzt. Auf den drei anderen Seiten des Bogens Teil 2 und 3 unseres Stückes. — Gedr.: 1. Biermann, *Spezielle Untersuchungen*, 1956, S. 170 (tlw. = S. 63 Z. 2 – S. 64 Z. 7); 2. Parmentier, *L'estime des apparances*, 1995, S. 79 f. u. 88–101 (z.T. frz. Übers.); 3. (span. Übers.) Leibniz, *Obras filosóficas y científicas*, Bd. 7 B, 2015, S. 659 f. u. 662–667.
Cc 2, Nr. 1281

Januar. 1676.

De numero jactuum in tesseris.
Proposuit mihi dux Roannesius

---

5 *Fragmentarische Notiz inmitten des Textes:*

$$A\begin{cases}0\\ C\begin{cases}0\\ B\begin{cases}0\\ D\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

$$D \sqcap \frac{1}{2} \qquad B \sqcap \frac{1}{4} \qquad C \sqcap \frac{1}{8} \qquad A \sqcap \frac{1}{16}$$

13 f. De numero ... Roannesius *erg. L* **17** D $\sqcap \frac{1}{2}$ B $\sqcap \frac{1}{4}$ *gestr. L erg. Hrsg.*

---

14 Roannesius: Gemeint ist Artus Gouffier (1627–1696), Herzog von Roannais, ein Vertrauter Blaises Pascals. **15** Notiz: Leibniz schreibt das Stück auf einem Papierbogen nieder, auf dessen erster Seite er bereits einen Gedanken zu einem anderen Thema notiert hat. Es handelt sich bei dieser inhaltlich nicht zum Stück gehörenden Notiz um ein spieltheoretisches Zerlegungsschema, das dem in N. 7 S. 31 Z. 9 festgehaltenen gleicht.

[*Teil 1*]

	1	2	3	4	5 6	
1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6	
	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6	
		3, 3	3, 4	3, 5	3, 6	
			4, 4	4, 5	4, 6	
				5, 5	5, 6	
					6, 6	
	1	2	3	4	5	6
	2	4	6	8	11	6
	22				17	

[*Tab. 1*]

1 Teil 1: Dieser Abschnitt behandelt offensichtlich das (allerdings erst auf S. 71 Z. 1–4 explizit formulierte) Würfelspielproblem, den gerechten, also an Gewinnchancen gleichen Einsatz zweier Spieler zu finden, wenn bei einem Wurf von einem, zwei, drei oder mehr Würfeln der eine Spieler darauf wettet, dass keine 6 fällt, der andere dagegen auf das Erscheinen mindestens einer 6 setzt. Es darf vermutet werden, dass es sich hierbei um das durch den Herzog von Roannais an Leibniz herangetragene Problem handelt. 12 Tab. 1: Leibniz befasst sich als erstes mit den möglichen Ausgängen eines Wurfes zweier nicht unterscheidbarer Würfel, in moderner Terminologie also mit Kombinationen mit Wiederholung. Die entsprechenden Ereignisse sind in diesem Falle jedoch ungleich wahrscheinlich, so dass sich das genannte Problem des „gerechten“ Einsatzes nicht lösen lässt, indem man die Anzahlen der verschiedenen Ausgänge bestimmt.

1 dez	a sans 6	b avec 6
2 ⋯	(a)	(b)
3 ⋯	$\overline{a, (a)}$	$\overline{(a)\frown b + (b)\frown a}$
4 ⋯		

[*Tab. 2*]

5 *Tab. 2:* *(1)*

1 dez	5 sans 6	1 avec 6
2 …	⟨6⟩	⟨15⟩
3 …	$15\frown 6$,, + ⌞$6\frown 1$	(a) 15,$\frown$5 (b) $15\frown 6$
4 …		

(2)

1 dez	5 sans 6	1 avec 6
2 …	15	6
3 …	$\overline{5, 15}$	$\overline{15\frown 1 + 6\frown 5}$
4 …		

(3)

1 dez	5a (sans 6)	1b avec 6
2 …	15(a)	6(b)
3 …	$\overline{\text{5a}, \text{15(a)}}$	$\overline{\text{15(a)}\frown\text{1b} + \text{6(b)}\frown\text{5a}}$
4 …		

ändert Hrsg. | *L*

---

5 Tab. 2: Leibniz nennt in dieser Tabelle zunächst konkrete Zahlen, ersetzt diese dann aber durch Buchstaben: a steht für 5, b für 1, (a) für 15 und (b) für 6. Er löscht die ursprünglichen Zahlenangaben nicht; der Lesbarkeit halber werden sie im Haupttext jedoch nicht wiedergegeben. Eine ähnliche Notation benutzt er auch in N. 7. Die Verwendung dieser Schreibweise ist wohl durch die Hoffnung motiviert, die Erkenntnisse verallgemeinern zu können: auf andere geeignete Spielgeräte wie etwa einen Oktaeder (also $a = 7$) oder auf andere Anzahlen an kritischen Ausgängen, z. B. auf die 1 *und* die 6 (also $b = 2$). Auch in dieser Tabelle betrachtet Leibniz Kombinationen mit Wiederholung, allerdings findet er nicht den richtigen Ansatz zur Berechnung ihrer Zahl. Tatsächlich ist beim Wurf von drei identischen Würfeln die Zahl an Ausgängen, in welchen eine 6 enthalten ist, gleich $(a) + (b)$, die der Ausgänge ohne 6 ist gleich $\frac{7}{3}(a)$, was sich für n Würfel zu den rekursiven Definitionen $a_n = \frac{n+4}{n}\, a_{n-1}$ und $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ verallgemeinern lässt. Modern formuliert, gibt es beim Wurf von n nicht unterscheidbaren Würfeln $\binom{n+4}{5}$ verschiedene Ausgänge, die mindestens eine 6 enthalten, und $\binom{n+4}{4}$ Ausgänge ohne 6.

	0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	
4	1	4	10	20		
5	1	5	15			
6	1	6				
7	1					

[*Tab. 3*]

	0	1	*A* 2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
B 4	1	4	*C* 6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	
	1	6	15	20	15	6	1
	Unitez	Naturels	∇laires	Pyram.	∇∇	∇P	PP

[*Tab. 4*]

9 Tab. 3: Leibniz will einer Lösung des Problems mit Hilfe des Arithmetischen Dreiecks näherkommen, wozu er dieses in zwei verschiedenen Gestalten notiert. Die in Tab. 3 gewählte Form findet sich auch in N. 36 S. 000; sie entspricht jener in Bl. PASCAL, *Traité de triangle arithmetique*, 1665 [Marg.], Ausklapptafel vor S. 1 (*PO* III, S. 446). 19 Tab. 4: In Teil 2 arbeitet Leibniz mit dem Arithmetischen Dreieck in der hier gezeigten Form (vgl. S. 67 f.). — Ausgehend von Tab. 3 u. 4 setzt Leibniz auf derselben Seite zu einem zahlentheoretischen Exkurs an (VII, 1 N. 89), in welchem er eine Vermutung formuliert, die dem Kleinen Satz von Fermat sehr nahe kommt. Die beiden Tabellen gehören somit gleichermaßen zu VII, 1 N. 89 (wo sie auf S. 583 abgedruckt sind) und zum vorliegenden Stück.

[*Teil 2*]

1 Dez. 6 faces. *a. b. c. d. e. f.*

Faces de deux dez,

aa	*ba*	*ca*	*da*	*ea*	*fa*
ab	*bb*	*cb*	*db*	*eb*	*fb*
ac	*bc*	*cc*	*dc*	*ec*	*fc*
ad	*bd*	*cd*	*dd*	*ed*	*fd*
ae	*be*	*ce*	*de*	*ee*	*fe*
af	*bf*	*cf*	*df*	*ef*	*ff*

Il faut adjouter au nombre Triangulaire ou des Com2naisons la somme des choses, et nous aurons le nombre des faces de deux dez.

2 f. a. b. c. d. e. f *(1)* Com2naisons de deux dez, 36. faces

	ab				
aa	bb	cc	dd	ee	ff
ab	bc				
ac	bd				
ad	be				
ae	bf				
af					

(2) Faces *L*

10 le | nombres *ändert Hrsg.* | des *(1)* formes *(2)* faces *L*

2 faces: Auch in Teil 2 untersucht Leibniz zunächst das Hilfsproblem, wieviele verschiedene Ausgänge es beim Wurf von mehreren identischen Würfeln gibt. Einen solchen Ausgang bezeichnet er auf französisch als *faces*, auf lateinisch als *facies*. 9 Com2naisons: Zu den Begriffen *com2naison* und *con3naison* vgl. N. 25 S. 159 Z. 21 – S. 160 Z. 2. Siehe auch das Beispiel in VII, 1 N. 89 S. 583 Z. 8 f. sowie die Definitionen, die Leibniz in seinem Handexemplar von Bl. Pascal, *Traité de triangle arithmetique*, 1665 [Marg.], auf der Ausklapptafel vor S. 1 (*PO* III, S. 446) notiert. 10 deux dez: Mit Hilfe von Binomialkoeffizienten lässt sich diese korrekte Lösung des Hilfsproblems bei zwei Würfeln als $K_6^2 = 1\binom{6}{1}+1\binom{6}{2}$ darstellen.

Pour les Faces de 3 dez, il faut chercher premierement toutes les varietez sans repetition qui sont le nombre pyramidal de 6. Il faut adjouter toutes les com2naisons doublees, par ce qu'on peut faire des faces de trois dez des com2naisons de choses, en supposans ou l'une ou l'autre des choses double.

Pour les faces de 4 dez. On prendra le nombre Triangulo-Triangulaire et on luy adjoutera une fois les choses, deux fois les combinaisons, trois fois les con3naisons.

Et ainsi de suite.

Mais lors que nous ne contons pas seulement les conjunctures, et lors que nous voulons distinguer les c a s non seulement par les nombres *a. b. c. d. e. f*, mais encor par les choses, c'est autre chose, et nous nous pouvons par exemple marquer ceux d'un des dez par *A. B. C. D. E. F*, ceux de l'autre par *a. b. c. d. e. f*, ainsi nous aurons:

1 Pour les *(1)* Con3naisons, *(2)* Faces *L*   3 par ce qv' *(1)* il faut *(2)* on peut *(a)* faire des combi *(b)* faire . . . dez, des *(aa)* combinaisons *(bb)* com2naisons | de choses *erg.* |, en *L*   6 fois les *(1)* nombres; deux *(2)* choses, *L*   8 seulement *(1)* les diversitez *(2)* les conjunctures *L*

---

1 f. varietez sans repetition: Hiermit ist die Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung gemeint (nicht etwa die der Variationen im modernen Sinne), und diejenige für drei Würfel lässt sich aus Tab. 4 als Pyramidenzahl der 6. Zeile ablesen.   3 trois dez: Die korrekte Lösung lautet in moderner Darstellung $K_6^3 = 1\binom{6}{1} + 2\binom{6}{2} + 1\binom{6}{3}$; Leibniz übersieht hier den ersten Summanden, der für „la somme des choses", die Anzahl der Würfel also, steht.   5 4 dez: Die richtige Lösung kann man modern mit $K_6^4 = 1\binom{6}{1} + 3\binom{6}{2} + 3\binom{6}{3} + 1\binom{6}{4}$ wiedergeben; Leibniz' Lösung dagegen berücksichtigt die Zahl der *combinaisons* $\binom{6}{2}$ nur zweimal.   7 ainsi de suite: Aufgrund des Irrtums in der vorausgehenden Zeile lieferte eine Verallgemeinerung der Leibnizschen Lösungen kein valides Ergebnis. Das korrekte Ergebnis für n Würfel lautet vielmehr $K_6^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{6}{k} = \binom{n+5}{5}$.   10 choses: Leibniz betrachtet nun also unterscheidbare Würfel. Die Ausgänge ihrer Würfe sind, modern gesprochen, Variationen mit Wiederholung. Den entsprechenden Ereignissen können gleiche Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, so dass sich das Ausgangsproblem auf dieser Grundlage lösen lässt. Im weiteren Verlauf des Stückes steht allerdings das allgemeinere Problem im Vordergrund, in wievielen Ausgängen eines Wurfes mit mehreren Würfeln eine zuvor festgelegte Zahl an Sechsen fällt.

$$\begin{array}{lll} Aa & Ba & \text{etc.} \\ Ab & Bb & \\ Ac & Bc & \\ Ad & Bd & \\ Ae & Be & \\ Af & Bf & \text{etc.} \end{array}$$

Ainsi les cas ou faces selon ce sens, seront les nombres de la progression senaire. Les faces de deux dez seront 36, de 3 dez 216, etc.; de même les faces de deux pentaedres seront 5, 25, 125, 625, etc., nombre de faces sans f. Leur difference sera le nombre des faces de deux cubes ou hexaedres où il y a le nombre f, la difference entre les quarrez, de 6 et de 5. Et s'il y a trois hexaedres la difference entre les cubes de 6 et de 5 donnera le nombre des faces avec f. Ainsi de suite. Et ces differences seront tousjours terminées par 1, parce que les termes [se terminent] tousjours par 6 et 5.

Il s'agit apresent de sçavoir les doublets; c'est à dire les faces où il y a f plus d'une fois. Et il est manifeste, qu'il n'y a qu'un seul cas dans deux hexaedres, où f soit double. Mais dans trois hexaedres, voyons combien de fois f est double; car il n'y peut estre qu'une fois triple. Pour double voyons. Il est une fois double dans deux hexaedres, adjoutons y le nombre des faces sans f, du 3$^{\text{me}}$, qui est 5; en voila 5; il est $\overline{6^2 - 5^2 - 1}$ fois simple dans 2 hexaedres, ce la ne se peut prendre qu'une fois, en adjoutant le 3$^{\text{me}}$; et en l'y combinant avec un seul f. Avant que de passer outre, il sera bon d'exprimer cecy par ordre:

8 f. les faces de *(1)* 5 dez *(2)* deux pentaedres ... 625, etc *(a)* les differences font *(b)* nombre ... sans *(aa)* f. *(bb)* | 6. *ändert Hrsg.* | leur *L* 10 hexaedres *(1)* qvi est sans une des choses par exemple sans f. *(2)* ou il y a | le nombre *erg.* | f. *L* 12 faces | sans *ändert Hrsg.* | f. *L* 14 sçavoir *(1)* combien il y a des *(2)* les doublets *L* 18 adjoutons y *(1)* le tro *(2)* les *(3)* le nombre des faces *(a)* du troisieme *(b)* sans f *L*

		0 *		1 *	2	3	[4]	[5]	
1 Hexaedres	$\overline{\text{6 faces}}$	$\overline{\text{5 faces}}$ $\overline{\text{sans } f}$	1 faces avec f	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{1 fois } f}$	*				
2 ·····	36 ····	25 ····	11 ····	10 ····	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{2 fois } f}$				
3 ·····	216 ···	125 ···	91 ····	$\underbrace{10\frown 5+25\frown 1}_{75}$	$\underbrace{10\frown 1+1\frown 5}_{15}$	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{3 fois } f}$			
4 ·····	1296 ··	625 ···	671 ···	$\underbrace{75\frown 5+125\frown 1}_{500}$	$\underbrace{75\frown 1+5\frown 15}_{150}$	$\underbrace{15\frown 1+1\frown 5}_{20}$	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{4 fois } f}$		
5 ·····	7776 ··	3125 ··	4651 ··	$\underbrace{500\frown 5+625\frown 1}_{3125}$	$\underbrace{500+150\frown 5}_{1250}$	$\underbrace{150+20\frown 5}_{250}$	$\underbrace{5\frown 1+20\frown 1}_{25}$	$\overline{\text{1 faces à}}$ $\overline{\text{5 fois } f}$	
6 ·····	46656 ·	15625 ·	31031 ·	$\underbrace{3125\frown 5+3125\frown 1}_{18750}$	$\underbrace{3125\frown 1+1250\frown 5}_{9375}$	$\underbrace{1250\frown 1+250\frown 5}_{2500}$	375	30	$\overline{\text{1 fac. à}}$ $\overline{\text{6 fois } f}$
		etc.	etc.						

[*Tab. 5*]

---

9 *Hilfsrechnungen zu Tab. 5:*

$$\begin{array}{r} 625 \\ 2500 \\ \hline 3125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 150 \\ 5 \\ \hline 750 \\ 500 \\ \hline 1250 \end{array}$$

9 *Nebenrechnung über Tab. 5:* | 300 325 $\cancel{3}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{0}0$ (über: $\cancel{1}2$, unter: $\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}4$) $\cancel{f}$ 8125 25 *gestr.* | L

Ex his manifesta est Tabulae continuatio. Nimirum *columnas* vocabimus, series perpendiculares, numeratas numero duplicationum. *Series* autem horizontales notatae numero hexaedrorum. Constructio haec est. Quilibet terminus componetur ex quintuplo seriei praecedentis columnae suae, et simplo seriei pariter et columnae praecedentis, ut ita stet semper:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & E & F & G \end{array} \quad \text{et} \quad E \sqcap 1A + 5B \qquad F \sqcap 1B + 5C \qquad G \sqcap 1C + 5D$$

	0	1	2	3	4
1	α	ε			
2	β	ζ	ι		
3	γ	η	κ	ξ	
4	δ	θ	λ	μ	π
				ρ	

[*Tab.*] ⊙

3 terminus *(1)* fiet ex sum *(2)* componetur *L* 13 *Unter Tab.* ⊙*:* | Scribatur hoc modo *nicht gestr.* |

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & & & 1 & & & & \\ \alpha & 1 & & & & 5^1 \frown & 1 & 1 & & & \\ \beta & Z & 1 & & & 5^2 \frown & 1 & 2 & 1 & & \\ \gamma & H & \kappa & 1 & & 5^3 \frown & 1 & 3 & 3 & 1 & \textit{gestr.} \\ \delta & \theta & \lambda & \mu & 1 & & & & & & \end{array}\right| L$$

---

15 Scribatur: Dieser erste Versuch, die Verteilung der Ausgänge mit Hilfe des Arithmetischen Dreiecks wiederzugeben (vgl. auch Tab. 8), ließe sich durch geringfügige Änderungen retten:

$$\begin{array}{lllll} 5^1 \frown & 1 & & & \\ 5^2 \frown & 1 & 1 & & \\ 5^3 \frown & 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

$\alpha = 5$	$\varepsilon \sqcap 1$	
$\beta = \alpha^2$	$\zeta \sqcap 1\alpha + 5\varepsilon \sqcap 2,5$	$\iota \sqcap 1$
$\gamma = \alpha^3$	$\eta \sqcap \overline{1\beta + \overline{5\zeta\,(\sqcap 5\alpha + 5^2\varepsilon)}} \sqcap 3,5^2$	$\kappa \sqcap \zeta\,(\sqcap 2,5) + 5\iota\,(\sqcap 5) \sqcap 3,5$
$\delta = \alpha^4$	$\theta \sqcap \overline{1\gamma + \overline{5\eta(\sqcap 5^2\alpha + 5^3\varepsilon)}} \sqcap 4,5^3$	$\lambda \sqcap 1\eta\,(\sqcap 3,5^2) + 5\kappa\,(\sqcap 3,5^2) \sqcap 6,5^2$
etc.	etc.	etc.

$\iota \sqcap 1$	$\xi \sqcap 1$	
$\kappa \sqcap 3,5$	$\mu \sqcap 1\kappa\,(\sqcap 3,5) + 5\xi\,(\sqcap 5) \sqcap 4,5$	
$\lambda \sqcap 6,5^2$	$\rho \sqcap 1\lambda\,(\sqcap 6,5^2) + 5\mu\,(\sqcap 4,5^2) \sqcap 10,5^2$	$\pi \sqcap 1$

[*Tab.*] ☽

Ex hac jam tabulae repraesentatione Analytica, inventa est ratio inveniendi quemlibet Tabulae terminum sine Tabula. Nimirum quilibet Tabulae numerus est multiplus potestatis Numeri numero Hedrarum Polyhedri unitate Minoris, hoc loco quinarii $\sqcap y$, affectus sub numero combinatorio. Quod ut clarius pateat tabulam ⊙ explicatam ope Tabulae ☽, sic repraesentabimus:

	0	1	2		
1	$1, y^1$	1			
2	$1, y^2$	$2, y^1$	1		
3	$1, y^3$	$3, y^2$	$3, y^1$	1	
4	$1, y^4$	$4, y^3$	$6, y^2$	$4, y^1$	1

[*Tab. 8*]

21 *Am Rande eine punktuelle Probe der Tabelle:* 25 $\begin{array}{r}25\\6\\\hline 150\end{array}$

10 *Über Tab.* ☽: | $\alpha \sqcap 5$ $\beta \sqcap$ *(1)* 5α *(2)* α^2 $\gamma \sqcap 5\beta \sqcap \alpha^3$ etc. $\varepsilon \sqcap 1$ $\zeta \sqcap \alpha + 5\varepsilon$ *gestr.* | *L* 12 numerus *(1)* est potestas *(2)* est multiplus *L* 14 clarius *(1)* patet *(2)* pateat *L* 17 $1, y^1$ $1,$ | y^0 *gestr.* | *L*

Hinc multa duci poterunt theoremata singularia. Lineas perpendiculares appellabo C o l u m n a s , et transversales appellabo S e r i e s : Exponentes potestatum in columnis crescunt progressione arithmetica naturali: in seriebus decrescunt etiam progressione arithmetica naturali. Afficientes potestatum in columnis sunt Unitates, Numeri Naturales, Numeri Triangulares, Numeri Pyramidales, Numeri Triangulo-Triangulares, verbo Numeri figurati. Afficientes potestatum in seriebus sunt characteristici Potestatum Binomicarum. Nempe sit radix $a+b$, cujus characteristici 1.1, quad. $1a^2+2ab+1b^2$, cubus: $1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$, et ita porro.

Problema palmarium huc redit: Dato numero Tesserarum, eundem numerum laterum habentium, iisdemque characteribus similiter inscriptarum, invenire numerum facierum, tum simpliciter, tum earum, in qua datus character reperiatur, aut non reperiatur, aut datis vicibus reperiatur. F a c i e s autem voco diversitates jactuum, tum a characteribus in supereminentia superficie apparentibus ortas, tum etiam ortas ab ipsis diversis Tesseris, quod ad sensum appareret, si iidem characteres diversis tesseris colore discernerentur vel magnitudine, ut si sit Tessera sola cubus characteres unius Tesserae, $A.\ B.\ C.\ D.\ E.\ F$, alterius $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f$, patet duabus tesseris ejusmodi jactis, differre Ab et aB. Et ita ut eodem exemplo insistamus, si sint 5 tesserae cubicae, quibus sex characteres $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ diversis coloribus inscripti, quaeritur quot sint facies sive jactus diversi, in quibus una aliqua harum rerum exempli gratia, a reperiatur vicibus 4. Vel positis quatuor tesseris, quot sint jactus in quibus eadem res, ut a vicibus duabus. Sumatur numerus laterum polyhedri 6, sumatur et numerus tesserarum 4, et numerus duplicationum. A numero Tesserarum subtrahatur numerus duplicationum, $4-2 \sqcap 2$. Residuo addatur unitas, fiet 3. Jam ponantur tot numeri unitate sola differentes quorum minimus 3, quot sunt

1 theoremata *(1)* admir *(2)* singularia. Lineas *(a)* trans *(b)* horizontales *(c)* perpendiculares *L* 2 S e r i e s : *(1)* Afficientes *(2)* Exponentes *L* 3 naturali *erg. L* 3 progressione *(1)* eadem *(2)* arithmetica naturali *(a)* Exponente *(b)* Afficientes *L* 4 sunt *(1)* Numeri, *(2)* | Numeri *gestr.* | Unitates *L* 6 sunt *(1)* Numeri *(2)* characteristici *L* 9 f. redit: *(1)* Datis lateribus *(2)* Dato numero laterum polyhedri, *(3)* dato numero Polyhedrorum | similiter signatorum *erg.* | aeqvalem datumqve numerum hedrarum habentium, *(a)* et similiter *(b)* et similiter sig *(4)* Dato numero Tesserarum, *(a)* et *(aa)* laterum *(bb)* lat *(cc)* latera numeri dati ejusdem, eademqve similiter signata habentium, *(b)* eundem ... habentium, *(aa)* similiterqve inscriptarum, aeqv *(bb)* similiterqve inscriptarum in *(cc)* iisdemqve characteribus *(aaa)* inscriptarum *(bbb)* similiter *L* 13 diversis *(1)* polyhedris ut *(2)* Tesseris *L* 14 f. vel magnitudine *erg. L* 15 sola *erg. L* 16 a. b. c. d. e. f. *(1)* supponendo majusculos albo, alteros nigro colore scriptos, *(2)* patet *L* 17 sint *(1)* duae *(2)* 5 *L* 19 vicibus 4. *(1)* Problema ita solvetur *(2)* vel *L* 21 f. duplicationum. *(1)* 2 *(2)* A numero ... duplicationum | vicinali *erg. L, streicht Hrsg.* |, $4-2 \sqcap 2$. *L*

unitates in numero duplicationum, hoc loco, 2, nempe 3. 4. Hi numeri ducantur in se invicem. Factus ex ipsis dividatur per factum ex totidem numeris unitate differentibus quorum minimus unitas, multiplicetur 1. 2, nempe 2, $\frac{12}{2} \sqcap 6$. Quotiens 6 multiplicatus per potestatem numeri numero laterum unitate minoris, hoc loco 5, cujus exponens differentia numeri tesserarum et vicium 2[,] seu 5^2, seu $6, 5^2 \sqcap 150$.

[*Teil 3*]

Problema

Dato numero Laterum,	6	
(Tessera enim si[t] Cubica, Hexaedros)		
Tesserarum ut	4	(6)
ut si 4 (vel 6) tesseris simul jaciendum sit,		
et Repetitionum,	2	(4)
ut si quaerantur jactus, in quibus eadem punctorum configuratio,		
ut ⁙ (nam omnium par ratio) bis (vel quater) reperiatur		

invenire numerum facierum, id est invenire numerum jactuum a se invicem differentium, in quibus dato Vicium numero repetitur configuratio proposita. Diversitas autem jactuum oritur tum ab ipsis punctis jactis, ut si duabus tesseris jaciamus nunc IV et 5, nunc IV et 3, tum a tesseris quibus fit jactus, ut jactus IV et 5 differet a jactu V, 4, si quod majusculis characteribus exhibetur, unius tesserae, quod minusculis alterius esse intelligatur: quod appareret, si tesserae plures coloribus, vel aliis notis discernerentur. Nec vero tantum eorum quae jaciuntur, sed et tesserarum quibus fit jactus ratio habenda

3 unitas *(1)*. Qvotiens multiplicetur per *(2)*, multiplicetur *L* 7 f. | Distinctius *erg. u. wieder gestr.* | Problema *(1)*: Dato numero Tesserarum ut 4. (6) eundem ac datum laterum numerum ··· 6. habentium | et ubiqve ac similiter inscriptarum *erg.* |, invenire Numerum facierum, in qvibus aliqvid character | inscriptus *erg.* | vel punctorum configuratio, ut ⁙ aliave (nam omnium eadem ratio) dato vicium numero, v. g. vicibus ··· 2. (4) reperiatur. brevius: *(2)* Dato *L* 11 sit, *(1)* invenire *(2)* et Repetitionum *L* 14 ut *(1)* ⋰ (vel ∷) bis (vel qvater) reperiatur *(2)* ⁙ (nam *L* 15 invicem *(1)* sive apparentia eorum qvae jaciuntur, sive ipsis tesseris jactis, *(2)* differentium *L* 17 f. nunc *(1)* 4. et 5. *(2)* IV. et 5. *(a)* vel *(b)* nunc ... ut *(aa)* IV a 5. *(bb)* jactus *(aaa)* 4 *(bbb)* IV. et 5. *L* 20 qvod | apparebet *ändert Hrsg.* |, si *L*

est. Quia problema nostrum servire debet ad solutionem alterius problematis quod ita conceptum est: Si convenerit inter duos ut quoties 5 quatuor Tesseris jecerit certum capiat ⟨numer⟩um denariorum, contra, quoties 5 abfuerit, certum solvat, quaeritur quid debeat esse porportio inter capiendum et solvendum, ut aequalitas servetur. Non est hic sermo.

Solutio

A Numero Tesserarum T, $\sqcap$ 4 (vel 6) subtrahatur numerus Repetitionum $R \sqcap 2$ (vel 4), supererit $T-R \sqcap 4-2 \sqcap 2$ (vel $6-4 \sqcap 2$). Huic residuo $T-R$, addatur unitas, fiet $T-R+1 \sqcap 3$ (vel 3).

Scribantur totidem Numeri continue sola unitate crescentes, quorum minimus $T-R+1$, sive 3 (vel 3) nempe $T-R+1$, $T-R+2$, $T-R+3$ etc. quot sunt unitates in numero repetitionum R, sive in 2 (4) nempe 3. 4. (vel 3. 4. 5. 6.).

Hi numeri continue crescentes unitate ducantur in se invicem: Productum 12 (360) dividatur per factum, ex totidem numeris sola unitate differentibus, seu sumtis deinceps ab unitate, 1 in 2 $\sqcap$ 2 (1 in 2 in 3 in 4 $\sqcap$ 24) fiet $\frac{12}{2} \sqcap 6$ $\left(\begin{matrix}\cancel{1}\cancel{2}\\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}\\ \cancel{2}\cancel{4}\cancel{4}\\ \cancel{2}\end{matrix} ⨍ 15\right)$.

Quotiens ducatur in numerum laterum tesserae, unitate minutum, hoc loco 5, toties in se ductum, quot in $T-R$, differentia Numeri Tesserarum et Repetitionum 2 (2) sunt unitates id est in 5^2 (5^2) $\sqcap$ 25 (vel 25) fiet $6 \frown 25 \sqcap 150$ ($15 \frown 25 \sqcap 375$).

2 quoties 5 *(1)* tribus *(2)* qvatuor *L* 6 Repetitionum *(1)* 2 *(2)* R $\sqcap$ 2, *(a)* (4) fiet *(b)* (vel 4) supererit *L* 8 f. $\sqcap$ 3 (| vel *erg.* | 3). *(1)* Ducantur in *(2)* Scribantur *L* 10 T − R + 1, *(1)* qvot *(2)* sive 3 vel (3) *L* 12 f. invicem: *(1)* , fiet: ⟨6⟩ *(2)* Productum ... per *(a)* totidem *(b)* factum, *L* 13 seu sumtis *erg.* *L* 15 ducatur *(1)* in numerum laterum te⟨r⟩ *(2)* in *(a)* ⟨Qvadratum⟩ *(b)* | qvi est *nicht gestr.* | numerus *(c)* numerum *L*

1 alterius problematis: Bei diesem handelt es sich vermutlich um das im Titel erwähnte Problem des Herzogs von Roannais. Die Lösung für den hier genannten Fall mit vier Würfeln lässt sich Tab. 5 auf S. 66 entnehmen. 6 (vel 6): Die eingeklammerten Zahlenangaben und Berechnungen in der *Solutio* fügt Leibniz nachträglich hinzu, um so ein zweites konkretes Beispiel für die Lösung des Problems zu geben. 17 Diese korrekte, bereits auf S. 69 f. beschriebene Lösung lässt sich modern wie folgt ausdrücken: Beim Wurf von T unterscheidbaren Würfeln ist die Zahl der Ausgänge, die genau R mal eine zuvor festgelegte Augenzahl zeigen, gleich $\binom{T}{R} 5^{T-R}$.

[*Französische Zusammenfassung*]

Le nombre des dez (6), et des repetitions (4) estant donnés trouver le nombre des doublets (375), suivant la repetition donnée (4) sans se servir d'aucune table, calcul de suite.

Du nombre des dez ostez le nombre des repetitions, adjoutez l'unité à ce qui reste (2). Et faites que ce qui provient (3) soit le moindre d'autant de nombre[s] croissans par l'unité (3. 4. 5. 6), qu'il y a d'unitez dans le nombre des Repetitions (4). Multipliez tous ces nombres l'un par l'autre de suite. Et divisez le produit (360) par le produit (24) [d']autant de nombres croissans par 1 et commençans par 1 (1. 2. 3. 4) ce qui se peut toujours faire sans reste. Multipliez le quotient (15) par la puissance de 5 (25) dont l'exposant (2) est la difference du nombre des dez et des repetitions. Et le produit (375) satisfera à la demande.

3 f. sans ... suite *erg. L* 5 repetitions, *(1)* (reste 2) adjoutez y l'unité (3) Et vous aurez un nombre, qvi sera le moindre, d'autant de nombres croissans par l'unité *(2)* le qvel doit estre multiplié pa *(3)* adjoutez *L* 8 f. le produit (24) *erg. L* 9 croissans par *(1)* l'unité, ou le moindre soit l'unité meme *(2)* 1. et *L*

2 (6): Auch die französischsprachige Kurzfassung ergänzt Leibniz nachträglich um die in Klammern gesetzten Zahlenwerte eines konkreten Beispiels.

11. DE ANALYSEOS HISTORIA
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 14 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 793

Datierungsgründe: Leibniz' Ausführungen in diesem Stück setzen inhaltlich seine Studien zur Algebra in den Jahren 1673 und 1674 voraus. Ein erster *terminus post quem* ist durch die Erwähnung des *Horologium oscillatorium* von Huygens (erschienen im Frühjahr 1673) gegeben; ein erster *terminus ante quem* lässt sich aus dem Umstand ableiten, dass Rafael Bombelli, mit dessen *Algebra* sich Leibniz seit dem Frühjahr 1675 beschäftigt (vgl. VII, 2 N. 49), im Stück nicht genannt wird. Diese Eingrenzung kann weiter präzisiert werden: So schließt die Verwendung eines Ergebnisses aus dem zwischen Dezember 1673 und Juni 1674 verfassten Stück VII, 7 N. 7 eine Niederschrift vor Ende 1673 aus. Und die Bemerkungen zu Sluses *Mesolabum* deuten darauf hin, dass Leibniz das Stück erst verfasst, nachdem er Mitte 1674 jenes Werk exzerpiert (VII, 7 N. 16) und für seine eigenen Arbeiten erschlossen hat; die vorherige Lektüre der Rezension des *Mesolabum* in den *Philosophical Transactions* hätte ihm nicht die gleiche Sicherheit des Urteils verschaffen können. In seiner Bemerkung zu Boulliau schließlich bezieht sich Leibniz mit ziemlicher Sicherheit auf das Gespräch mit diesem am 3. Oktober 1674 (VII, 5 N. 6 S. 31). Ein weiteres Indiz für eine Niederschrift nicht vor Oktober 1674 ist die Erwähnung Gosselins, denn Leibniz' Exzerpte aus und Marginalien in Gosselins *De arte magna* (VII, 3 N. 41) sind gesichert nicht vor Oktober 1674 (und wahrscheinlich nicht nach Januar 1675) entstanden. Die Erwähnung der *Geometriae pars universalis* von Gregory erhärtet eine Datierung auf diese Periode weiter, denn Leibniz' erste bisher bekannte Nennung dieses Werkes stammt aus dem Dezember 1674 (vgl. VII, 1 N. 13 S. 130 f.) Die Erwähnung von Girards *Invention nouvelle* spricht nicht gegen diese Datierung. Zwar wird Leibniz' bisher früheste Erwähnung dieser Publikation (VII, 2 N. 17 S. 189) auf März bis Mai 1675 datiert, und ihre erste Erwähnung im Briefwechsel ist die in Oldenburgs Brief vom 22. April 1675 (III, 1 N. 49 S. 242), doch wird sie in Schootens Appendix erwähnt, den Leibniz bereits seit Herbst 1674 zitiert (VII, 2 N. 3 S. 32). Insgesamt betrachtet ist unser Stück also sicher nicht vor Oktober 1674 und wohl eher nicht nach Januar 1675 entstanden.

De Analyseos Historia

Calculum literalem in locum numeralis primus omnium credo introduxit Franciscus Vieta, tametsi enim Gosselinum quendam aliosque obscuriores Algebrae scriptores

27 De Analyseos Historia *erg. L*

---

28 introduxit: Vgl. Fr. Viète, *In artem analyticem isagoge*, 1591 (= *VO* S. 1–12), Bl. 7 r° (*VO* S. 8). 29 Gosselinum: Vgl. G. Gosselin, *De arte magna*, 1577, etwa auf Bl. 82 v° u. 84 v°. 29 obscuriores: Dies trifft etwa auf Jean Borrel zu; vgl. J. Buteo, *Logistica*, 1559, Bl. 189 r°.

literis nonnunquam usos videam, tamen nec in exemplum eorum valuit autoritas; et ad novae scientiae formam longe aliis praeterea observationibus opus erat. Vieta autem cum videret antecessores suos in quaestionibus implicatioribus pluribus una incognitis oblatis duabus unitatibus fictitiis uti; satius credidit numeros cognitos incognitosque literis exprimere. Ita enim et lineis accommodari posse easdem ratiocinationes, et Arithmeticae cum Geometria consensum apparere, exemplo Geometrarum, qui in doctrina de rationibus magnitudines literis designant et alioquin rectam extra figuram positam, ad propositionem tamen pertinentem, una litera notatam separatim exhibere solent. Idem primus rationem ostendit excitandi ex radicibus aequationem quandam propositae similem, ut ex ejus genesi propositae analysis appareret; unde factum quoque est ut Analytica appelletur, quam alii speciosam vocant. Ego Calculum Symbolicum appellare malim.

Porro Vieta neminem Artis suae oppugnatorem habuit, praesertim cum de ejus usu modeste sentiret ipse. At Cartesius, ut erat inventorum alienorum in rem suam accommodandorum artifex insignis, cum ope calculi duo in Geometria praestitisset egregia; digestionem in classes locorum sive linearum calculi capacium, quarum intersectione aequationes construerentur, et inventionem tangentium, per aequationes duarum radicum aequalium. Dissimulato prorsus aut contemto Vieta, in totius scientiae autorem erigere se posse credidit, cui ut pollicitationum magnitudine pretium faceret; libro edito scribere ausus est, nullum esse problema quod methodo sua solvi non possit. Cumque animadver-

2 f. cum *(1)* observasset *(2)* videret *L* 4 credidit *(1)* pro qvalibet q *(2)* qvantitates literis *(3)* numeros *L* 6 f. in doctrina . . . alioqvin *erg.* *L* 11 qvam *(1)* alibi *(2)* alii *L* 14 in Geometria *erg.* *L* 15 f. digestionem *(1)* locorum sive linearum Geometricarum in Classes, *(2)* in . . . linearum *(a)* Analyseos, *(b)* calculi capacium | qvarum intersectione *(aa)* problemata *(bb)* aeqvationes construerentur *erg.* | , et *L* 16 tangentium, *(1)* ope duarum radicum aeqvalium *(2)* per *L* 17 in *(1)* novae *(2)* totius *L* 18 faceret; *(1)* jactavit in lib *(2)* in libro *(3)* libro *L* 19–75,1 animadverteret *(1)* Methodos suas *(2)* eam *L*

9 ostendit: Fr. Viète, *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo*, 1615, insbesondere S. 128 f. (*VO* S. 158). 11 speciosam: Ders., *In artem analyticem isagoge*, 1591, Bl. 5 r° (*VO* S. 4) unterscheidet das Rechnen mit Buchstaben als *logistica speciosa* von der *logistica numerosa*, dem reinen Zahlenrechnen. 16 construerentur: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106. 16 tangentium: Vgl. ebd., S. 40–49. 19 nullum: Vgl. ebd., S. 1 u. 118. Eine ähnliche Kritik an Descartes übt Leibniz bereits im Sommer 1673 in seinem Stück *Fines geometriae* (VII, 4 N. 25, S. 594 f.). Das Postulat „nullum non problema solvere“ geht allerdings auf Fr. Viète, *In artem analyticem isagoge*, 1591, Bl. 9 r° (*VO* S. 12) zurück.

teret eam ad curvilineorum dimensiones non porrigi, impossibile pronuntiavit rectam exhibere curvae aequalem, quod scilicet nulla tunc εὐθυνσις extaret.

Ea Viri confidentia ipsi pariter Artique adversarios paravit. Erant tunc in Gallia duo Geometrae insignes, Fermatius et Robervallius, quorum ille paraboloeidum omnium quadraturas, et methodum de maximis et minimis (qua et tangentes continebantur) dederat. Hic cycloeidis et solidi ejus circa axem exhibuerat dimensionem; aliaque problemata praeclara produxerat, quae manifestum erat Cartesianae Methodo non subjici, quod scilicet ad aequationes revocari non possent. Hi ergo praeterquam quod jactantiam manifeste absurdam ferre non possent; etiam illud non probabant, calculi praetextu a quibusdam constructiones Geometricas negligi, quarum elegantiae veteres cumprimis operam dedisse constabat.

Thomas Hobbes a Cartesio in *responsionibus ad objectiones Metaφysicas* indigne habitus; edito libro *de Corpore*, occasionem nactus de calculo ita censuit; modeste satis;

3 Viri *(1)* arrogantia *(2)* fiducia *(3)* confidentia *L* 6 axem *(1)* dederat *(2)* exhibuerat *L* 6 f. praeclara *(1)* solverat *(2)* produxerat *L* 7 Methodo *(1)* solvi non posse, *(2)* non *L* 9 praetextu *(1)* elegantes veterum *(2)* a qvibusdam *L* 12 indigne *(1)* tracta *(2)* habitus *L* 13 nactus de *(1)* symbolica *(2)* calculo *L*

1 pronuntiavit: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39. 5 dederat: Fermats Extremwertmethoden wurden in P. Herigone, *Supplementum cursus mathematici*, 1642 u. 1644, S. 59–69, dargestellt, später auch in Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255. Über die Existenz von Fermats Quadratur höherer Parabeln war Leibniz durch Roberval unterrichtet (vgl. VII, 6 N. 49_1 S. 507); vgl. auch den Brief von Fermat an Mersenne von Februar/März 1642, tlw. gedr. in M. Mersenne, *Tractatus mechanicus*, 1644, praefatio, § IV, Bl. a1 v° – a2 r° (*FO* I S. 195–198; M. Mersenne, *Correspondance* XI, S. 55–58). 6 exhibuerat: Vgl. den Brief von M. Mersenne an R. Descartes vom 28. April 1638, in: R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667; S. 380–384 (*DO* II S. 116–122; M. Mersenne, *Correspondance* VII, S. 173–179). — Robervals Quadratur der Zykloide erwähnt Leibniz bereits im Sommer 1673 (vgl. VII, 4 N. 36 S. 595). 12 responsionibus: Descartes' *Meditationes de prima philosophia* von 1641 waren als Beilage die brieflichen Einwürfe (*Objectiones*) von philosophischen Gegnern, darunter Gassendi und Hobbes, und deren Beantwortungen (*Responsiones*) angefügt. In diesen wird ein grundlegendes Unverständnis gegenüber Hobbes' Positionen deutlich. 13 censuit: Leibniz hat Hobbes' *De corpore* sowohl in der Erstausgabe von 1655 wie in der überarbeiteten Ausgabe von 1668 studiert (vgl. U. Goldenbaum, *Indivisibilia vera. How Leibniz Came to Love Mathematics*, in: Dies. u. D. Jesseph (Hrsg.), *Infinitesimal Differences*, 2008, S. 53–94). Hier bezieht Leibniz sich vermutlich auf die Formulierung der Erstausgabe: „Estque Analyticae, ut ita dicam, brachygraphia, ars quidem non docendi neque discendi Geometriam, sed inventa Geometrarum celeriter et compendio in Commentarios redigendi. Nam etsi inter propositiones longe dissitas, facilis sit per Symbola discursus, an tamen is discursus, cum fiat

etsi inter res longe dissitas facilis sit per symbola discursus, cum tamen fiat sine ipsarum rerum ideis, an valde utilis existimandus sit, se nescire. Postea vero a Wallisio Oxoniensi Mathematico scholarum ab Hobbio contumeliose tractatarum propugnatore durius acceptus, in ipsam ejus Methodum bilem effudit, edito libro de *Emendatione Mathematicae hodiernae*, ubi non contentus inutilem pronuntiare, etiam erroneam ostendere, posse sibi visus est. Ei vero ita a Wallisio satis mea sententia factum ut de Calculi symbolici veritate possimus esse securi; solaque de utilitate disceptatio supersit.

De Utilitate autem Analyseos quem vocant, variant sententiae doctorum quoque Virorum: alii nullam agnoscunt, alii velut inveniendi principium in pretio habent, ad

2 an *(1)* satis *(2)* valde utilis *(a)* existimanda *(b)* existimandus *L* 4 in *(1)* methodum eius, id est calculum symboli *(2)* in *(3)* ipsam *L* 6 sibi *erg. L* 6 f. factum *(1)* est *(2)* ut de *(a)* eius *(b)* Calculi symbolici *(aa)* usu in *(bb)* veritate ... securi; *(aaa)* nec nisi *(bbb)* solaqve *L* 8 Utilitate *(1)* Calculi Analytici *(2)* autem ... vocant, *(a)* duae p *(b)* variant *L*

sine ipsarum rerum Ideis valde utilis existimandus sit, certe nescio.“ (*De corpore*, 1655, cap. 20, S. 181.) 1668 hatte Hobbes den ersten Teil der Aussage bereits verschärft: „At Symbolica, qua permulti hodie utuntur putantes esse Analyticam, nec Analytica est nec Synthetica, sed calculationum Arithmeticarum quidem vera, Geometricarum autem falsa Brachygraphia ars quidem non docendi neque discendi Geometriam, sed inventa Geometrarum celeriter et compendio in Commentarios redigendi.“ (*De corpore*, 1668, S. 157; *HOL* I, S. 257 f.) 3 propugnatore: Leibniz bezieht sich hier wahrscheinlich u. a. auf die 1654 anonym veröffentlichte Streitschrift *Vindiciae academiarum*, welche von Wallis' Kollegen in Oxford, dem Astronomieprofessor Seth Ward und John Wilkins, dem Warden von Wadham College, verfasst worden war. Sie richtete sich gegen die Kritik an den Universitäten in Th. Hobbes, *Leviathan*, 1651, S. 179 f. (*HEW* I, S. 330–332). Wallis mischte sich mit seiner Schrift *Elenchus geometriae hobbianae*, 1655, in diese Kontroverse ein. 5 ostendere: Th. Hobbes, *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*, 1660 (*HOL* III, S. 1–232). 6 factum: Vgl. J. Wallis, *Hobbius heauton-timorumenos*, 1662, sowie Ders., *Animadversions of Dr. Wallis, upon Mr. Hobs's Late Book, De principiis et ratiocinatione geometrarum*, in: *Philosophical Transactions* I, Nr. 16 vom 6./16. August 1666, S. 289–294; Ders., *Thomae Hobbes quadratura circuli confutata*, 1669; Ders., *Thomae Hobbes quadratura circuli denuo refutata*, 1669; Ders., *An Answer of Dr. Wallis to Mr. Hobbes's Rosetum Geometricum in a Letter to a Friend in London, Dated July 16.*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 73 vom 17./27. Juli 1671, S. 2202–2209; Ders., *An Answer to Four Papers of Mr. Hobs*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 75 vom 18./28. September 1671, S. 2241–2250; Ders., *Dr. John Wallis his Answer, by Way of Letter to the Publisher, to the Book, Entituled Lux Mathematica, etc.*, in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 87 vom 14./24. Oktober 1672, S. 5067–5073. — Zumindest die Artikel und Rezensionen in den *Philosophical Transactions* waren Leibniz mit Sicherheit bekannt. Seine Haltung zu Hobbes' Positionen entwickelte sich entsprechend von fast euphorischer Zustimmung (vgl. seinen ersten Brief an Hobbes, 13./23. Juli 1670; II, I N. 25 S. 90 ff.) hin zu einer differenzierteren Sichtweise (vgl. Leibniz an Hobbes, 1674; II, I N. 119 S. 385).

demonstrandum parum valere existimant. Sunt contra qui prae symbolica linearem Methodum spernunt; a quibus omnibus diversa mihi ratio ineunda videtur. Nam qui prorsus inutilem putant experientia refutantur. Ope Analyseos Albertus Girardus vidit trisectionem anguli et aequationem quandam cubicam eodem reduci. Ope analyseos problemata ad duo loca reduci posse infinitis modis, quorum intersectione solvantur, ut Cartesius primum et egregie inprimis Slusius ostendit. Cartesius praeclaram inventionem duarum mediarum proportionalium ex hoc fonte duxit, per Circulum et Parabolam, et proprietatem Hyperbolae ad usum dioptricum. Calculo debetur praeclarum Hugenii inventum de Isochronismo Cycloeidis, ego quoque qui primus Circulum reduxi ad progressionem numerorum rationalium illud de me fateor, sine symbolorum usu, per tantos anfractus quod inveni ne quaesiturum quidem fuisse.

Cl$^{\text{mo}}$ Viro Ismaeli Bullialdo illud largior, sola Cartesiana methodo ne simplicissimam quidem quadraturarum, parabolicam, deprehendi posse; et ratio est, quia Cartesius non nisi aequationum resolutiones et constructiones tradidit; problemata autem quadraturarum ad aequationes reducere nemo docuit. Idem tamen fatebitur, locorum analyticam, si accedant principia Archimedis aut Cavalerii ad ipsas quoque quadraturas magni usus esse.

3 refutantur. *(1)* Ope Analyseos Cartesius dedit praeclaram constructionem duarum mediarum proportionalium *(2)* Ope *L* 4 analyseos *(1)* loca *(2)* problemata *L* 5 posse *(1)* constat *(2)* infinitis *L* 5 f. Cartesius primum et *erg. L* 7 per *(1)* Analysin *(2)* Circulum *L* 7 f. , et proprietatem ... dioptricum *erg. L* 12 sola *erg. L* 14 resolutiones *(1)* sive *(2)* et *L* 14 f. qvadraturarum *(1)* non possunt redu *(2)* ad *(a)* aeqvationem *(b)* aeqvationes reducere *(aa)* non docuit *(bb)* nemo *L* 15 tamen *(1)* fateor *(2)* fatebitur locorum *(a)* doctorum *(b)* analyticam *L*

3 vidit: A. Girard, *Invention nouvelle*, 1629, D2 v$^{\text{o}}$ – D3 v$^{\text{o}}$. — Vgl. Fr. van Schooten, *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*, 1659, *DGS* I S. 345–368. 5 reduci: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106; R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, insbesondere *Pars altera de analysi*, S. 51–95 (von Leibniz Mitte 1674 in VII, 7 N. 16 exzerpiert). Vgl. auch das im letzten Quartal 1674 verfasste Stück VII, 7 N. 40 S. 426. 6 inventionem: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67–69. 7 f. proprietatem Hyperbolae: Vgl. Ders., *La dioptrique*, 1637, S. 89–121 (*DO* VI, S. 165 bis 196). 9 Isochronismo: Vgl. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.], S. 42–58 (*HO* XVIII S. 158–187). 9 reduxi: Vgl. die in Band VII, 6 zusammengefassten Handschriften zur arithmetischen Kreisquadratur. 12 largior: Leibniz bezieht sich hier sehr wahrscheinlich auf das Gespräch mit Boulliau am 3. Oktober 1674 (VII, 5 N. 6 S. 31), in dem dieser bestritten hatte, dass die Resultate von Archimedes, zu denen auch die hier erwähnte Quadratur der Parabel gehört, allein mit den Mitteln der Algebra erzielt werden könnten.

Analyticen demonstrare posse non est cur dubitemus, nam doctrina est de Magnitudine in universum, qua numeris, spatiis, temporibus, motibus communia traduntur; de magnitudine autem in universum demonstrationes extare nemo credo in controversiam revocabit.

Omnis calculi ratiocinatio non nisi axiomatum Euclideorum, si aequalibus (proportionalibus) addas (auferas) aequalia (proportionalia) fieri aequatio (proportionalia): aequalium aequimultipla esse aequalia; totum parte majus esse, aliorumque id genus catena est: non minus quam demonstrationes lineares: ita ut plerumque alterae ab alteris non magis distare videantur, quam idem sensus verbis nunc latinis nunc Gallicis redditus a se ipso. Cum addere aut subtrahere calculus jubet, tu lineas ducis, cum ille multiplicat, tu rationes componis; cum dividit, cum regulam auream exercet, quaeris tertiam quartamve proportionalem. Cum ad potestates puras aut potestatum purarum radices assurgit, tu medias proportionales investigas. Hactenus alter alterum pari passu secutus est. Sed ubi ille ad affectum gradum protulit, ubi divisores aequationum inquirit, ubi per aequationes plurium incognitarum, inter se junctas ex similium comparatione natas per abrupta sibi viam facit; et rebus quodammodo vim infert; tu impar sequendi, velut inter nubes condentem caput vix oculis comitere. Nam saepe quae unius plagulae calculo exhibentur, vix justo volumine per lineas repraesentaveris: nullo profecto fructu; cum sub rerum multitudine lassa fatiscat imaginatio cujus potissimum causa linearum ductus adhibentur.

2 numeris, *(1)* lineis, motibus, communia traduntur figuris *(2)* spatiis *L* 4 f. revocabit. *(1)* Qvare *(a)* demonstratio *(b)* praecepta Analytica Geometrice demonstrare velle, perinde est, *(aa)* ac praecepta *(bb)* ac *(aaa)* demonstrationes *(bbb)* theoremata Geometricas per Empiricae qvoddam genus ostendere, qvod doctissimus Geometra Joachimus Jungius in tironum usum eleganter instituerat. Qvod ut suo usu non caret, ita necessarium nunqvam *(aaaa)* etsi *(bbbb)* et nisi *(aaaaa)* cum *(bbbbb)* in illis exemplis ubi peculiari elegantia praestari potest, supervacuum *(2)* Omnis *L* 6 (proportionalia): *(1)* aeqvimultiplorum aeqvalium *(2)* aeqvalium *L* 7 esse, *(1)* etc. *(2)* aliorumqve *L* 8 plerumqve *(1)* Geom *(2)* alterae *L* 9 non *(1)* maius *(2)* magis *L* 11 f. dividit, | cum ... exercet *erg.* | qvaeris tertiam *(1)* proportionalem *(2)* qvartamve *L* 12 puras *erg. L* 12 purarum *erg. L* 14 ad *(1)* affectas aeqvationes *(2)* | affectas *ändert Hrsg.* | gradum protulit, | ubi ... inqvirit *erg.* | ubi | per *erg.* | aeqvationes *L* 16 vim *(1)* facit *(2)* infert; tu *(a)* e *(b)* longinqvo *(c)* non nisi *(d)* impar *L* 17 comitere. Nam *(1)* im *(2)* ea saepe operationum multitudo unius plagulae calculo comprehenditur, ut lineis exhibere velle *(3)* Nam *L* 18 vix *(1)* integri voluminis *(2)* justo *L* 19 sub *erg. L* 19 f. ductus *(1)* exhibentur *(2)* adhibentur *L*

5 axiomatum: Vgl. die Liste der Axiome in EUKLEIDES, *Elementa*, I. 17 inter ... oculis: P. VERGILIUS Maro, *Aeneis*, IV, 177. **24** instituerat: Vgl. J. JUNGIUS, *Geometria empirica*, 1627.

Fateor equidem saepe fieri, ut quae prolixo calculo invenimus demonstrari possint paucis linearum ductibus. Sed tunc rursus distinguendum arbitror. Compendium enim aut verum est aut apparens. Verum cum totam ratiocinationem lineis exhibemus valde contractam, apparens cum inter demonstrandum ad alias propositiones alibi demonstratas lectorem remittimus quae rursus ex aliis pendent, ut junctis in unum omnibus futura sit demonstratio linearis ipso calculo prolixior. Cum apparens est brevitas rursus distinguo nam propositiones quibus utimur inter demonstrandum aut pulchrae sunt atque elegantes ac dignae velut ad perpetuam rei memoriam condi Archivis Geometrarum; quo casu utilis est demonstratio Geometrica veritatis calculo inventae. Calculi fructus, non in praesens tantum problema, sed in perpetuum valit⟨uri⟩ ut egregia ratiocinandi compendia inter calculandum inventa theorematis inclusa serventur in usum. Sin quod ego calculo inveni, tu lineis exhibes, inversa tantum calculi vestigia describentibus; operam tuam laudare non possum. Hoc enim admisso infinitis voluminibus sine ratione Geometria onerabitur. Quando autem evenit ut demonstratio linearis vere brevis sit, nec nisi pauca lemmata, aut theoremata alibi demonstrata, requirat, tum vero plerumque eveniet, ni fallor, ut eadem brevitate per calculum quoque possit absolvi. Ibi ergo eligendi libertas esto scriptori. Ego certe malim autorem mihi analysin suam quam synthesin dare; nam eadem opera et inventionis rationem patefaciet, quae inter linearum ductus non aeque tralucet: scriptoris autem interest aliquando lineis potius quam calculis uti; nam ita et profanos longe a scientiae mysteriis arcebit, et inventis suis plus admirationis conciliabit. Ita enim plerumque comparatum est, ut quae minus intelligimus magis suspiciamus. Eoque consilio non est dubitandum ab Archimede usum indivisibilium, ab Apollonio et Pappo calculi vestigia supressa esse, praesertim cum artes illae non nisi paucis et magnis

1 f. possint *(1)* paucis verbis *(a)* ac *(b)* sed tunc *(2)* paucis *(a)* linearum ductibus; idqve praesertim sagaci Analytico saepe monstrat ipse Calculi exitus; qvo casu adeo non improbo *(b)* linearum ... tunc *(aa)* illud *(bb)* rursus *L* 2 Compendium *(1)* autem *(2)* enim *L* 3 Verum *(1)* si *(2)* cum *(a)* nihil extra *(b)* totam *L* 4 f. ad *(1)* aliam propositionem *(2)* alias propositiones | alibi *(a)* demonstrationes *(b)* demonstratas *erg.* | lectorem *L* 7 inter demonstrandum *erg. L* 8 dignae *(1)* memorari; *(2)* velut *L* 9 inventae. *(1)* Cum hic sit potissimus *(2)* calculi *(a)* non fructu *(b)* fructus, *L* 10 perpetuum *(1)* utilis et valit⟨urus⟩ *(2)* valit⟨uri⟩ *L* 13 possum. *(1)* Ita enim infinitis *(2)* Hoc *L* 13 sine *(1)* usu *(2)* ratione *L* 15 pauca *(1)* aliunde *(2)* vel *(3)* lemmata, aut | theoremata *erg.* | alibi demonstrata, *(a)* | adhibeat *nicht gestr.* | *(b)* reqvirat, tum *(aa)* maxime ea *(bb)* vero *L* 16 brevitate *(1)* lineis *(2)* per *L* 16 possit *(1)* exhiberi. *(2)* absolvi. Ibi *(a)* vero *(b)* ergo *L* 21 f. magis *(1)* admiremur *(2)* suspiciamus *(a)* Idqve *(b)* Eoqve *L* 23 calculi *(1)* compendia *(2)* vestigia *L*

viris notae, apud vulgus Geometrarum erroris suspicione cauturae non fuissent; quod nunc minime metuendum est, rebus in clariore luce collocatis.

Caeterum cum soleant homines suam quisque artem plus aequo admirari, mirum non est analyticos ex adverso linearium demonstrationum usum elevasse. Neque enim nisi magnis viris et ad omnia paratis competit aeque de rebus omnibus judicia ferre. Ex quibus Schotenius eo usque provectus est, ut libros theorematum inutiles pronuntiaret, cum inquit, eadem suo quisque marte per calculum investigare possit, intellectis semel *Elementis* Euclidis, et praeceptis Analyticis. Itane vero? Tu admiranda Archimedis inventa, et pulchra Apollonii theoremata, et exquisitas Pappi *Collectiones* inutiles pronuntias. Poteras eodem jure dicere, praeter Euclidem et Cartesium, et tuos in eum *Commentarios* omnes de Geometria libros supervacuos esse. Ego vero ita sentio hunc potissimum esse calculi fructum, ut propositiones, quae nihil aliud quam elegantia calculi compendia sunt, in aerarium publicum referantur, quo aliis imposterum quaerendi labor minuatur. Quare nec Cartesii consilium probo quod ipsum scio non secutum, qui duobus tantum uti suadebat Theorematis; (triangulorum similium latera proportionalia esse; et in Triangulo rectangulo quadratum hypotenusae quadratis duorum reliquorum laterum aequari). Nam expertus scio, ad ingentes saepe calculos, reductu difficiles attolli, quae per inventa theoremata nullo negotio conficiuntur. Adde quod saepe ne in mentem quidem nobis veniret, ejusmodi propositiones quaerere, quarum ubi aliis inventae sunt demonstrationem postea vel calculo vel lineis investigare plerumque non arduum est.

1 Geometrarum *erg. L* 4 adverso *(1)* linearis Geometriae usum *(2)* linearium *L* 4 f. Neqve ... ferre *erg. L* 8 Itane vero? *erg. L* 10 dicere, *(1)* | post *nicht gestr.* | *(2)* praeter *L* 11 libros *(1)* inutiles *(2)* supervacuos *L* 12 ut *(1)* elegantia ca *(2)* propositiones *L* 13 referantur *(1)*. Ita *(2)*, qvo *L* 15 uti *(1)* se ajebat *(2)* suadebat *L* 15 latera *(1)* homologa *(2)* proportionalia *L* 17 ad *(1)* immensos saepe *(2)* ingentes saepe calculos *(a)* assurgi, *(b)*, reductu *L* 18–20 Adde ... investigare *(1)* saepe nec *(2)* plerumqve ... est *erg. L*

7 inquit: Vgl. z. B. Fr. van SCHOOTEN, *Praefatio ad lectorem*, in: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I Bl. 2 r° („Nec enim video, quid impraesentiarum, post mediocrem in Arithmeticae et Geometriae elementis exercitationem, calculique, eadem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere possit, quo minus inoffenso pede ad hanc Geometriam accedat“), sowie Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 206 f. 15 duobus ... Theorematis: R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 461 (*DO* IV S. 38); bei den Theoremen handelt es sich um EUKLEIDES, *Elementa*, I, 47 u. VI, 4.

Ego igitur media sententia antecedendum arbitror; egregias propositiones in literas referri, et quod hinc sequitur, ubi res postulat adhiberi debere arbitror. Proposito problemate primum elementa experiunda, antequam ad calculum accedatur qui non nisi difficilioribus i n v e n i e n d i s servari debet. De demonstrationibus jam inventorum si literalis pariter ac linearis, suas quaeque peculiares elegantias habeat, posse utramque exhiberi, quemadmodum nihil prohibet, duas ejusdem theorematis dari demonstrationes lineares; si alterutra earum elegans videatur, altera simplicem calculi tramitem sequatur praeferri debere. Si neque literae neque lineae quicquam singulare exhibeant inter demonstrandum; literales demonstrationes lectori, lineares scriptori utiliores.

Exemplum subjiciam unicum a me observatum: Dixerat Cartesius ex calculo sibi constare: si Circulus parabolam secet, demissarum ex punctis intersectionis in axem parabolae perpendicularium ab uno latere summam; summae perpendicularium ab altero latere aequari. Schotenius ut theorematis veritatem calculo investigaret, tres credo paginas in suis *Commentariis* complevit; hoc cum animadvertisset Jac. Gregorius Scotus, demonstrationem investigavit Geometricam sic satis elegantem. Ego vero reperi, per analysin demonstrari posse tribus verbis: eademque opera etiam detexi qua ratione Theorema tam elegans invenerit Cartesius, et qua ratione innumera alia similia in aliis curvis, sese

1 f. egregias *(1)* theoremata *(2)* propositiones in literas *(a)* referendae *(b)* referri *L* 2 f. postulat *(1)* adhibendas cum fructu *(2)* adhiberi *(a)* posse *(b)* debere arbitror. *(aa)* De qvo *(bb)* De demonstrationibus | ⟨autem jam inventorum⟩ *erg.* | cum ita sentio *(aaa)* literalem *(bbb)* si literalis pariter ac linearis *(cc)* proposito *(aaa)* ad inveniendum *(bbb)* problemate *L* 8 neqve *(1)* calculus *(2)* literae *L* 9 demonstrandum; *(1)* calculum *(2)* literas *(3)* literales *L* 11 f. secet *(1)* in punctis *(2)* demissarum *(a)* in *(b)* ex ... perpendicularium *(aa)* summam, unius *(bb)* ab uno ... ab *(aaa)* uno *(bbb)* altero *L* 13 ut *(1)* theorema hoc *(2)* theorematis *L* 15 Geometricam *(1)* prolixius *(2)* non admodum *(3)* sic satis *L* 16 ratione *(1)* prob *(2)* Theorema *L* 17 curvis, *(1)* inter se *(2)* sese *L*

10 Dixerat: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 92. 14 complevit: Vgl. Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 330–343. 15 demonstrationem: Vgl. J. Gregory, *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 70, S. 130–132. 15 reperi: Ein kurzer algebraischer Beweis macht sich zunutze, dass sich die Schnittpunkte von Kreis und Parabel über eine Gleichung 4. Grades, bei welcher der kubische Term fehlt, berechnen lassen. Aus der Multiplikation der Linearfaktoren aber ergibt sich, dass der Koeffizient dieses kubischen Terms gleich der negativen Summe der vier Wurzeln dieser Gleichung ist, womit diese gleich Null sein muß. Bei seinen Überlegungen zur *constructio aequationum* stellt Leibniz eine Gleichung für die Schnittpunkte von Kreis und Kegelschnitt auf (vgl. VII, 7 N. 7 S. 43–48), von welcher die für den genannten Beweis benötigte ein viel einfacherer Spezialfall ist.

invicem aut circulum secantibus, aliis rectis in axis locum cum opus est adhibitis, concinnari possint, quod neque Schotenius calculo suo, neque Gregorius linearum ductu praestiterint. Quod si ergo haec propositio in aerarium theorematum referri deberet: nemo prudens in dubium revocabit; analyticam demonstrationem caeteris praestare: cum et inventi rationem detegat. Imo si mihi id negotii datum esset, ego problematis instar ita conciperem: Datis duabus curvis se secantibus, invenire lineam rectam in quam demissae ex punctis intersectionis unius lateris angulo dato, simul sumtae; sint rectis alterius lateris simul sumtis aequales. Cujus problematis solutio generalis ostendet in parabola, rectam quaesitam esse ipsum axem; et si angulus datus sit rectus. Hoc ergo theorema, problematis generalis non nisi corollarium erit.

Quoniam ergo de propositionum Geometricarum Aerario, mentio semel iterumque hic incidit: adjiciam paucis: inter potissima Mathematicae doctrinae desiderata a me censeri, librum, omnes propositiones geometricas elegantes hactenus inventas, quanta licet brevitate demonstratas, ipso demonstrandi ordine continentem. Demonstrationes autem tales esse debere, cum licet, ut eadem opera inveniendi rationem ostendant. Usus ingens foret tum ad inveniendum, (theorematis praeclaris omnibus velut in conspectu positis), tum ad demonstrandum. Multa enim apud Archimedem et ejus commentatorem Eutocium; apud Apollonium, Pappum; et alios veteres praeclare demonstrantur. Adjici-

1 locum *(1)* exhibitis, *(2)* exhiberi *(3)* cum *L* 2 ductu *(1)* invenissent *(2)* praestiterint *L* 5 ego *(1)* theorematis *(2)* problematis *L* 6 duabus *(1)* curvis *(2)* curvis se *(3)* lineis *(4)* curvis *L* 6 f. lineam *(1)* in qvam ductae ex uno latere ex punctis intersectionis rectae angulo dato *(2)* rectam *L* 9 et *(1)* angulum esse rectum. d *(2)* si angulus *L* 12 potissima *(1)* scientiae huius *(2)* Mathematicae | doctrina *ändert Hrsg.* | desiderata *L* 13 geometricas *erg. L* 14 demonstratas | continentem *streicht Hrsg.* | , ipso *L* 15 ostendant. *(1)* Possis Euclidis continuationem appellare *(2)* Usus *L* 18–83,3 demonstrantur. *(1)* Adjecta sunt insignia qvaedam theoremata *(2)* Adjectae sunt insignes propositiones *(3)* Adjiciendae ... a *(a)* Galilaeo *(b)* Commandino, | Clavio *erg.* | ... | Stevino *erg.* | ... Gregorio a S. V. *(aa)* Robervall *(bb)* Cartesio *(aaa)* Robervallio *(bbb)* Fermatio ... | Pascalio *erg.* | ... | Slusio, Robervallio *erg.* | | Huddenio *erg.* | ... Heuratio | , Huddenio *streicht Hrsg.* | ; aliis; *L*

17 Archimedem: Vgl. etwa Archimedes, *De sphaera et cylindro*; Ders., *Dimensio circuli*; Ders., *De spiralibus*; Ders., *De planorum aequilibris*; Ders., *De conoidibus et sphaeroidibus*; Ders., *De planorum aequilibris*; Ders., *Quadratura parabolae.* 18 Eutocium: Vgl. Eutokios, *Commentarii in libros Archimedis.* 18 Apollonium: Vgl. Apollonios, *Conica.* 18 Pappum: Vgl. Pappos, *Mathematicae collectiones.*

endae sunt insignes propositiones a Commandino, Clavio, Vieta, Stevino, Luca Valerio, Galilaeo, Guldino, Cavalerio, Gregorio a S. V., Cartesio, Fermatio, Torricellio, Pascalio, Hugenio, Slusio, Robervallio, Huddenio, Wrenno, Wallisio, Heuratio; aliis; quibus saepe lubens uterer inter demonstrandum compendii causa, nisi a ratione alienum videretur; lectorem unius tuae demonstrationis intelligendae causa ad tot alios autores non omni-

---

1 Commandino: Federico Commandino besorgte eine Anzahl lateinischer Übersetzungen von mathematischen Werken der griechischen Antike, die er zum Teil auch kommentierte. 1 Clavio: Gemeint ist wohl Clavius' Euklidausgabe *Elementorum libri XV*, 4. Ausg. 1607 [Marg.]. Clavius war aber auch Autor eines eigenständigen, von Leibniz rezipierten Werkes zur Geometrie; vgl. Chr. Clavius, *Geometria practica*, 1604. 1 Vieta: Vgl. Fr. Viète, *Supplementum geometriae*, 1593 (*VO* S. 240–257); Ders., *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593 (*VO* S. 347–435); Ders., *Ad Adr. Romani problema responsum*, 1595 (*VO* S. 305–324). 1 Stevino: Vgl. S. Stevin, *Problematum geometricorum libri V*, 1583, sowie die von Albert Girard herausgegebene und kommentierte Werkausgabe *Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin*, 1634, Tl. III, *La practique de géometrie* (S. 341–432).
1 Luca Valerio: Vgl. L. Valerio, *De centro gravitatis solidorum*, 1604; Ders., *Quadratura parabolae*, 1606. 2 Galilaeo: Vgl. G. Galileo, *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, 1638 (*GO* VIII S. 39–318); M. Mersenne, *Les nouvelles pensées de Galileo*, 1639. 2 Guldino: Vgl. P. Guldin, *Centrobaryca*, 1636–41. 2 Cavalerio: Vgl. B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635; Ders., *Exercitationes geometricae*, 1647. 2 Gregorio a S. V.: Vgl. Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647. 2 Cartesio: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I. 2 Fermatio: Zu Lebzeiten veröffentlichte Pierre de Fermat selbst keine seiner mathematischen Schriften. Ohne ihn als Autor zu nennen, wurde 1660 *De linearum curvarum* publiziert. Eine Reihe seiner Manuskripte, deren Ergebnisse Pariser Mathematikern oftmals schon seit längerem bekannt waren, wurde posthum in P. de Fermat, *Varia opera*, 1679 [Marg.], abgedruckt. Darunter waren auch solche zur Geometrie, etwa die 1657–58 entstandene Schrift *De solutione problematum geometricorum* (*Varia opera* S. 110–114, *FO* I S. 118–132). 2 Torricellio: Vgl. E. Torricelli, *Opera geometrica*, 1644 (*TO* I, 1 S. 1–230 u. *TO* I, 2 S. 101–232). 2 Pascalio: Vgl. Bl. Pascal, *Essay pour les coniques*, 1640 (*PO* I S. 252–260); Ders., *Histoire de la roulette*, 1658, lat.: *Historia trochoidis*, 1658 (*PO* VIII S. 195–223); sowie die unter dem Pseudonym Amos Dettonville verfassten *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*, 1658–59 (*PO* VIII S. 323–384 u. IX S. 1–149). 3 Hugenio: Vgl. etwa Chr. Huygens, *Theorema de quadratura hyperbolae, ellpsis et circuli*, 1651 (*HO* XI S. 281–337); Ders., *De circuli magnitudine inventa*, 1654 (*HO* XII S. 113–181); Ders., *Réduction de la rectification de la parabole*, 1657 (Ms.); Ders., *Recherches sur les propriétés géometriques de la cycloide*, 1658 (Ms.); Ders., *Recherches sur la théorie des développées*, 1659 (Ms.) (*HO* XIV S. 387–405); Ders., *Demonstratio regulae de maximis et minimis*, 1667 (Ms.) (*HO* XX S. 229–241); Ders., *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*, 1667 (Ms.) (*HO* XX S. 243–255); Ders., *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.], S. 42–58 (*HO* XVIII S. 158–187).
3 Slusio: Hier dürfte neben dem *Mesolabum* von 1668 insbesondere Sluses Tangentenbrief in den *Philosophical Transactions* von 1672/73 gemeint sein. 3 Robervallio: Bereits M. Mersenne, *L'optique et la catoptrique*, 1651, S. 117, hatte Gilles Personne de Roberval als „Nostre Geometre“ bezeichnet und dabei dessen geometrische Arbeiten über die Oberflächen verschiedener Brennspiegel genannt. Leibniz erwähnt diese Bemerkung Mersennes im Oktober 1674 (vgl. VII, 5 N. 74 S. 91).

bus obvios remittere: ita cogimur saepe inviti, eadem denuo demonstrare, taedio nostro pariter et lectorum peritorum. Cui malo mederetur liber si quis producet aliquando quo continuarentur quodammodo Euclidis *Elementa*, qui versaretur in omnium manibus, et quem a doctis accurate examinatum, tuto postea allegari posse constaret. Et tale quiddam ab Academia Scientiarum Regia expectare videtur orbis, quod ad Gloriam ejus dudum florentem magnopere pertineret. Quanquam autem Euclidis exemplo doctrinam Analyticam generalem seu de rationibus, doctrinam de magnitudinum commensurabilitate aut incommensurabilitate seu de numeris, ac denique doctrinam de spatiis et de motibus quibus spatia aut eorum partes designantur, quae mere Geometrica est comprehendi uno opere necesse sit, scientiae enim istae non nisi ab ignaris divellerentur: ausim dicere duabus artibus, scilicet novorum quorundam symbolorum ad Geometricas designationes accommodatione, et multorum casuum particularium revocatione ad propositiones generales, effici posse, ut formae quadratae mediocris (in quarto vocant) librum non exeat volumen nulli facile praestantia et fructu cessurum. Aequitatis etiam erit cuilibet propositioni adscribi autorem suum si modo extra controversiam sit quod unum saepe pretium laboribus suis postulant Viri summi, et tum inventa tum inventores ab oblivione et plagiariorum malitia vindicari; et thesaurum quendam publicum condi, qui novis quotidie eruditorum collationibus locupletetur.

5 qvod *(1)* ut plurimum *(2)* ad Gloriam *L* 7 Analyticam *(1)* geometri *(2)* generalem *L* 8 f. et de *(1)* spatiorum mutationibus seu motibus *(2)* motuus *(3)* motibus *L* 11 artibus *(1)* altera *(2)* scilicet *L* 12 accommodatione, *(1)* altera *(2)* et *(a)* part *(b)* multorum *L* 15 adscribi *(1)* inventorem *(2)* autorem *L* 15 si modo ... sit *erg. L* 17 et plagiariorum malitia *erg. L*

11,3 Huddenio: Die Tangentenmethode von Hudde findet sich in J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. Huddes geometrische Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades mit sich abwechselnden Vorzeichen gibt Schooten in seinem Kommentar zu Descartes' *Geometria* wieder; vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I, S. 325–328. **11,3** Wrenno: Vgl. Chr. WREN, *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici*, 1669. Ergebnisse von Wren wurden auch publiziert in J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659, S. 70–76 (*WO* I S. 533–537), sowie in DERS., *Mechanica*, 1670–71, S. 556–567 (*WO* I S. 929 bis 938). **11,3** Wallisio: Vgl. J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659 [Marg.] (*WO* I S. 489–569); DERS., *Opera mathematica*, 2 Bde, 1656–57; DERS., *Mechanica*, 1670–71 (*WO* I S. 570–1063). **11,3** Heuratio: Vgl. H. van HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520.

12. GENERATIO CIRCULI
[November 1675 – Januar 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 4 IV 13c Bl. 33. 1 Streifen ca 20 × 5 cm. 3 Z. unten auf Bl. 33 r°. Darüber die Aufzeichnung VI, 3 N. 29_1. Der Streifen hing ursprünglich zusammen mit LH 35 X 8 Bl. 1 (= VII, 5 N. 57).
Cc 2, Nr. 1405 tlw.

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte kurz nach dem von den Herausgebern auf November 1675 – Januar 1676 datierten VII, 5 N. 57 entstanden sein.

Videtur simplicius intelligi generatio circuli quam rectae. Sit figura quaedam certo sui puncto manens in certo loco, eo modo mutans locum, ut sibi semper ipsi similis appareat respectu eorundem extra ipsum, certum aliquod punctum in ea sumtum describet arcum circuli. Imo . Opus ut sit plana figura. .

9 Sit *(1)* Linea rigida qvaecunqve *(2)* qv *(3)* figura *L* 11 respectu … ipsum *erg. L* 12 sit *(1)* planum *(2)* plana *L*

13. CYLINDER SINUUM EX APPLICATIS PARABOLICIS
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 42 V Bl. 7. Ca $\frac{2}{3}$ eines Bl. 2°, von dem die linke untere Ecke abgeschnitten und die rechte untere Ecke ausgerissen sind. 9 Z. auf Bl. 7 r°. Darunter eine Aufzeichnung zur Rechenmaschine (Druck in Reihe VIII vorgesehen). Bl. 7 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Ende 1672 bis Herbst 1673 nachgewiesen. Die inhaltlichen Bezüge zu VII, 4 N. 26 u. VII, 4 N. 31 deuten auf eine Entstehung im Sommer 1673 hin.

$$\underset{\substack{\wedge\\ x}}{\sqrt{ax}} \frown \underset{\substack{\wedge\\ a-x}}{\sqrt{ax}} \text{ vel } \sqrt{ax} \frown \sqrt{a^2-ax} = \sqrt{a^3x-a^2x^2},\ \smile a = \sqrt{ax-x^2}. \text{ Sinus.}$$

Ergo parabolicae applicatae in se inverse ductae cylindro sinuum aequantur.

$$a^2-,\ \underset{a^2+x^2-2ax}{a-x}\ \square.\ \text{fiet} a^2-a^2-x^2\ -2ax.$$

$$\sqrt{\frac{\beta a}{\gamma}x} = \sqrt{\frac{\beta^2a^2}{\gamma^2}-\frac{\beta ax}{\gamma}}_{[,]} \frown [\sqrt{\ }]ax = \sqrt{\frac{\beta^2a^3x}{\gamma^2}-\frac{\beta a^2x^2}{\gamma}}. \text{ Divisum per } a \text{ dat}$$

$$\frac{\beta a}{\gamma} - x$$

$$\sqrt{\frac{\beta^2a}{\gamma^2}}\ -\frac{\beta}{\gamma}x^2 = z \text{ applicata Ellipseos quia } z^2 = \frac{\beta^2a}{\gamma^2}-\frac{\beta x^2}{\gamma}. \text{ Ergo } \frac{\beta z^2}{\gamma} = v^2 = \frac{\beta a}{\gamma} - x^2.$$

9 $\smile a$: Leibniz rechnet hier und in der Folge fortlaufend. 11 Ergo ... aequantur: Vgl. VII, 4 N. 26 prop. 2 S. 426 sowie VII, 4 N. 31 S. 550. 12 $-2ax$: Richtig wäre $+2ax$. 16 $\sqrt{\frac{\beta^2a}{\gamma^2}}$: Richtig wäre $\sqrt{\frac{\beta^2ax}{\gamma^2}}$. Leibniz rechnet konsequent weiter und setzt dann irrtümlich eine Gleichung für $\frac{\beta z^2}{\gamma}$ statt für $\frac{\gamma z^2}{\beta}$ an. Die Versehen beeinträchtigen die Rechnungen, jedoch nicht die allgemeine Aussage.

14. DE MODIS EXPRIMENDI SERIES
[Herbst 1672 – Anfang 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 3 Bl 8. 1 Zettel ca. 19,3 × 5,8 cm. 1 S.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Zum „fundamentum" einer Folge vgl. VII, 3 N. 1, 4, 6, 8. **[noch]**

De modis exprimendi series, seu de earum regulis fundamentalibus

Progressiones aliae sunt fundamenti simplicis, aliae fundamenti compositi, fundamentum simplex est: cum dato termino uno, inveniri potest sequens, fundamentum compositum est, cum opus est pluribus terminis antecedentibus ad inveniendum sequentem; et prout multis terminis opus est, fundamentum est compositum primi, secundi[,] tertii gradus. Fundamentum maxime compositum est, cum opus est omnibus terminis praecedentibus cognitis, ad inveniendum sequentem.

9 inveniri *(1)* possunt seqventes *(2)* potest *L*

15. EXEMPLA AEQUATIONIS QUADRATICAE ET BIQUADRATICAE [10.–11. Oktober 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 20 × 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca 17,5 × 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca 19,5 × 4 cm. 9 Z. gegenläufig auf Bl. 408 v°. Die ersten 8 Zeilen sind vom Schluss des Textes von VII, 7 N. 55 überschrieben, die Zahlenbeispiele am Ende von Z. 20 stehen unterhalb des herausgeschnittenen Streifens. — Auf dem Rest des Trägers N. 16 sowie VII, 5 N. 33; VII, 6 N. 10; VII, 7 N. 55.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Bei dem vorliegenden Stück handelt es sich um Notizen, die Leibniz vor N. 16 und vor VII, 7 N. 55 verfasste. Sie sind dem Duktus nach vermutlich zusammen mit den Aufzeichnungen von VII, 6 N. 10 entstanden, die wahrscheinlich nach VII, 5 N. 32 vom 10. Oktober 1675 und vor dem auf den 11. Oktober 1675 datierten VII, 5 N. 33 verfasst sind.

$$x^4 \boxed{+px^3} + qx^2 + rx + s \sqcap 0.$$

$$\begin{array}{l}
x - 3 \sqcap 0 \\
\underline{x + 4 \sqcap 0} \\
\\
x + b \\
\underline{x + c} \\
x^2 + bx \\
\quad + c_\bullet \; + bc
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x - 3 \sqcap 0 \\
\underline{x + 4 \qquad} \\
x^2 - 3x \\
\underline{\quad + 4x - 12} \\
\underline{x^2 + 1x - 12 \sqcap 0} \\
\langle 9 \rangle + 3 - 12 \sqcap 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x + 4 \\
x + 4 \sqcap 0 \\
\quad x \sqcap -4 \\
\\
x^2 + 1x \sqcap 12 \\
\dfrac{x+1}{\langle 1 \rangle} \sqcap \dfrac{12}{x}
\end{array}
\qquad
\dfrac{-4+1 \sqcap -3}{1} \sqcap \dfrac{12}{-4}
\qquad
\dfrac{3+1}{1} \sqcap \dfrac{12}{3}$$

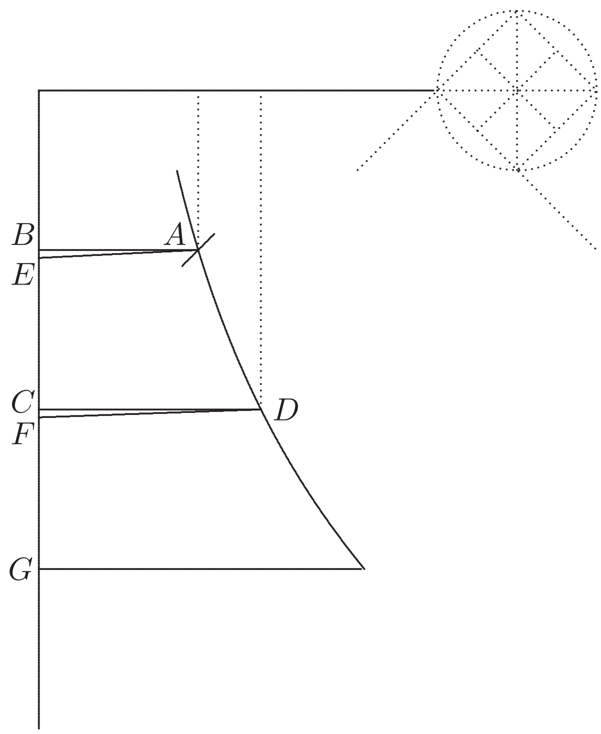
---

14 *Darüber:* $p \sqcap s \sqcap -10$

16. INSTRUMENTUM AD CONSTRUCTIONEM AEQUATIONUM
[Mitte bis Ende Oktober 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 20 × 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca 17,5 × 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca 19,5 × 4 cm. 7 Z. auf Bl. 408 r°. — Auf dem Rest des Trägers die Aufzeichnung zur Gleichungslösung N. 15 sowie VII, 5 N. 33; VII, 6 N. 10; VII, 7 N. 55.
Cc 2, Nr. 1069

Datierungsgründe: Bei dem vorliegenden Stück handelt es sich um Notizen, die Leibniz nach den in N. 15 und in VII, 6 N. 10 gedruckten Aufzeichnungen und vermutlich kurz nach der auf den 11. Oktober 1675 datierten Studie VII, 5 N. 33 verfasste. Sie ist vor VII, 7 N. 55 geschrieben.



[*Fig. 1*]

12 *Über der Figur:* $x^3 - px^2 \sqcap qx + r$

Ope catenularum delicatarum, et lineae logarithmicae in materia solida descriptae in qua assurgere aliquid ac descendere possit, possunt construi omnes aequationes, catenulae ibunt $BAECDFG$. Sed pro exactioribus operationibus adhibendae essent regulae. Credo tamen catenulas bene elaboratas satis aptas tolerabilibus operationibus, imo in magno instrumento etiam exactis.

Forte hoc instrumento solvi poterunt etiam aequationes plurium incognitarum, ut: $x^2 + y^2 \sqcap c_{[,]} + cy + bx^2 + dx \sqcap e.$ $\mathfrak{S}$.

7 $\sqcap$ e. *(1)* $\mathrm{x}^2 - \mathrm{c}$ *(2)* $\mathrm{x} \sqcap \dfrac{\mathrm{c} - \mathrm{y}^2}{\mathrm{x}}$. et $\mathrm{x} \sqcap \dfrac{\mathrm{e} - \mathrm{cy}}{\mathrm{bx} + \mathrm{d}}$ *(3)* $\mathfrak{S}$ *L*

17. DE CONOEIDIBUS
[1673 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VII 1 Bl. 80. 1 Bl. 8°. 1 S.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: [noch]

Trouver une ligne, surface plane, courbe, solide homogene, à une ligne[,] *surface, solide. Par exemple les Elemens du Conoeide Parabolique sont en raison des appliquées du Triangle*. Eodem modo inveniri potest solidum, cujus Elementa seu plana secundum axem sint in ratione applicatarum hyperbolae, seu in ratione altitudinum reciproca. Hoc erit Conoeides Hyperboloeidicum generatum esse rotatione circa suum axem figurae, cujus applicatae sunt in ratione altitudinum reciproca subduplicata, nam harum applicatarum quadrata, erunt in ratione altitudinum reciproca. Ergo et circuli applicatarum rotatione facti. Habemusque sic Methodum generalem solvendi hoc problema: Datae figurae planae conoeides proportionale exhibere. Nimirum Figura plana cujus Elementa sint in subduplicata ratione figurae planae datae, rotetur circa suum axem; et Conoeides productum erit figurae planae datae proportionale. Hinc habemus Methodum datae cuilibet figurae planae exhibendi solidum proportionalem. Superficiem autem conoeidicam datae figurae proportionalem exhibemus ipsius figurae datae descripto Conoeide. Itaque etiam cuilibet figurae planae superficiem curvam proportionalem exhibere possumus. Lineae etiam cuilibet proportionalem figuram curvam exhiberi posse constat. Hoc autem conoides secando aliter habebuntur aliae series quae ad priorem reducentur.

6 Trouuer *(1)* un solide homogene à un plan. *(2)* | une *erg. Hrsg.* | ligne *L* 7 sunt *L ändert Hrsg.*

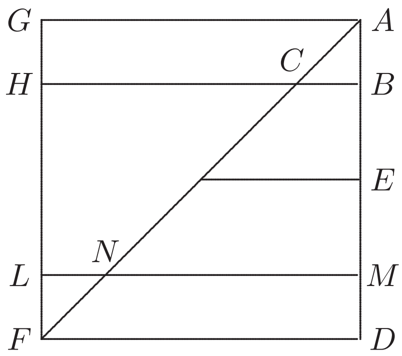
---

18 exhibemus: Die Mantelfläche des Konoids ist nicht proportional zur Fläche unter der erzeugenden Kurve. Damit ist auch die Folgerung unbegründet.

18. QUADRATURA PER FIGURAE COMPLEMENTUM
[Herbst 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VII 1 Bl. 25. 1 Zettel von max. 19,4 × 4,3 cm. 10 Z. auf Bl. 25 r°. Am unteren Rand Gleichung mit binomischer Formel ohne Bezug zum Text: $y^3 \sqcap x^3 + a^3 + 3a^2x + 3ax^2$.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: **[Wz-Rest; noch]**

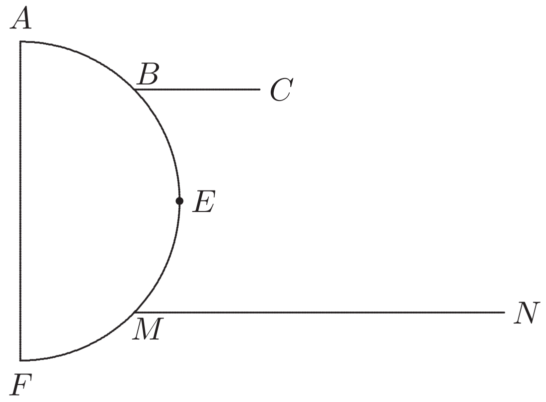


[*Fig. 1*]

Trianguli quaeritur area, seu summa omnium x. seu summa omnium AB. seu summa omnium BC. Hoc ut fiat necesse est ut in considerationem intret etiam finitam esse lineam ABD. trianguli altitudinem. Bisecetur in E. compleatur rectangulum $ADFG$, id est quadratum GA, quia supposui $AB \sqcap BC$. Producatur BCH dum ipsi FG occurrat in H. Eodem modo ducatur MNL, posito $DM \sqcap AB \sqcap GH$ erit $HC \sqcap MN$. et $BC \sqcap LN$. Ergo $BC + MN \sqcap GA$. et in quibuslibet aliis punctis binis simul semper fiet GA. Ergo ubi ad E ventum erit, cessabitur, et fiet rectang. $GAE \sqcap$ Triangulo ADF.

10 omnium | AC *ändert Hrsg.* | Hoc *L*   14 fiet | GH *ändert Hrsg.* | ergo *L*

9 Trianguli quaeritur area: Vgl. VII, 1 N. 36 S. 227 f. sowie VII, 3 N. 19 S. 246.



[*Fig. 2*]

Haec et cycloeidi et infinitis aliis idgenus applicari possunt si AB arcus $\sqcap$ applicatae BC, et sit infra portio priori aequalis, et similis $FME \sqcap ABE$ et $MN \sqcap$ arcui AEM erit rursus $MN + BC \sqcap$ curvae Totae.

2 cycloeidi: Vgl. H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 382 f. und die zugehörige Figur 24 auf Tafel 3 [Marg.] (Vermerk in VII, 4 N. 1 S. 21) sowie VII, 5 N. 74.

19. LALOUVERAE SPECULATIONES GEOMETRICAE 1673

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III A 22 Bl. 5. 1 Zettel max. 18,5 × 3,5 cm. 5 Z. auf Bl. 5 v°. Bl. 5 r° leer.

L a l o u v e r a , nepos Jesuitae, qui in Helvetia nunc est cum Domino de S. Romain, Legato Regis Franciae 1673, habet speculationes Geometricas, quibus promittit omnia revocare ad demonstrationes faciles et manifestas.

6 Legato ... 1673 *erg. L*

5 L a l o u v e r a : S. de La Loubère. 5 Jesuitae: A. de La Loubère. 6 Legato: Der Gesandte M. de Harod de Senevas, Marquis de Saint-Romain, war am 18. November 1672 in Solothurn eingetroffen. 6 speculationes: vgl. S. De La Loubère, *De la résolution des équations, ou de l'extraction de leurs racines*, 1732.

20. TABULA PYTHAGORICA IN MANU NOSTRA INSCRIPTA
[nach Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 86. 1 Streifen von ca 18,5 cm × 7 cm. 1 S. auf Bl. 86 v°, Vorderseite leer.
Cc 2, Nr. 496

Datierungsgründe: **[noch]**

Tabula pythagorica in manu nostra inscripta

Das Einmahl eins oder die Multiplication in den Händen: Zwey Zahlen v. g. 7, et 8. deren keine großer als 10, sind gegeben in einander zu multipliciren. Thue die finger alle nieder, oder mache beyde hände zu. Alsdann hebe an der einen hand soviel finger auff, als die differenz der einen zahl 7 von 10 macht v. g., 3 an der anderen hand, soviel als die andre, 8 ⟨differt⟩ v. g. 2. Zehle alle finger so nieder, sind 5, multiplicire die differentien in einander sind, 6, das productum 56. Dieses muste auch angehen zum großen einmahl eins.

$$\begin{array}{llccc}
10-7 \sqcap 3. & 10-8 \sqcap 2. & 10-a-b & & \\
10-a & 10-b & \underline{10} & + & 10-a \frown 10-b \\
 & ab \qquad \sqcap & 100-10a-10b & + & 100-10a-10b+ab
\end{array}$$

Unde patet difficultatem transferri a multiplicatione numerorum datorum ad mutliplicationem differentiarum a 10; ideoque non habere usum nisi quando numeri dati notabiliter majores sunt differentiis suis, seu valde accedunt ad 10. Idem est de 100. Observatio haec cum sua demonstratione est in *nouveaux Elemens de Geometrie*.

7 Tabula ... inscripta *erg. L* 14 f. eins. | 44, $\frown$ 43, $100-44 \sqcap 56$, $100 \frown 43 \sqcap 55$ *gestr.* | $10-7 \sqcap 3.$ *L*

15–17 Leibniz stellt das Verfahren auf die Probe, indem er das Beispiel 7×8 verallgemeinert. Allerdings macht er einen Fehler an der Zehnerposition: Es müsste in Z. 15 nicht $10-a-b$, sondern $10-(10-a)-(10-b)$ heißen. Nach Multiplikation mit 10 ergäbe sich in Z. 17 statt $100-10a-10b$ dann $-100+10a+10b$, und nach Addition von $100-10a-10b+ab$ bliebe dann ab übrig, was korrekt ist. 21 *nouveaux*: [A. Arnauld], *Nouveaux elemens de geometrie*, 1667, liv. I, § LXIII, S. 14 f.

21. CALCULUS PER DIVISIONES
29. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 13 Bl. 19. Ca. $\frac{1}{3}$ Bl. 2°. 1 S.
Cc 2, Nr. 1093

29. Octob. 1675.

C a l c u l u s   p e r   d i v i s i o n e s   l o c o   m u l t i p l i c a t i o n u m $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ l o c o $\frac{ac}{b}$

Observatio venit in mentem, qua possint omnia reduci ad meros terminos simplices continuarum divisionum, cum contra reducere soleamus omnia ad terminos continuarum multiplicationum.

Sit: $\frac{\frac{a}{b}}{c} + \frac{\frac{d}{e}}{f} + \frac{\frac{g}{h}}{l} \sqcap x$. Reducamus. Multiplicentur omnes termini per cfl. fiet: $\frac{afl}{b} + \frac{cdl}{e} + \frac{cgl}{h} \sqcap cflx$.

Rursus multiplicetur producta aequatio per beh. fiet: $aeflh + bcdhl + bcegl \sqcap bcefhlx$. Prior autem expressio aptior ad constructiones lineares.

Sed video id ineptum esse, si hoc modo explicetur, in $\frac{\frac{a}{b}}{c}$. ipsam c. dividere ipsam $\frac{a}{b}$. Tunc enim $\frac{\frac{a}{b}}{c} \sqcap \frac{a}{bc}$. Itaque sic explicabimus quasi esset: $\frac{a}{\frac{b}{c}}$. Nam et continuari posset hoc modo $\frac{a}{\frac{b}{\frac{c}{d}}}$. Sed sufficiet nos uti his tribus, nam in rei veritate $\frac{a}{\frac{b}{c}} \sqcap \frac{ca}{b}$. et vero statim

6 C a l c u l u s ... l o c o $\frac{\mathrm{ac}}{\mathrm{b}}$ *erg. L* 10 Sit: *(1)* $\frac{\mathrm{b}}{\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}$ *(2)* | $\frac{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}}{\mathrm{c}} + \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}}{\mathrm{f}} + \frac{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}}{\mathrm{l}}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ x *L* 10 per | dfl. *ändert Hrsg.* | fiet *L* 13 prior ... lineares *erg. L*

---

11 $+\frac{cgl}{h}$: Richtig wäre $+\frac{cfg}{h}$ und in der folgenden Zeile $+bcefg$ statt $+bcegl$. Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

reduci potest ut $\dfrac{a}{\dfrac{b}{\dfrac{c}{d}}}$ idem est quod $\dfrac{ac}{bd}$. Interim hoc modo exprimendo evitaremus omnes multiplicationes, sive sic diceremus $\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}}$ sive sic $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c}$. Quorum illud $\dfrac{ac}{b}$, hoc $\dfrac{a}{bc}$.

Verum jam hinc ostendit natura rerum non divisionem sed multiplicationem esse naturalionem et aptiorem, quia in ipsa nullae lineoleae necessariae ad exprimendam varietatem. Interim leges calculi hujusmodi tradi possent nempe si $\dfrac{ac}{b}$ velimus reducere ad meras divisones, non poterimus aliter quam scribendo sic: $\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}}$. et $\dfrac{a}{bc}$ sic: $\dfrac{\dfrac{a}{b}}{c}$.

Sed videndum quid in compositis sive comprehensionibus, ut $b+c \frown b-c \sqcap a^2$. Tunc vero apparet incommoditas divisionis fiet enim $b+c \sqcap \dfrac{a^2}{b-c}$. Sed non potest $\dfrac{a^2}{b-c}$ reduci ad terminos simplices, nisi infinitos; nec potest fieri nominator simplex, quemadmodum numerator.

3 f. esse *(1)* rectam, qvia *(2)* naturaliorem | et *erg. Hrsg.* | aptiorem *L*

22. CARTESII COGITATIONES PRIVATAE
1. u. 5. Juni 1676

Überlieferung: *E* Erstdruck nach nicht aufgefundener Abschrift von Leibniz aus einer verschollenen Handschrift von Descartes: (mit frz. Übers.) Foucher de Careil, *Oeuvres inédites de Descartes*, Bd I, 1859, S. 2–57. (Unsere Druckvorlage.) — Weitere Drucke: 1. (nach *E* mit zahlreichen Korrekturen) *DO* X, 1908, S. 213–256; 2. (teilw., nach 1.) *JB* I, 1939, S. 360–364; 3. (teilw., in engl. Übers.) Descartes, *Philosophical Writings* (Anscombe), 1954 (u. ö.), S. 3 f.; 4. (teilw., in frz. Übers.) Descartes, *Oeuvres philosophiques* (Alquié), I, 1963, S. 45–51; 5. (teilw., in japan. Übers.) Descartes, *Shisaku shiki-Yakukai*, 1978, S. 1–22; 1980, S. 1–37; 1982, S. 1–50; 1984, 1–31; 6. (teilw., in engl. Übers.) Descartes, *Philosophical Writings* (Cottingham), Bd I, 1985, S. 2–5; 7. (teilw., in japan. Übers.) Descartes, *Dekaruto zenshu*, Bd IV, 1993, S. 429–452; 8. (teilw., mit frz. Übers.) Descartes, *Les Olympiques*, 1995, S. [41]–44; 9. (teilw., in finn. Übers.) Descartes, *Teokset* (Jansson), Bd I, 2001, S. 33–38; 10. (niederl. Übers.) Descartes, *Bibliotheek Descartes*, Bd I, 2010, S. 163–194; 11. (nach 1. mit dt. Übers.) Descartes, *Cogitationes* (Wohlers), 2011, S. 189–233; 12. (teilw. und in anderer Anordnung) Descartes, *Etude du bon sens* (Carraud), 2013, S. 39–160; 13. (teilw., in türk. Übers.) Descartes, *Kişisel Düşünceler* (Altuner), 2014, S. 13–20; 14. (mit ital. Übers.) Descartes, *Opere postume* (Belgioioso), 2014, S. 1060–1095; 15. (teilw.) *DOC* I, 2016, S. 198–214, 270–274; 16. (japan. Übers.) [Descartes], *Shisaku shiki*, 2018, S. 79–109.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz hat spätestens im Februar 1676 Zugang zum Nachlass von Descartes erhalten, wie sich aus der auf den 24. Februar 1676 datierten Abschrift der *Remedia et vires medicamentorum* (VIII, 2 N. 76; *DO* XI, S. 641–644) ergibt. Einen Bericht über einen Besuch mit E. W. von Tschirnhaus bei Cl. Clerselier, dem Besitzer des Nachlasses, enthält die Aufzeichnung VI, 3 N. 34. Den im Text (s. u. S. 122 Z. 1–6) beschriebenen Zirkel zur Winkelteilung haben Leibniz und Tschirnhaus bereits in einer Gesprächsnotiz vom 28. März 1676 skizziert (VII, 1 N. 24 S. 182). Laut den Angaben in *E* notierte Leibniz am Beginn seiner Exzerpte am Rand das Datum des 1. Juni 1676, für die Fortsetzung seiner Abschrift den 5. Juni 1676 (s. u. S. 112 Z. 12). Die Textwiedergabe bei Foucher de Careil weicht von der von Leibniz in dieser Zeit verwendeten Orthographie ab. Die hier vorgenommene Angleichung an die entsprechende Schreibweise von Leibniz sowie in der Ausgabe üblichen Gepflogenheiten wurde ohne zusätzliche Dokumentation im Variantenapparat vorgenommen. Abgesehen von der Überschrift, die von Leibniz oder von Foucher de Careil stammt, werden die in *E* zitierten Randbemerkungen von Leibniz und Einschübe im Text, die dort Leibniz zugeschrieben werden oder vermutlich von Leibniz stammen, als Fußnoten wiedergegeben. Parallelstellen bzw. Paraphrasen zu den Exzerpten finden sich in einigen zeitgenössischen Drucken: Poisson, *Commentaire* (die entsprechenden Abschnitte sind wieder abgedruckt in: *DO* X, S. 197–198, 255, 476); Baillet bzw. Baillet, *Abregé* (Auszüge sind abgedruckt in *DO* X S. 179–204). Außerdem befinden sich Parallelstellen in einer Abschrift von weiteren Exzerpten mit dem Titel *Cartesius* im Leibniz-Nachlass (LH 4 I 4k Bl. 19–22, gedr.: *DO* XI, S. 647–653; erneut gedr.: Carraud, *Cartesius*). Diese Abschrift wurde von Leibniz' Amanuensis J. D. Brandshagen angefertigt.

Das Wasserzeichen des Papiers ist auch für andere Abschriften von Brandshagen aus dem Herbst 1679 belegt, so dass vermutet werden kann, dass *Cartesius* auf einer Vorlage von Tschirnhaus, der sich auf seiner Rückreise von Paris Mitte Oktober 1679 in Hannover aufhielt, beruht. Eine Textstelle wurde nach dem Druck von Exzerpten aus der Handschrift von Descartes in Baillet geändert.

Cartesii Cogitationes privatae

1619. Calendis Januarii.

Ut comoedi, moniti ne in fronte appareat pudor, personam induunt; sic ego hoc mundi theatrum conscensurus, in quo hactenus spectator exstiti, larvatus prodeo.

Juvenis, oblatis ingeniosis inventis, quaerebam ipse per me possemne invenire etiam non lecto auctore: unde paulatim animadverti me certis regulis uti.

Scientia est velut mulier, quae, si pudica apud virum maneat, colitur; si communis fiat, vilescit.

Plerique libri, paucis lineis lectis figurisque inspectis, toti innotescunt, reliqua chartae implendae adjecta sunt.

---

5 Cartesii Cogitationes privatae: Die Überschrift stammt von Leibniz oder Foucher de Careil. Laut *E* notierte Leibniz am Rand den 1. Juni 1676 als Datum des Beginns seiner Abschrift des Textes.
11 f. Scientia ... vilescit: Vgl. R. Descartes, *Regulae ad directionem ingenii*, 1701, S. 11 (*DO* X, S. 376): „Hanc vero postea ab ipsis Scriptoribus perniciosa quadam astutia suppressam fuisse crediderim, nam sicut multos artifices de suis inventis fecisse compertum est, timuerunt forte, quia facillima erat et simplex, ne vulgata vilesceret“.

Polybii cosmopolitani Thesaurus mathematicus in quo traduntur vera media ad omnes hujus scientiae difficultates resolvendas, demonstraturque circa illas ab humano ingenio nihil ultra posse praestari, ad quorumdam qui nova miracula in scientiis omnibus exhibere pollicentur vel cunctationem provocandam et temeritatem explodendam; tum ad multorum cruciabiles labores sublevandos qui, in quibusdam hujus scientiae nodis Gordiis noctes diesque irretiti, oleum ingenii inutiliter absumunt; totius orbis eruditis et specialiter celeberrimis in G. F. R. C. denuo oblatus.

---

8 *Hinter* qui, *von Leibniz oder Foucher de Careil ergänzt:* (F. Ros. Cruc.)

10 *Hinter* G., *von Leibniz oder Foucher de Careil ergänzt:* (Germania)

1 Polybiis *E ändert Hrsg. nach DO*

1–11 Polybii ... oblatus: Vgl. auch Descartes' Ankündigung gegenüber I. Beeckman in seinem Brief vom 26. März 1619, eine „scientia penitus nova" vorzustellen (*DO* X, S. 154–160, hier S. 156; *JB* IV, S. 58–61, hier S. 59). Der Titel kann als Anspielung auf eine anonym publizierte Schrift verstanden werden: *Mysterium arithmeticum, sive, cabalistica et philosophica inventio, nova admiranda et ardua, qua numeri ratione et methodo computentur, mortalibus a mundi primordio abdita, et ad finem non sine singulari omnipotentis Dei provisione revelata. Cum illuminatissimis laudatissimisque; Fraternitatis Roseae crucis famae viris humiliter et syncere dicata*, 1615. Vgl. hierzu den Hinweis bei Gouhier, *Les premières pensées*, S. 132. Zu einer anderen Einschätzung für die Bezeichnung „Polybius cosmopolitanus" gelangt E. Mehl; vgl. Mehl, *Descartes en Allemagne*, S. 139–146. Auffallend ist, dass J. Faulhaber, *Miracula arithmetica*, 1622, S. 59, auf den bevorstehenden Druck eines Werkes seines Freundes „Carolus Zolindius (Polybius)" in „Venedig oder Pariß" hinweist. Vgl. hierzu Hawlitschek, *Johann Faulhaber*, S. 67–70; Schneider, *Johannes Faulhaber*, S. 98 f. u. S. 181–186; Manders, *Descartes et Faulhaber*, S. 7–9. Zur Erwähnung von Venedig als möglichen Aufenthaltsort vgl. im Text selbst S. 103 Z. 6. Die Bedeutung von „denuo" am Schluss des skizzierten Titels ist in der Forschung umstritten. Möglicherweise ist das Wort Resultat eines Lesefehlers, z. B. für *dono* oder für eine kontrahierte Form von *devotione*. Zur Kontraktion von *devotione* vgl. Cappelli, *Dizionario*, S. 96.

Larvatae nunc scientiae sunt quae, larvis sublatis, pulcherrimae apparerent: Catenam scientiarum pervidenti non difficilius videbitur eas animo retinere quam seriem numerorum.

Praescripti omnium ingeniis certi limites, quos transcendere non possunt. Si qui principiis ad inveniendum uti non possint ob ingenii defectum, poterunt tamen verum scientiarum pretium agnoscere, quod sufficit illis ad vera de rerum aestimatione judicia perferenda.

Vitia appello morbos animi, qui non tam facile dignoscuntur ut morbi corporis, quod saepius rectam corporis valetudinem experti sumus, mentis nunquam.

Adverto me, si tristis sim aut in periculo verser et tristia occupent negotia, altum dormire et comedere avidissime; si vero laetitia distendar nec edo, nec dormio.

On peut faire en un jardin des ombres qui representent diverses figures, telles que des arbres et les autres: Item, tailler des palissades, de sorte que de certaine perspective elles representent certaines figures: Item, dans une chambre faire que les rayons du soleil, passant par certaines ouvertures, representent divers chiffres ou figures: Item, faire paroistre, dans une chambre des langues de feu, des chariots de feu et autres figures en

10 f. Adverto me si in tristibus sim, aut in periculo verser, aut tristia occupem negotia, altum dormire et comedere avidissime; si vero laetitia distendar non edo nec dormio. *E ändert Hrsg. nach* Baillet, Bd 2, S. 449 (Baillet, *Abregé*, S. 339; *DO* X, S. 215).

---

1 f. Catenam scientiarum: Vgl. das bei Poisson, *Commentaire*, S. 73 (*DO* X, S. 255), abgedruckte Zitat: „Quippe sunt concatenatae omnes scientiae, nec una perfecta haberi potest, quia aliae sponte sequantur, et tota simul encyclopedia apprehendatur". 8 f. Vitia . . . nunquam: Vgl. hierzu auch die Parallelstelle in *Cartesius*: „Morbi corporis facilius agnoscuntur, quam morbi mentis: quia saepius rectam corporis valetudinem sumus experti; mentis, nunquam." (Carraud, *Cartesius*, S. 5; *DO* XI, S. 653). — Die Charakterisierung der Laster als Krankheiten der Seele geht zurück auf Platon, *Timaios*, 86b bis e. Descartes dürfte bereits im Jesuitenkolleg von La Flèche mit der Diskussion über dieses Thema in Berührung gekommen sein. Vgl. z. B. die 6. Disputation (*De affectionibus animi, quae passiones vocantur*) im einschlägigen Aristoteles-Kommentar *In libros ethicorum Aristotelis ad Nicomachum aliquot Conimbricensis cursus disputationes* (in der Ausgabe Lyon, 1608, Spalte 47–60, insbesondere 57 f.).
12–102,7 On . . . chambre: Vgl. VI, 3 Nr. 34, S. 387 Z. 14–17 sowie G. B. Porta, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. XVII, cap. 1–17 u. lib. XX, cap. 9, S. 259–276 u. 302; vgl. die Hinweise bei G. Rodis-Lewis, „Machineries et perspectives curieuses", in: *XVIIè siècle. Bulletin de la Société d'étude du XVIIè siècle*, 32 (1956), S. 461–474, sowie bei Shea, *The Magic of Numbers and Motions*, S. 107 f., Anm. 50.

l'air; le tout par de certains miroirs qui rassemblent les rayons en ces points-là: Item, on peut faire que le soleil, reluisant dans une chambre, semble toujours venir du mesme costé, ou bien qu'il semble aller de l'occident à l'orient, le tout par miroirs paraboliques, et fault que le soleil donne au-dessus du toist, dans un miroir ardent, duquel le point de la reflexion soit au droit d'un petit trou et donne dans un autre miroir ardent, lequel a le mesme point de reflexion aussi au droit de ce petit trou, et rejettera ses rayons en lignes paralleles dedans la chambre.

Anno 1620, intelligere coepi fundamentum inventi mirabilis.

Somnium 1619 nov. in quo carmen, cujus initium:
Quod vitae sectabor iter? . . . A u s o n.

Ab amicis reprehendi tam utile quam ab inimicis laudari gloriosum, et ab extraneis laudem, ab amicis veritatem exoptamus.

Sunt quaedam partes in omnium ingeniis quae vel leviter tactae fortes affectus excitant: ita puer forti animo, objurgatus, non flebit, sed irascetur; alius flebit. Si dicatur infortunia multa et magna accidisse, tristabimur; si quem malum in causa fuisse addatur, irascemur. Transitus a passione in passionem per vicinas; saepe tamen a contrariis validior transitus, ut si in convivio hilari tristis casus repente nuntietur.

Ut imaginatio utitur figuris ad corpora concipienda; ita intellectus utitur quibusdam corporibus sensibilibus ad spiritualia figuranda, ut vento, lumine: unde altius philosophantes mentem cognitione, possumus in sublime tollere. Mirum videri possit quare

9 in quo carmen 7 cujus initium *E ändert Hrsg.* 20 Cognitione, [mentem] possumus *E ändert Hrsg. nach DO*

---

8 Anno . . . mirabilis: Vgl. das Zitat einer Randbemerkung von Descartes bei Baillet, Bd 1, S. 51 (*DO* X, S. 179): „XI. Novembris 1620. caepi intelligere fundamentum Inventi mirabilis“; vgl. auch die Bemerkung von Leibniz in den *Notata quaedam G. G. L. circa vitam et doctrinam Cartesii* (VI, 4 N. 376 S. 2057 f.). Zur Problematik der Datumsangabe sowie hinsichtlich der Frage, welche Erfindung gemeint sein könnte, vgl. zusammenfassend Gouhier, *Les premières pensées*, S. 76–78. 10 *Quod* . . . A u s o n.: D. M. Ausonius, *Eclogarum liber*, II, 1. Vgl. auch Baillet, Bd 1, S. 80–86 (*DO* X, S. 180–188) sowie G. W. Leibniz, *Notata quaedam G. G. L. circa vitam et doctrinam Cartesii* (VI, 4 N. 376 S. 2057). — Die Autorenangabe wurde möglicherweise erst von Leibniz oder in *E* eingefügt. 20–103,4 Mirum . . . elucent: Vgl. die Paraphrase bei Baillet, Bd 1, S. 84 (*DO* X, S. 184): „Car il ne croioit pas qu'on dût s'étonner si fort de voir que les Poëtes, même ceux qui ne font que niaiser, fussent pleins de sentences plus graves, plus sensées, et mieux exprimées que celles qui se trouvent dans les écrits des Philosophes.“

graves sententiae in scriptis poetarum magis quam philosophorum. Ratio est quod poetae per enthusiasmum et vim imaginationis scripsere: sunt in nobis semina scientiae, ut in silice, quae per rationem a philosophis educuntur, per imaginationem a poetis excutiuntur magisque elucent.

Dicta sapientum ad paucissimas quasdam regulas generales possunt reduci.

Ante finem novembris Lauretum petam, idque pedes e Venetiis, si commode et moris id sit; sin minus saltem quam devotissime ab ullo fieri consuevit.

Omnino autem ante Pascha absolvam tractatum meum, et si librariorum mihi sit copia dignusque videatur, emittam ut hodie promisi, 1620, 23 Febr.

Una est in rebus activa vis, amor, charitas, harmonia.

Sensibilia apta concipiendis olympicis: ventus spiritum significat, motus cum tempore vitam, lumen cognitionem, calor amorem, activitas instantanea creationem. Omnis forma corporea agit per harmoniam. Plura humida quam sicca, et frigida quam calida, quia alioqui activa nimis cito victoriam reportassent, et mundus non diu durasset.

Deum separasse lucem a tenebris, Genesi est separasse bonos angelos a malis, quia non potest separari privatio ab habitu: quare non potest litteraliter intelligi. Intelligentia pura est Deus.

Tria mirabilia fecit Dominus: res ex nihilo, liberum arbitrium et Hominem Deum.

Cognitio hominis de rebus naturalibus, tantum per similitudinem eorum quae sub sensum cadunt: et quidem eum verius philosophatum arbitramur, qui res quaesitas felicius assimilare poterit sensu cognitis.

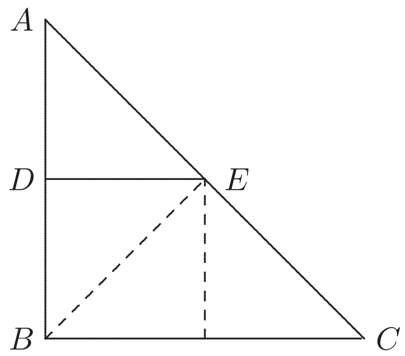
Ex animalium quibusdam actionibus valde perfectis suspicamur ea liberum arbitrium non habere.

8 librorum *E ändert Hrsg. nach DO* 9 23 septembris *E ändert Hrsg. nach BAILLET* 13 Plura frigida quam sicca, et humida quam calida *E ändert Hrsg. nach DO*

6 Lauretum: Zum Plan einer Wallfahrt nach Loreto vgl. Baillet, Bd 1, S. 120 (*DO* X, S. 188). 8 f. Omnino ... 23 Febr.: Vgl. Baillet, Bd 1, S. 86 (*DO* X, S. 187 f.) 10–13 Una ... harmoniam: Vgl. die Hinweise von É. Mehl, *Optics*, 2022, S. 136 f. u. S. 139, auf ähnliche Aussagen in J. Kepler, *Epitome astronomiae Copernicanae*, lib. 4, 1620, S. 581 bzw. lib. 1, 1618, S. 119–122 (KW 7 S. 333 bzw. 90).

Contigit mihi ante paucos dies familiaritate uti ingeniosissimi viri, qui talem mihi quaestionem proposuit: *Lapis*, aiebat, *descendit ab* A *ad* B *una hora: attrahitur autem a terra perpetuo eadem vi, nec quid deperdit ab illa celeritate quae illi impressa est priori attractione, quod enim in vacuo moveretur semper moveri* existimabat: *Quaeritur quo tempore tale spatium percurrat.*

Solvi quaestionem:



[*Fig. 1*]

In triangulo isoscelo rectangulo, ABC: Spatium motum repraesentat: Inaequalitas spatii a puncto A ad basin BC motus inaequalitatem: Igitur AD percurritur tempore quod ADE repraesentat; DB vero tempore quod $DECB$ repraesentat; ubi est notandum minus spatium tardiorem motum repraesentare. Est autem AED tertia pars $DECB$:

10 f. *Dazu, laut E von Leibniz angemerkt:* si AD dimidia ipsius AB

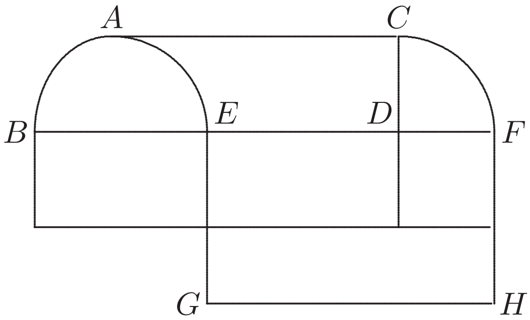
8 In triangulo isocelo *E ändert Hrsg. nach DO* 8 motum *erg. Hrsg. nach DO* 10 DB. vero semper *E ändert Hrsg. nach DO* 10 DEBC *E ändert Hrsg.* 11 DEBC *E ändert Hrsg.* **7**,**12** ipsius DB *E ändert Hrsg.*

1 ingeniosissimi viri: I. Beeckman. 2 proposuit: Vgl. zur Fragestellung *DO* X, S. 58–61 u. 75 bis 78 (*JB* I, S. 260–263 u. *JB* IV, S. 49–51). 8 Spatium motum: Vgl. dagegen *DOC* I, S. 198 sowie die Anm. 6, S. 580 f., wo die alternativen Konjekturen *Spatium tempus repraesentat* bzw. *area spatium repraesentat* diskutiert werden.

Ergo triplo tardius percurret AD quam DB. Aliter autem proponi potest haec quaestio, ita ut semper vis attractiva terrae aequalis sit illi quae primo momentos fuit: nova producitur, priori remanente. Tunc quaestio solvetur in pyramide.

Ut autem hujus scientiae fundamenta jaciam, motus ubique aequalis linea repraesentabitur vel superficie rectangula vel parallelogramma vel parallelipipedo, quod augetur ab una causa triangulo, a duabus pyramide ut supra, a tribus, aliis figuris.

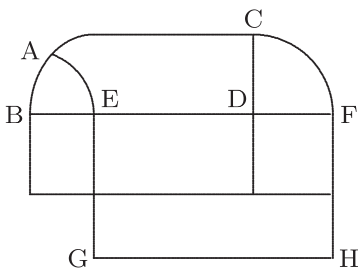
Ex his infinitae quaestiones solventur. Verbi gratia, lapis in aere descendit *viresque acquirit eundo*; quandonam incipiet aequali celeritate moveri? Quod solvetur.



[*Fig. 2*]

Haec linea repraesentet gravitatem lapidis in primo instanti: curvatura linearum AEG et CFH inaequalitates motus: a puncto enim E, F aequaliter moveri incipiet, quia AEG non est curva nisi ab A ad E; ab E ad G est recta.

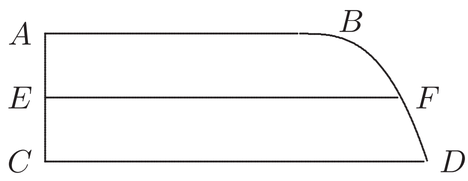
1–3 *Dazu, laut E von Leibniz angemerkt:* obscure

9 *Fig. 2*


E ändert Hrsg. nach DO 11 EAG *E ändert Hrsg.* 11 CFA *E ändert Hrsg. nach DO* 11 a puncto enim BF aequaliter *E ändert Hrsg. nach DO*

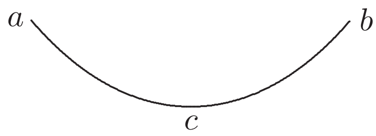
7 f. *viresque ... eundo*: P. Vergilius Maro, *Aeneis*, 4, 175. 8 quandonam ... moveri?: Vgl. *JB* I, S. 150, 174, 263–268.

Item si fax accensa in aere descendat ut etiam ignis magna levitas de gravitate aliquid tollat, cum levitatis quantitas sit nota. Item etiam gravitatis totius facis et aeris impedimentum, si quaeratur quo instanti celerrime descendat et quo instanti non descendat, ubi etiam notum esse oportet quid de face singulis momentis comburatur, aliaeque innumerae quaestiones sunt ex geometrica pariter et mathematica progressione.



[*Fig. 3*]

Ad talia pertinet quaestio de reditu redituum, g. v., mutuo accepi AB, post tempus AC, debeo CD: post tempus AE, debebam tantum EF, si BFD ducta sit linea proportionum. Linea proportionum cum quadratrice conjungenda: oritur enim [quadratrix] ex duobus motibus sibi non subordinatis, circulari et recto.

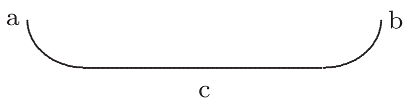


[*Fig. 4*]

Petiit a me Isaacus Middelburgensis an funis *acb* affixus clavis a, b, sectionis conicae partem describat, quod non licet per otium nunc disquirere.

---

9 f. *Dazu, laut E von Leibniz angemerkt:* id est ex numero non analyticarum

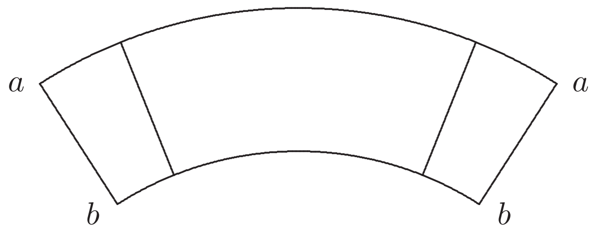
11 *Fig. 4* 

E ändert Hrsg.

---

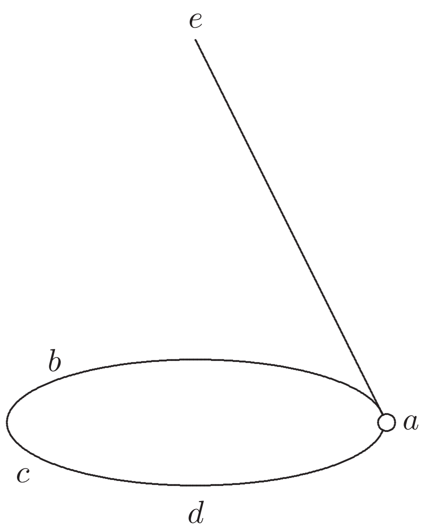
6 Fig. 3: Die Linie BFD gibt den Sachverhalt (es handelt sich um eine Exponentialkurve) nur qualitativ wieder; vgl. die Rekonstruktion bei Bos, *Redefining Geometrical Exactness*, S. 245–248. 7–9 Ad ... proportionum: Vgl. *DO* X, S. 78 (*JB* 1, S. 51). 9 [quadratrix]: Eckige Klammern in *E*. 12 f. Petiit ... describat: Vgl. *JB* I, S. 43–45 u. 354–359.

Idem suspicatur nervos in testudine eo celerius moveri quo acutiores sunt, ita ut duos motus edat octava acutior dum unum gravior; item quinta acutior $1\frac{1}{2}$, etc.



[*Fig. 5*]

Idem advertit quare in motu projectorum quae e manu exeunt, per vim circularem statim ad motum rectum deflectant, quod scilicet pars *aa* majorem describat circulum quam *bb*, ideoque celerius movetur: unde fit ut, dum e manu exit, partem *b* praecedat et eam post se trahat. Unde sequitur aliquid projici posse circulariter hoc modo:



[*Fig. 6*]

A puncto *e* pendeat pondus *a* agiteturque libere per circulum *abcd*: quia omnes partes ponderis aequaliter moventur, ideo si funis *ea* frangatur, perget moveri circulariter; id licebit experiri si in aquam decidat.

---

1 f. Idem suspicatur ... etc.: Vgl. *DO* X, S. 52–54 (*JB* I, S. 244 u. 246 f.). 4–11 Idem advertit ... decidat: Vgl. *JB* I, S. 167, 253–257.

Idem me monet aquam congelatam plus loci occupare quam solutam; idem expertus est glaciem in medio vasis rariorem esse quam in extremitatibus: Quod fit, inquit, quia spiritus ignei qui locum occupant, initio a frigore ad medium vasis detrahuntur, unde tandem cum exeunt etiam frigore impellente, locum in medio vacuum relinquunt. Imo etiam glaciem sublevant, cum exeunt, unde fit ut majorem locum occupet glacies quam aqua.

Idem quoque dixit acus in his regionibus fieri tam acutas ut monetam argenteam perforent et tam tenues, ut aquae supernatent: Quod fieri posse existimo; parvae enim res ejusdem materiae non tam facile aquam dividunt quam magnae, quod sola superficies aquam premit, quae major est proportione in exiguo corpore quam in magno.

Instrument de musique fait avec une precision mathe-

1–6 Idem . . . aqua: Vgl. *JB* I, S. 21 f., 60 f., 155, 215, 281. 7–10 Idem . . . magno: Vgl. *JB* I, S. 233 f. 11–109,1 Instrument . . . mathematique: Ein weiteres von ihm entworfenes „perfektes" Instrument stellt Descartes in einem Brief an C. Huygens vor, der wohl auf das Jahr 1646 datiert werden kann (vgl. R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 587 f. = *DO* IV S. 678–683). Das beschriebene Spinett weist in einer Oktave insgesamt 19 anstelle der auch zu dieser Zeit üblichen 12 Tasten auf.

m a t i q u e. — Pour toucher une mandoline exactement selon mes regles de musique,

---

1 mandoline: *Mandoline* ist für die Entstehungszeit des Texts nicht als Bezeichnung eines Musikinstruments belegt. Als ältester Beleg für das Auftreten der ähnlich lautenden italienischen Wortform *mandolino* gilt eine Notiz auf dem Rechnungsbeleg Bibl. Vat. Arch.Barb.Gius.2016, die in F. Hammond, *Girolamo Frescobaldi and a Decade of Music in Casa Barberini: 1634–1643*, in: F. Lippmann (Hrsg.): *Studien zur italienisch-deutschen Musikgeschichte XII*, Analecta Musicologica 19, 1979, S. 105 Fn. 44 wiedergegeben ist. Ende des 16. Jh. und zu Beginn des 17. Jh. war vornehmlich in Frankreich ein üblicherweise mit Bünden versehenes Instrument mit vier Saiten verbreitet, das heute basierend auf seiner französischen Bezeichnung zumeist als Mandore oder den italienischen Namensvarianten folgend als Mandora oder Mandola bezeichnet wird und einen Vorläufer der heutigen Mandoline darstellt. Charakteristisch für die Mandore ist eine Quint-Quart-Quint-Stimmung, wobei auch Variationen des Grundtons, der Saitenzahl oder des Abstands der höchsten Saite belegt sind (vgl. beispielsweise M. Mersenne, *Harmonie universelle*, *Livre second des instruments*, 1636, S. 93 und M. Praetorius, *Syntagma musicum II*, 1619, S. 28 u. S. 53). Durch Praetorius' *Syntagma musicum II* sind die deutschsprachigen Formen *Mandürichen* (*a. a. O.* Inhaltsverzeichnis, S. 28 u. S. 53), *Manduriniche* (*a. a. O.* S. 53) sowie *Mandörgen* (*a. a. O.* Tafel XVI) als Bezeichnungen für ein in Frankreich verbreitetes Instrument, das heute als Mandore identifiziert wird, für das Jahr 1619 belegt. Als weitere Namen nennt Praetorius *Pandurina* (*a. a. O.* Inhaltsverzeichnis u. S. 53), *Mandoër* (*a. a. O.* S. 53) und *Bandürichen* (*a. a. O.* S. 10 u. S. 53). Alessandro Piccinini berichtet in seiner auf Italienisch verfassten *Intavolatura di liuto* von 1623, dass in Frankreich ein Instrument namens *Mandolla* genutzt wird (A. Piccinini, *Intavolatura di liuto*, 1623, S. 7). Die wenigen angedeuteten Eigenschaften treffen auf eine Mandore zu. Die im vorliegenden Text auftretende Form *mandoline* kann als französische Diminutivform von *mandola* oder *mandole* verstanden werden. 1 exactement ... musique: Hauptquelle zu Descartes' Musiktheorie ist seine Schrift *Musicae compendium*, die, obwohl bereits 1618 verfasst, erst in seinem Todesjahr gedruckt wurde (R. Descartes, *Musicae compendium*, 1650 (*DO* X S. 89–141)). Einzelne Hinweise finden sich zudem in seinem Briefwechsel, insbesondere mit I. Beeckman, C. Huygens und M. Mersenne. — Descartes vertritt ein modales System, bei dem ein von ihm festgelegtes Tonsystem in insgesamt 12 verschiedenen *modi* (heute: Kirchentonarten) genutzt wird (*a. a. O.* S. 139 f.). Bewegt sich eine in einem *modus* gesetzte Melodie aus dem Tonumfang einer *vox* (ein Hexachord, dem in der Solmisation die Tonsilben *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol* und *la* zugewiesen sind) hinaus, findet ein Wechsel in die eine Quint höher bzw. tiefer angesetzte *vox* statt, wobei den Tonstufen die Silben der neuen *vox* zugeordnet werden. Descartes' Festsetzung der (relativen) Höhen der Töne des Tonsystems gründet auf der Überzeugung, dass Konsonanz und Wohlklang erreicht wird, wenn Oktaven, Quinten, Quarten sowie große und kleine Terzen einfache Proportionen der ihnen entsprechenden schwingenden Saitenlängen aufweisen. Da die gewählten Bedingungen keine Festsetzung der Tonhöhen zulassen, bei der Erweiterungen des Tonraums durch Wechsel in benachbarte *voces* und durch Oktavieren durchgängig gleiche Ergebnisse liefern, legt Descartes für das *re* der tieferen und das *sol* der jeweils höheren *vox* leicht voneinander abweichende Positionen fest, sodass die Verhältnisse der den Tonhöhen der *voces* entsprechenden Saitenlängen identisch bleiben. Im System von Descartes sind die Wechsel auf die *vox mollis* (auf *F*), *vox naturalis* (auf *C*) und die *vox dura* (auf *G*) beschränkt. Entsprechend gibt es für *D* und *G* je zwei Ansetzungen der Tonhöhen (*a. a. O.* S. 116–122, insb. S. 122). — In der Praxis werden Bünde von Saiteninstrumenten zur Zeit Descartes' üblicherweise gemäß einer gleichstufigen Stimmung positioniert. Anders als Descartes' Vorschlag einer reinen Stimmung gilt das den Saiteninstrumenten zugrundeliegende Tonsystem aus Sicht der zeitgenössischen Musiktheorie nicht als exakt und mathematisch präzise.

il faut diviser l'espace depuis le sillet jusqu'au chevalet en 192 parties egales pour le *a*; en oster 12 et mettre le *b*, puis 18 pour le *c*, 2 pour le *d*, 16 pour le *e*, et 9 pour le *f*, puis accorder les cordes alternativement à la quinte et à la quarte comme on fait ordinairement: Le *c* et le *d* serviront pour le *ré* mobile, et toute musique se pourra jouer sur cette mandoline pourvu qu'il n'y ait point de dièzes irreguliers aux cordes non destinées aux muances.

6 destinées aux nuances *E ändert Hrsg. nach DO*

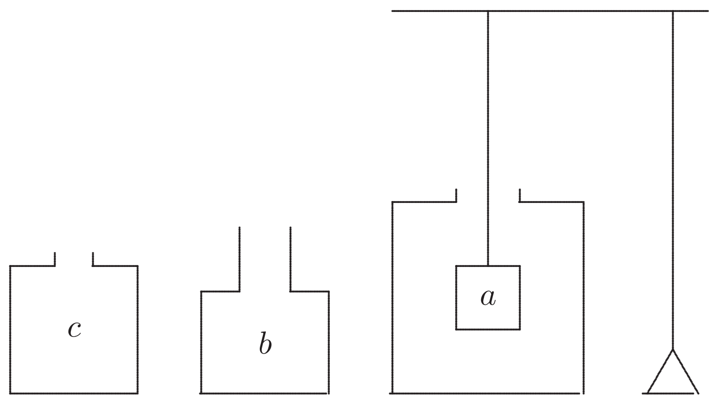
1–3 il . . . le *f*: Die Längen der Abstände der resultierenden Teilungspunkte zum Steg betragen 180, 162, 160, 144 und 135 Einheiten. Zusammen mit dem Wert von 192 Einheiten für die Länge zwischen Sattel und Steg entsprechen sie somit den die Tonhöhen repräsentierenden Werten für *C*, *D*, *E* und *F* in Descartes' *Compendium*, wobei für *D* beide zur Erreichung einer reinen Stimmung festgesetzten Werte aufgeführt sind (*a. a. O.* S. 116–127, insb. S. 120 u. S. 125). — Die hier genutzte Bezeichnung des Sattels und der benachbarten Teilungspunkte des Griffbretts mit den ersten Kleinbuchstaben des Alphabets entspricht der Kennzeichnung der zu greifenden Töne in der zeitgenössischen im französischen Sprachraum verwendeten Tabulaturnotation (vgl. beispielsweise M. Mersenne, *Harmonie universelle*, *Livre second des instruments*, 1636, S. 93–95, insb. Figur S. 93). 3 f. accorder . . . ordinairement: Versteht man die für die *mandoline* angegebene Länge zwischen Sattel und Steg von 192 Einheiten wie im *Compendium* als $b\natural$, ergeben sich aufgrund der Teilungspunkte bei einer eine Quint tiefer oder eine Quart höher und somit auf *E* gestimmten Saite die in Descartes' Ansatz geforderten Proportionen der Tonhöhen von *E*, *F*, *G*, *A* und $b\flat$ (*DO* X S. 116–127). Insbesondere überträgt sich die Dopplung des Tons *D* der $b\natural$-Saite wie in Descartes' Musiktheorie vorgesehen auf *G*, den dritten Ton der *E*-Saite. Die auf der $b\natural$- und *E*-Saite auftretenden Töne entsprechen genau denjenigen des Tonsystems des *Compendiums*. 4 *ré* mobile: Descartes bezeichnet im *Compendium* *D* und *G*, auf die er sich hier über die Bezeichnungen *c* und *d* für die Teilungspunkte des Griffbretts bezieht, als beweglich bzw. als Töne, die bewegt werden (*a. a. O.* S. 117 u. S. 119). *D* und *G* stellen in der *vox mollis* bzw. *vox naturalis* jeweils die Tonstufe *re* dar. 5 f. pourvu . . . muances: Als *muance* (lat. *mutatio*) werden die in S. 000 Z. 000–000 beschriebenen Wechsel zwischen benachbarten *voces* bezeichnet. Da weitere um einen Halbton tiefer bzw. höher gesetzte Töne nicht Teil des Tonsystems sind, treten bei Musik, die Descartes' Regeln folgt, die *dieses* $\flat$ und $\natural$, mit denen diese Alterationen in der zeitgenössischen Notenschrift üblicherweise gekennzeichnet werden, lediglich beim $b\flat$ (= *fa* der *vox mollis*) und gegebenenfalls beim $b\natural$ (= *mi* der *vox dura*) auf der entsprechenden Linie (lat. *chorda*) der Notenzeile auf (*a. a. O.* S. 124–126).

Si, partant de Bucolia, on veut aller droit en Chemmis ou quelque autre port de l'Egypte que ce soit, il faut remarquer exactement, avant que de partir, en quel endroit Pythius et Pythias sont opposés l'un à l'autre à l'embouchure du Nil; puis apres, en quelque lieu que ce soit, si l'on veut trouver son chemin, il faut regarder seulement où est Pythias et de quelles servantes de Psyché elle est accompagnee, car par ce moyen, connaissant combien elle est éloignée du lieu où elle estoit à Bucolia, on trouve son chemin.

1–7 *Dazu, laut E von Leibniz angemerkt:* Bucolia lieu du depart, Egypte globe de la terre, embouchure du Nil lieu de depart, Pythius et Pythias ☉ et ☽, les servantes de Psyché les fixes

3 *Zu* l'embouchure du Nil, *laut E von Leibniz angemerkt:* (+ c'est-à-dire au depart +)

1–7 Si . . . chemin: Descartes hat Beeckman in seinem Brief vom 26. März 1619 mitgeteilt, dass er eine Methode zur Längengradbestimmung gefunden habe (*DO* X, S. 154–160, hier S. 159 f. u. *JB* IV, S. 58 bis 61, hier S. 60). Die von Descartes hier verwendete Codierung seiner Monddistanzmethode beruht auf Motiven aus zwei antiken Romanen: Bucolia bezeichnet eine Gegend im Nildelta, Chemmis eine Stadt in Oberägypten. Beide Orte liegen auf der Reiseroute der Protagonisten Theagenes und Charikleia in den *Aithiopiká* des Heliodoros von Emesa (vgl. I,5 u. V,9). Die beiden Protagonisten benutzen zeitweise die Tarnnamen Pythius und Pythias — Beinamen von Apollo und Artemis, die auch für Sonne und Mond stehen können — , um im Falle ihrer Trennung auf der Reise den jeweiligen Codenamen an markanten Stellen mit Tag und Stunde zu notieren (vgl. III,11 u. V,4–5). Zur Verbreitung dieses Romans innerhalb des gelehrten Diskurses des 16. und 17. Jahrhunderts vgl. z. B. Chr. Rivoletti, St. Seeber (Hrsg.), *Heliodorus redivivus. Vernetzung und interkultureller Kontext in der europäischen Aithiopika-Rezeption*, Stuttgart 2018. Das zweite literarische Motiv, das der Codierung dient, die „servantes de Psyché", ist aus Apuleius, *Metamorphoses*, V,3, entnommen. Leibniz hat die Verschlüsselung dahingehend aufgelöst, dass er die Dienerinnen der Psyche mit den Fixsternen identifiziert, was mit den Angaben von Descartes im oben genannten Brief (*DO* X, S. 159) übereinstimmt. Offenbar wurde dieses literarische Motiv mit der platonischen Vorstellung von den Fixsternen als Sitz der nicht mit einem Körper verbundenen Seelen verschmolzen. Descartes' Codierung ist in das Umfeld der Rezeption der neuplatonischen Diskussion um die Seelenwanderung und den Seelenwagen einzuordnen, vgl. Platon, *Timaios*, 41d–e.



[*Fig. 7*]

Petiit e Stevino Isaacus Middelburgensis quomodo aqua gravitet in fundo vasis *b* aeque ac in fundo vasis *c* et *a*; item, totum vas *c* non magis gravitet quam *a* cujus pondus medium affixum est et immobile. Respondi aquam aequaliter pellere omnia circum quaeque corpora, quibus sublatis aeque descendit si aliqua pars fundi aperiatur, atque fiet in vase *c*; ergo aeque premit fundum. Objicitur, si pars inferior vasis *b* et *c* aperiatur simul, aquam in *c* magis descensuram quam in *b*, quoniam est naturalis modus celeritatis in descensu aquae qui deberet excedi ab aqua exsistente in tubo vasis *b* ut repleret locum relictum ab inferiore aqua. Ubi respondeo inde sequi in motu semper minus celeriter descendere aquam vasis *b* quam *c*; atqui gravitatio non e motu sumitur, sed ab inclinatione ad descensum in ultimo instanti ante motum, ubi nulla est ratio celeritatis.

Q u a e s t i o i n g n o m o n i c a. — Sit sub linea aequinoctiali horizontali horologium faciendum cujus linea aequinoctialis est data, ac praeterea tria puncta ad quae umbrae extremitas debeat pertingere, dum sol est in tropico Capricorni, quomodocunque data sint, modo ne in rectam lineam incidant, centrum solis horologii reperire est et

---

12 *Zu Beginn des Abschnitts, laut E von Leibniz angemerkt:* 5 juin 1676.

2–11 Petiit ... celeritatis: Zum hydrostatischen Paradox vgl. S. Stevin, *De Beghinselen des Waterwichts*, 1586, S. 20–22 u. 56 f.; vgl. die Beeckman im Juni 1619 mitgeteilte Untersuchung: R. Descartes, *Aquae comprimentis in vase ratio reddita* (*DO* X, S. 67–74; *JB* IV, S. 52–55). 12–113,2 Q u a e s t i o ... incidant: Zum dargestellten Problem vgl. Maronne, *Une autre géometrie*, S. 313–341; zum Herausgebereingriff in den Text vgl. S. 317. 14 dum ... Capricorni: zur Wintersonnenwende.

longitudinem styli. Hoc reducitur ad circulum tres alios inaequales tangentem, quorum centra in rectam lineam non incidant.

Nulla figura est in tota extensione in qua et circa quam circulus duci possit, quomodocunque figura fiat praeter triangularem, quae Divinitatis hieroglyphicon.

In omni quadrato quadrati semper ultima nota est 1, 6, 5.

In omni quaestione debet dari aliquod medium inter duo extrema, per quod conjungantur vel explicite vel implicite, ut circulus et parabola, ope coni. Item per duos motus compossibiles describentur. Ut motus ad [spiralem] dicendus non est cum circulari compossibilis.

Si funis mathematicus admittatur, is erit communis mensura recti et obliqui. Verum dicimus admitti hanc lineam posse, sed a mechanicis tantum: ea scilicet ratione qua uti possumus statera ad aequandam cum pondere, vel nervo ad eandem comparandam cum sono; item spatio in facie horologii contento ad metiendum tempus, et similibus in quibus duo genera conferuntur.

Perlegens Lamberti Schenkelii lucrosas nugas (lib. *De arte memoriae*) cogitavi facile me omnia quae detexi imaginatione complecti: quod fit per reductionem rerum ad causas, quae omnes cum ad unam tandem reducantur, patet nulla opus esse memoria ad scientias omnes. Qui enim intelliget causas, elapsa omnino phantasmata causae impressione rursus

2 rectam lineam incidant *E ändert Hrsg. nach DOC*

---

5 In ... 1, 6, 5: Möglich wäre auch die 0 als Endziffer, aber in diesem Fall muss bereits die Basis der Potenz die 0 als Endziffer besitzen; vgl. auch COSTABEL, *L'initiation mathématique*, S. 641 f.
8 [spiralem]: eckige Klammern in *E*. 15–114,10 Perlegens ... fictitiae: Vgl. die Überlegungen zur *ars memoriae* in *Cartesius* (CARRAUD, *Cartesius*, S. 3; DO XI, S.649); L. SCHENCKEL, *De memoria libri duo*, [...] *In secundo est, ars memoriae* [...], 1593; DERS., *Gazophylacium Artis Memoriae.*, 1609; DERS., *Brevis tractatus de utilitatibus et effectibus admirabilibus artis memoriae*, 1614. — Die Gedächtniskunst Schenckels wurde mit dessen Einverständnis auch von Faulhaber unterrichtet; vgl. J. FAULHABER, *Wahrhafftige und Gründliche Solution oder Auﬄößung einer hochwichtigen Frag*, 1618, S. 26: „Ich underschribner / Bekenne in Crafft diß gegenwertigen / von Herrn Johann Faulhabern / Mathematico und Modisten / Burgern in Ulm / das er die Kunst der gedächtnuß etc. Auch neben andern allhie zu Ulm meinen Lectionen, so von mir Lateinisch gehalten worden / beygewohnt / unnd ob er wol in Lateinischer Sprach nit vil versteht / jedoch wegen der Scharpffsinigkeit seines verstandts / hat er [...] den Innhalt der praecepten, so Ich fürgetragen / erlangt / derohalben [...] ihme [...] gebühre / was orths er sey / unverhindert zu reden [...] Lambertus A. etc. Schenkelius Dusilmius.“ — Vgl. auch J. FAULHABER, *Zwey und Viertzig Secreta*, 1622, § XXX: „Artem Memoriae Teutsch“.

facile in cerebro formabit: quae vera est ars memoriae illius nebulonis arti plane contraria, non quod illa effectu careat, sed quod chartam melioribus occupandam totam requirat et in ordine non recto consistat: qui ordo in eo est ut imagines ab invicem dependentes efformentur. Hoc ille omittit, nescio an consulto, quod est clavis totius mysterii. Ipse excogitavi alium modum, si ex imaginibus rerum non inconnexarum addiscantur novae imagines omnibus communes, vel saltem si ex omnibus simul una fiat una imago, nec solum habeatur respectus ad proximam, sed etiam ad alias, ut quinta respiciat 1^{o} per hastam humi projectam, medium vero per scalam ex qua descendent, et secunda per telum quod ad illam projiciat, et tertia simili aliqua ratione in rationem significationis vel verae vel fictitiae.

Aiunt pisces capi facilius cum tedula in rete demissa. Quidni candela in vitro conclusa?

Si esset corpus quod pro aetate ☽ mutaret pondus, daret motum perpetuum. Fiat talis rota ◕ ubi nigrum sit alterius formae ☽ non subditae et tota rota, ita in axe librata ut utraque forma in naturali statu aequalis sit ponderis, haud dubie perpetuo movebitur juxta motum ☽.

Ponatur statua aliquid ferri habens in capite et pedibus, ponatur super funem vel virgam ferream exiguam, sed vi magnetica tinctam; item supra caput ejus alia sit, vi etiam magnetica tincta, quae altior sit et quibusdam in locis majori vi distincta. Statua autem habeat in manibus baculum oblongum ad modum funambulis, qui sit excavatus et in eo nervo contentus, cui interea principium motus automati intus inclusi, quo levissime tacto statua omnis pedem promoveat, quoties tangitur et in locis majore vi magnetis in summo tactis sponte scilicet cum pulsabuntur instrumenta.

14 subditae ex tota *E ändert Hrsg.*

---

11 f. Aiunt ... conclusa?: Vgl. G. B. Porta, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. XV, cap. 5, S. 241 f.; vgl. Shea, *The Magic of Numbers and Motions*, S. 107 f., Anm. 50. 13 Si ... pondus: Vgl. G. B. Porta, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. I, cap. 9, S. 10. 17–23 Ponatur ... instrumenta: Vgl. Poisson, *Commentaire*, S. 156; vgl. auch G. B. Porta, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. VII, cap. 27, S. 139.

Columba Architae molas vento versatiles inter alas habebit, ut motum rectum deflectat.

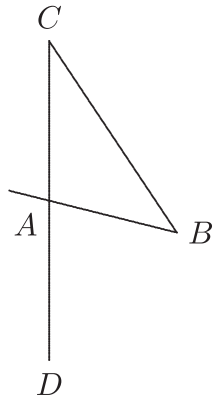
Si tria trianguli latera ducuntur in se invicem et productum per areae quadruplum dividatur, habebitur semidiameter circuli, quarto triangulo circumscripti. Sunt latera a, b, c, area e, semidiameter erit $\frac{abc}{4e}$; ut fiant latera 13, 14, 15, et area 84; semidiameter est $\frac{65}{8}$.

Describi potest sectio conica tali circino:

1 Columba arditea *E ändert Hrsg. nach DO*

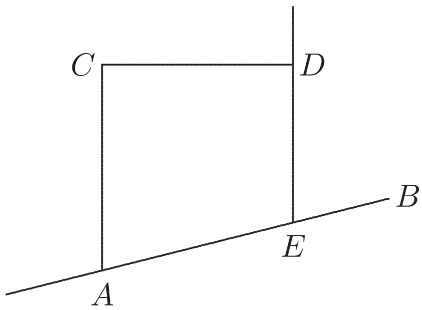
---

1 f. Columba ... deflectat: Vgl. die entsprechende Erwähnung bei POISSON, *Commentaire*, S. 156. — Vgl. ebenso *Commentarii Collegii Conimbricensis Societatis Iesu, In octo libros Physicorum Aristotelis Stagiritae*, lib. II, cap. I, quaestio VI (in der Ausgabe Lyon, 1594, S. 217 f.); G. B. PORTA, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. XX, cap. 10, S. 302 f. — Vgl. auch die Leibniz'sche Handschrift *Columba Architae resuscitata* vom Juni 1678 (LH 38, Bl. 91). 3–6 Si ... est $\frac{65}{8}$: Das Dreieck mit den Seitenlängen 13, 14, 15 ist in der geometrischen Literatur der Zeit verbreitet: Zur Berechnung der Dreiecksfläche aus den gegebenen Seiten vgl. z. B. den Hinweis von COSTABEL, *L'initiation mathématique*, S. 642, auf Chr. CLAVIUS, *Geometria practica*, 1604, S. 175 f.; bei L. VAN CEULEN, *Fundamenta arithmetica et geometrica*, 1615, S. 122 f. u. 158 (Berechnung des Umkreisdurchmessers). — Ein Dreieck mit den Seitenlängen 13, 14, 15 wird z. B. auch von N. TARTAGLIA, *General trattato*, 1560, Teil 4, Buch 2, Bl. 34 v° bis 36 r°, im Beispiel einer Berechnung des Tetraedervolumens verwendet (vgl. SCHNEIDER, *Johannes Faulhaber*, S. 126); ebenso bei N. MAROLOIS, *Opera mathematica*, 1614, Teil 4, § 53. 4 quarto: Das Wort *quarto* ergibt an dieser Stelle keinen Sinn (vgl. *DOC* I, S. 587, Anm. 37). Vielleicht geht es auf eine tentative Lesung einer vermuteten Kontraktion wie 4°, q° oder qu° zurück; vgl. z. B. die Kontraktionen von *ipsi* oder *quaesiti* bei CAPPELLI, *Dizionario*, S. 186 u. S. 305. 7–116,8 Describi ... distabit: MANDERS, *Descartes et Faulhaber*, S. 3 f., verweist auf das von Johann Remmelin am 9. Dezember 1620 abgelegte Zeugnis über den Besitz noch nicht öffentlich bekannter Proportionalzirkel bei Faulhaber: „Nemlich / vier newe ProportionalZirckel / mit welchen man zwischen zwo Linien zwey andere media Proportionalia, Geometrisch finden solle. Item / Wie jeder winckel auff einem Circkelriß in drey gleiche partes Geometrisch zu theilen. Deßgleichen wie alle Conische / Cylindrische Sectiones Geometrisch zuvollbringen / von welchen andere authores grosse Bücher geschriben." (J. REMMELIN, *Copiae Eines uber die Inventiones, Secreta unnd Wissenschaften Herrn Johann Faulhabers / ertheilten Testimonii*, in: J. FAULHABER, *Appendix oder Anhang der Continuation deß Newen Mathematischen Kunstspiegels*, 1621, S. [4 f.]).



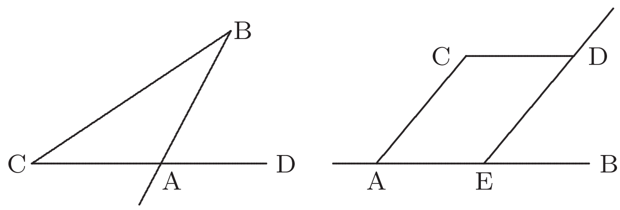
[*Fig. 8a*]

Sit AD perpendicularis superficies obliqua AB. Sit pes circini immobilis, volvatur BC supra planum obliquum, ita tamen ut CB possit brevior fieri, si imaginetur per C ascendere.



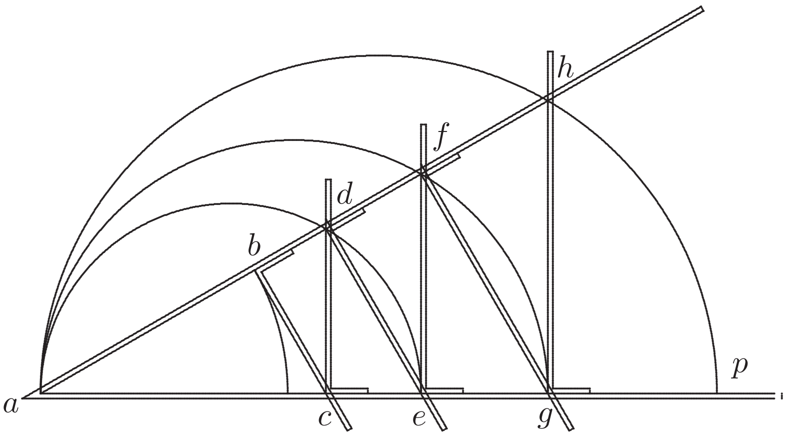
[*Fig. 8b*]

Sectio cylindri eodem pacto circino duci potest ita: sit $ACDE$ circinus, cujus pes immobilis est, linea DE descendet vel ascendet libere per punctum D prout a plano distabit.

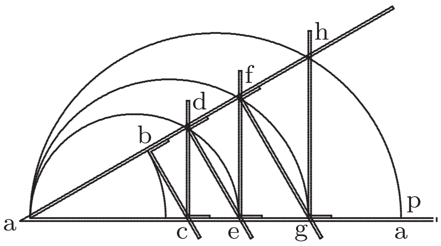
1+5 *Fig. 8a* u. *8b*


E ändert Hrsg. nach DO

2 obliqua CD *E ändert Hrsg. nach DO* 2 Sit pes circini immobiliter *E ändert Hrsg. nach DO* 3–6 fieri. Si imaginetur per B ascendere, sectio *E ändert Hrsg. nach DO* 6 sit AC, DE circinus, hujus pes *E ändert Hrsg. nach DO*



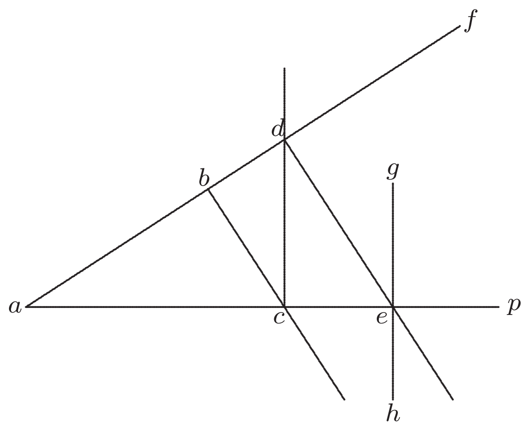
[*Fig. 9*]

2 *Fig. 9* 

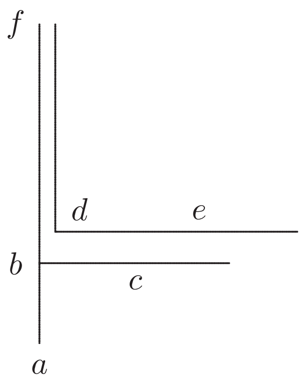
E ändert Hrsg.

---

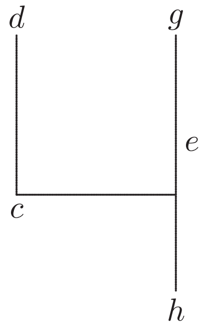
2 Fig. 9: Wegen des Textbezugs auf die Figur in S. 118 Z. 2 wurde die Reihenfolge der Figuren 9 und 10 gegenüber *E* vertauscht. Die in *E* abgedruckte Figur unterscheidet sich in der Ausgestaltung deutlich von den anderen Skizzen zu den Gleichungszirkeln und stimmt nicht komplett mit dem zugehörigen Text überein. Es ist zu vermuten, dass Foucher de Careil sie, gestützt auf die Anmerkungen von Leibniz, nach dem Druck des Proportionalzirkels in der *Géometrie* von Descartes übernommen hat. Dem Text entsprechend kann die Figur folgendermaßen rekonstruiert werden:



Inveni aequationes inter talia: 1ȼ et 7♃ + 14, et simile hoc. 1° Reduco ad 1♃ + 2 aequ. ȼ vel +1ȼ, quem postea multiplicabo per 7 primi circini; deinde alium circinum habere oportet quorum duae partes sunt tales:



[*Fig. 10a*]



[*Fig. 10b*]

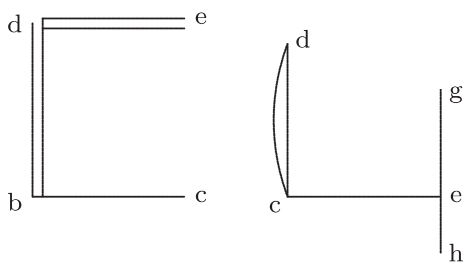
Prima habet lineam *bc* firmiter annexam ad angulos rectos lineae *af*, lineam autem *de* ad angulos quidem rectos, sed mobilem per lineam *fb*. Linea *fb* habet praeterea in

---

2 *Zu* primi circini, *laut E von Leibniz angemerkt:* Erat circinus qualis est mesolabi in *Geom.* Cart., scilicet pars ex mesolabi duabus proportionalibus.

1 f. talia 15 et 74 + 14 et simile hoc. 1° Reduco ad 12 + 2 + c vel + 1c quam postea *E ändert Hrsg.*

4 *Fig. 10a* u. *10b*



E ändert Hrsg.

1–120,4 Inveni ... quaesitus: Descartes unterlaufen offenbar bei den algebraischen Lösungsversuchen in den Beispielen kubischer Gleichungen systematische Fehler. Die instrumentelle Lösung mit Kombinationen der ihm zur Verfügung stehenden Gleichungszirkel ist jedoch möglich. Zu den Gleichungszirkeln vgl. Bos, *Redefining Geometrical Exactness*, S. 237–245. **19,7** circinus: Vgl. J. Remmelin (s. o. die Erl. zu S. 115 Z. 7) sowie R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67–69.

puncto *d* stylum fixum quo lineam describat; in puncto *f* etiam unum sed mobilem quo aliam lineam describat hoc pacto. Secunda pars *dcegh* constans lineis firme invicem annexis fluat supra lineam *ap*, ubi affixa est prima pars, in puncto *a* immobili; punctum *c* impellit lineam *bc* et ita efficiet ut tota secunda pars descendat, linea autem *cd*, trahit lineam *de* per spatium *fb* juxta varietatem intersectionum et tum stylus *d* lineam primi circini describet. Linea autem *gh* intersecabit etiam lineam *de* aliamque lineam curvam stylo *e* mobili describet quae ultima linea secabit *ap* in quo *ae* est cubus inveniendus si *ab* primae partis sit unitas, *ce* vero secundae numerus absolutus, qui in exemplo est binarius.

Fit praeterea aequatio inter talia, ȼ, ʒ, ꝛ, dummodo quot sint ʒ tot ꝛ, et hoc modo: 1ȼ aequ. 6ʒ − 6ꝛ + 56. 1° Reduco ad numerum radicum ternarium, habeboque $\frac{1}{2}$ȼ aequ. 3ʒ − 3ꝛ + 28. Deinde ex *N* tollo unitatem, ex residuo cubum formo cujus radici unitatem addo et quod cubice extra producitur ex illa radice est $\frac{1}{2}$ȼ quod si multiplicetur per 2 producet cubum quaesitum.

Sed si non sunt tot ʒ quot ꝛ, reducemus ad fractiones, ita ut horum numeri superiores sint aequales hoc pacto: ut 36 + 3ʒ − 6ꝛ aequ. 1ȼ reducam ad 9 + $\frac{3}{4}$ʒ − $\frac{3}{2}$ȼ; quo facto

---

2 *Nach* hoc pacto, *laut E (wohl Verweis auf Fig. 9):* ⊙

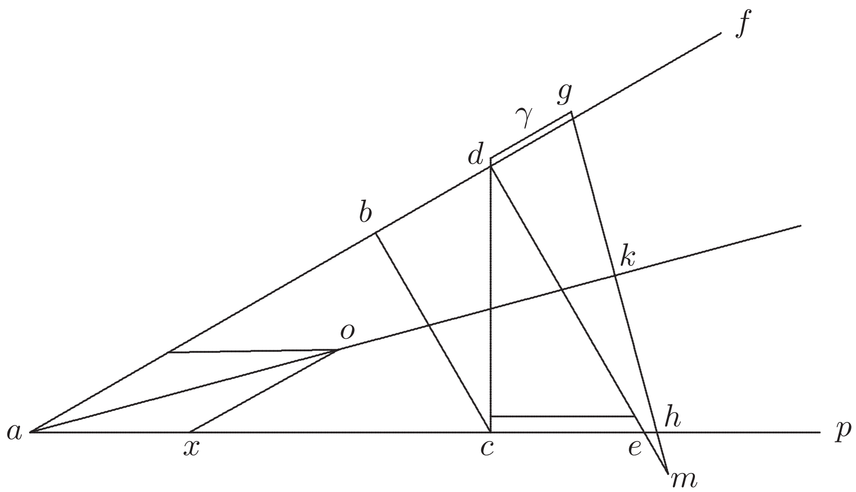
5 f. *Zu* lineam primi circini, *laut E von Leibniz angemerkt:* illam mesolabi seu pro duabus mediis de qua in *Geometria* Cartesii

1 describat in puncto etiam unam sed mobilem *E ändert Hrsg.* 2 describat f hoc pacto ⊙. *E ändert Hrsg.* 4 tota prima pars *ändert Hrsg. nach DO* 7 stylo c mobili *E ändert Hrsg.* 7 quo ad est *E ändert Hrsg. nach DO* 10–12 talia 5, 3, 4. Nummodo quot sint 3 tot 4 et hoc modo 15 + 63 + 64 + 56. 1° Reduco ad numerum radicum ternarium habeboque 1/2 g3z + 24 + 28. Deinde ex N tollo unitates *E ändert Hrsg. nach DO* 13 radice est 1/2 c quod *E ändert Hrsg. nach DO* 15 sunt tot 3 quot 4, reducemus *E ändert Hrsg. nach DO* 16 hoc pacto: ut 36 + 3z + 64 + 1g reducam ad 9 | $\frac{3}{4}$z − $\frac{3}{2}$4 pro facto *E ändert Hrsg. nach DO*

---

7 stylo *e* mobili: Zum Herausgebereingriff in den Text vgl. Bos, *Redefining Geometrical Exactness*, S. 244, Anm. 26. **20,18** mesolabi: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67–69.

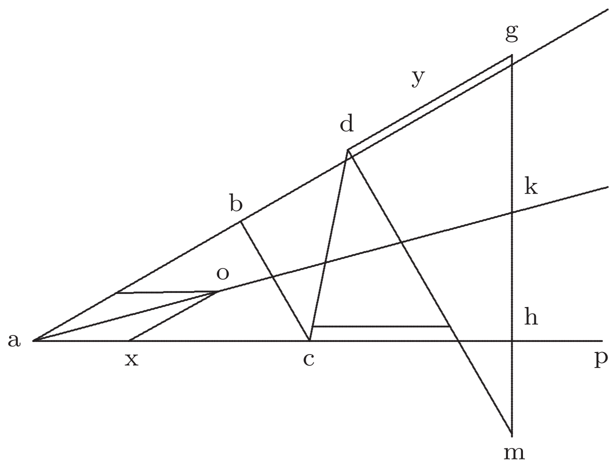
si ex N tollatur 1 et eadem hujus residui radici cubicae addatur et productum cubice multiplicetur, fiet $\frac{1}{4}$ç aequalis 27, sive ç erit 108. Item sit 1ç aequ. $26 - 3$ʒ $- 3$♃. Addo unitatem numero absoluto, deinde ex radice producti unitatem demo, et producitur ex radice cubus quaesitus.



[*Fig. 11*]

1 tollatur 1 ex eadem *E ändert Hrsg.* 2 fiet 1/4g aequalis 27 sive c erit 216. Item sit 1g et 26 − 3z − 34. Addo *E ändert Hrsg. nach DO*

5 *Fig. 11*



E ändert Hrsg.

Alius circinus ad aequationes cubicas 1ȼ & OʒON. — Si inveniendus sit cubus aequalis ON dg et quadrato uni incognito, talis circinus fabricetur dce fluit supra ap fluendo pellit bc in puncto c adigitque ut descendat simulque af cui affixa est bc ad angulos rectos describitque intersectione af et cd lineam circini mesolabi. Praeterea trahit secum lineam dm quae impacta est lineae af, ita tamen ut moveatur, trahit etiam dg quae est numerus absolutus et fluit supra af; item dg trahit gm quod impactum est lineae ak ad angulos rectos, ita ut sine illa moveri non possit, adeoque retrocedit rursus ʒ. Intersectio autem linearum gm et dm describit aliam lineam quae intersecat ap in puncto quaesito. Ab illo m ad a est ȼ inveniendus. Sit enim, verbi gratia, $d\gamma$ ON loco dg. Quia intersectio de et γe cadit in ap dico cubum ae esse aequalem quadrato ad et ON $d\gamma$. Nam triangulus γae est isoceles propter lineam ak quae impacta est ad angulos rectos lineae γe ex constructione. ab autem est unitas etiam ex constructione, ac vero radix cubi inventi. Ex his inveniri possunt aequationes inter 1ȼ et Oʒ $-$ ON item $ON - O$ʒ ut ex praecedenti inveniri potest inter 1ȼ et O♃ $-$ ON, item $ON - O$♃, sed viam aperuisse sufficiat.

---

10 Zu $d\gamma$ ON, *laut E von Leibniz angemerkt:* id est absolutus

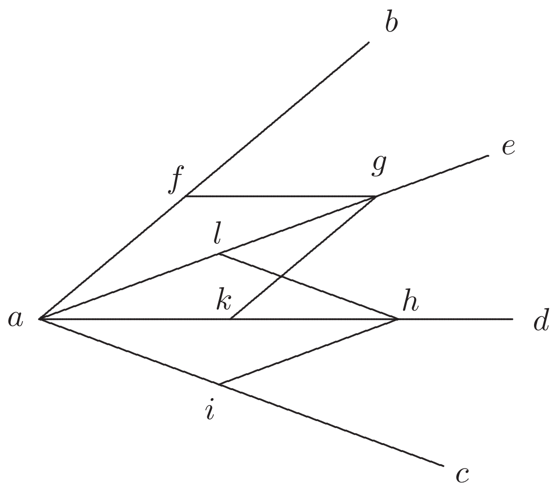
13 *Zu* radix cubi inventi *laut E von Leibniz angemerkt:* puto inveniri primum cubum quaesitum inde ejus radicem

1 cubicas 1c et 0z on *E ändert Hrsg. nach DO* 4 est vc ad *E ändert Hrsg. nach DO* 6 trahit gmqd *E ändert Hrsg.; nach* gmqd *laut E von Leibniz angemerkt:* (+ non video q. in figura +) 7 sine ulla *E ändert Hrsg. nach DO* 8 rursus z *E ändert Hrsg.* 9 quaesito ab illo in ada est C. Inveniendus sit *E ändert Hrsg.; zum ersetzten Text, laut E von Leibniz angemerkt:* obscure 9 f. gratia, dy ON loco dy quia intersecto de et ye cadit *E ändert Hrsg.* 10 cubum ac esse *E ändert Hrsg.* 12 lineae ge ex *E ändert Hrsg.* 13 f. aequationes inter 1g et 0z – ON item ON – 0z ut *E ändert Hrsg. nach DO* 14 potest inter 1g et 04 – ON item ON – 04, sed *E ändert Hrsg. nach DO* **22**,**18** ejus radium *E ändert Hrsg. nach DO*

---

4 lineam circini mesolabi: *a. a. O.* **22**,**20** non ... figura: Leibniz hat offenbar die Buchstaben *qd*, die wir als Kontraktion von *quod* interpretieren, für zwei Punktbezeichnungen gehalten, zu denen er den Punkt *q* in der Figur nicht finden konnte.

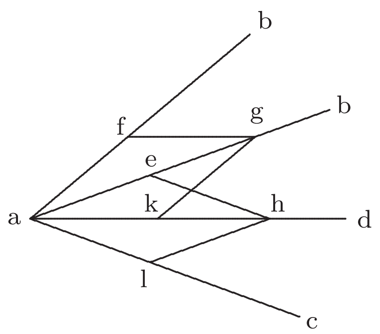
C i r c i n u s   a d   a n g u l u m   i n   q u o t l i b e t   p a r t e s   d i v i d e n d u m. Sit talis circinus



[*Fig. 12a*]

$ab/ae/ad/ac$ sunt aequales laminae divisae pariter in punctis $flki$, item fg aequalis est af, etc. Unde fit ut tres anguli bae, ead et dac sint semper aequales, nec unus possit augeri vel minui quin alii etiam mutentur.

3 *Fig. 12a*

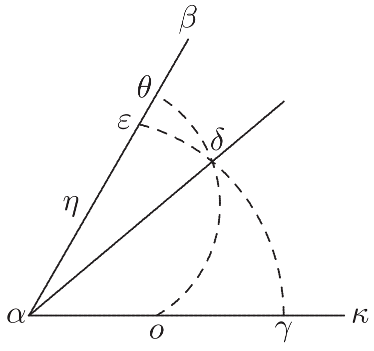


E ändert Hrsg.

4 laminae divisis *E ändert Hrsg. nach DO; zu* divisis *laut E von Leibniz angemerkt:* (+ an divisae? +)
4 punctis feki *E ändert Hrsg.*

---

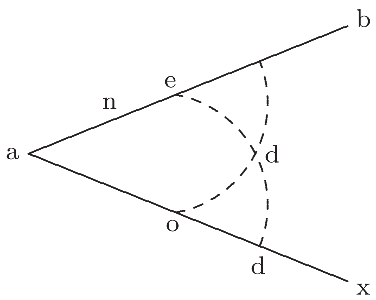
1 C i r c i n u s ... d i v i d e n d u m : Vgl. das Zeugnis von J. REMMELIN (s. o. die Erl. zu S. 115 Z. 7) sowie die Aufzeichung *Sectio anguli per instrumentum* von Leibniz, dat. 28. März 1676, mit den zugehörigen Figuren von Tschirnhaus (VII, 1 N. 24 S. 182). — Zur Funktionsweise des Winkelteilungsinstruments vgl. BOS, *Redefining Geometrical Exactness*, S. 237–239.



[*Fig. 12b*]

Si igitur angulus $\beta\alpha\kappa$ dividendus, applico lineam *ac* supra $\alpha\kappa$, qua ibi manente immobili, elevo lineam *ba* in partem β quae secum trahit *ae* et *ad*, lineaque describetur a puncto *g* talis $\gamma\delta\epsilon$. Deinde sumatur $\eta\alpha$ aequalis af et ex puncto η ducatur pars circuli $\theta\delta o$ ita ut $\eta\theta$ sit etiam aequalis fg, dico lineam $\alpha\delta$ dividere angulum in tres partes aequales; ita potest dividi angulus in plures, si circinus constet pluribus laminis.

1 *Fig. 12b*



E ändert Hrsg.

2 angulus αx *E ändert Hrsg.* 2 supra αx *E ändert Hrsg.* 3 partem b *E ändert Hrsg.* 3 trahit ac *E ändert Hrsg.* 4 sumatur nα *E ändert Hrsg.* 4 puncto n ducatur *E ändert Hrsg.* 5 ut nθ *E ändert Hrsg.* 5 lineam aδ *E ändert Hrsg.* 6 constet plurimis *E ändert Hrsg. nach DO*

Si subtrahatur numeri triangularis quadratus ex quadrato sequentis triangularis, restat cubus ut 10. 15: tolle 100 ex 225 restat 125, ex 5.

Ex progressione 1 | 2 || 4 | 8 || 16 | 32 || habentur numeri perfecti 6. 28. 496.

Vidi commodum instrumentum ad picturas omnes transferendas: constat in pede cum circino bicipiti. Aliud quoque ad omnia horologia depingenda, quod per me possum invenire: Tertium ad angulos solidos metiendos; quartum argenteum ad plana et picturas metiendas, pulcherrimum aliud ad picturas transferendas, aliud affixum viatoris

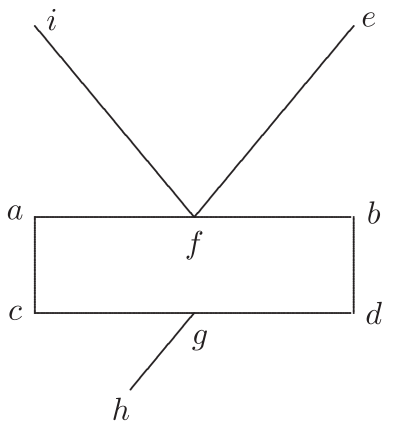
2 restat 120, ex. *E ändert Hrsg.* 7–125,1 affixum oratoris tibiae *E ändert Hrsg.*

---

1 f. Si ... ex 5: Die Aussage ergibt sich aus der Umkehrung des bereits bekannten Theorems, dass die Summen der Kubikzahlen gleich den Quadraten der Triangularzahlen sind; vgl. die Tafel mit den Spalten *G* der Kubikzahlen und *H* der Quadrate der Triangularzahlen auf dem Titelblatt von J. Faulhaber, *Schrifftlich Memorial*, 1622, sowie die eingehende Analyse bei Schneider, *Johannes Faulhaber*, S. 131–135. 3 Ex ... 496: Vgl. den Hinweis bei Costabel, *L'initiation mathématique*, S. 640 f., auf Eukleides, *Elementa*, IX, 36, sowie den zugehörigen Kommentar in Chr. Clavius, *Opera mathematica*, Bd I, 1611, S. 378. 4–125,1 Vidi ... dirigenda: Beim ersten und fünften Instrument der Liste handelte es sich wohl um einen Pantographen (vgl. B. Bramer, *Bericht und Gebrauch eines Proportional Lineals*, 1617; D. Schwenter: *Geometriae practicae novae tractatus* I, 1618, S. 255–257; Chr. Scheiner, *Pantographice, seu ars delineandi*, 1631); beim zweiten um ein Instrument zur Konstruktion von Sonnenuhren (vgl. z. B. Chr. Clavius, *Fabrica et usus instrumenti ad horologiorum descriptionem peropportuni*, 1586; B. Leemann, *Sonnen Uhren zuo ryssen*, 1587; Ders., *Instrumentum instrumentorum: Horologiorum sciotericorum*, 1604); das dritte diente zum Messen räumlicher Winkel (vgl. B. Bramer, *Kurtzer Bericht, Eines Schreg, oder Winckel Instruments*, 1615); das vierte war ein Planimeter (vgl. z. B. L. Hulsius, *Erster Tractat Der Mechanischen Instrumenten Levini Hulsii: Gründtlicher, augenscheinlicher Bericht dess newen geometrischen gruntreissenden Instruments, Planimetra genandt*, 1604; J. Faulhaber, *Ein sehr nützlicher new erfundener Gebrauch eines niderländischen Instruments zum Abmessen und Grundtlegen*, 1610; Ders., *Newe geometrische und perspectivische Inventiones etlicher sonderbahrer Instrument*, 1610; B. Bramer, *Trigonometria planorum mechanica*, 1617); das sechste Instrument war ein Schrittzähler (vgl. z. B. L. Hulsius, *Vierdter Tractat der Mechanischen Instrumenten Levini Hulsii. Gründtliche Beschreibung des Diensthafften unnd Nutzbahrn Instruments Viatorii oder Wegzählers*, 1605); das siebte war ein Geschützaufsatz mit einer Visiereinrichtung, die eine bei Tageslicht vorgenommene Ausrichtung einer Kanone nachts reproduzieren konnte (vgl. den Hinweis bei Mehl, *Descartes en Allemagne*, S. 49–52, auf L. Hulsius, *Ander Tractat Der Mechanischen Instrumenten Levini Hulsii: Gründlicher unterricht des newen BüchsenQuadrants, wie derselbe, das grosse Geschütz, bey Tag oder bey Nacht zurichten, gebraucht sol werden*, 1603; vgl. auch J. Faulhaber, *Weitere Continuation deß Privilegirten Mathematischen Kunstspiegels*, 1626, S. 20–21).

tibiae ad momenta metienda, aliud ad tormenta bellica noctu dirigenda. — Petri Rothen *Arithmetica philosophica*. — Benjamin Bramerus.

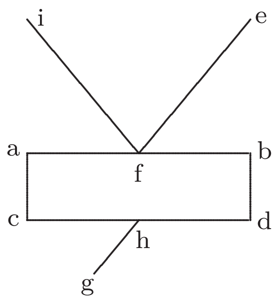
Lux quia non nisi in materia potest generari, ubi plus est materiae, ibi facilius generatur caeteris paribus; ergo facilius penetrat per medium densius quam per rarius, unde fit ut refractio fiat in hoc a perpendiculari, in alio ad perpendicularem, omnium autem maxima refractio esset in ipsa perpendiculari si medium esset densissimum a quo iterum exiens radius egrederetur per eundem angulum.



[*Fig. 13*]

Sit *abcd* medius densissimus, radius ef per fg perpendiculariter transibit per fg in gh, ita ut bfe et cgh sunt aequales anguli. Reflexio autem nihil est aliud quam productio

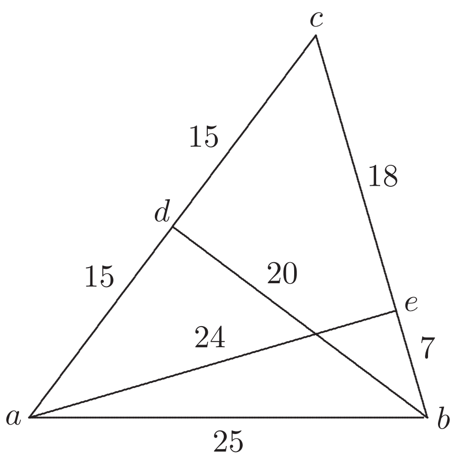
8 *Fig. 13*



E ändert Hrsg. 9 per fh in *E ändert Hrsg.*

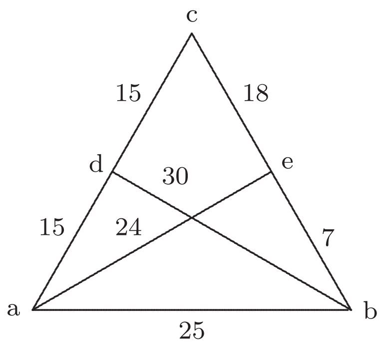
1 f. Petri ...*philosophica*: P. Roth, *Arithmetica Philosophica, Oder schöne newe wolgegründte Überauß Künstliche Rechnung der Coß oder Algebrae*, 1608. 2 Benjamin Bramerus: B. Bramer.

lucis a superficie opaca in partem inversam, quoniam in rectum non potest, v. g. superficies afb producit radium reflexum fi quem surrectum gh produxisset superficies cgd. Locus imaginis est in linea recta ab oculo ad primum reflexionis vel refractionis punctum producta, in quo autem illius puncto sit; hoc non apparet nisi ex situ aliorum punctorum quia distantia objecti non aliter advertitur; vel dici potest esse in perpendiculari ab objecto, id enim unum fit per accidens in quibusdam et non ex eo quod sit concursus perpendicularis.



[*Fig. 14*]

2 surectum *E ändert Hrsg. nach DO* 8 *Fig. 14*



E ändert Hrsg.

Dantur *adb* et *aeb*, invenire *ac* et *cb*, differentiam inter *ad* ductum per *ae* et *db* ductum per *be*; divido per differentiam inter quadrata ex *ae* et *db*, et productum si ducatur per *ae* facit *ac*, si per *db* facit *bc* est enim ut *ae* ad *db* ita *ce* ad *dc* atque ut *db* ad *ae* ita *cb* ad *ca*.

Nuper cum aliquas chartas comburerem, et ignis in quo comburebantur, esset acrior, animadverti characteres integros manere et tam lectu faciles quam antea: e contrario scripta vidi cum atramento sulfure mixto intra viginti quatuor horas evanescere.

R e g u l a   g e n e r a l i s   ad   a e q u a t i o n e s   q u a t u o r   t e r m i n o r u m   c o m p l e t a s. — Reducatur numerus quadratorum ad ternarium per divisionem; deinde si illis addita sit nota $+$ tollantur 𝔷 ex toto numero et loco illorum reponantur 3♃, et tollatur unitas, ac praeterea addantur tot unitates quot sunt ♃ et 𝔷, deinde procedatur ad aequationem inter Oç et O♃ $+ ON$. Qua inventa, addatur unitas radici inventae, et illa radix erit quae quaerebatur. Si vero quadratis addita sit nota —, tollantur 𝔷 et loco illorum addantur 3♃ et unitas[;] deinde tollantur adhuc tot unitates quot sunt ♃ et 𝔷, ac postea si extrahatur radix ex invento nostro et ex illa extrahatur unitas, habebitur radix quaesita initio.

1 Datur *E ändert Hrsg. nach DO* 1 per ae et ab *E ändert Hrsg. nach DO* 2 ex ad et cb *E ändert Hrsg. nach DO* 3 utque *E ändert Hrsg. nach DO* 3 f. cb ad ea *E ändert Hrsg. nach DO* 10 tollantur ($\surd$) *E ändert Hrsg. nach DO* 10 reponantur 34 *E ändert Hrsg. nach DO* 11 sunt 4 *E ändert Hrsg. nach DO* 12 inter 06 et 04 ON *E ändert Hrsg. nach DO* 12 f. radici, inventa et illa radix erit quae quae (bis) quaerebatur. *E ändert Hrsg. nach DO* 13–15 tollantur et loco illorum addantur 34 et unitas deinde addantur adhuc tot unitates quot sunt 4, ac (bis) postea *E ändert Hrsg. nach DO*

1–4 Dantur . . . ad *ca*: Die Aussagen gelten nur für Punkte *a*, *b*, *d*, *e*, die auf einem Kreis liegen und folgen aus dem Sekantensatz. In den Dreiecken *adb* und *aeb* mit den von Descartes in der Beispielfigur angegebenen Seitenlängen ist diese Bedingung erfüllt: Die Eckpunkte liegen alle auf dem Halbkreis mit der Basis *ab*. (Vgl. Eukleides, *Elementa*, III, 36, und den zugehörigen Kommentar in Chr. Clavius, *Opera mathematica*, Bd I, 1611, S. 146–148, insbesondere S. 148 die Umkehrung des ersten Korollars, sowie das 2. Beispiel in der Handschrift *Calcul de Mons. Descartes* (Hannover *GWLB* Ms IV 381, Bl. 23, gedr. *DO* X, S. 674 f.); vgl. auch die Aufzeichnungen von Leibniz und Tschirnhaus zu Kreisvierecken vom 2. Februar 1676, VII, 1 N. 23, S. 181, und VII, 2 N. 76, Teil 2, S. 849–851). 5–7 Nuper . . . evanescere: Vgl. G. B. Porta, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. XVI, cap. 2, S. 248 f.; vgl. Shea, *The Magic of Numbers and Motions*, S. 107 f., Anm. 50.

In tetraedro rectangulo basis potentia aequalis est potentiis trium facierum simul: v. g. sint basis tria latera $\sqrt{8}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{20}$; tria vero latera supra basin, 4, 2, 2, area basis erit 6; trium facierum, 2, 4, 4, quorum quadrata sunt 36, [et] 4, 16, 16, quae tria aequipollent priori. Item sunt latera basis $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$, 5 et supra basin, 2, 3, 4, area basis erit $\sqrt{61}$; facierum vero 3, 4, 6, quorum quadrata sunt 61 et 9, 16, 36, aequalia priori. Hinc plurimae quaestiones ignotae solvi possunt circa tetraedra rectangula et non rectangula per relationem ad rectangula.

Haec demonstratio ex Pythagorica procedit, et ad quantitatem quoque quatuor dimensionum potest ampliari, in quo quadratum solidi angulo recto oppositi aequale est quadratis ex 4 aliis solidis simul. Sit ad hoc paradigma processionum in numeris 1, 2, 3, 4; in figuris *l*, *q*, *c*, *qq*, *ß*; in angulis rectis duarum linearum, trium, quatuor.

Data basi pyramidis rectangulae, facile inveniuntur latera super basin, sint, v. g. latera basis $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$ et 5; pro primo latere supra basin ponatur 1♃; pro altero $\sqrt{13 - 1ʒ}$;

---

11 *Zu l, q, c, qq, ß laut E von Leibniz angemerkt:* (latus, potentia, cubus, quoque)

3 f. tria sequi pollent *E ändert Hrsg. nach DO* 11 figuris cp. cgq, β in angulis *E ändert Hrsg.* 13–129,1 ponatur 14; pro altero 13 − 1z, et pro tertio $\sqrt{20} - 1$z quorum *E ändert Hrsg. nach DO*

1–11 In ... quatuor: Vgl. J. Faulhaber, *Miracula arithmetica*, 1622, Kap. 45, S. 73–76.
8–11 Haec ... quatuor: Der Abschnitt enthält einige Aufzählungen mit drei, vier, wohl sogar fünf, Termen, die Descartes in Analogie zur Folge der Zahlen 1, 2, 3, 4 setzt. Die Analogie besteht darin, dass sich jede dieser aufsteigenden Folgen beliebig fortsetzen lässt. — Die in *E* gedruckte Textstelle „*cp. cgq*, β“ ist verderbt, aus dem Zusammenhang des Satzes lässt sich jedoch erschließen, dass es sich in der Vorlage um eine Wiedergabe einer aufsteigenden Folge von Potenzen handelte. Vom graphischen Befund her ist diese aber kaum mit der Folge der ersten drei (in *DO* gedruckten) oder vier cossischen Zeichen „ꝛ, ʒ, ꝯ, ʒʒ“ (in Analogie zu den Zahlen 1, 2, 3, 4) in Übereinstimmung zu bringen. Zieht man darüber hinaus die in *E* dazu abgedruckte Anmerkung von Leibniz („latus, potentia, cubus quoque“) hinzu, so wäre erklärungsbedürftig, warum Leibniz erst an dieser Stelle und nicht schon vorher die cossischen Zeichen in die entsprechenden mathematischen Begriffe übersetzt hat. Plausibler erscheint, dass Leibniz hier das Auftreten einer weiteren Bezeichnungsweise notierte, nämlich der Symbole *l*, *q*, *c*, *qq*, *ß* für *latus*, *quadratus* bzw. *potentia*, *cubus*, *quadratoquadratus*, *sursolidus*: Beispiele aus diesen alternativen Symbolen verwendet Descartes in der unmittelbar darauf folgenden Rechnung, nämlich *q* und *qq* sowie *qc* für *quadratocubus* (vgl. *DO* X, S. 247, Anm. b). Es muss wohl offen bleiben, ob es sich bei dem Wort „quoque“ in der Anmerkung von Leibniz nicht sogar um eine irrtümliche Auflösung von *qq* für *quadratoquadratus* handelt.

et pro tertio, $\sqrt{20 - 1\mathfrak{z}}$; quorum duorum potentia, quia aequalis potentiae lateris est aequalis $33 - 2\mathfrak{z}$ vel $1\mathfrak{z}$ aeq. 4. Ergo nota basi et angulo opposito totam pyramidem possumus agnoscere ut de triangulo Euclides demonstrat. Tetraedri rectanguli latera ad basin $\alpha\beta\gamma$ supra basin erunt

$$\sqrt{\frac{1}{2}\alpha q + \frac{1}{2}\gamma q - \frac{1}{2}\beta q};\ \sqrt{\frac{1}{2}\alpha q + \frac{1}{2}\beta q - \frac{1}{2}\gamma q};\ \sqrt{\frac{1}{2}\beta q + \frac{1}{2}\gamma q - \frac{1}{2}\alpha q};$$

areae facierum

$$\sqrt{\frac{1}{16}\alpha qq + \frac{1}{8}\beta q\gamma q - \frac{1}{16}\beta qq - \frac{1}{16}\gamma qq};$$
$$\sqrt{\frac{1}{16}\beta qq + \frac{1}{8}\alpha q\gamma q - \frac{1}{16}\alpha qq - \frac{1}{16}\gamma qq};$$
$$\sqrt{\frac{1}{16}\gamma qq + \frac{1}{8}\alpha q\beta q - \frac{1}{16}\alpha qq - \frac{1}{16}\beta qq};$$

2 aequalis, $33 - 22$ vel 1z aeq. 4 *E ändert Hrsg. nach DO* 4 basin a$\beta\nu$ supra *E ändert Hrsg. nach DO* 4–130,5 erunt $\sqrt{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{q}} - \frac{1}{2}(3\mathrm{q}\sqrt{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}\beta\mathrm{q}\ \sqrt{\frac{1}{2}}\ \sqrt{\mathrm{q}};\ \sqrt{\frac{1}{2}}\beta\mathrm{q} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{q}0} - \frac{1}{2}\mathrm{aq}$; areae facierum $\sqrt{\frac{1}{16}}\mathrm{aqq} + \frac{1}{8}(3\mathrm{q}\sqrt{\ } - \frac{1}{16}\beta\mathrm{qq} - \frac{1}{16}\sqrt{\mathrm{qq}} - \sqrt{\frac{1}{16}}\beta\mathrm{qq} + \frac{1}{8} =;\ \sqrt{\mathrm{q}} - \frac{1}{16}\mathrm{aqq} - \frac{1}{16}\sqrt{\mathrm{qq}},\ \sqrt{\frac{1}{16}}\sqrt{\mathrm{qq}} + \frac{1}{8} = \beta\mathrm{q} - \frac{1}{16} = \mathrm{qq} - \frac{1}{6}\beta\mathrm{qq}$. Area basis $\begin{array}{rll} \sqrt{\mathrm{aq}} & \beta\mathrm{q} - \frac{1}{16} & \mathrm{aqq} \\ \frac{1}{8}\mathrm{aq} & \sqrt{\mathrm{q}} & \beta\mathrm{qq} \\ \beta\mathrm{q} & \sqrt{\mathrm{q}} & \sqrt{\mathrm{qq}} \end{array}$ Totum corpus tetraedri est: $\sqrt{\frac{1}{288}\mathrm{aqq}\beta\mathrm{q}} + \frac{1}{288}\mathrm{aqq}\sqrt{\mathrm{q}} + \frac{1}{288}\beta\ \mathrm{qqaq} + \frac{1}{288}\sqrt{\mathrm{qqaq}} + \frac{1}{288}\sqrt{\mathrm{qq}}\beta\mathrm{q} - \frac{1}{144}\mathrm{aqBq}\sqrt{9}\frac{1}{288}\mathrm{aq} - \frac{1}{288}\beta\mathrm{qc} - \frac{1}{288}\beta\nu\mathrm{qc}$. Invenitur *E ändert Hrsg. nach DO*

---

3 demonstrat: Die Aussage gilt nur für gleichschenklige Dreiecke und folgt aus Eukleides, *Elementa*, I, 26, eine Analogie zu den von Descartes betrachteten rechtwinkligen Tetraedern besteht jedoch nicht.

Area basis

$$\sqrt{\frac{1}{8}\begin{array}{l}\alpha q\beta q\\ \alpha q\gamma q\\ \beta q\gamma q\end{array} - \frac{1}{16}\begin{array}{l}\alpha qq\\ \beta qq\\ \gamma qq\end{array}}$$

Totum corpus tetraedri est:

$$\sqrt{\begin{array}{l}\frac{1}{288}\alpha qq\beta q + \frac{1}{288}\alpha qq\gamma q + \frac{1}{288}\beta qq\alpha q + \frac{1}{288}\beta qq\gamma q + \frac{1}{288}\gamma qq\alpha q\\ \quad + \frac{1}{288}\gamma qq\beta q - \frac{1}{144}\alpha q\beta q\gamma q - \frac{1}{288}\alpha qc - \frac{1}{288}\beta qc - \frac{1}{288}\gamma qc\end{array}}$$

Invenitur corpus pyramidis ex tribus lateribus ad basin solis cognitis, si assumatur media pars summae ex tribus illorum quadratis agregatae et rectangula radix trium quantitatum in se ductarum, quibus illa media summa excedit quadrata singulorum laterum separatimque continet sexies totum corpus hexaedri. Sint, v. g. tria latera ad basin $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$, 5, media pars summae ex tribus quadratis est 29, excedens 13, 20, et 25, numeris 16, 9, 4, quae per se ducta faciunt 576 cujus radix est 24 et hujus sexta pars est 4. Ergo corpus pyramidis est 4.

6 agregatae et rectangulae radix *E ändert Hrsg. nach DO* 10 24 et cujus sexta *E ändert Hrsg. nach DO*

23. DE CONDENDIS TABULIS ANALYTICIS
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 440. 1 Bl. 2°. $\frac{2}{3}$ S. auf Bl. 440 r°. Rückseite leer. — Gedr.: *LDK*, 1980, S. 146 f.
Cc 2, Nr. 898

Januar. 1675.

De Condendis Tabulis Analyticis

Tabulas habemus Numerorum, Tabulas literarum, sive Combinationum dedit nemo. Quaerenda ergo ratio est condendi Tabulas ejusmodi, ut earum usus quam latissime pateat.

Pars I^ma de aequationum unius incognitae radicibus indefinitis

Hic recensebuntur ordine omnes aequationes unius incognitae ad gradum usque vicesimum si placet, et quidem generaliter atque indefinite; v. g. pro gradu tertio $x^3 + bx^2 + a^2cx + a^2d \sqcap 0$ cujus radices irrationales generaliter, et una formula (ope signorum ambiguorum) exhiberi potest; idem fiat in caeteris aequationibus omnibus, si modo id fieri potest.

Pars II. de aequationum tractationibus

Methodus investigandi aequationum divisores rationales atque irrationales gradu inferiores Tabulaeque quales Huddenianae. Methodus tollendi ex aequatione terminos quot

8 Numerorum, *(1)* restant Tabulae *(2)* Tabulas *L* 9 ejusmodi, *(1)* qvo *(2)* ut *L* 9–11 latissime *(1)* fundatur *(2)* pateat. *(a)* Pars I^ma de Formulis | sive Aeqvationibus *erg.* | unius incognitae *(aa)* ibi *(bb)* Praemittatur omnibus Methodus investigandi divisores Rationales pariter atqve irrationales, | sed dimensione inferiores; aeqvationum unius incognitae *nicht gestr.* | *(b)* Pars I^ma: de *(aa)* Aeqvationibus *(bb)* Aeqvationum unius incognitae, *(cc)* Aeqvationum *L* 11 f. radicibus | indefinitis *erg.* | *(1)* In *(2)* Hic *L* 13 indefinite; | Earumque *gestr.* | v. g. *L* 13 f. tertio *(1)* x^3+a *(2)* $\mathrm{a}^4+\mathrm{a}^3\mathrm{bx}+\mathrm{a}^4$ *(3)* x^4 *(4)* x^3+ *(a)* ba^2 *(b)* abx^2 *(c)* bx^2+ *(aa)* $\mathrm{a}^2\mathrm{cx}$ *(bb)* acx | $+\mathrm{a}^2\mathrm{d}$ *erg.* | $\sqcap$ 0 *L* 15 omnibus, *(1)* Sed qvoniam in altioribus inprimis aeqvationibus *(a)* incognitae *(b)* aeqvationes mult *(c)* radices irrationales multis exprimi possunt modis, suppositis *(2)* si *L* 17 aeqvationum *(1)* form *(2)* tractationibus *L* 19 Tabulaeqve qvales Huddenianae *erg.* *L* 19 Methodus *(1)* transformandi *(2)* tollendi *L*

19 tabulaeque ... Huddenianae: J. Hudde, *De reductione aequationum*, Regel XI, *DGS* I S. 439 bis 458.

licet, praescriptis in eam rem formulis generalibus ut res sine calculo fiat. Methodus reducendi aequationes locorum parium ad proxime inferiores locorum imparium. Methodus efficiendi ut omnium aequationum radices fiant verae; Methodus reducendi aequationes ad alias inferiores ope quarundam intervenientium.

Regulae de aequationum limitibus; de resolutionibus aequationum in Analogias et formularum in portiones, sed hoc ope calculorum qui sequentur seu ope formularum plurium incognitarum. Huc alia id genus.

Pars III. de Aequationibus plurium incognitarum reducendis ad aequationes unius

Sit aequatio ascendens ad solidum incognitum; conjungatur p r i m u m cum alia quae non ascendit nisi ad lineam incognitam, d e i n d e cum ea in qua linea et planum incognita, t e r t i o cum pari.

Totum ejusmodi Tabulae condendae artificium in eo consistet, ut sequentia praecedentibus perpetuo juventur; itaque primum simplicibus admodum utendum est aequationibus, sed multis.

2 locorum *(1)* parium *(2)* imparium *L* 3 verae; | item, *gestr.* | Methodus *L* 5 in *(1)* Analy *(2)* Analogias *L* 6 ope *(1)* Rela *(2)* formularum *L* 9 ad *(1)* cubum; *(2)* qvadratum incogni *(3)* solidum *L* 10 ad *(1)* rect *(2)* lineam *L* 10 qva | non nisi *gestr.* | linea *L*

---

8 De ... unius: vgl. z. B. die Studie *De aequationibus pluribus ad unam reducendis* (VII, 2 N. 77) vom 7. Februar 1676.

24. SCHEDIASMA DE CONSTRUCTORE
Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 17 Bl. 11–15, 17. 3 Bog. 2°. 12 S. Textfolge Bl. 11, 17 r°, 17 v° (untere zwei Drittel), 12–15. Ersetzte Vorstufen von Figuren werden nicht wiedergegeben. — Auf dem oberen Drittel von Bl. 17 v° N. 28.
Cc 2, Nr. 827

Schediasma de c o n s t r u c t o r e. Xb. 1674.

24_1. PARS PRIMA

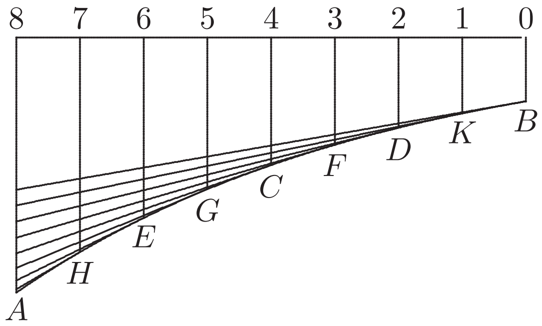
Trochoeidis parabolicae ope credo effici potest, ut qualibet data figura alia describatur quae sit in ratione logarithmorum ejus. Idque utile erit pro figuris usitatoribus, v. g. circulo figuraque angulorum, Cycloeide, ipsaque Trochoeide parabolica, quod si pro ipsa Trochoeide parabolica fiat, fient logarithmi logarithmorum.

Figurae logarithmicae aequatio haec est $x \sqcap a^y$. Sed quoniam lex homogeneorum observari debet, videbimus quid futurum sit, $x \sqcap \frac{b}{a^0}$ vel $\frac{b^2}{a^1}$ vel $\frac{b^3}{a^2}$ vel $\frac{b^4}{a^3}$ etc. vel $x \sqcap \frac{b^y}{a^{y-1}}$ vel $xa^{y-1} \sqcap b^y$.

---

10 *Über* usitatoribus: utilioribus

7 Schediasma ... 1674. *erg. L* 9 *(1)* Figura log *(2)* Trochoeidis *L* 9 f. describatur *(1)* homogene *(2)* qvae *L* 11 parabolica, *(1)* qva methodo ha *(2)* qvod *L* 13 est *(1)* $\mathrm{a}^{\mathrm{y}-1}\mathrm{x} \sqcap \mathrm{a}^{\mathrm{y}}$ $\mathrm{xa}^{\mathrm{y}-1} \sqcap$ *(2)* $\mathrm{x} \sqcap \mathrm{a}^{\mathrm{y}}$ *L* 14 sit, *(1)* nimirum $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} \sqcap$ vel 1^{y} et haec aeqvatio exacta est. Imo male, qvia 1^{y} seu 1 utcunqve in se ducta dat 1. Itaqve *(2)* $\mathrm{x} \sqcap \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}^0}$ *L*



[*Fig. 1*]

Talis figura per puncta describetur si rectae cuidam 012345678 cujus extremis duae ascriptae $0B$. et $8A$. inveniatur media $4C$. et inter has tres inveniantur rursus mediae $2D$. $6E$, et inter has 5 rursus mediae $7H$, $5G$, $3F$, $1K$. Ita fiet ut continuatis in infinitum subsectionibus ut sint abscissae velut exponentes, et applicatae velut potestates, sive ordinatae sunt in replicata ratione abscissarum, v. g. abscissa 01 est ad abscissam 02 ut 1. ad 2. Ergo $2D$ est ad $0B$ in duplicata ratione $1K$ ad $0B$. Hinc patet et omnes figuras logarithmicas esse inter se similes, nec nisi intervallo 08 inter duas datas applicatas sumto affine.

Inquirendum est in methodum qua P. Gregorius reduxit logarithmos ad spatia hyperbolica an ejus exemplo aliae figurae transcendentes reduci possint. Tangentem figurae logarithmicae describi ex punctis B K D. Applicatae ad rectam $8A$ sunt logarithmi, abscissae ex AE, ut numeri naturales. Videndum quid ex duarum logarithmicarum intersectione duci possit, item ex intersectione unius cum circulo aliave figura v. g. x ⊓

11 f. *Dazu am Rand:* Possunt inveniri Tangentes figurae logarithmicae ope Trochoeidis.

5 sint *(1)*, velut 12. 13. 14. 15. etc. *(2)* abscissae *L* 5 potestates, *(1)* | v. g. *nicht gestr.* | 1B ad 13, | ut *nicht gestr.* | 01 ad 02. ita 0B est in replicata *(2)* nam *(3)* sive *L* **15** possunt | invenire Tangente *ändert Hrsg.* | figurae *L*

10 reduxit: Vgl. Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXV–CXXX, S. 594–597 sowie A. A. de Sarasa, *Solutio*, 1649, insbes. S. 7 f.

$\frac{b^y}{a^{y-1}} \sqcap \frac{b}{a}^{\,y}\!\bullet\, a$. Pone jam $x \sqcap \sqrt{a^2-y^2}$, junctis inter se his aequationibus, fiet: $\frac{b^{2y}}{a^{2y-2}} \sqcap a^2 - y^2$ sive: $b^{2y} \sqcap a^{2y\boxed{-2+2}} - y^2 \frown a^{2y-2}$, sive $\frac{a^{2y}-b^{2y}}{y^2} \sqcap a^{2y-2}$ sive $y^2 \sqcap a^2, -\frac{b}{a}^{\,y}\!\bullet \frown b^2$ vel $\frac{y^2}{b^2} \sqcap \frac{a^2}{b^2} - \frac{b}{a}^{\,y}\!\bullet$. Id est quaeritur ratio $\frac{y}{b}$ cujus residuum ex ratione $\frac{a^2}{b^2}$, aequetur reciprocae rationi datae subduplae, in ratione quaesita multiplicatae. Omnia ergo problemata quae rationum multiplicationibus et submultiplicationibus fieri possunt, solventur intersectionibus Trochoeidis parabolicae et curvae Analyticae cujusdam. Sed et quemadmodum idem problema variis potest curvis Analyticis se secantibus solvi, ita et si curva semianalytica et analytica jungantur, mutata analytica aliquando mutabitur et semianalytica. Exempli causa hae duae fieri possent aequationes $\frac{y^2}{\cancel{b^2}} \sqcap \frac{x}{\cancel{b}}$, sive $y^2 \sqcap xb$. et $x \sqcap \frac{a^2}{b} - \frac{b}{a}^{\,y}\!\bullet \frown b$. Ergo x componitur ex duabus $\frac{a^2}{b}$ ordinata rectanguli, et $b\frac{b}{a}^{\,y}\!\bullet$ ordinata Trochoeidis. Intersectione ergo parabolae quoque et ejusdem Trochoeidis solvi potest idem problema.

Quodsi ad alios casus aliasve formas alterius generis Trochoeides adhiberi possunt, uti non dubito, eo ipso dum idem problema ad diversas Trochoeides revocari potest, ostenditur unius curvae Trochoeidem generantis in rectum extensionem ex altera pendere.

Duarum Trochoeidum vel idgenus curvarum, v. g. etiam Trochoeidis et Cycloeidis intersectione aequationes solventur adhuc difficiliores ubi ipsae y. intrabunt in exponentes

---

1 *Nebenrechnung:* $\frac{b^3}{a^2} \sqcap \frac{b}{a}^{\,y}\!\bullet \frown b$

3 qvaeritur *(1)* qvantitas eius naturae, cuius *(a)* residuum *(b)* qvadrato residuum ex data aeqvatur dato cuidam rectangulo *(2)* qvantitas qva *(3)* qvantitas $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{b}}$ cuius residuum ex data qvantitate $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}$, aeqvetur qvantitati datae *(4)* ratio *L* 4 in *(1)* ratione rationis qvaesitae ad unitatem *(a)* multiplicatae *(b)* sive ad rationem m *(2)* ratione *L* 9 f. $\mathrm{x} \sqcap \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}^{\,\mathrm{y}}. \frown \mathrm{b}$ *(1)* idem ergo problema qvod *(a)* solvitur *(b)* solutum est *(2)* Ergo *L*

2–4 $y^2 \sqcap$ ... multiplicatae: Der Exponent des Bruchterms müsste $2y-2$ lauten. Leibniz rechnet konsequent weiter und formuliert das fehlerhafte Ergebnis aus. Die allgemeine Überlegung bleibt davon unberührt.

plus semel. Porro ope Trochoeidis nostrae extrahi possunt omnes radices aequationum

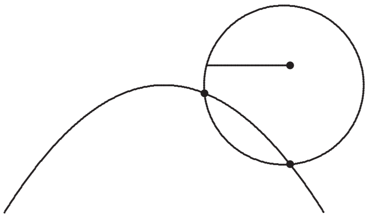
---

1–137,1 *Nebenbetrachtungen:* $\begin{array}{ccccc} y^2 & \sqcap & ly & + & ab \\ 100 & & 2 \frown 10 & & 80 \end{array}$ $\quad y^2 \sqcap 2 \frown y + 80$

$y^3 \sqcap \boxed{ly^2} + \boxed{my} + ab$

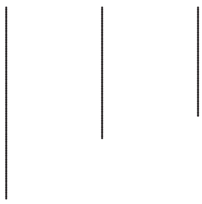
$y^4 \sqcap \boxed{ly^3} + \boxed{my^2} + \boxed{ny} + ab$

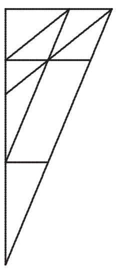
$y^5 \sqcap ly^4 + my^3 + ny^2 + oy + ab$

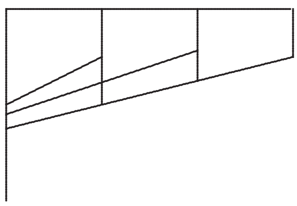


y^2

$y^3 \quad y^4$



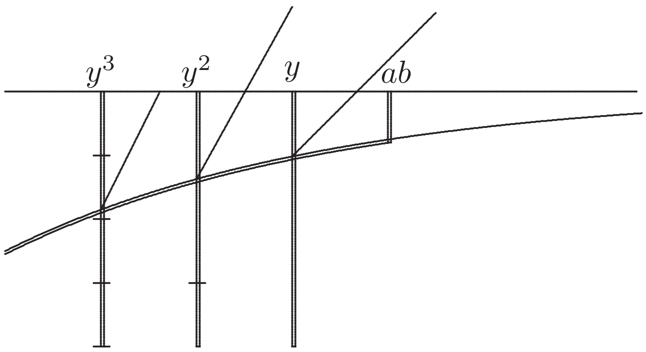


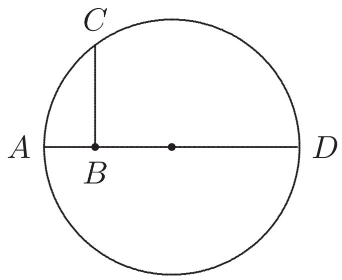


1 semel. *(1)* Soli *(2)* NB. solida *(a)* Geometrica *(b)* Analytica possunt esse homogenea figuris non analyticis, qvemadmodum animadversum est a Wallisio ungulam qvandam Hyperbolicam esse *(3)* Porro *L*

4,9 animadversum est: J. WALLIS, *Mechanica*, 1670–1671, pars 2, S. 547 f. (*WO* I S. 918 f.); vgl. N. 28.

purarum, sed nondum video quomodo affectarum e. g. sit aequatio: $y^3 \sqcap ly^2 + amy + a^2n$.





$y^2 \sqcap ab$ $\quad y^3 \sqcap ab$ $\quad y^4 \sqcap ab$

2 4 8 $\qquad$ 3 9 27 $\qquad$ 2 b

$\sqrt{16}$ $\qquad \dfrac{3}{\sqrt{81}}$ $\qquad \dfrac{2}{4}$ $\dfrac{b}{b^2}$

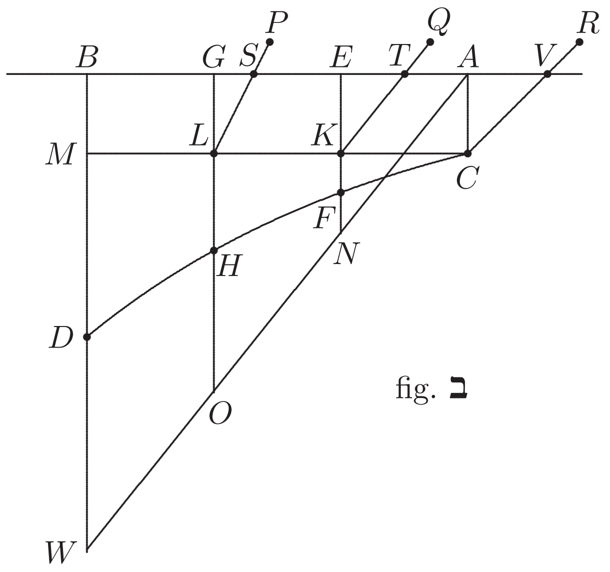
$\dfrac{2}{8}$ $\dfrac{b}{b^3}$

$\dfrac{2}{16}$ $\dfrac{b}{b^4}$

$\dfrac{2}{32}$ $\dfrac{b}{b^5}$

Nebenbetrachtungen auf Bl. 12 v°:

$y^3 + ly^2 + my + sm$. $\dfrac{y+l}{y+s} \sqcap \dfrac{m}{y^2} \sqcap \dfrac{m}{y} \frown \dfrac{1}{y}$. *Trouver un nombre le quel augmenté par* l, *soit au quotient de* m, *divisé par le dit nombre; comme le dit nombre augmenté de* s. *est à soy meme.* Item facile Geometrice exhiberi potest. Haec aequatio ita in duas divelletur: $\dfrac{m}{y} \frown y + s \sqcap x$ et $y + l \frown y \sqcap x$ quarum altera ad parabolam altera ad Hyperbolam simplicem. $my + ms \sqcap xy$. $y^2 + ly \sqcap x$. $my^2 - xy^2 + msy \sqcap 0$



[*Fig. 2*]

seu $y^2 \sqcap \frac{msy}{x-m} \sqcap x - ly$ sive $y \frown l - \frac{ms}{x-m} \sqcap x$. Ergo $y \sqcap \frac{x}{l - \frac{ms}{x-m}}$ et $\sqcap \frac{ms}{x-m}$. Fiet: $\frac{x-m \frown x}{lx-lm-ms} \sqcap \frac{ms}{x-m}$ et reducendo: $x^2-2mx+m^2, \frown x, \sqcap -m^2s^2, +lms \frown x-m$, et $x-m$ vocando z, fiet: $z^2 \frown z+m \sqcap -ms^2, +lmsz$. $z^3+mz^2-lmsz+ms^2$ [$\sqcap 0$]. Quae aequatio cum aequivaleat datae tum $my+ms \sqcap xy$. Ergo $y \sqcap \frac{ms}{x-m} \sqcap \frac{ms}{z}$ potest a. sumi $y \sqcap rz^2+tz+v$.

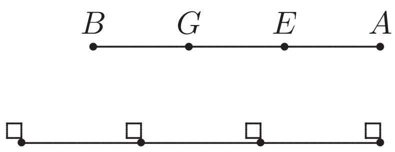
Nebenbetrachtungen auf Bl. 13 r°:

$\frac{10+3}{10+4} \sqcap \frac{\overset{\frac{1300}{14}}{\cancel{m}}}{\cancel{100}\ \boxed{10\square}}$. $1000+300 \sqcap 10m+4m$. [$m \sqcap$] $\frac{1300}{14}$.

$\frac{y+3}{y+4} \underset{\sqcap}{\times} \frac{\frac{1300}{14}}{y^2}$. $y^3+3y^2 \sqcap \overset{m}{\cancel{\frac{1300}{14}}}\,y + \overset{4m}{\cancel{\frac{4 \frown 1300}{14}}}$. $y^3 \sqcap \boxed{\frac{1300}{14}y} + \frac{1300}{14}[\frown]4 - \boxed{3y^2}$.

2–4 sive: Leibniz unterlaufen Versehen bei der Rechnung, die sich nicht grundsätzlich auswirken.

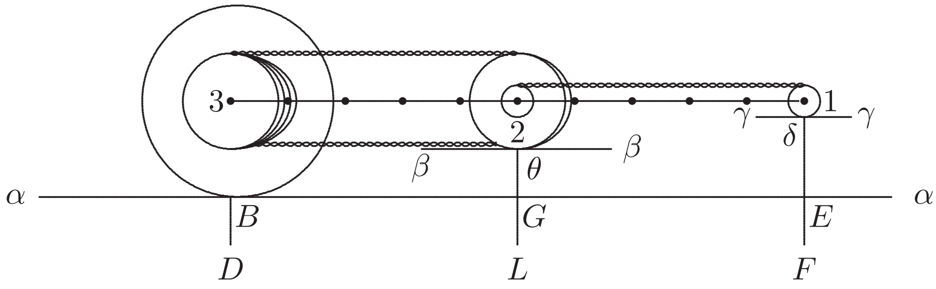
Ut si AC sit a sive unitas et BD sit $\dfrac{ly^2 + amy + a^2n}{a^2} \sqcap y^3$ quaeritur $EF, \sqcap y$. duarum mediarum proportionalium EF et GH prior. Ex punctis E. G. educantur rectae indefinitae EN, GO. ipsis AC, BD. parallelae, quas secabit in punctis K, L, recta CM, ipsi AB, parallela et aequalis. Punctis L. K. C. applicentur rectae indefinitae LP. KQ. CR. tali angulo, ut GS, ET, AV sint aequales rectis l. m. n. et ut sint mobiles in rectis GO, EN, AC, eodem tamen semper angulo servato. Hoc facto recta AB ponatur esse asymptota figurae logarithmicae, cui recta data AC, ordinatim ex curva applicata intelligatur. Datur ergo punctum A. Item punctum C. Quaeritur punctum B. et D. Recta ergo BW indefinita huc usque agatur, donec eveniat, ut recta AB inventa in punctis G. E. aequaliter divisa, rectae ex punctis H. F. C. ductae ipsis LS. KT. CV. parallelae abscindant rectas GS, ET, AV, tales ut earum summa sit ipsi BD aequalis.



[*Fig. 3*]

Illud primum efficiendum est, ut datis 4 punctis A. E. G. B. et A. immoto manente, motoque solum B. caetera moveantur proportionaliter, seu in ratione rectarum AE. AG. AB. seu ita ut AB. moto utcunque puncto A. semper aequaliter a punctis E, G. dividatur, seu ut distantiae AE. EG. GB. semper maneant aequales.

2 GH *(1)* prima *(2)* prior. *(a)* per C transeat ipsi AB parallela, CHLM. secans rectas AC, EF, GL, BM in punctis C, H, L, M. *(aa)* Cum ergo *(bb)* cum *(cc)* qvae | puncta erunt data, cum *nicht gestr.* | rectae AB, AC, BM sint *(dd)* | puncta *nicht gestr.* | A. E. G. B. item M et C. sint data *(b)* per p *(c)* ex *L* 5 l. m. n. *(1)* et ut rectae illae LP, *(2)* et *L* 10 LS. | CT. *ändert Hrsg.* | CV. *L*



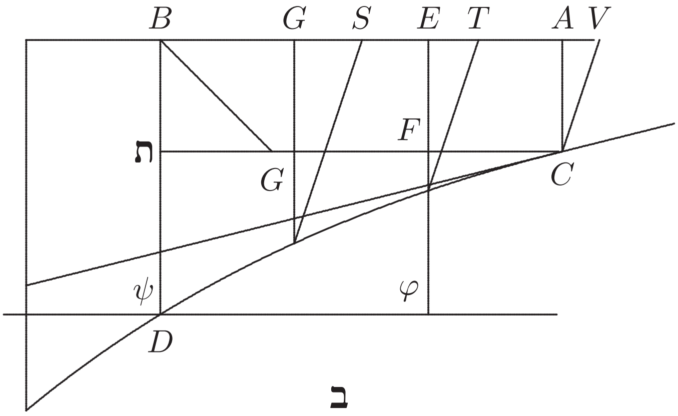
[*Fig. 4*]

Hoc ita efficietur[:] Sint tres circuli, aequales 3. 2. 1. in numerorum eos denominantium ratione inter se quorum centra in eadem recta 3. 2. 1. aequaliter distantia inter se: quilibet circulorum insistat plano rectae imaginariae per centra transeunti parallelo α. β. γ. Circulus 3. contineat circulum concentricum aequalem circulo 2. et circulus 2. circulum concentricum aequalem circulo 1. (nisi velis circulum maximum concentricos singulis aequales habere quod eodem redit :) Concentricus circulo 2. aequalis ipsi circulo 2. et concentricus circulo 1 aequalis ipsi circulo 1. jungatur chorda vel catena. Si chorda est necesse est alicubi clavo infixam esse utrique, et pro longitudine itineris saepe replicatam. Sed quia haec replicationes crassitudinem cylindri vel circuli quodammodo mutant, ideo replicationes eae evitari possint non ineleganti invento, si cylinder adhibeatur pro circulo, et chorda connectat circulos duorum horum circulorum respondentes, et ubi ea chorda desit aut paulo ante alia chorda alios duos circulos respondentes connectens incipiat, ita quam longissime sine replicationibus continuari potest motus. Chordae autem sunt exacte Geometrice. Supponuntur enim flecti in quolibet puncto, non sunt exacte mechanice quia mutant tensionis statum. Contra catenae Geometrice rem non absolvunt, ob intermedia puncta quae transsiliuntur; at Mechanice sunt exacte. Impediunt enim omnes vacillationes. Inprimis si dentibus rotarum ita respondeant, ut circulus quilibet semper dentem quemlibet transeat intratione quadam mutua. Catena autem talis adhibita replicabitur catena circa utramque rotam concentricam, scilicet et ei aequalem, simpliciter in

2 aeqvales *(1)* super eodem *(2)* 3, 2, 1. super eodem plano vo *(3)* B. G. E circulus B ut 3, circulus G, ut 2, circulus E, ut 1. centra eorum sint in eadem recta *(4)* 3. 2. 1. in *L* 5 circulo 2. | et circulus 3. circulum concentricum aeqvalem circulo 2. *nicht gestr.* | et *L* 8 catena | vel regula dentata *gestr.* | *(1)* utri *(2)* si *L* 15 f. exacte *(1)* physice *(2)* mechanice *L* 16 catenae *(1)* mechanicae res *(2)* Geometrice *L* 19 f. adhibita *(1)* ut mechanice exacta est, *(2)* replicabitur *L*

se rediens, neque nisi in uno puncto seu annulo unam rotam tangens. Potest remedium adhiberi forte chordarum tensioni, si elaterium in loco ubi affixae, eas tendat vel in uno latere vel utrobique, sed ad usum tutiores catenae. Nota non ut alias ita hic quoque chordae simpliciter tangere debent trochleas, sed debent esse iis infixae extremitatibus, hoc si fiat, et arte quadam efficiatur, ut semper tensa sit chorda, ope Elaterii, et evitetur eodem tempore replicatio. Quod et ad Elaterium necesse est, ita enim si absit replicatio Elaterium facile tendet chordam; cum et distantiae punctorum 3. 2. 1. semper maneant eaedem, quod ope axium per centra perpendiculariter ad circulorum plana transeuntium inter se linea rigida ab utroque latere connexorum [efficiatur] quia linea rigida simul cum machina recta procedit. Hac methodo non video quid etiam sine dentibus rotis, catenisque ad summam exactitudinem desiderari possit modo id unum efficiatur, ut non possit procedere machina ne in momento quidem physico, id est plane non nisi tantundem volvatur. *Il faut empecher que la premiere roue 3. ne puisse glisser ou traisner sans tourner*. Efficiendum scilicet est ut prima rota 3, non possit ita procedere ut per aliquod temporis spatium eodem puncto B planum tangat. Quod impediatur si ipsi quoque chorda (vel si vis catena) sit circumplicata affixaque (elaterio in loco affixionis tendente[)] quae deinde per rectam BGF extendatur, ita fiet, ut quantum ipsa chordae relinquit in plano, id est quantum volvitur, tantum provolvatur. Praeterea utile imo necesse est rotam 3. fortiter premi contra planum in B. Ita enim elaterium in duobus affixionis punctis, altero in plano, altero in rota 3. chordam tendens non poterit subtrahere eam puncto attactus inter tendendum; et ita tensiones illae et relaxationes a natura chordae aut humiditate aeris, vel calore vel frigore ortae; non sentientur, a gyratione trochleae sive rotae. Atque ita effecimus problema Geometricum satis elegans: Efficere, ut punctis quotcunque datis in eadem recta aequidistantibus; motis omnibus praeter unum, maneant omnia aequidistantia. Quod est corollarium propositionis hujus[:] Datis quotcunque punctis in eadem recta efficere ut moto uno caetera omnia moveantur per consequentiam in data ratione celeritatis. Id enim hic evenit, modo ponamus ex planis γ. β. α regulas perpendiculares δEF, θGL, BD. descendere, quae a punctis contactus δ. θ. B. continue propellentur. Puncta autem contactus procedent in ratione Circulorum, ergo et regulae, ergo et puncta E. G. B. quibus regulae rectam α vel AB secant.

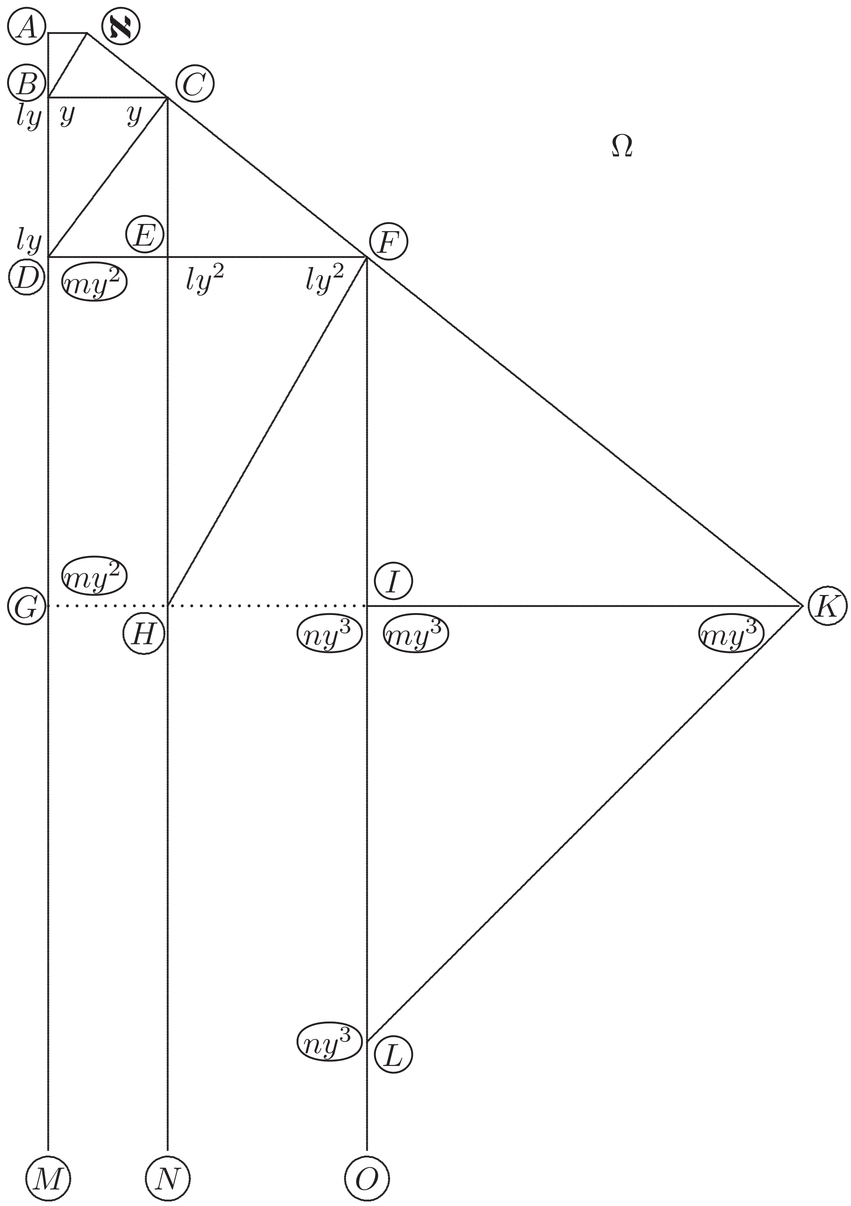
14 possit | ita *erg.* | procedere | ita *nicht gestr.* | ut *L* 16 sit *(1)* complicata *(2)* circumplicata | affixaqve ... tendente *erg.* | qvae *L* 23 ut *(1)* qvatu *(2)* pu *(3)* corpora qvaedam in eadem linea *(4)* pun *(5)* punctis *L*



[*Fig. 5*]

Ut autem omnium rectarum AV, ET, GS. summa in unam rectam BD colligatur hoc opus hic labor est. Ego ita post multa tentata commodissimum reperi, ita ut ne regulis quidem traversalibus KT, LS, opus sit. Nimirum recta AC. statuta, unitate, et recta AT posita $\sqcap$ b. cum infinitam BW promoves punctum E seu indefinita EN movebitur proportionaliter, reliquis non erit opus, ut GO, etc. Unde non tribus illis circulis 3. 2. 1. aut pluribus, sed solum duobus extremis maximo et minimo.

1 [*Fig. 5*]: Leibniz bezeichnet zwei verschiedene Punkte mit G. 4 KT, LS: s. o. Fig. 2.



[*Fig. 6*]

Jam ipsam BD. pone continere figuram Ω, quam hic adscriptam vides, ibi recta AM, ita applicata angulo quodam unitas seu $A\aleph$ seu $a \sqcap AC$ figurae prioris. Jam regula $\aleph B$ sit eo angulo ut recta AB fiat ad rectam $A\aleph$ ut b ad 1 seu erit $AB \sqcap b$. Inde parallela ipsi $A\aleph$ exibit BC aequalis ipsi y. seu EF. Quod fiet dum in fig. ב fingis rectam Fח regulam, ab EF transire in BD angulo recto, seu ipsi AB parallelam, unde rursus exeat regula BG mobilis cum regula BD in regula Fח, quae facit ob angulum GחB semirectum ut חG sit $\sqcap B$ח $\sqcap EF$. Jam redi ad figuram Ω. ubi חG prioris fig. ב, est BC hujus. Per puncta $\aleph C$ transeat recta interminata $\aleph CFK$ in qua mobiles ipsi AM semper parallelae CN FO etc. CN propellitur a BC [: recta BC fig. Ω eadem cum recta חF fig. ב :]. Inde in AM ducatur recta CD angulo tali, ut BD fiat $\sqcap ly$. seu ut BC multiplicetur per l. atque ita propelletur linea DEF ita ut E sit in recta CN, erit $EF \sqcap ly^2$. Sed ob angulum FH, qui multiplicat ly^2 per $\frac{m}{l}$ fiet $EH \sqcap my^2$. Quae regula FH propellet $\boxed{GHIK}$ quae secat FO in I unde $IK \sqcap my^3$ unde regula KL multiplicans IK per $\frac{n}{m}$ faciet $IL \sqcap ny^3$. et ita porro in infinitum. Sed si ultra cubum non procedat aequatio, contenti erimus linea $\boxed{GHIK}$ quae quando in curvam nostram incidit solutum est problema. Unum oblitus sum, puncta A. B esse immobilia, ideo rectam $\aleph K$ esse mobilem circa centrum $\aleph$. quia y semper mutatur, regula ergo BC non propelletur, sed a recta $A\aleph \sqcap$ rectae BG figurae ב circumagetur $\aleph K$. Caeterae regulae propellentur. Restat quomodo termini negativi per regressum determinentur, et quomodo radices falsae.

24₂. PARS SECUNDA

1 vides, *(1)* ubi vides b $\sqcap$ AB. portionem rectae AM pone BC $\sqcap$ by seu aeqvalem ipsi EF, multiplicatae per 2 *(2)* ibi *L* 7 figuram Ω. *(1)* ubi regula BG prioris fig. ב, continuato *(2)* ubi *L* 18 recta | AC *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ rectae *L* 20 radices *(1)* negativae *(2)* falsae *L*

---

4 fig. ב: s. o. Fig. 5. 9 f. [: … :]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

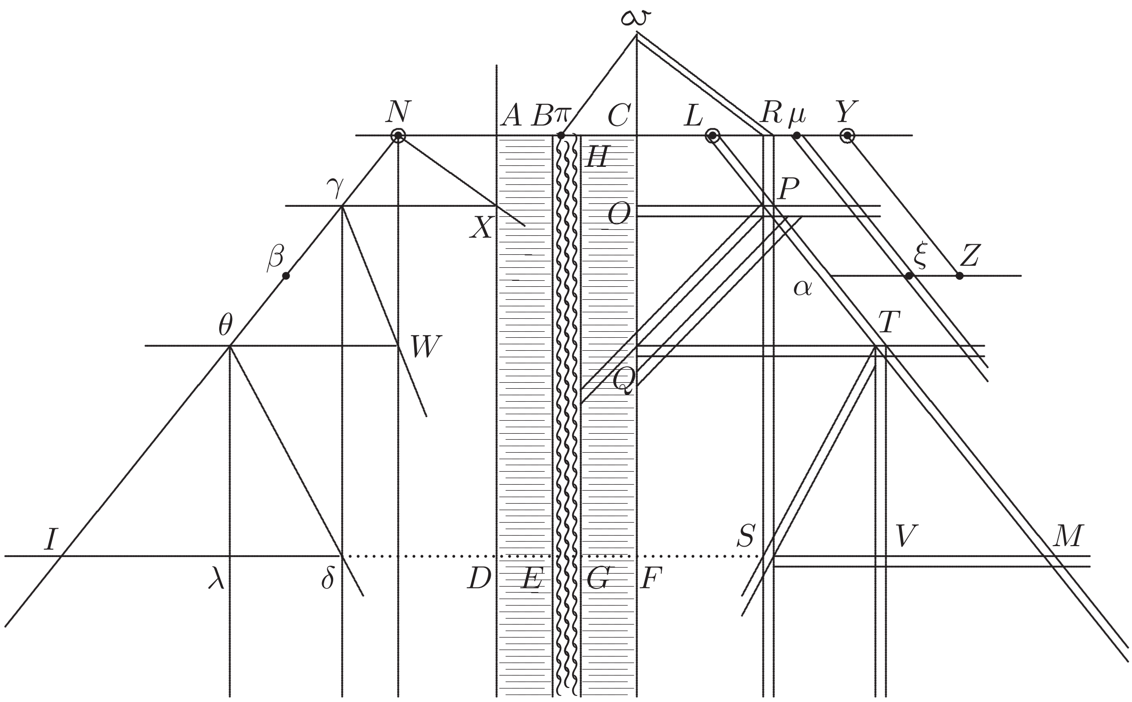
Schediasmatis de c o n s t r u c t o r e , Pars II.

Si Radices semper essent verae, et termini aequationum (post transpositionem in duas) semper affirmativi, jam perfectam haberemus Machinam c o n s t r u c t r i c e m. Et, certe, nihil immutando, ita tantum uti praecedenti parte descripta est, omnium ejusmodi aequationum quae omnes habent terminos negativos, praeter unum; haberi poterunt radices verae. Praeterea, si solis radicibus veris contenti esse volumus, sufficiet figuram Ω bis adhibere, semel v. g. in ultimo, semel in alio, postquam scilicet aequatio in duas partes aequales utrobique affirmativas divisa erit, nam ubi utrobique puncta (I) coincident, ibi erit y quaesita. Sed quoniam ego perfectionem Geometricam, et omnes radices aequationis quaero; ideo figuram Ω quam superioris schediasmatis fine applicui altissimae dimensioni aequationis, rectius judico adhiberi infimae seu radici. Itaque loco $(A)(C)$ in figura Ω erit regula $(\aleph)(K)$ et loco ipsius חF in fig. ב erit $\psi\varphi$, seu in fig. Ω $(G)(K)$. Recta ergo $(\aleph)(K)$ rectam GK adducet vel propellet, prout in motu y crescunt aut decrescunt. Nam motus eodem modo procedere potest prorsum et retrorsum. Tota difficultas est efficiendi, ut etsi termini quidam intermedii absint, nihil tamen turbetur, item ut motus prorsum et motus retrorsum possint esse mixti. Et quidem ut aliquis terminus sit nullus facile effici posset, faciendo ut $(F)(H)$ verbi gratia sit ipsi $(F)(D)$ parallela, ita quidem $(E)(H)$ fiet nulla, sed quoniam ita jungetur $(D)(F)$ et $(G)(K)$ hinc aliud malum quod ita $(I)(K)$ fieret non y^3 sed y^2. Difficile est fateor his malis mederi salva machinae simplicitate, itaque: Forte utilissimum erit aequationem propositam in aliam mutare, ejusmodi, ut omnes ejus radices sint affirmativae; quo facto termini etiam signis $+$ et $-$ affecti se alternatim sequentur, quod mire commodum est ad institutum nostrum. Ita enim nec machina illa circulorum sive Trochlearum proportionalium opus erit. Imo quod est mirabilius poterimus resecare ipsam Trochoeidem sive curvam, tantum enim bis habebimus figuram Ω. In una progreditur verb. gr. y^6 y^4 y^2 ab in altera y^5 y^3 y. in qualibet parte affirmative. Et quando eveniet ut summae utrobique sint aequales, seu ut lineae GK utrobique coincidant, tunc habebitur vera y. Itaque tamdiu movenda est machina donec talis y reperiatur, quod aliquando, vel etiam aliquoties eveniet, si ma-

2 f. (post ... duas) *erg. L* 6 radices *(1)* affirmativ *(2)* verae *L* 12 f. (A)(K) *L ändert Hrsg. zweimal*

8 puncta (I): Leibniz verwendet in der Folge bei den Punktbezeichnungen statt der Einrahmungen meist Klammern oder verzichtet ganz auf solche Hervorhebungen.

china habeat radices unam pluresque reales. Nam manifestum est omnes veras habere. At inquies quid si nesciam an et quot habeat radices; continuandus erit motus sine fine, donec reperiam y satisfacientem; et si nullam inveniam; nescio an quiescere debeam. Sed huic malo remedium habetur. Nam per methodum generalissimam et facillimam Huddenii, determinandi aequationes, statim earum limites habentur. Intra quos sufficit fieri motum. Praeterea eadem opera etiam veri habebuntur numeri, si qui sunt, aequationum radices; nam ex divisoribus termini ultimi in numeris dati statim patebit qui accedant inventis radicibus, et an inter se sint consentientes, ipsis enim in se multiplicatis necesse est prodire aequationem propositam, quod utique facillimum est; praeterea hac methodo non est opus, tolli fractiones ex aequatione, modo eae non ingrediantur terminum ultimum, et si veros numeros non quaeras, non est opus tolli neque surdos neque fractos ullo casu.



6 etiam *(1)* verae habebuntur aeqvationum radices si qvae sunt: nam *(2)* veri *L* 10 f. ultimum, | Imo contra utile est eas adhiberi *gestr.* | et *L*

4 methodum: J. Hudde, *De reductione aequationum*, 1659, *DGS* I S. 406–506.

[*Fig. 7*]

Servit hoc instr$^{\text{tum}}$ non tantum ad radices aequationum, sed et ad ordinatas curvarum in numeris habendas, condendas facile tabulas[,] examina aut tentamina facienda in opticis[,] in mechanicis. Ut machina explicari et complicari possit opus est puncturas a propellentibus utrinque attingi.

Felices inquisitiones quando natura rerum ipsis, insperato consentit. Inquirendum in difficultatem motus seu detrimentum ex contactu, et utrum expediat regulas quasdam inclinate aut transverse promoveri.

Commodum quod non est in curvis se secantibus quoad scil. difficile determinare puncta intersectionis, quia se valde oblique secant. Hic sectio recte determinantis semper perpendicularis nec multa puncta comprehendi possunt. Pertinent ista ad Geometriam practicam, qua examinetur quae instrumenta praxi commodiora.

Unitas semper ejusmodi eligi potest ut fit major qualibet radice quaesita.

In plano HGM sit ipsi HG parallela CF. et HC perpendicularis ad HG. Et in ipsa FC. supra vel infra C. sit punctum L. circa quod in eodem plano mobilis regula LM. indefinite producta versus M. Et vero quaecunque dicturus sum in eodem semper plano intelligenda sunt, nisi aliud admoneatur.

Quanquam lineae hic latae sint, regulae scilicet tamen danda opera est ut certarum tantum linearum subtilissimarum in ipsis ductarum ratio in designando quaesito haberi possit.

Descriptio Instrumenti Algebraici cujus ope omnium aequationum utcunque affectarum post facilem admodum praeparationem radices geometrice et si placet eadem opera in numeris quantum licet vero

17 admoneatur | in ipsa COQF mobiles sint | perpendiculariter *erg.* | duae regulae OP, QT. Horizonti, sive ipsi *gestr.* | *L* 18 sint, | ut machina haec *erg. u. gestr.* | regulae *L* 21 *(1)* Esto aeqvatio qvaedam proposita, sexti exempli causa gradus; *(a)* ante omnia efficiendum est, ut omnes *(b)* ea ante omnia ita praeparanda est, ut omnes nanciscatur radices veras; eademqve opera *(aa)* fieri potest *(bb)* fiet ut omnes eius termini sint alternatim affirmati et negati *(2)* Descriptio *L* 22 utcunqve ... praeparationem *erg. L*

15 punctum L: Leibniz hat den Punkt L zunächst auf der Geraden FC platziert, danach auf HC (s. u. S. 148 Z. 8).

propinquis sine ullo calculo reperiuntur

Esto longitudine BE indefinita, latitudine autem certa pro arbitrio sumta EG. rectangulum $BEGH$; circa cujus latus BE velut axem mobile sit planum $BEID$ indefinite continuatum et circa oppositum latus GH mobile sit planum HGM. erigendo utrumque planum ita ut sit perpendiculare ad planum hujus paginae quod coincidit cum plano rectanguli intermedii $BEGH$. Totum instrumentum formam habebit libri complicati cujus dorsum sit rectangulum latera sint plana BEI; et HGM inter se parallela et ad dorsum perpendicularia. Esto jam in recta HCL. punctum L. mobile huc illuc in dicta recta; mobilisque cum ipso pariter et circa ipsum recta seu regula LM indefinite producta versus M. Ipsi CL parallela sit regula OP. quae in puncto O rectae CF immobiliter affigi; vel etiam cum opus est sursum deorsum moveri possit. Secabit autem sive si mavis praeteribit rectam LM in puncto P. Ex puncto P regulae LM vel regulae OP (: nam alterutrum idem praestat :) exeant regulae duae, altera alteri affixa; transversalis PQ. praeteriens rectam immobilem CF. in puncto Q: et altera perpendicularis RPS ipsi CF parallela quae sursum producta ipsi CL. productae occurrit in R. et deorsum tendit versus S. indefinite. Hae duae regulae simul moveri possunt vestigiis suis parallelae ab O. versus P, ope cujusdam eminentiae oblongae Regulae PQ quae inseritur m o b i l i t e r c r e n a e ipsius OP. ita ut eminentia cum ipsa OP in crena congruente regula PQ. (et proinde et regula ipsi affixa PS.) in regula OP, eodem semper ad eam angulo procedere possit. Id autem fiet apertura regulae LM, quae circa centrum L, gyrata, obstantem sibi regu-

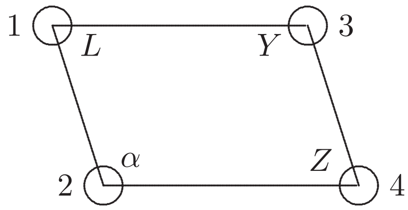
1 f. reperiuntur *(1)* Esto o *(2)* Esto *(a)* asser *(b)* planum ABCDE *(c)* rectangulum ABCFED. *(aa)* per *(bb)* secundum longitudinem in medio sectum per rectam BE ita aliud rectangulum BEGH, circa cuius extremum B latus ponam in longitudinem sumtum BE velut axem mobilis sit portio ADEB, et circa ipsum planum BEGH. mobilem circa alterum latus *(aaa)* longitudine sumtum *(bbb)* suum GH, velut axem in extremitate plani portionis HGFC. et circa alterum latus GH mobilis sit portio | tantum *erg.* | HGFC. *(aaaa)* qvo facto considerando planum *(bbbb)* jam portio *(cccc)* Recta portionis ADEB *(dddd)* in eodem plano habent regulas qvasdam *(aaaaa)* vertica *(bbbbb)* perpendiculares *(ccccc)* horizontales et *(ddddd)* horizontales *(eeee)* In plano continuato portionis ADEB regulae qvaedam mobiles comprehensae inter ANID et aliae in plano portionis HGFC continuato *(aaaaa)*. Unde complica *(bbbbb)* comprehensae in GLMF *(3)* Esto longitudine BE indefinita *(4)* Esto *L* 5 paginae *(1)* Totum instrumen *(2)* coincidens *(3)* qvod *L* 7 rectangulum | exiguum ADEB. *gestr.* | latera *L* 9 seu regula *erg. L* 11 f. sive ... praeteribit *erg. L* 13 PQ. *(1)* concurrens regul *(2)* praeteriens *L* 14 CL *L ändert Hrsg. zweimal* 17 cuiusdam *(1)* ⟨incisurae⟩ qva Regula PQ inseritur *(2)* eminentiae *(a)* longae *(b)* oblongae *L* 18 ut *(1)* incisura, ipsa PQ congruens, et *(2)* eminentia *L* 20–149,1 sibi *(1)* rectam *(2)* regulam *L*

lam PQ. vel PS, vel aliquam earum portionem exeuntem propellet, ab O. versus P. seu directione OP. Eodemque tempore Regula PQ. in Q. praeteriens ipsam CF, ibi aliam regulam QT in crena ipsius CF congruenter mobilem offendet, propelletque directione QF. dum interim ipsa QT praeteriens LM in T. aliasque gerens regulas TS, TV, ipsis PQ. PS. similes incisura congruente in crena ejus mobiles; descendendo faciet eas ab ipsa magis magisque aperiente sese LM, directione QT. propelli; quo fiet veluti ante ut ab ipsa TS, ipsam PS praetereunte in S. alia ibi occurrens regula SM in ipsa PS. propellatur. Quod ita continuari potest quoad res postulat. Notandum autem durante motu sive operatione rectas LC, CF esse immobiles; CL. OP. QT. SM parallelae inter se perpetuo in una pariter atque alia operatione quemadmodum et CF. RPS. TV. inter se. Ipsae autem PQ. TS. neque erunt parallelae inter se, neque semper eundem ad parallelas et perpendiculares angulum servabunt; sed circa centra quaedam in ipsis eminentiis in crenas P. T. etc. intrantibus fixa, mobiles erunt, ab initio scilicet operationis manuum opera, ut scilicet angulus illis detur, quem postulat exemplum propositum; qui semel dato, durante operatione ejus exempli, angulum illum servant, et vestigiis suis parallelae feruntur.

Jam ut ad alterum quoque planum priori post machinae complicationem libriformem, parallelum, $BEIN$ progrediamur, supponendum est arte quadam (quam postea explicabo) effici, ut ponendo $BA \sqcap HC$. et directione BA sumendo rectam AN, dicta recta, in puncto N perpendicularis semper incedat regula NW, ita ut recta AN sit semper media proportionalis inter rectas CL. constantem; et OP motu regulae LM variantem. Motu ergo regulae LM etiam circa centrum fixum L. procedere supponemus (modo postea explicando) punctum N. Ex quo puncto N. exibunt rectae vel regulae tres cum ipso puncto mobiles, NW ad BN perpendicularis; NX angulo quem exemplum postulat, et qui durante operatione manet, sed pro alio exemplo motu ipsius NX circa centrum N ut res postulat inclinari aut elevari potest. Tertia ex puncto N. exibit regula NI quae durante ipsa operatione non tantum ut caeterae cum puncto N procedet, sed et circa ipsum velut centrum, ita gyrabitur, ut semper ipsi LM, motus omnis principio

1 aliqvam *(1)* eius *(a)* eminentiam propellet, *(b)* portionem emin *(c)* prop *(2)* earum *L* 1 versus P. *(1)* idem omnino praestaretur, et forte ob crenae obliqvitatem factus qvam ante si eminentia regulae PQ vel PS. intraret in crenam ipsius LM, ita enim | tum *erg.* | gyratur LM, pars qvaedam unius harum regularum cum ipsa LM propulsa et in obstantem regulam OP impingens, cedere cogetur, et ita regulae PQ. PS in crena ipsius LM descendent ut P directione PM. suis tamen semper vestigiis parallelae *(2)* seu *L*

sit parallela. Quod nullo negotio, simili fere qua instrumentum parallelis lineis ducendis accommodatum, constructione efficietur.



[*Fig. 8*]

Nam in illo instrumento ex parallelogrammo in rhomboeidem utcunque transformabili mutatis angulis semper servatur parallelismus, hic illud tantum addendum est, ut in illo instrumento quadrilatero paralleliformo $L\alpha ZY$ non tantum rectae circa moveri possint, ut LY et αZ horizonti parallelis manentibus ipsae $L\alpha$, YZ mutato ad ipsas angulo parallelismum servent inter se, sed et unum latus v. g. YZ ab altero $L\alpha$. servato tamen parallelismo longius recedere possit punctis scilicet YZ in crenis rectarum LY. αZ incedentibus. Nam in nostro casu non tantum CL et AN horizonti parallelae manent, nec tantum NI et LM parallelae manere debent inter se; mutato ad horizontem angulo, sed et distantia ipsarum parallelarum in linea horizontali sumta, seu differentia ipsarum CL, AN semper mutabitur durante motu. Hoc posito ergo puncto Y in recta LCY et posito puncto α in recta $L\alpha M$: et recta αZ ipsi LY, quemadmodum et YZ ipsi $L\alpha$ aequali et parallela. Vicissim ponendo $AN \sqcap CY$. ita ut in plano $BEIN$ recta βI, respondeat rectae YZ plani paralleli $HGML$, punctum L puncto Y et punctum β puncto Z; et denique conjungendo puncta Y et N item Z et β, rectis ad plana perpendicularibus YN item $Z\beta$. fiet ut quemadmodum incedit recta NI seu punctum N super AN, ita procedat e regione, etiam punctum Y; et quemadmodum β ita Z. Sed vicissim quemadmodum YZ semper parallela est ipsi $L\alpha M$, ita $N\beta I$, ipsi YZ. et per consequens ipsi $L\alpha M$. Et quemadmodum ob incessum puncti N (: ut scilicet AN semper sit media proportionalis inter CL et OP quod postea explicabimus :) ipsa YZ procedit in ipsis LY, αZ indefinite productis; ita quia LM et proinde et YZ angulum ad horizontalem LY mutat, ideo NI quae his

6 f. possint, *(1)* ut mutato *(2)* ut *L* 13 recta *(1)* CL *(2)* continuata directione CL cui pu *(3)* CLY *(4)* LYC *(5)* LCY *L* 15 f. rectae *(1)* Lα *(2)* | RZ *ändert Hrsg.* | plani *L* 17 conjungendo *(1)* LY *(2)* YN et Zβ prorsus ut juncta sunt *(3)* puncta *L*

semper parallela esse debet consimiliter agi poterit circa centrum N. Et haec ideo fusius explicui quia in ipso plano non satis repraesentari potuere. De reliquo in plano sinistro $BEIN$, eadem similia evenient illis quae circa regulas alias parallelas aut perpendiculares aut transversales in priore seu dextro $HGML$ explicui; nam regula transversalis NX ipsi AD occurrens in X. regulam $X\gamma$ parallelam ipsi AN propellet in AD directione AXD in qua regula parallela $X\gamma$. Duae rursus regulae: $\gamma\delta$ perpendicularis, et γW transversalis sibi invicem affixae mobiliter incedent directione $X\gamma$ in puncto γ cum recta NI communi, et γW. transversalis ipsi perpendiculari NW occurrens in W. propellet in dictae NW puncto W parallelam $W\theta$. directione NW. In cujus regulae parallelae (ipsi AN:) nempe $W\theta$. puncto θ cum NI communi rursus duae regulae, una perpendicularis $\theta\lambda$, altera transversalis $\theta\delta$ sibi invicem affixae, et vestigiis suis parallelae, (ut semper subintelligendum) movebuntur ex quibus transversalis $\theta\delta$ ipsi perpendiculari praecedenti $\gamma\delta$ occurrens in δ ibi parallelam $\delta\lambda I$ in dicta $\gamma\delta$ incedere aptam impellet directione $\gamma\delta$. Quod perinde ut in altero latere continuari potest in infinitum, prout exemplum propositum postulat.

Facile autem intelligi potest movendo circa L rectam LM motum machinae dari; eamque velut aperiri cum punctum fixum α elevatur seu cum recta $L\alpha M$ a situ perpendiculari accedit ad parallelum. Contra velut claudetur et regulae omnes parallelae inter se ad se invicem accedent, cum punctum α deprimitur, seu cum recta $L\alpha M$ a situ parallelo redit ad perpendicularem. Efficiendum ergo est ut regulae quae sese ducunt se⟨u⟩ propellunt cum aperitur machina, reducant cum clauditur atque adeo utrinque id contingere possint quod impellunt, libertate tamen aliqua ab eo latere quo non impellunt tunc cum non impellunt relicta, ut vides in regula PQ respectu regulae QT. Nam si G l i s s a t o r i u m Q (ita enim tam utilem machinae particulam appellare placet, cum latinam vocem non inveniam nisi quod probabile est, ipsam *glisser*, a latino quodam obsoleto derivatam dicamus teste glaciei vocabulo, cui Germani respondens habent, *glas*, vitro exprimendo) ab utroque in medio regulae PQ simul utrinque attingeretur; tunc angulo ipsius PQ. ad ipsam CQ magis ad rectum accedente, angustum nimis inter duo regulae PQ latera pro dicto glissatorio continendo spatium foret. Idem est in regula LM

1 consimiliter *(1)* flectetur circa punct *(2)* agi *L* 7 f. in ... communi *erg. L* 8 f. in ... puncto W *erg. L* 10 puncto ... communi *erg. L* 17 cum *(1)* LMα a situ parallelo accedit ad *(2)* punctum M elevatur seu cum *(3)* punctum *L* 19 cum *(1)* *L* velut deprimitur *(2)* punctum *(a)* M *(b)* α deprimitur *L* 22 impellunt *(1)* furcae cuiusdam specie, ut in horologiis oscillatoriis *(2)*, libertate *L*

ipsas PS. TV ducente, ubi tamen peculiaris difficultas quod ut duae habeantur parallela ipsius regulae LM velut latera.

24_3. PARS TERTIA

Schediasmatis de constructore pars III.

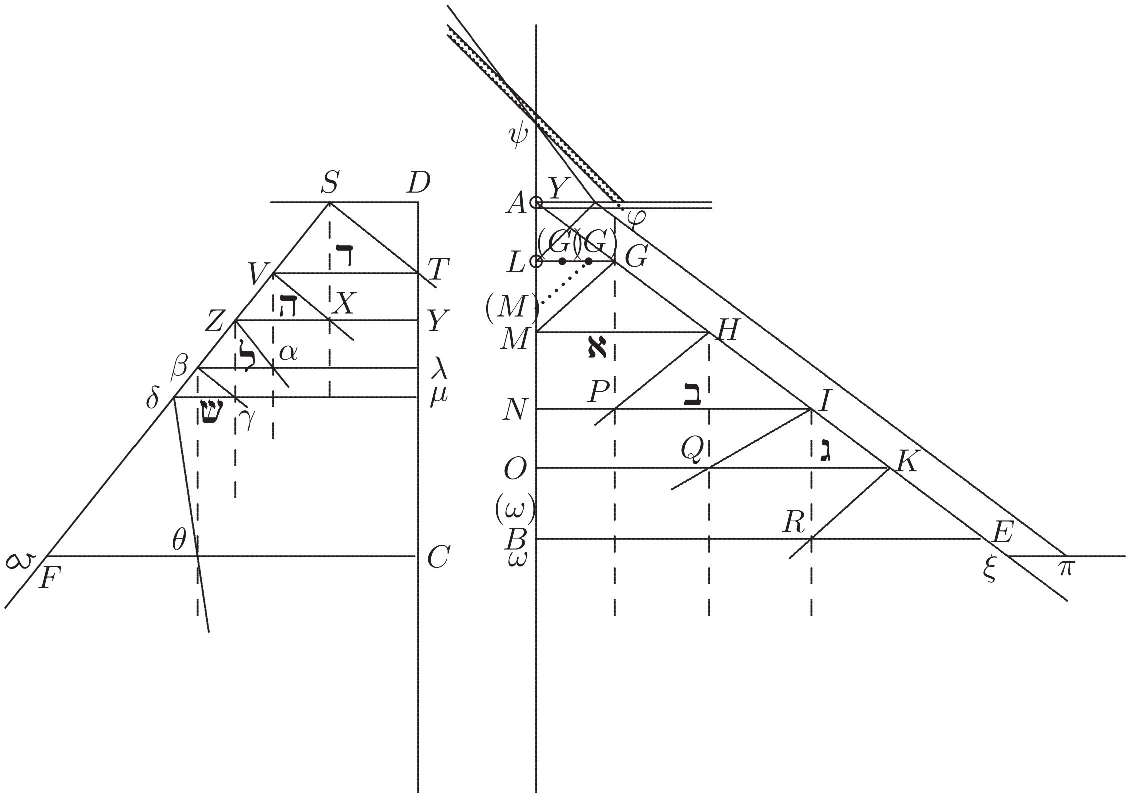
Sumto quodam puncto μ fixo in recta $CL\mu$ et alio fixo ξ in recta $\alpha\xi Z$, ita ut $L\mu$ sit $\sqcap$ $\alpha\xi$ regula $\mu\xi$ cum ipsa LM indefinite producta eique parallela velut altera ejus portio censeri poterit, et glissatoria, P, T, inter duas LM et $\mu\xi$ semper interjecta erunt, et dum aperitur machina ab LM, dum clauditur ab $\mu\xi$ impellentur. Tanta autem minima laterum Regulae distantia perpendicularis esse debet, quanta est longitudo glissatorii quod intercipitur, nam quando evenit ut regula ad glissatorium angulum faciat rectum, (: quemadmodum facit LM, cum machina prorsus clauditur quo casu LM intelligitur parallela ipsi CF. adeoque perpendicularis parallelis ipsius CL, et glissatoriis quae in ipsis labuntur :) glissatorium quod intercipitur distantiae perpendiculari coincidit. Fateor tamen si alia commodior claudendi ratio reperiatur, aut si clauso opus non sit, has regularum duplicitates satis incommodas rescindi posse. Re recte expensa credo solam regulae LM duplicitatem sufficere qua perpendiculares cum transversalibus sibi affixis reducentur, nam de reliquo eversa machina, ut $ABHC$ imum, $DEGF$ summum teneat, parallelae seu horizontales regulae QT. SM pondere ipso suo in locum priorem relabentur. Quia transversales PQ. TS. ipsis amplius non obstabunt quippe regula LM machinam claudente, restitutae. Superest ut explicemus qua ratione efficiatur, ut ipsa AN seu CY semper sit media proportione inter CL et OP. Quod post multa tentata nondum alia commodius ratione efficere possum, quam quae sequitur. In recta $LC\pi$ sumatur $C\pi$ $\sqcap$ LC. et producatur FCꝏ in ꝏ. Ductae regulae duae πꝏ, Rꝏ. angulos invicem perpetuo faciant rectos, quod fiet dum una in crenam alterius quodam glissatorio intrat; ita enim qui semel datus est angulus semper manet. Porro punctum C. semper, punctum π durante hujus quidem exempli motu fixum manet, at punctum R extremitas

9 perpendicularis *erg.* L 17 ut *(1)* ABY *(a)* sit imum, *(b)* zenith *(c)* Nadir *(2)* ABHC imum L 19 f. qvippe *(1)* motu *(2)* regulae LM depressione elevatae *(3)* regula LM *(a)* |se *nicht gestr.*| *(b)* machinam L

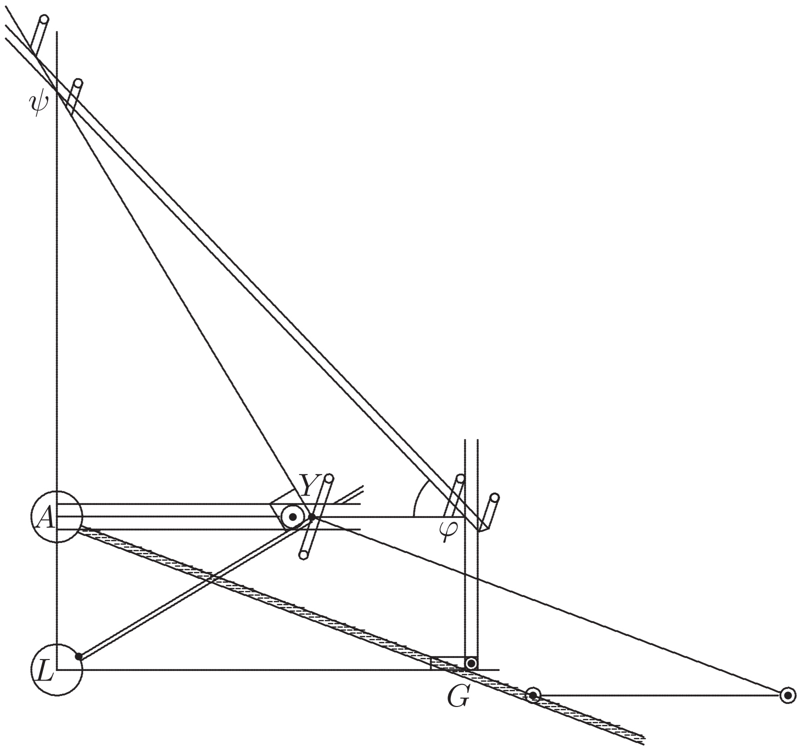
regulae RPS. cum hac ipsa regula ab LM in P. impellente propulsa, progredietur, ac proinde et regula ꝏR cum regula RPS. seu cum puncto R progredietur, servata tamen semper anguli Rꝏπ rectitudine. Sed unum praeterea desideratur ut punctum ꝏ quo duae regulae πꝏ et ꝏR, junguntur semper maneat in recta FCꝏ continuata. Quod ita obtinebitur si acus quaedam sive fibula ex Glissatorii extremo prodiens in rimam rectae Cꝏ intret, unde cum exire nequeat, proinde in ipsa recta ꝏ perpetuo labetur, et glissatorium quoque sive angulus rectarum πꝏ. Rꝏ. Quod ut fieri possit, ipsumque triangulum rectangulum servatis puncto, C, et rectis Cꝏ et CLR angulique πꝏR rectitudine punctis vero R in recta CLR, ꝏ in recta Cꝏ, rectisque πꝏ[,] Rꝏ continue mutatis, omnes formas induere queat, necesse tantum erit regulam πꝏ mobilem esse circa punctum π velut centrum. Atque ita Cꝏ semper erit media proportionalis inter $C\pi \sqcap CL$, et inter $CR \sqcap OP$. ponendo jam ex fibula ꝏ quam in rima mobilem dixi angulo semirecto CꝏY descendere regulam indefinite productam ꝏY erit $CY \sqcap C$ꝏ. adeoque CY media proportionalis quaesita, in cujus puncto Y perpendicularis rigida YN, ut supra dixi duo puncta Y et N. sibi in oppositis planis parallele sive e regione respondentia connectens, a dicta regula ꝏY continue ducetur sive propelletur, et cum ea alia regula YZ vel ei in altero plano respondens AN ipsi LM, ut supra explicui, semper parallela. Et ita quidem instrumenti hujus tradita constructio motusque intelligi potest, superest ut dicamus de ejus usu ad aequationum radices inveniendas. Quod tamen antequam faciam operae pretium erit instrumentum denuo majore cum exactitudine describere:

5 *Am Rande:* Pro glissatorio dicere possis i n c r e n a t u r a m .

1 impellente *(1)* per rectam OP. propulsa *(2)* propulsa *L* 3 desideratur | qvod explicare promisi *erg. u. gestr.* | ut *L* 14 perpendicularis rigida *erg. L* 14 dixi *(1)* utriqve plano parallelo perp *(2)* duo *L* 16 f. vel . . . AN *erg. L*

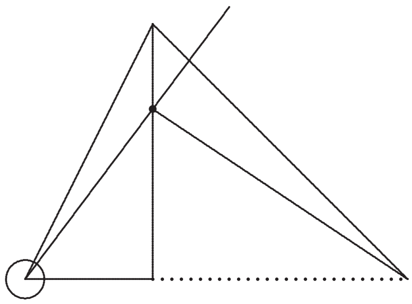


[*Fig. 9*]

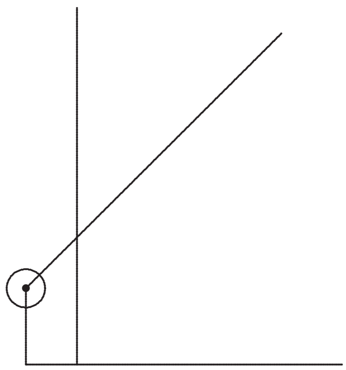


[*Fig. 10*]

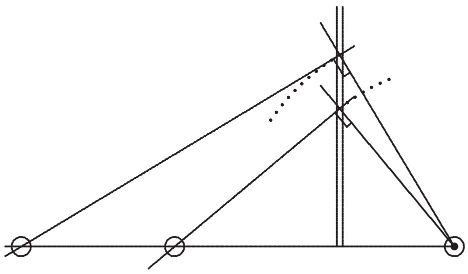
[*Figuren auf Bl. 15 v°*]



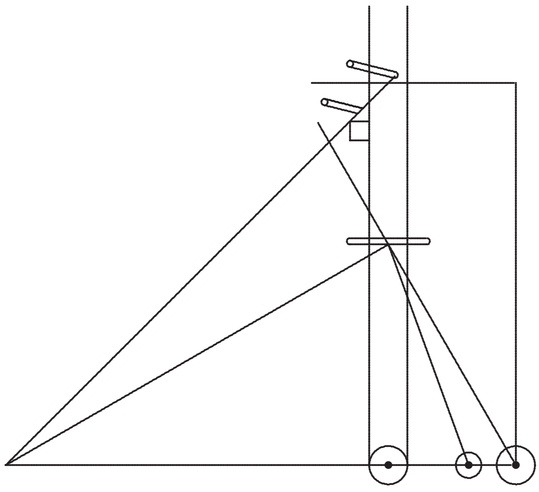
[*Fig. 11*]



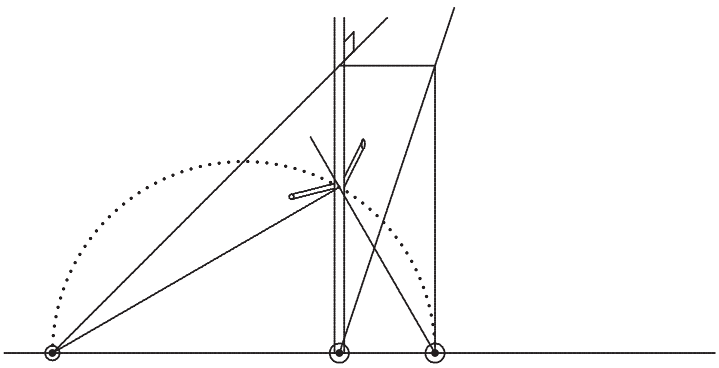
[*Fig. 12*]



[*Fig. 13*]



[*Fig. 14*]



[*Fig. 15*]

25. DISPOSITIONS ET COMPLEXIONS
[April – Juli 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 45–47. $1\frac{1}{2}$ Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 45 r° (= erster bis dritter Ansatz) u. Bl. 47 r° (= vierter Ansatz). Am Rand von Bl. 45 r° sowie auf Bl. 45 v° u. 46 r° befindet sich VII, 3 N. 3; Bl. 46 v° u. 47 v° sind leer. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 6–9. Cc 2, Nr. 519 A, B

Datierungsgründe: Das Stück befasst sich mit der Kombinatorik, wobei es inhaltlich an die *Dissertatio de arte combinatoria* (VI, 1 N. 8) aus dem Jahr 1666 anknüpft: Leibniz greift einige Begriffe jener Arbeit auf, übersetzt sie ins Französische und definiert sie kurz. Sprache und thematischer Ansatz verweisen das Stück also in die frühe Phase seiner Zeit in Paris, womit der *terminus post quem* Leibniz' Ankunft in Paris Ende März 1672 ist. Dass das Stück nicht später als Anfang 1673 entstanden ist, belegt die Symbolverwendung in dem auf demselben Träger niedergeschriebenen Stück VII, 3 N. 3, welches konkrete Beispiele zur gleichen Thematik liefert. In ihm finden sich als Gleichheitssymbole zum einen das moderne Gleichheitszeichen, welches Leibniz spätestens ab Mitte 1674 durch den stilisierten Waagebalken ersetzt; zum anderen verwendet er *f.* als Abkürzung für *facit*. Diese Notation gebraucht er jedoch nur bis Ende 1672 oder Anfang 1673. — Das Papier ist Pariser Provenienz. Sein Wasserzeichen lässt eine weitere Präzisierung der Datierung zu. Das gleiche Zeichen findet sich ansonsten nur noch bei dem Träger von VI, 3 N. 2_2, dem zweiten in einer Reihe von vier auf französisch verfassten Entwürfen zu physikalischen Fragen. Selbst wenn Leibniz den ersten Entwurf N. 2_1 recht bald nach seiner Ankunft in Paris geschrieben haben sollte, kann der zweite Entwurf kaum vor April 1672 entstanden sein. Und der auf diesen folgende dritte Entwurf N. 2_3 war offensichtlich fertiggestellt, bevor Leibniz von dem am 25. Juli 1672 im *Journal des sçavans* veröffentlichten Brief von Huygens an Gallois Kenntnis genommen hatte, was wahrscheinlich ohne große Verzögerung geschehen ist. Dies spricht dafür, dass N. 2_2 im Zeitraum von April bis Juli 1672 verfasst worden ist. Wegen der seltenen Papiersorte wird für unser Stück das Gleiche angenommen.

[*Verworfener erster Ansatz*]

Definitions

Pour placer une chose avec une autre, il y a trois sortes de variation. Car ou on place une chose tousjours avec une même chose, mais d'une maniere nouvelle; ou on place une chose tantost avec une tantost avec une autre.

Si on place une chose avec une même chose, mais d'une differe [*bricht ab*]

29 d'une *(1)* même *(2)* no *(3)* maniere *L* 30 tantost avec *(1)* l'une *(2)* une *L*

[*Verworfener zweiter Ansatz*]

Soit une chose donnée, ayant certaines parties, outre les quelles il ne faut pas la soubsdiviser [comme sont les unitez dans le nombre, ou les atomes dans un Corps, ou les personnes d'une assemblée, les quelles ne souffriroient pas d'estre coupées en pieces]; trouver tous les changemens imaginables dans cette chose donnée qu'elle peut fournir de soy même, sans luy adjouster rien de nouveau. [Car s'il seroit permis d'adjouster une nouvelle chose, ou diviser les parties plus outre ou d'une autre maniere, les changemens iroient à l'infini, et il n'y auroit point de probleme pour les conter. Par exemple dix personnes estant donnez, on peut trouver [*bricht ab*]

[*Dritter Ansatz*]

Certaines choses estant données, trouver en nombres toutes les dispositions imaginables.

Les d i s p o s i t i o n s sont les varietez de penser à certaines choses données ou de les placer dans l'esprit.

Par exemple, dix personnes estant données, vous pouvez penser ou à quelques unes ensemble; ou à toutes ensemble; ou à nulles ensemble, c'est à dire à une apres l'autre.

Si vous prennez quelques unes ensemble, tantost celles cy et tantost celles là, cela s'appelle Complexion.

2 donnée, *(1)* divisée *(2)* ayant *L* 3 f. [comme ... pieces.] *erg. L* 5 donnée *(1)* sans la qvelle *(2)* qv'elle *L* 7 parties *(1)* d'une *(a)* autre *(b)* autre maniere ou plus outre, *(2)* plus *L* 11 toutes les *(1)* c o n j u n c t u r e s imaginables *(2)* dispositions *L* 13 sont *(1)* les varietez avec les qvelles plusieurs choses peuuent estre placées dans l'esprit ou dans la pensée, *(2)* conjunctures de plusieurs choses *(a)* Par exemple *(b)* Dix personnes peuuent estre considerees de plusieurs manieres *(c)* La *(3)* les varietez *L* 15 penser ou à *(1)* toutes ensemble, ou à plus *(2)* qvelqves *L*

3–6 [comme ... [Car: Die eckigen Klammern in diesem Ansatz stammen von Leibniz selbst.
18 Complexion: Vgl. LEIBNIZ, *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, prooemium §§ 7–12 S. 4 (VI, 1 N. 8, S. 172 f.).

[*Vierter Ansatz*]

Probleme General

Certaines choses d'un certain nombre connu estant données, trouver en nombres toutes les d i s p o s i t i o n s imaginables.

Les d i s p o s i t i o n s sont les varietez de penser à certaines choses, ou de les placer dans l'esprit. Par Exemple, dix personnes estant données, vous pouvez penser ou à quelques unes ensemble, ou à toutes ensemble, ou à nulles ensemble, c'est à dire à l'une apres l'autre. Car pour considerer plusieurs particularitez dans elles, ou pour considerer le tout rangé en quarré ou en polygone ou en autre figure, cela n'appartient pas à nostre tractation, par ce que nous voulons considerer les places qu'on leur donne dans l'esprit en les rapportant pas à l'espace, mais au temps, car les pensées dans l'esprit, n'ont point de difference des places, mais seulement du temps.

Si vous prennez donc quelques unes ensemble tantost celles cy, tantost celles là, et tantost d'un grand, tantost d'un petit nombre, cela s'appelle C o m p l e x i o n , dont la variation consiste dans la matiere donnée même, sans avoir égard à la forme. Par exemple dix estans donnez, $a. b. c. d. e. f. g. h. i. l.$ Vous en pouvez prendre, tantost cinq ensemble, tantost seulement quatre ensemble; et si vous prennez cinq ensemble, vous pouvez prendre ou ceux cinq cy, $a. b. c. d. e.$ ou ceux cinq là, $b. c. d. e. f.$ etc.

Je nomme le Nombre de ceux qu'on prend, l ' E x p o n e n t d e l a C o m p l e x i o n , par exemple 5 dans l'exemple precedant.

Et selon ce nombre ou exponent, je nomme la C o m p l e x i o n tantost une C o m b i n a i s o n , ou Com2naison, tantost une C o n 3 n a i s o n ou Conternaison, tantost

3 d'un ... connu *erg. L* 9 rangé *(1)* ou *(2)* en *L* 10 considerer *(1)* pas *(2)* les *L* 10 dans l'esprit *erg. L* 11 temps, *(1)* par ce qve les d *(2)* car *L* 17 ensemble, *(1)* et en prennant cinq, *(2)* vous *L* 18 f. etc. *(1)* Le Nombre de ceux qv'on prend, je nomme *(2)* Je *L*

---

22 Conternaison: Die Bezeichnungen *conternatio* für eine ungeordnete Stichprobe von drei Elementen aus einer gegebenen Grundmenge und analog *conquaternatio* finden sich schon bei M. Mersenne, *Harmonicorum libri*, 1635, etwa auf S. 135. Die Schreibweisen *com2natio*, *con3natio* und *con4natio* gebraucht Leibniz bereits in der *Dissertatio*, prooemium §§ 11 f. S. 4 (VI 1, N. 8 S. 172). Er verwendet sie auch in einer Marginalie in seinem Handexemplar von Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [*Marg.*] (*PO* III S. 446). Dort notiert er auf der vor S. 1 eingefügten Ausklapptafel, welche das arithmetische Dreieck darstellt, Formeln zur Berechnung der Anzahl der verschiedenen *complexions* — für *con3nationes* etwa $\frac{y, y-1, y-2}{1, 2, 3}$.

une C o n 4 n a i s o n , etc. bien qu'ordinairement le mot de Combinaison se prend pour la complexion en general.

Le Nombre de toutes les com2naisons ou con3naisons etc. imaginables, s'appelle: L e N o m b r e d e s c o m p l e x i o n s d ' u n e x p o n e n t d o n n é . Par exemple toutes les con3naisons de 10 choses données, sont 120 et toutes les con3naisons de 4 choses, *a. b. c. d.* sont 4 comme *a. b. c.* et *b. c. d.* et *a. b. d.* et *a. c. d.*

Le nombre de toutes les complexions de tous les exponens ensemble, s'appelle s i m p l e m e n t , l e n o m b r e d e s C o m p l e x i o n s . Par exemple le nombre de toutes les Complexions de 4 est 15, sçavoir 4 1 n i t e z , quand chaque chose est mise à part (: *a. b. c. d.* :) 6 C o m 2 n a i s o n s (: *ab. bc. cd. ac. ad. bd.* :) 4 C o n 3 n a i s o n s (: *abc. bcd. abd. acd.* :) 1 C o n 4 n a i s o n (: *abcd* car la varieté de l'ordre *acbd. adbc.* etc. ne change pas la matiere ou complexion, mais seulement la forme :). Et ainsi en tout 1 5 .

1 qv'ordinairement le *(1)* terme *(2)* mot *L* 3 Nombre *(1)* des Com2n *(2)* de toutes les com2naisons ou *(a)* con2naisons *(b)* con3naisons | etc. *erg.* | *(aa)* imaginaires *(bb)* imaginables *L* 5 de *(1)* dix *(2)* 10 *L* 5 f. et toutes les | con3nations *ändert Hrsg.* | de . . . sont 4 *erg. L* 8–12 Par exemple . . . tout 1 5 . *erg. L*

---

12 en tout 1 5 : Die Möglichkeit, gar kein Element aus der Grundgesamtheit auszuwählen, zählt Leibniz hierbei wie bereits in der *Dissertatio*, prooemium §§ 7 u. 12 S. 4 (VI 1, N. 8 S. 172 f.) nicht mit, bedenkt sie aber sehr wohl; vgl. ebd., probl. I Tab. ℵ S. 7 (S. 174).

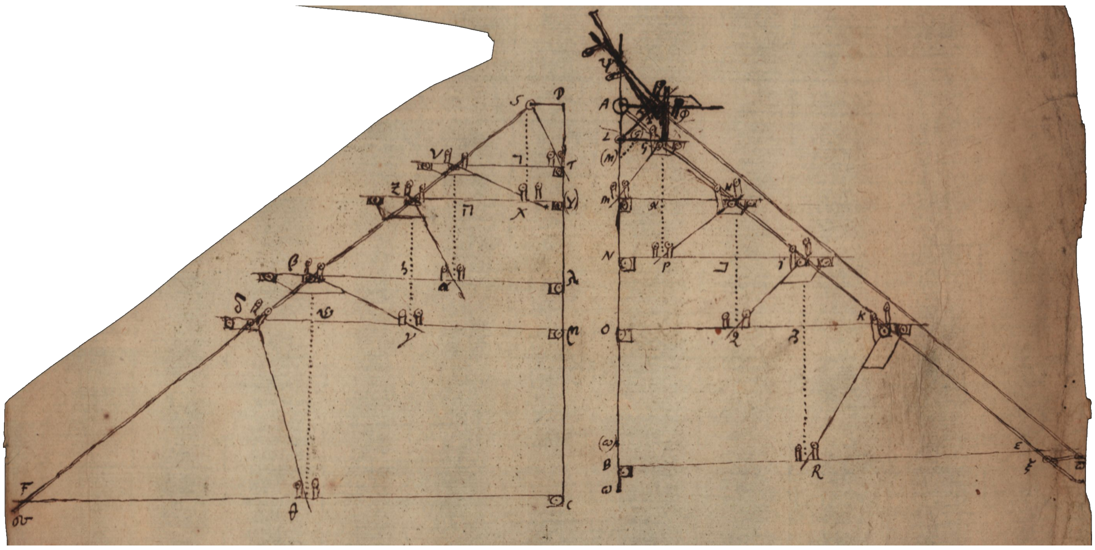
26. CONSTRUCTOR
Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 20 Bl. 1–5. Bl. 1–4 zwei Bog. 2°. Bl. 5 ein Bl. 2°, aus dem zwei dreieckige und ein rechteckiger Abschnitt entfernt wurden. 9 S. Textfolge Bl. 5 v°, Bl. 1–4. Bl. 5 r° leer.
Cc 2, Nr. 815, 816

Inveni mense X$^{\text{bri}}$ 1674. Parisiis
Godofredus Guilielmus Leibnitius

C o n s t r u c t o r

Instrumentum Algebraicum
pro inveniendis omnium Aequationum Radicibus,
geometrice pariter, et in numeris quantumlibet exactis
sine calculo



[*Fig. 1*]

8 *(1)* Gottfredus *(2)* Godofredus *L*

14 *Fig. 1*: Die Figur zeigt einen Ausschnitt aus LH 35 III A 20 Bl. 5 v°. Bearbeiteter Ausschnitt des Digitalisats http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068233 der Handschrift LH 35 III A 20 der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek (GWLB). Das Digitalisat wurde von der GWLB unter einer CC0 1.0 Public Domain Dedication Lizenz zur Verfügung gestellt.

Descriptio Constructoris sive Instrumenti Algebraici

In plano hujus paginae figurae 1 rectangulum paginae parallelum $ABCD$ designatum intelligatur et super rectis AB, DC, alia perpendiculariter erecta plana, ABE, et DCF, sibi proinde parallela. Punctum A summum, B imum, E dextrum, C sinistrum.

Ex puncto A ducatur dextrorsum simul ac deorsum recta $AGHIKE$. secans rectas indefinite dextrorsum productas ipsi $ALMNOB$ perpendiculares LG, MH, NI, OK. Sint indefinite deorsum productae GP, HQ, IR perpendiculariter secantes ipsas NPI, OQK, BRE; junctaeque transversales GM, HP, IQ, KR indefinite deorsum pariter et sinistrorsum productae. Ipsae AL, LM, MN, NO, OB sumtae prout e re erit. Intelligantur jam rectae quidem AB et LG esse lineae rigidae impraesentiarum immobiles, sed MH, NI, OK, BE, sint regulae mobiles sursum ac deorsum in ipsa AB, et GM, HP, IQ, KR, dextrorsum et sinistrorsum in rectis GL, HM, IN, KO, EB, ita tamen ut durante motu tam priores quam posteriores, regulae vestigiis suis parallelae moveantur sive eosdem ad rectas ad quas moventur angulos servent. Quod eminentiis quibusdam oblongis rectilineis, crenae cuidam eique in qua moventur, rectae congruentibus quas increnaturas, nova sed necessaria voce appellare possis praestari constat.

Qualis increnatura (fig. 2) est $L(L)$ qua regula GL movetur super AB in crena $(L)B$, eodem semper angulo GLA, sive is rectus sive obliquus sit, servato. Quod si increnatura velut rotulis quibusdam circa sua centra mobilibus imposita intelligatur, ne crenam in omnibus sui[s] punctis tangat; facilior erit motus.

1 Descriptio ... Algebraici *erg. L* 2 paginae *(1)* esto recta AB *(2)* figurae 1 rectangulum | paginae parallelum *erg.* | ABCD *L* 3 intelligatur | cuius summum AD, imum BC *erg. u. gestr.* | et super rectis | dextra *erg. u. gestr.* | AB, | sinistra *erg. u. gestr.* | DC, alia *(1)* erecta plana *(2)* perpendiculariter *L* 4 parallela. *(1)* Circa punctum A velut centrum *(a)* in *(b)* mobilis sit in ipso plano ABE, recta AE secans rectam G *(2)* Punctum A summum, B imum, E dextrum B sinistrum *(3)* Punctum *L* 7 indefinite | deorsum *erg.* | productae GP, HQ, IR | perpendiculariter *erg.* | secantes *L* 8 f. junctaeqve | transversales *erg.* | GM, HP, IQ, KR | indefinite ... productae *erg.* | . Ipsae *L* 10 et LG | esse ... impraesentiarum *erg.* | immobiles *L* 11 ipsa AB, *(1)* servato semper angulo qvem *(2)* et *L* 14 f. oblongis | rectilineis *erg.* | , crenae | cuidam *erg.* | eiqve *L* 17 (fig. 2) *erg. L* 17 in crena (L)B *erg. L* 18 is *(1)* perpendicularis *(2)* rectus *L* 19 circa ... mobilibus *erg. L*

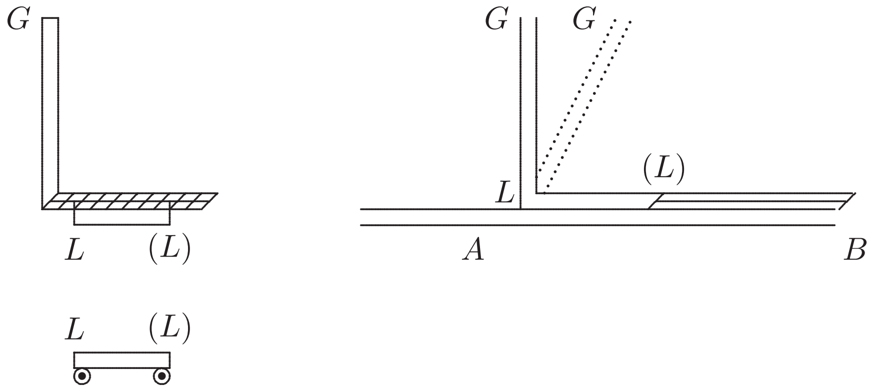


fig. 2

Ut autem aliquod motus in caetera omnia propagati principium intelligamus, cogitetur regula AE, mobilis circa B, in eodem semper plano ABE. quae elevata a situ inclinato ad minus inclinatum sive horizontali propiorem, aperiet Machinam, contrario vero motu, claudet. Quod ita intelligendum est[:] Dum AE elevabitur puncta G, H, I, K, quibus LG, MH, NI, OK, secat, longius distabunt sive recedent, ab L, M, N, O. Intelligantur jam regulae transversales GM, HP, IQ, KR, intersectionis puncta sequi, et rectae AE motu per parallelas LG, MH, NI, OK, eodem semper angulo dextrorsum duci, aut etiam dum AE rursus deprimetur sinistrorsum reduci: Eodem modo, motu transversalium GM, HP, IQ, KR, per parallelas sustinentes G, H, I, K, mutabuntur M, P, Q, R puncta intersectionum cum aliis parallelis uno gradu semper inferioribus, MH, NPI, OQK, BRE. Pone jam effici, ut idem sit semper punctum intersectionis M, P, Q, R in parallela, MH, NPI, OQK, BRE, aliud vero atque aliud transversalis, GM, HP, IQ, KR punctum ei respondeat (: quod ut mox dicam, facile effici potest :) necesse erit ipsas MH etc. mutatione punctorum intersectionis M etc. in transversalibus GM etc. sursum deorsumque secundum longitudinem ipsius AB duci ac reduci quod facile intelligi potest ex fig. 3.

8 per *(1)* GM, *(2)* parallelas *L* 8 dextrorsum *erg. L* 9 deprimetur | sinistrorsum *erg.* | reduci: *(1)* Regulas autem transversales parallelis occurrentes, eas per *(2)* Eodem *L* 10 transversalium *(1)* GM, HI, OK, per parallelas sustinentes *(2)* GM *L* 11 M, P, Q, R *erg. L* 12 f. intersectionis *(1)* in recta *(2)* M, P, Q, R *L* 15 MH etc. *(1)* motu *(2)* mutatione *L*

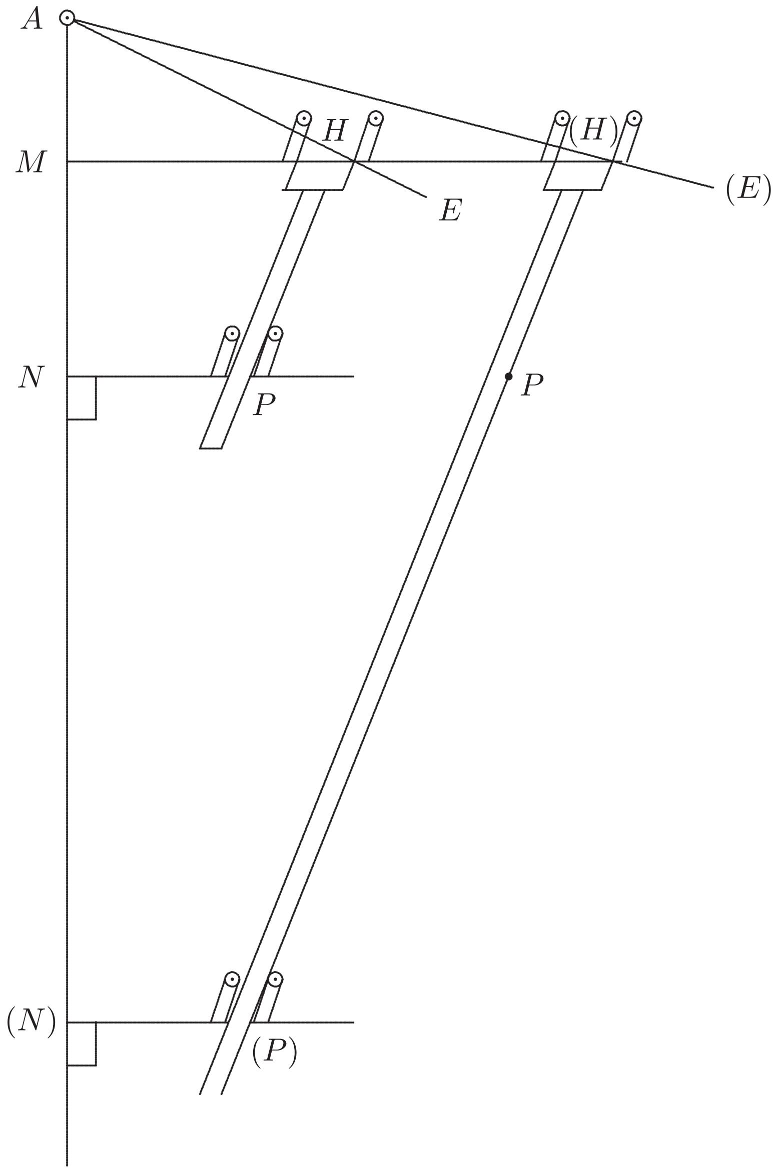


fig. 3

Pone enim in MH, ipsam HP; vestigiis suis parallelam incedere dextrorsum ope i n c r e n a t u r a e H. et NP ipsi MH parallelam esse. Manente puncto fixo P. in recta

1 *Neben* fig. 3: NB.

2 dextrorsum *erg.* *L*

NP necesse est ipsam NP descendere ad $(N)(P)$. Nam si mansisset ubi erat, a recta HP in $(H)(P)$ promota in puncto P non amplius secaretur. Ut autem recta HP rectam NP non nisi in P. secare possit, duobus obicibus ex ipsa NP, perpendiculariter ad planum NMH exeuntibus effici potest, inter quos ipsa HP inclusa libere ludit, prorsus ut in exiguis naviculis remi inter duos obices manu agitantur, ita utcunque recta HP inter hos duos obices sursum deorsumque agatur nunquam tamen a puncto P inter eos intercepto dimovebitur. Eodem modo efficitur ut recta AE translata in $A(E)$ punctum H et cum eo recta HP transferatur in (H) vel $(H)P$. Neque vero aliud quicquam hoc loco postulavimus. Ut autem motus eo facilior pariter et exactior sit; regulae ipsae inter obices interceptae aciebus suis obicem alterutrum motui scilicet obstantem perpetuo prement; obex autem quilibet annulo sive tubulo sive si placet cylindro circa axem in quo fixus est obex, mobili, indutus erit ut fricanti regulae facilius cedat. Alterutrum autem, aciem vel cylindrum ex chalybe durato esse fabricatum rationis est, altero ex aere fuso; quo minus motuum reciprocationibus alterantur. Apparet quoque, ut ad fig. 1. redeamus, ab obice utrobique regulam motricem includente effici, ut quemadmodum elevatione ipsius AE aperitur machina, ita ejus depressione rursus claudatur.

Quod si quis veretur, ne vacillationibus regulae motricis intra obices punctum intersectionis velut H, aut P, instabile reddatur; is consideret quantacunque sit latitudo vel libertas regulae intra obices ludentis; punctum tamen intersectionis unum tantum censeri, verbi gratia quo acies regulae cylindrum obici circumdatum aut ut mox dicam annulum quendam obicibus interjectum tangit; quod semper durante motu, eodem in loco, aut aequipollente evenit. Fateor punctum contactus habere latitudinem quandam, et repetitis contactibus; una scilicet regula aliam ducente, latius errorem propagari; sed fieri tamen arte potest, ut posterior error priorem non augeat, sed quodammodo compenset; certa semper lege, quamdiu acies aut cylindros tritu non diminutos ponimus: cum etiam ipsa diminutio temporis tractu facta quae tamen ita subito non sentietur. Supra remedium non sit. At inquies punctum contactus non esse idem in reducendo quod in ducendo, quia oppositus tunc obex premitur: sed hoc nihil turbat; quia in qua operatione ductuum ratio habetur, in ea reductuum non habetur. Effici tamen etiam potest, id-

10 suis *(1)* chalybe durato *(2)* ferratis *(3)* ex aere in obices perpetuo prement *(4)* obicem *L*
13 durato *(1)* factum, alterum *(2)* esse *L* 19 intersectionis *(1)* illud demum *(2)* unum *L* 20 f. aut ... interjectum *erg. L* 22 aeqvipollente *(1)* contingit; et punctum contactus physic *(2)* evenit *L*
25 cylindros *(1)* nondum tritu consumi *(2)* tritu *L* 29–166,1 habetur. *(1)* Fateor deniqve *(2)* Ut increnaturae in crenis non vacillent *(3)* Effici |tamen *erg.*| etiam potest, |idqve malim, *erg.*| ut *L*

que malim, ut regula obicibus intercepta sit instar prismatis Triangularis trium acierum, quarum duobus obices oppositos; una annulum quendam in P nonnihil incisum et circa centrum suum in rectave axem NI mobilem tangat, ita punctum P, semper erit idem tam in ducendo quam in reducendo praesertim cum ipsa HP, durante operatione eundem semper faciat angulum ad ipsam NI, adeoque ad incisuram in qua est annulus P, quod si pro alia operatione mutetur angulus HPN. Nihil prohibet cochlea exigua etiam annuli P inclinationem mutari, ut scilicet ad axem annuli, angulus rectae HP semper sit rectus. Idem in obicibus quoque locum habet ut in eosdem semper circellos cylindris eorum incisos acies intrent. Facile autem cavebitur ut mutatio inclinationis clausa tantum machina fieri possit, durante motu non possit. Clausa autem machina sponte sua nulla peculiari manuum opera mutatam ipsius *HP* inclinationem consequetur laxato tunc retinaculo quodam, quod alias durante prius motu obstabat inclinationis mutationi.

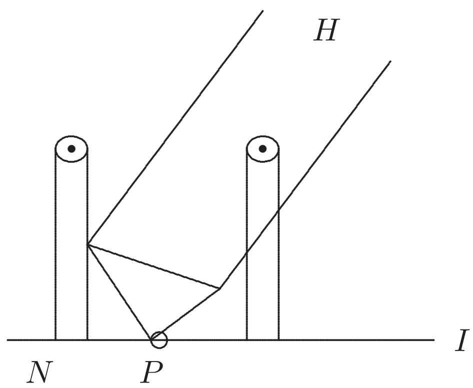


fig. 4

3 in ... NI *erg. L*   8 rectus. *(1)* Innumera alia ab industrio artifice pro re nata *(a)* excogitari possent *(b)* excogitabuntur, ut appareat qvo usqve humana diligentia in elaborando tantae utilitatis instrumento | *(aa)* proficere posset *(bb)* profici liceat *erg.* |, qvo totius pene *(aaa)* Geometriam *(bbb)* Algebrae et Geometriae rectilineae eius certe *(aaaa)* cuius *(bbbb)* qvam Vieta et Cartesius ad analysin reduxere; problemata solvuntur. et omnium curvarum a Cartesio in classes reductarum fructus | hactenus contemplationem non egressus *erg.* | continetur. Exempli praeterea causa, ut impediatur regularum *(2)* Idem *L*

Praeterea ut increnaturarum aut acierum, quibus in crenis aut incisuris moventur regulae, impediatur vacillatio; faciendum est, ut eadem acies diversis incisuris sic satis invicem remotis, at perfecte parallelis et similibus, recipiatur. Nec refert quod ad exactitudinem summam omnia necesse est constructa esse, unde difficilis erit motus, nam cum celeritas non postuletur; magna profecto impedimenta necesse est quae vectis longitudine et si velis agentis vectem cochleae tarditate non vincantur. Cumque necesse sit aliquando puncta quaedam diversarum regularum, dum praeparetur machina ad novam operationem, in eadem esse recta imaginaria, hoc exacte praestari poterit quodam dioptrae genere si perforata in punctis quaesitis utraque regula, lux per omnia puncta radiet; aut videri possit. In elaborandis autem machinae partibus perspicilia adhibere artificem rationis erit; cum sit instrumentum hoc summae exactitudinis specimen futurum.

Innumera alia ab industrio artifice pro re nata excogitabuntur ut appareat quousque humana diligentia in elaborando tantae utilitatis instrumento proficere liceat. Quo omnes algebrae aequationes resolvuntur, et Geometriae rectilineae, ejus certe quam Vieta et Cartesius ad analysin reduxere, problemata solvuntur; et curvarum omnium a Cartesio in classes distributarum fructus hactenus contemplationem non egressus continetur. Sed haec postea exponam. Nunc absolvenda Machinae constructio est motusque, neque enim constructio sine motu commode explicari potest. Nimirum r e d e u n d o a d f i g. 1 elevato primo mobili AE motu circa centrum A regula transversalis GM, procedit in ipsa LG directione seu dextrorsum, quod fieri non potest, quin parallela (horizonti) MH moveatur in recta ANB directioni NB seu deorsum. Interea temporis transversalis HP, ob eandem ipsius AE elevationem movetur in MH sinistrorsum; quare parallela NPI cui HP occurrit in P, et ibi inter duos obices modo explicato intercipitur descendet. Eodem modo eodem tempore; transversales, IQ, KR, et si quae aliae sequuntur movebuntur sinistrorsum, parallelae OQK, BRE etc. deorsum, quod ludi genus continuabitur, quousque postulabit necessitas, et salva exactitudine sufficient vires.

2 vacillatio; *(1)* effici potest, ut eadem acies diversis locis simul *(2)* faciendum *L* 5 qvae *(1)* vecte adhibito *(2)* vectis *L* 8 poterit *(1)* adhibitis dioptris *(2)* qvodam *L* 10 partibus *(1)* microscopium aut *(a)* certe *(b)* certe *(2)* perspicilia adhibere *(a)* intererit *(b)* artificem *L* 12 nata *(1)* excogitari possunt *(2)* excogitabuntur *L* 18 f. Nimirum | r e d e u n d o a d f i g. 1. *erg.* | elevato *(1)* AE, circa centrum *(a)* E *(b)* A, movetur GM, directione sinistrorsum. Ergo MH deorsum; eodem tempore ob elevatam AE, movetur HP sinistrorsum; GM *(2)* reg *(3)* primo *L* 20 ipsa *(1)* GM, directione | LG *nicht gestr.* | seu | sinistrorsum *nicht gestr.* | *(2)* LG directione *L* 20 parallela (horizonti) *erg. L* 26 qvousqve *(1)* sufficient vires, et *(2)* postulabit *L*

Hactenus hujus plani nempe ABE explicatae partes, explicandae nunc et alterius DCF, ipsi paralleli et similiter positi, partes an plerisque similes. Praeter ea scilicet quae admonebo. Nimirum DS regula immobilis sit ipsi CF, vel BE parallela, et puncta A. D. S. sint in eadem recta. Efficiatur autem arte quadam, ut dum punctum G procedit sinistrorsum vel recedit dextrorsum, ob motum elevationis et depressionis ipsius AE circa centrum A; punctum S, mobile procedat in recta DS in eundem sensum, directione scilicet DS, dextrorsum, (: etsi in pagina sive figura id sit sinistrorsum, quoniam utraque plana ABE, DCF, non in eodem plano jacentia, ut illic repraesentantur, sed parallele erecta censenda sunt :) vel recedat, directione SD, sinistrorsum; ea tantum lege, ut DS. sit semper media proportione inter AL, et LG. et regula quaedam SF, cum puncto S procedens, et tamen circa centrum S. mobilis, sit semper ipsi AE parallela. Quae duo qua ratione obtineri possint, postea explicabo. Nunc eo supposito intelligatur transversalis ST, cum puncto S procedens propellere sursum deorsumque in recta DC. parallelam (horizonti) TV; et motu ipsius SF in ipsa TV, aliam duci transversalem VX a qua rursus parallela $(Y)Z$ in ipsa DC. sursum deorsumque ducatur. Idem intellige de transversalibus $Z\alpha$, $\beta\gamma$, $\delta\theta$, quae in parallelis $(Y)Z$, $\lambda\beta$, $\mu\delta$, ab ipsius SC motu huc illuc ducuntur, eodem angulo servato; et parallelas, (unaquaeque ei in qua ducitur inferiorem,) $\lambda\alpha\beta$, $\mu\gamma\delta$, $C\theta F$ in recta DC. sursum deorsumque agunt. Puncta autem T. X. α. γ. θ. sunt in perpendicularium DTC, SX, $V\alpha$, $Z\gamma$, $\beta\theta$ (quae omnes excepta prima imaginariae sunt,[)] et parallelarum, quae omnes reales rigidaeque sunt VT, $ZX(Y)$, $\beta\alpha\lambda$, $\delta\gamma\mu$, $F\theta C$, intersectionibus.

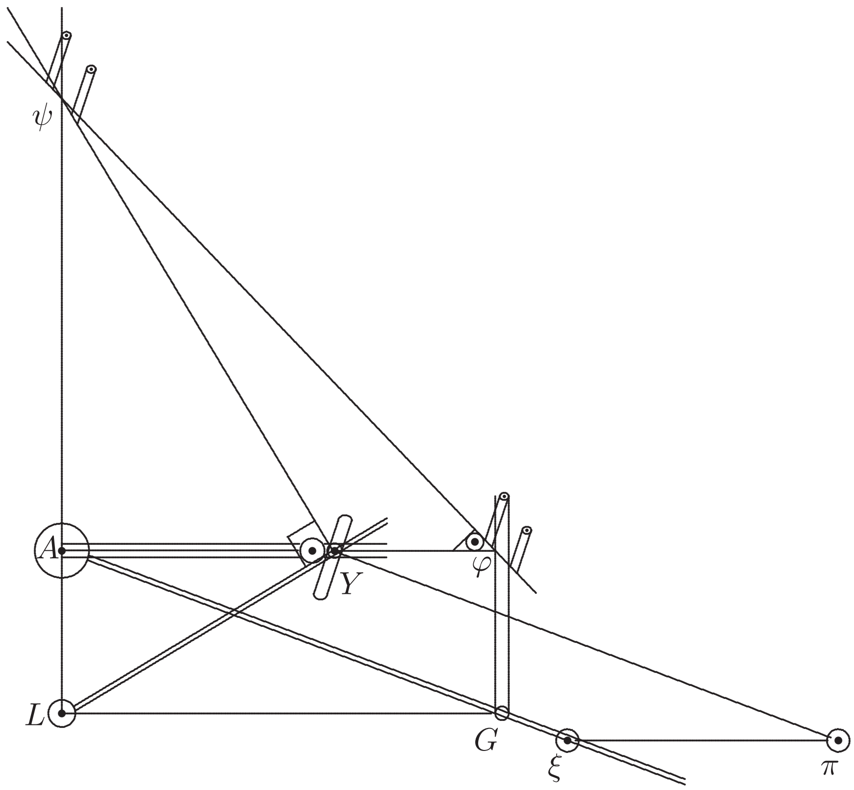
Superest ut explicetur transitus de plano in planum, seu modus quo efficitur, ut DS sit media proportionalis inter AL et LG. et ut SF perpetuo maneat parallela ipsi AE. Porro recta AL durante motu manet situ et magnitudine eadem, at LG perpetuo

2 ipsi ... partes *erg.* *L* 2 similes. *(1)* Nempe supponendum tantum arte qvadam (: postea explicanda :) effici, *(a)* ut dum LG decresci *(b)* ipsa LG crescit decrescitve immobili, *(aa)* ob plani praecedentis ipsius AE *(bb)* ob ap *(cc)* ob motum elevationis et depressionis ipsius AE, crescente aut decrescente etiam DS crescere ea tamen lege, ut *(2)* praeter *L* 3 regula immobilis *erg.* *L* 4 qvadam | (: postea explicanda :) *gestr.* | ut *L* 6 in recta DS *erg.* *L* 7 scilicet DS *(1)* sinistrorsum *(2)* dextrorsum *L* 7 sit *(1)* sinistrorsum *(2)* dextrorsum *(3)* sinistrorsum *L* 9 directione SD, *(1)* dextrorsum *(2)* sinistrorsum *L* 10 et LG. *(1)* id qva ratione fieri possit, postea explicabo, nunc eo supposito *(2)* et *L* 13 sursum deorsumqve *erg.* *L* 14 (horizonti) *erg.* *L* 16 f. ducuntur, *(1)* serv *(2)* suis semper vestigiis parallelae *(3)* eodem *L* 18 recta DC. *(1)* propellunt *(2)* sursum *L* 19 perpendicularium | imaginarium *erg. u. gestr.* | DTC *L* 20 omnes *(1)* rigidae seu solidae sunt, *(2)* reales *L* 24 situ et magnitudine *erg.* *L*

mutatur magnitudine, manet situ; idemque erit de recta DS, caeterae situm pariter et magnitudinem mutant. Jam parallelismum ipsarum AE, SF perpetuum, ita obtinebimus; ponatur Y in recta AY ipsi BE parallela punctum Y ita procedere, ut recta AY semper aequetur ipsi DS, seu ut sit media proportione inter AL et LG. quod modo postea explicando, obtinebimus. Eo autem supposito intelligatur alicubi in recta AE, punctum quoddam fixum ξ, unde dextrorsum prodeat recta indefinita, parallela ipsi BE, inque ea sumatur $\xi\pi$ aequalis ipsi AY jungantur puncta Y et π regula solida $Y\pi$. Patet manente AY, utcunque elevetur aut inclinetur AE, latera opposita rhomboeidis $A\xi\pi Y$. manere parallela; quemadmodum instrumenti quo vulgo ad parallelas ducendas utuntur, quod ab officio rectissime parallelogrammum appelles. Hic vero illud praeterea addendum est, ut latus $Y\pi$ in rectis indefinitis AY, $\xi\pi$ huc illuc incedere possit. Ex punctis Y, et π, exibunt duae lineae rigidae, YS, $\pi\varpi$ duo plana ABE, DCF perpendiculariter jungentes, et regulam $Y\pi$ regulae $S\varpi$ connectentes, unde $S\varpi$ vel SF, ipsi $Y\pi$, vel AE perpetuo parallela incedet, quod faciendum erat.

Ut autem recta AY semper media sit proportionalis inter rectam constantem AL, et continue variatam LG paulo difficilius est: quod tamen ni fallor ita consequemur; inspiciatur fig. 1 aut, quae hanc ejus partem clarius explicat, f i g u r a 5.

3 ponatur *(1)* AY ⊓ *(2)* ipsa AY aeqvalis perpetuo ipsi DS | . Nempe *erg.* | puncto Y perpetuo incedente ex adverso *(3)* Y in *L* 3 ut | recta AY *erg.* | semper *L* 5 recta *(1)* AY punctum qvoddam *(2)* AE *L* 6 unde *(1)* recta prodeat indefinita, aeqvalis *(a)* inqve ea ponatur parallela ipsi AY, *(b)* in qva sumatur horizonti *(2)* dextrorsum *L* 8 opposita *erg. L* 11 possit *(1)* qvoniam rectam AY continue magnitudinem mutare manifestum est, qvoniam et LG. eam *(2)* | ob mutationem ipsius LG. cum sit *nicht gestr.* | AY media propo *(3)* Ex *L* 12 duae *(1)* perpendiculares *(2)* lineae rigidae, *(a)* ad planum Yϖ *(b)* YS *L* 14 parallela *(1)* | erit *nicht gestr.* | *(2)* incedet *L* 17 inspiciatur ... explicat, | f i g u r a m *ändert Hrsg.* | 5 *erg. L*



[*Fig. 5*]

Punctum G. motu elevationis aut depressionis rectae AE vel $A\xi$ circa A ducat secum perpendicularem $G\varphi$. quae rursus in recta $AY\varphi$ ducat ipsam $\varphi\psi$, angulo $\psi\varphi A$ constante semirecto, quae rectam $LA\psi$ secabit in ψ. Ergo $A\psi$, aequabitur ipsi $A\varphi$ vel LG. Recta $\varphi\psi$ in eodem puncto ψ, secet aliam rectam $Y\psi$ quae recta in radio LY huc illuc moveri possit, servato angulo, constante recto ψYL. Radius autem LY mobilis esto circa centrum L. Ponendo jam rectam $\varphi\psi$ duobus obicibus in ipsa $Y\psi$ plantatis inclusam esse, ut punctum intersectionis ψ in recta $Y\psi$ semper constans esse possit; sequetur rectam $Y\psi$ ab ipsa $\varphi\psi$ duci. Quod si ergo radius LY circa centrum Y mobilis non esset, moveretur ipsa $Y\psi$ secundum longitudinem ipsius LY, ob motum ipsius $\varphi\psi$, sed quoniam desideramus praeterea ut punctum Y semper maneat in eadem recta $A\varphi$; quod fibula quadam ipsi $Y\psi$ infixa, et in rimam ipsius $A\varphi$ intrante, inque ea huc illuc mobili efficietur: ideo ut

11 Aφ; *(1)* ideo ut triangulum rectangulum ψYL. omnes formas induere possit *(2)* qvod *L*

Triangulum rectangulum $\psi\, YL$ omnes formas induere possit, necesse erit LY mobilem esse circa L. Erit ergo AY semper media proportionalis inter AL et $A\psi$ seu inter AL et LG utcunque varietur punctum G. Quod faciendum erat. Unde jam antedicta consequuntur.

Explicata est constructio Instrumenti Algebraici, ut appareret, ex quibus partibus compositum sit, et qua ratione partium motus alter alterum regat. Nunc superest, ut modum quoque tradamus utendi Instrumento ad Aequationum radices Geometrice, in lineis, et quod hinc sequitur Mechanice in numeris quantumlibet vero propinquis, inveniendas. Constat ex iis quae Vieta inprimis et Cartesius, tradidere, omne Problema (ordinarium, rectilineum) determinatum, reduci posse ad aequationem in qua una tantum incognita supersit; secundum quam ordinata aequatio eo usque assurgere censebitur quo usque maxima incognitae dimensio excrevit. Praeterea tradita est a Cartesio methodus efficiendi, ut omnia aequationis loca sint repleta, et ut omnes aequationis radices sint verae, ut ille loquitur, id est affirmativae: quo facto, magno commodo nostro, feliciter evenit, ut signa + et − in aequatione sese alternis sequantur, quod quam sit instituto nostro necessarium mox apparebit. Sumamus in exemplum aequationem ex decem terminis compositam, sive noni gradus, (: raro enim altius assurgetur :) quae ad radices affirmativas praeparata, atque ordinata, ita stabit:

$$y^9 - by^8 + acy^7 - a^2dy^6 + a^3ey^5 - a^4fy^4 + a^5gy^3 - a^6hy^2 + a^7ly - a^8m \sqcap 0$$

et transponendo, ut signa negativa amoveantur:

$$\odot \quad a^8m + a^6hy^2 + a^4fy^4 + a^2dy^6 + by^8 \sqcap a^7ly + a^5gy^3 + a^3ey^5 + acy^7 + y^9$$

Ubi patet duas haberi summas sive formulas aequales inter se, alteram omnium terminorum exponentium parium, 0. 2. 4. 6. 8. alteram imparium, 1. 3. 5. 7. 9. Nec vero necesse est terminum summum, hoc loco y^9 purum esse, nullaque quantitate cognita affectum: cum contra in nostro sit arbitrio purum reddere quemlibet, posito enim a esse unitatem, et omnia dividi per m, fiet aequatio:

$$☽ \quad 1 + \frac{h}{m}y^2 + \frac{f}{m}y^4 + \frac{d}{m}y^6 + \frac{b}{m}y^8 \sqcap \frac{l}{m}y + \frac{g}{m}y^3 + \frac{e}{m}y^5 + \frac{c}{m}y^7 + \frac{1}{m}y^9$$

1 ψYI *L ändert Hrsg.* 5 regat. *(1)* nunc, cuius causa totum hoc negotium susceptum est, usum eius in Algebra, et qvod hinc seqvitur in Geometria imo et in Mechanicis, dicemus. su *(2)* nunc superest, *(a)* ut modum utendi *(aa)* in resolvendis *(bb)* ad resolvendas Aeqvationes adhibendi *(b)* ut *L* 6 ad *(1)* resolvendas *(2)* inveniendas *(3)* Aeqvationum *L* 7 Mechanice *erg. L* 12 ut ... et ut *erg. L* 14 f. qvod ... apparebit *erg. L*

8 tradidere: Vgl. Fr. Viète, *Opera mathematica*, 1646 (*VO*) und R. Descartes, *Geometria*, 1659 (*DGS* I S. 1–118). 11 tradita: *a. a. O.*, S. 70–75.

Illud quoque constat pro Unitate assumi posse quamlibet quantitatem datam, prout commoditas operationis exigere videbitur.

His ita positis, ajo Aequationem ☽ in machina ita perfecte repraesentari, ut satis appareat ipsam rerum naturam, ad hoc construendi genus invitare, subsidiis dudum velut consulto praeparatis, ut facilius exitum reperiret. Nam durante motu, quomodocunque linearum magnitudo varietur, attamen AL appellata 1, et DS appellata y, sive LG, y^2 semper verum erit ab uno latere esse

$$\begin{cases} AL \sqcap 1 \quad LM \sqcap \dfrac{h}{m}y^2 \quad MN \sqcap \dfrac{f}{m}y^4 \quad NO \sqcap \dfrac{d}{m}y^6 \quad OB \sqcap \dfrac{b}{m}y^8 \\ \text{ab altero latere vero} \\ DT \sqcap \dfrac{l}{m}y \quad T(Y) \sqcap \dfrac{g}{m}y^3 \quad (Y)\lambda \sqcap \dfrac{e}{m}y^5 \quad \lambda\mu \sqcap \dfrac{c}{m}y^7 \quad \mu C \sqcap \dfrac{1}{m}y^9 \end{cases}$$

Quod si ergo durante motu aliquando evenit, ut $DT + T(Y) + (Y)\lambda + \lambda\mu + \mu C$, id est DC, fiat aequalis ipsi $AL + LM + MN + NO + OB$, id est AB, sive ut punctum C plani unius e regione respondeat puncto B plani alterius, id est ut recta imaginaria BC sit utrique plano perpendicularis, quod in media operatione, etiam machina non detecta, ope styli cujusdam impingentis, facile sentiri potest; tunc manifestum est, etiam $1 + \dfrac{h}{m}y^2 + \dfrac{f}{m}y^4 + \dfrac{d}{m}y^6 + \dfrac{b}{m}y^8$ aequari ipsi $\dfrac{l}{m}y + \dfrac{g}{m}y^3 + \dfrac{e}{m}y^5 + \dfrac{c}{m}y^7 + \dfrac{1}{m}y^9$ ac proinde si machina in eo statu sistatur, quae tunc fuerit DS sive y, eam fore quaesitam, cum aequationi propositae satisfaciat.

Quod si Aequatio ⊙ commodior videatur ad usum, quam aequatio ☽, ne scilicet omnia per m dividere necesse sit; aut etiam si alium quemlibet terminum potius quam ultimum purum reddere velimus, id factu facillimum erit, si modo tunc postuletur, ut punctum C respondeat ex adverso non ipsi puncto B, sed puncto ω, sumta recta $B\omega$ tali, ut sit differentia inter terminum cognitum sive ultimum, et unitatem; sumta inquam recta $B\omega$ a B versus A, cum unitas est major termino ultimo, aut in contrarias partes, producta AB ultra B, cum est minor. Quod, si ad aequationem ⊙. applicetur, posito a

1 qvantitatem datam *erg.* *L* 4 appareat *(1)*, vix aliq *(2)* ipsam *L* 4 subsidiis *(1)* in eam rem *(2)* dudum *L* 5 reperiret. *(1)* Nam si *(a)* modo ipsi AB (fig. 1) adjicias rectam *(aa)* a − m *(bb)* Bω, cuius valor sit a − m *(b)* modo in recta AB (fig. 1) producta si opus est, sumas rectam Bω, cuius valor sit a − m, directione *(2)* nam AL valebit *(3)* Nam *L* 6 AL ... y^2 *erg.* *L* 7 erit *(1)* Nam ab uno latere AL valebit 1. LM $\sqcap$ *(2)* ab *L* 13 f. id ... perpendicularis *erg.* *L*

esse unitatem, sive 1, erit terminus ultimus sive cognitus, m. cumque necesse sit AL + vel $-$ $B\omega$ aequari termino cognito m, ut scilicet caeteris rectis, LM, MN etc. reliquos terminos repraesentantibus, tota aequationis $\odot$ portio sinisterior, sive exponentium parium, a recta $A\omega$ repraesentetur; ideo + vel $-$ exprimendo per signum ambiguum $\dagger$ habebimus, $1 \dagger B\omega \sqcap m$ sive $\dagger B\omega \sqcap m-1$, vel $B\omega \sqcap \dagger m \ddagger 1$ id est $B\omega$ erit differentia inter m et 1. et quando m major quam 1. tunc pro $B\omega \sqcap \dagger m \ddagger 1$. scribemus $B\omega \sqcap m-1$. Eritque $m \sqcap 1+B\omega$ adeoque $B\omega$ non subtrahetur ipsi AB, sed addetur, sive sumetur in recta AB producta ultra B. Contra quando 1 major quam m, tunc pro $B\omega \sqcap \dagger m \ddagger 1$, scribetur $B\omega \sqcap 1-m$, adeoque erit $m \sqcap 1-B\omega$. Quod significat $B\omega$, a recta AB subtrahendam, sive in contrarias partes sumendam esse regrediendo a B versus A. Itaque regula mobilis parallela BE, ascendendo descendendove secum aget affixam sibi, et in ipsa AB mobilem regulam $B\omega$ et ex ejus puncto ω exiens perpendiculariter stylus impinget in punctum C regulae mobilis FC, tunc cum rectae $A\omega$, et DC, fiant aequales, seu cum DS est quaesita. Cumque manifestum sit quamlibet cognitam sumi posse pro unitate sive AL, et terminum quoque cognitum sive ultimum aequationis cujusdam valorem quemlibet pro arbitrio nostro accipere posse; sub literis quoque $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m$, intelligi posse quantitates cognitas quaslibet; et in aequatione qualibet effici posse, ut quantitas cognita alicujus termini sit data, ideo imposterum formula $\odot$ uti suffecerit cum caeteras omnes comprehendat.

Explicandum ergo nunc est, qua ratione Instrumentum aequationi cuilibet propositae accommodetur, sive quomodo effici possit, ut sit:

$$☿\left\{\begin{array}{l} \qquad AL \sqcap 1 \quad LM \sqcap hy^2 \quad MN \sqcap fy^4 \quad NO \sqcap dy^6 \quad OB \sqcap by^8 \\ B\omega \sqcap \dagger m \ddagger 1, \quad \text{adeoque } A\omega \sqcap m + hy^2 + fy^4 + dy^6 + by^8 \\ \text{et vicissim ut sit ex altero latere} \\ \qquad DT \sqcap ly \quad T(Y) \sqcap gy^3 \quad (Y)\lambda \sqcap ey^5 \quad \lambda\mu \sqcap cy^7 \quad \mu C \sqcap y^9 \\ \text{adeoque } DC \sqcap ly + gy^3 + ey^5 + cy^7 + y^9 \end{array}\right.$$

1 cognitus, m *(1)*, et Bω ⊓ $\sharp$ *(2)* Bω, esse 1 − m; | *dazu gestr. Nebenbetrachtung am oberen Rand:*

$$\begin{array}{ll} 1+\ B\omega \sqcap m. & \text{Ergo } B\omega \sqcap m-1 \\ 1-\ B\omega \sqcap m. & \text{Ergo } B\omega \sqcap 1-m \end{array} \qquad m-1+1 \sqcap m \qquad 1-m.$$

| *(a)* ideo cum ne *(b)* ideo *(3)* cumqve necesse sit *(a)* AL + Bω aeqvari termino *(b)* AL *L*   4 repraesentetur; *(1)* appellemus + vel −Bω *(2)* ideo + vel − *(a)* Bω appellando *(aa)* ‡ *(bb)* $\sharp$ Bω, ut scilicet signum *(b)* appellando †, ut *(c)* exprimendo *L*   12 mobilem *(1)* rectam *(2)* regulam *L*   13 regulae mobilis FC *erg.* *L*

Ut scilicet in casu aequalitatis rectarum $A\omega$, DC incognita y haberi possit. Hoc autem ita praestabitur, in fig. 1. regula LG moveatur, sursum deorsumve in recta AB, donec fiat AL aequalis ipsi a. seu unitati assumtae. Quo facto et radius AGE, tamdiu moveatur circa centrum A, donec rectam LG ita secet in puncto G, ut fiat LG aequalis ipsi AL, sive unitati. Jam regula transversalis GM, circa punctum G, in CM regulae increnatura qua per ipsam LG incedit fixum eousque moveatur, donec ipsi LMB occurrat in puncto M tali, ut ipsa LM valeat h. Quo obtento in eo situ sive inclinationis angulo LGM, ita firmabitur regula transversalis GM, ut durante motu sive operatione exempli praesentis inde dimoveri non possit. Idemque de caeteris transversalibus intelligendum est, earum inclinationem manuum opera mutari pro lubitu posse, quando Machina operationi praeparatur; durante operatione mutari non posse, quod effectu facillimum esse, nemo dubitat. Itaque angulus LGM, vel distantia regularum LG, MH sumatur talis, ut sit $LM \sqcap h$. Eodem modo angulus MHP vel NIQ, vel OKR talis ut distantia MN sit f, NO sit d, OB sit b. Quid simplicius? In altero plano similiter anguli DST, TVX, $(Y)Z\alpha$, $\lambda\beta\gamma$, $\mu\delta\theta$, tales sumantur, ut sint distantiae, $DT \sqcap l$, $T(Y) \sqcap g$, $(Y)\lambda \sqcap e$, $\lambda\mu \sqcap c$ et $\mu C \sqcap AL \sqcap 1$. Quo facto Instrumentum erit praeparatum, et ajo perpetuo eventurum, durante machinae motu, utcunque elevetur aut deprimatur radius AE, circa centrum A, ut manente $AL \sqcap 1$ et DS continue variante appellata y, locum habeant aequationes sive valores rectarum LM, MN, etc. item DT, TY, etc. recensiti sub signo ☿.

Quod ita demonstro, etsi Geometrae intelligenti, rem sine demonstratione ex dictis manifestam putem. Ex punctis G, H, I, item $s.\ v.\ z.\ \beta$ in rectas MאH, NPבI, OQגK, BRE item TדV, $(Y)X$הZ, $\lambda\alpha$לβ, $\mu\gamma$שδ, $C\theta F$ demittantur perpendiculares imaginariae GאP, HבQ, IגR, SדX, Vהα Zלγ, βשθ. Jam vero cum sit $AL \sqcap 1$, $DS \sqcap y$, erit $LG \sqcap y^2$, quia LG inter AL et DS proportione media est, ex constructione. Hinc sequitur LM esse

2 regula LG *(1)* ita moveatur, ut fiat *AL* aeqvalis ipsi a, sive unitati *(2)* moveatur *L* 12 dubitat. *(1)* Jam puncta in qvibus rectae | imaginariae *erg.* | ipsi BE perpendiculares sive verticales, Gא P, HבQ, IגR, a realibus, horizontalibus, sive regulis MאH, NבI OגK | secantur *erg.* | appellemus א, ב, ג. erit ipsa Gא (id est LM) $\sqcap$ h, et qvoniam | ut *erg.* | AL ad LG. ita Gא ad אH, et ex hypothesi AL $\sqcap$ LG, erit et אH $\sqcap$ h. sumta ergo LM $\sqcap$ h. *(2)* Itaqve *L* 12 distantia *(1)* LM sumetur talis, ut *(2)* regularum *L* 14 simplicius? *(1)* Similiter *(2)* In altero plano *(a)*, manifestum est etiam DS fore aeqvalem ipsi AL, vel LG, seu unitati, cum inter duas qvantitates aeqvales AL, LG media qvoqve proportionalis DS sit aeqvalis, de caetero *(b)* similiter *L* 21 putem. *(1)* Cum AL est 1, et DS, y erit LG $\sqcap$ y^2, ex constructione, supra explicata, qva efficitur ut sit DS media proportionalis inter *(a)* 1 et y^2 *(b)* AL et LG. *(2)* Ex *L* 22 BRE *erg. L* 22 CθF *erg. L* 24 qvia *(1)* ⟨DS⟩ inter duas priores proportione media est, *(2)* LG inter *L*

hy^2 quoniam initio motus cum LG esset unitas $\sqcap$ AL, puncto G in (G) existente, et puncto M in (M) erat $L(M) \sqcap h$. Patet ergo angulum GLM, aequalem semper angulo $(G)L(M)$ esse talem, ut LM sit aequalis producto ex multiplicatione ipsius LG per f. Nam LM est ad $L(M)$ seu ad h ut LG ad $L(G)$ seu ad 1. Ergo $LM \sqcap \dfrac{LG \text{ multiplicata per } h}{\text{divisa per } 1}$. Et quia $LG \sqcap y^2$ ex dictis, erit $LM \sqcap hy^2$.

Eadem methodo et caetera demonstrantur, nam quia LM vel $G\aleph$ est hy^2, ideo $\aleph H$ erit hy^4, cum in quolibet Triangulo ipsi ALG simili, quale est $G\aleph H$, altitudo ut $G\aleph$ per y^2 multiplicata det basin ut $\aleph H$. quandoquidem $\aleph H$ est ad $G\aleph$, ut y^2 ad 1. seu ut LG ad AL. Adeoque $\aleph H \sqcap \dfrac{G\aleph y^2}{1}$ sive hy^4. Porro cum y^2 esset 1. seu $LG \sqcap AL$ tunc $\aleph H$ erat h. eodem autem tempore per praeparationem instrumenti paulo ante factam MN, sive $\aleph P$ erat f. Idem autem semper manet angulus $\aleph HP$, etiam in progressu operationis, ergo ut $\aleph P$ erat ad $\aleph H$ tunc cum y vel y^2, esset 1, seu ut h ad f, ita nunc quoque quocunque assignabili motus momento, qualiscunque sit y^2 vel LG; $\aleph P$ ad hy^4, sive $\aleph H$ erit; nempe $\dfrac{\aleph P}{hy^4} \sqcap \dfrac{f}{h}$. ergo $\aleph P \sqcap fy^4 \sqcap MN$. Iisdem prope verbis ostendetur NO, vel $\beth Q$ semper valere dy^6, et OB, by^8. In altero plano, patet DT esse ly, nam tunc cum DS vel y esset 1. DT erat l, ergo tunc erat DT ad DS, ut l ad 1. At eadem perpetuo manet ratio ob eundem semper angulum DST, ergo nunc quoque cum DT valet y. DS vel $S\daleth$ valebit ly. Hinc porro sequitur, $\daleth V$ valere ly^3 quoniam SF, parallela ipsi AB, unde Triangulum $S\daleth V$ simile Triangulo ALG, adeoque $\daleth V$ ad ly seu $S\daleth$, seu ut AL ad LG seu y^2 ad 1. Unde $T(Y)$ vel $\daleth X \sqcap gy^3$. Nam quando y est unitas $\daleth V$ sive ly^3, erit l, jam ex praeparatione, quando y est 1, $\daleth X$ aut $T(Y)$ est g. Est ergo tunc $\daleth X$ ad $\daleth V$ ut g ad l. Jam eadem semper manet ratio, quoniam idem durante motu angulus $\daleth VX$. et

1 initio motus *erg. L* 7 hy^4, *(1)* cum *(a)* angulus *(aa)* ALG, *(bb)* G$\aleph$H, ipsi ALG aeqvalis semper efficit, ut multiplicet per y^2, sive efficiat, ut G$\aleph$ in *(b)* Triangulum G$\aleph$H, ipsi ALG simile *(c)* angul *(d)* in Triangulo, *(2)* qvia *(3)* cum *L* 12 seu ... ad f, *erg. L* 14 $\sqcap$ MN. *(1)* simili methodo demonstratur *(2)* totidem *(3)* iisdem *L* 15 by^8. *(1)* et DT, *(a)* LY *(b)* ly, et TY, gy^3, et Yλ, ey^5, et $\lambda\mu$, cy^7, et et μC, y^9, qvoniam ex hypothesi tunc cum y esset unitas valebant d, b, l, g, e, c, 1, ex hypothesi factae praeparationis, *(aa)* Triangula autem *(bb)* anguli autem transversalium ad parallelas, durante motu iidem semper mansere. *(2)* In *L* 18 vel S$\daleth$ *erg. L* 18 f. SF. ... unde *erg. L* 19 S$\daleth$, *(1)* | ut *nicht gestr.* | y^2 ad 1 *(2)* seu *L* 20 Unde *(1)* demonstratur $\daleth$X vel *(2)* T(Y) vel *L* 20 unitas $\daleth$V *(1)* valebit l. ⟨et⟩ *(2)* (: id est ly^3 :) *(3)* sive *L* 21 f. ut l ad g. *L ändert Hrsg.*

proinde Triangulum $V\daleth X$ semper simile manet; quare semper $\daleth X$ ad ly^3 sive ad $\daleth V$ ut g ad l, sive $\frac{\daleth X}{ly^3} \sqcap \frac{g}{l}$, unde $\daleth X \sqcap gy^3 \sqcap TY$. Iisdem prope verbis ostendetur $Y\lambda$ sive הa valere ey^5, et $\lambda\mu$, cy^7, et μC, y^9. Ac proinde veritas aequationum omnium sub signo ☿ recensitarum ostensa est.

Quoniam vero eadem aequatio plures habere potest radices reales, hinc etiam toties durante machinae motu evenire debet, ut $A\omega$ et BC, fiant aequales, ac proinde una eademque operatione invenientur radices Aequationis omnes, quod in numerosa potestatum resolutione qualem Vieta invenit, non procedit; hoc loco autem in numeris non minus quam lineis praestatur. At, inquies, ignorari quousque motus continuari debeat, ad radices omnes inveniendas. Respondeo per doctrinam de Aequationum determinationibus sive limitibus facile praefiniri terminos, quos y inutiliter excedat: Sed et sine calculo, manifestum est, cum hoc loco omnes radices sint verae, maximam ex ipsis, esse termino cognito secundo, summae scilicet omnium, minorem. Quare inventis etiam aliquot ex ipsis, facile et summa residuarum, quam maxima ex ipsis excedere non possit, cognoscitur. Quantitatem autem qualibet aequationis propositae radice minorem haberi necesse est, non enim perinde decrescendo, ut crescendo in infinitum iri potest; facile enim ad finem motus regrediendo sive claudendo machinam pervenietur; ut proinde radicem si qua est inferior unitate, occurrere necesse sit. Porro inventae in lineis radices, facile in numeris habentur, quantumlibet exactis, si circino ad scalam quandam quantum satis est subdivisam transferantur. Unum desiderari dicet aliquis, ut scilicet radices in numeris veris habeantur, quando sunt rationales, quod praestat calculus Vietae. Sed quanquam ad usum, id necesse non sit, ausim tamen ab hac quoque machina promittere. Nam statim agnoscetur, si divisores ultimi termini, inventis radicibus proximi, aequationem multiplicatione producere potuerunt. Idem etiam re ad numeros non reducta (: constructio enim per instrumenti naturam pure Geometrica est :) ad radices aequationum literalium rationales, si quae sunt, facile agnoscendas sufficit. Breviter ab hoc Instrumento unico tantum momento praestatur in lineis quantum prolixis et variis praeparationibus

18–20 Porro ... transferantur *erg.* *L* 26 f. instrumento *(1)* exacte elaborato *(2)* unico tantum | momento *erg.* | praestatur *L* 27 qvantum *(1)* omnium curvarum in Geometriam a Cartesio introductarum *(2)* omnibus prolixis curvarum praeparationibus *(3)* prolixis *L*

8 invenit: Fr. VIÈTE, *De numerosa potestatum resolutione*, 1600 (*VO* S. 163–228).

curvarum omnium in Geometriam a Cartesio introductis; et in numeris quantum calculo praeclare sane sed mire anxio et impedito, a Francisco Vieta invento: ut nesciam an in eo genere aliquid ultra exactam Instrumenti elaborationem vel optari possit. F i n i s.

2 praeclare sane sed *erg. L*

27. DE TABULIS ANALYTICIS CONDENDIS
[24. Dezember 1674 – Anfang 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 444. 1 Bl. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 444 v°, Bl. 444 r°. Cc 2, Nr. 899

Datierungsgründe: [**noch**]

De Tabulis Analyticis condendis

Cum Calculo Analytico sive literali per instrumenta vix subveniri possit (: excepto unico meo, quod Machinam Combinatoriam appello :), danda opera est, ut Tabulae quaedam condantur, quibus habitis pleraque facile exequi liceat. Eae vero Tabulae longe alterius erunt naturae, quam Algebrista quispiam sibi persuasurus fuisset. Neque enim sufficit Aequationes unius incognitae ad aliquot usque dimensiones exhibere, earumque dare radices; item formularum recensere divisores. Sed ad aequationes etiam, imo potissimum, plurium incognitarum ascendendum est. Porro quod attinet formularum divisores rationales, non puto opus esse tabulis, nam ope artificii Huddeniani, nunc unam nunc aliam literam pro incognita sumendi, facile judicari potest, an formula quaedam sit divisibilis. Sed et in aequationibus tam literalibus quam numericis, divisores rationales si qui sunt, momento exhibet instrumentum meum Algebraicum, quoniam exhibitis reapse radicibus statim ostendit, quinam termini ultimi divisores ei proxime accedant. Idem instrumentum meum ad calculorum comprobationes more servit, ipsum enim errori nullo

8 f. qvaedam *(1)* oper *(2)* condantur *L* 10 qvispiam *(1)* communis – *(2)* sibi *L* 10 fuisset. *(1)* Neqve enim id *(a)* est *(b)* magni facio *(aa)* aeqvationes ordi *(bb)* aeqvationum formulas recensere, earumqve divisores recensere; *(2)* Neqve *L* 11 incognitae *(1)* exhi *(2)* ad *L* 12 divisores. *(1)* Nam qvod ad radices attinet, eae si sunt irrationales, *(a)* nunc qvide *(b)* separatae sunt tractationis, *(2)* sed *L* 13 est. *(1)* Primum *(2)* Porro *L* 14 esse *(1)* mul *(2)* tabulis *L* 15 an *(1)* ae *(2)* formula *L* 15 f. divisibilis. *(1)* In *(a)* numeris *(b)* numericis qvoqve aeqvationibus qvoniam radix in numeris *(2)* Sed *L* 17 qvoniam *(1)* statim e *(2)* exhibitis *L*

8 Machinam Combinatoriam: Vgl. N. 31. 14 ope artificii Huddeniani: Vgl. J. Hudde, *De reductione aequationum*, 1659, *DGS* I S. 406–506, insbesondere Regel 21, S. 496 f. 17 instrumentum meum Algebraicum: Vgl. N. Cc 2, Nr. 827, Cc 2, Nr. 815 und Cc 2, Nr. 816.

subjectum est, saltem non magno; etsi minus exacte Elaboratum poneretur. Sed quod attinet ad divisores irrationales, eorum velim tabulam condi, ut appareat, an formula quaedam proposita dividi possit per irrationalem, minoris dimensionis quam quae est ipsius formulae. Nam si ipsi formulae dimensione est aequalis: comprehendetur in Tabula generali radicum irrationalium omnium aequationum, quam inveniri posse non despero. Velim ergo primo dari A e q u a t i o n u m o m n i u m u n i u s i n c o g n i t a e g e n e r a l i s s i m e e x p r e s s a r u m r a d i c e s i r r a t i o n a l e s, dimensione aequales, ad 10$^{\text{mum}}$ v. g. gradum usque, aut 100$^{\text{mum}}$ si velis; credo enim habitis aliquot, in caeteris progressionem apparituram. Deinde velim exhiberi earum certo modo affectarum r a d i c e s i r r a t i o n a l e s d i m e n s i o n e i n f e r i o r e s si qui sunt. Inde velim exhiberi formularum quarundam nobiliorum d i v i s o r e s r a t i o n a l e s; a d i v i s o r i b u s progrediendum erit ad c o m p o n e n t e s; nempe eadem formula in multas alias resolvi potest infinitis fere modis, ex quibus quaedam etiam irrationales; ibi vero sufficiet f o r m u l a r u m n o b i l i o r u m exhiberi c o m p o n e n t e s. Cumque etiam Aequatio turbari possit; seu ex Aequatione converti in Analogiam; specimina elegantiorum exemplorum dari intererit sed haec de componentibus et analogiis pro parergis habenda. Primarium enim est, ut data aequatione, inveniamus incognitae valorem. Itaque p r i m u m a e q u a t i o n u m u n i u s i n c o g n i t a e, u t c u n q u e a f f e c t a r u m r e c e n s e n d a e r a d i c e s; s i v e i n c o g n i t a r u m v a l o r e s puri. Inde ascendendum ad aequationes duarum incognitarum, ubi primum aequationes duarum incognitarum, quae sunt ad eundem locum, recensendae; ut scilicet aliae oblatae ad eas reducantur; et hic erit catalogus C u r v a r u m A n a l y t i c a r u m i n p l a n o d e s c r i p t i b i l i u m. Loca autem intelligenda sunt, rectarum ad curvarum terminatarum, quae omnes vel parallelae inter se, vel in uno puncto concurrentes; et si parallelae vel angulos ad directricem facientes rectos, vel obliquos. Post

2 irrationales, *(1)* eos velim *(2)* eorum *L* 6 dari *(1)* A e q v a t i o n u m o m n i u m u n i u s i n c o g n i t a e R a d i c e s *(2)* Tabulam A e q v a t i o n u m o m n i u m u n i u s i n c o g n i t a e *(3)* A e q v a t i o n u m *L* 7 i r r a t i o n a l e s, *(1)* qvales ad 20$^{\text{mum}}$ *(2)* dimensione *L* 9 exhiberi *(1)* earum di *(2)* memorabiliores ex ipsis divisores *(3)* earum divisores irrationales *(4)* earum *L* 9 f. affectarum, *(1)* ration *(2)* r a d i c e s *L* 13 infinitis fere modis *erg. L* 15 f. Analogiam; *(1)* exemplo *(2)* specimina *L* 17 habenda. | Itaqve *gestr.* | primarium *L* 20 f. ubi *(1)* explicanda erunt prima loca *(2)* primum *L* 22 catalogus *(1)* plana *(2)* C u r v a r u m *L* 23 sunt, *(1)* para *(2)* ductarum ex a *(3)* rectarum *L*

curvarum catalogum, quales Huddenius proximo supra Conicas gradu ait esse circiter 50. Nimirum primo exhibebuntur aequationes secundi gradus duarum incognitarum; inde tertii gradus duarum incognitarum; inde quarti, etc. et ita catalogus omnium curvarum Geometricarum ad gradum usque decimum aut ultra. Adjici poterunt earum tangentium, centrorum, focorum, dimensionum aliarumque functionum calculi sive Tabulae, describendi quoque modi illustriores; et theoremata insignia. Recensitis aequationibus duarum incognitarum, et ad certa loca sive curvas reductis; veniendum est ad combinationem duarum aequationum duarum incognitarum. Et exhibitis aequationum catalogis, positis scilicet duabus aequationibus duarum incognitarum inter se combinatis, e regione ponendus est cujuslibet incognitae valor absolutus. Jam progrediendum ad aequationes trium incognitarum, seu ad loca ad superficiem, et exhibendus primum Catalogus omnium superficierum Analyticarum ad certum usque gradum, ut appareat determinatus earum numerus; adjiciendae earum tangentes, functiones; centra, foci, etc. et theoremata nobiliora ex calculi natura pendentia. Post catalogum locorum trium incognitarum veniendum ad combinationes duarum aequationum trium incognitarum ut appareat quomodo reduci possint, ad aequationes duarum incognitarum scilicet nunc hac nunc illa incognita elisa, unde quaelibet regulariter combinatio aequationum 2 incognitarum poterit revocari tribus modis diversis ad duas aequationes duarum incognitarum. V. g. si duae aequationes et tres incognitae, v. g. x. y. z. potest elidi z, et restabunt duae aequationes in quibus non nisi x. et y. Eodem modo elidi potest x, vel y. Ubi rursus considerandum est fieri posse, ut inter illas tres aequationes jam sint, in quibus non sunt omnes incognitae. Tandem veniendum est ad con3nationes aequationum trium incognitarum, et singularum dandus

1 f. catalogum, *(1)* exhi *(2)* qvales Huddenius | proximo *erg.* | supra ... 50. *(a)* ipsae aeqvationes erunt recensendae. explicandumqve. Forte *(b)* Nimirum *L* 5 dimensionum *erg. L* 5 functionum | et describendi modi *erg. L*, *streicht Hrsg.* | calculi *L* 5 f. describendi ... insignia *erg. L* 11 superficiem, *(1)* qvarum exhibendus *(2)* et *L* 15 appareat *(1)* qvot *(2)* | qvod modis *ändert Hrsg.* | reduci *L* 17 regulariter *(1)* aeqvatio trium c *(2)* combinatio *L* 18 ad *(1)* aeqvatio *(2)* duas *L* 18 incognitarum. *(1)* Inde veniendum *(2)* V. g. *L* 20 y. *(1)* vel aliter *(2)* Eodem *L* 20 vel | y. *ändert Hrsg.* | *(1)* potest etiam fi *(2)* Ubi *L* 22 ad *(1)* conternationes *(2)* con3nationes *L*

1 Huddenius ... ait: Eine Methode Huddes zur sukzessiven Generierung von Kurven höherer Ordnung stellt Schooten im Abschnitt *De lineis curvis superiorum generum* in Fr. v. SCHOOTEN, *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, 1657, S. 475–480 vor. 21 tres aequationes: Bislang hat Leibniz in diesem Stück nur Kombinationen aus zwei Gleichungen betrachtet.

valor purus. Eodem modo ad altiores praecedendum v. g. ad decimum usque gradum, et in singulis procedendum ordine, v. g. aequatio 6 dimensionum primum 6 terminorum, deinde 5 terminorum etc. et si 5 terminorum decent vel secundus, vel tertius, vel quartus etc. Quando autem loquor de aequationum formulis loquor de plane absolutis seu generalibus, v. g. $y^3 + ly^2 + amy + a^2n \sqcap 0$. ut omnibus accommodari possint. Itaque ego meam aequationem eodem tractans modo novas habebo aequationes collatitias, nam v. g. si sint aequationes duae (: vide schediasmata Xb. 1674. *De trochoeidibus* :)

$$\begin{array}{llllllll} x^3 + 2ax^2 & + 4afx & + 2af^2 \sqcap 0. & \text{et} & x^2 & - 2f & x + f^2 \sqcap 0 \\ & + 2f & + \; f^2 & & & - 2\dfrac{y^2}{a} .. & - y^2 \\ & & - 4z^2 & & & & \end{array}$$

quaero in Tabula harum duarum aequationumcombinationes:

$$x^3 + lx^2 + amx + a^2h \sqcap 0 \quad \text{et} \quad x^2 + nx + ap[\sqcap 0]$$

Elidendo x, invenietur in Tabula aequatio haec:

---

12 *Dazu am Rand:* NB. pro $2af^2$, pone a^2h.

1 praecedendum *(1)* Hoc *(2)* v. g. *L* 2 v. g. *(1)* primum aeqv *(2)* aeqvatio 6 *(a)* incognita *(b)* dimensionum *L* 5 ut | postea *gestr.* | omnibus *L* 8–11 $\sqcap$ 0 *(1)* suppono pro priore *(2)* qvaero *L* 11 Tabula *(1)* has *(2)* harum *L* 12 amx+ *(1)* $2\mathrm{af}^2$ *(2)* $\mathrm{a}^2\mathrm{h}$ *L* 13 elidendo *(1)* fiet *(2)* x, *(a)* fiet aeqvatio hoc *(b)* invenietur *L* 13–182,1 haec *(1)* $\dfrac{-\mathrm{a}^2\mathrm{mp} + \mathrm{a}^2\mathrm{p}^2 + \mathrm{lnap} + \mathrm{n}^2\mathrm{ap}}{2\mathrm{af}^2 - \mathrm{lap} + \mathrm{nam} - \mathrm{ln}^2 + \mathrm{n}^3} \sqcap \dfrac{-2\mathrm{af}^2 + \mathrm{lap} - \mathrm{nap}}{\mathrm{am} - \mathrm{ap} - \mathrm{ln} + \mathrm{n}^2}$ *(2)* $\dfrac{-\mathrm{a}^2\mathrm{mp} + \mathrm{a}^2\mathrm{p}^2 + \mathrm{lnap} + \mathrm{n}^2\mathrm{ap}}{\mathrm{ha}^2 - \mathrm{lap} + \mathrm{nam} - \mathrm{ln}^2 + \mathrm{n}^3} \sqcap \dfrac{-\mathrm{ha}^2 + \mathrm{lap} - \mathrm{nap}}{\mathrm{am} - \mathrm{ap} - \mathrm{ln} + \mathrm{n}^2}$ *L*

---

7 *De trochoeidibus*: VII, 5 N. 18. 11–182,3 quaero . . . $\dfrac{f^2 - y^2}{a}$: Ein eigenständiges Werk von Leibniz mit solchen Kombinationen zweier Gleichungen konnte nicht gefunden werden. Den Lösungsansatz des allgemeinen Problems, bestehend aus den Gleichungen und der Beziehung, die sich aus der durch Vorzeichenfehler beeinträchtigten Elimination von x ergibt, übernahm Leibniz aus VII, 5 N. 18 S. 166 Z. 18 bis S. 167 Z. 7. Dabei wurde nachträglich, wie in der Randnotiz in Z. 14 vermerkt, $2af^2$ durch a^2h ersetzt. Richtig müsste die linke Seite der Gleichung von S. 182 Z. 1 lauten: $\dfrac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap - n^2ap}{-ha^2 + lap - 2nap + nam - ln^2 + n^3}$. — Hier und in den folgenden Gleichungen (Z. 12 – S. 182 Z. 3) bezeichnet a sowohl einen der Koeffizienten des zu lösenden Problems aus Z. 8–10 als auch denjenigen des generellen Problems in Z. 12 und seines Lösungsansatzes.

$$\frac{-a^2mp+a^2p^2+lnap+n^2ap}{ha^2-lap+nam-ln^2+n^3} \sqcap \frac{-ha^2+lap-nap}{am-ap-ln+n^2}$$

Quae aequatio jungatur novis assumtis aequationibus:

$$l \sqcap 2a+2f. \mid am \sqcap 4af+f^2-4z^2. \mid a^2h \sqcap 2af^2. \mid n \sqcap -2f-\frac{2y^2}{a}. \mid p \sqcap \frac{f^2-y^2}{a}.$$

Habemus ergo aequationes 6. incognitas 7. ex quibus elisis caeteris retinendae, seu pro cognitis sumendae y. et z. Atque ita rursus in tabula sub 6 aequationum conjunctione, invenies statim sine calculo valorem. Ubi maximus apparet usus dispersionis in minuta seu multas aequationes particulares, ut sine calculo inveniatur valor. Video jam, non videri necessarium, ut separatim exhibeantur conternationes et combinationes 4 aequationum; semper enim eas quas elidere non vis cognitas finges, et res semper reducetur ad casum problematis determinati. Sufficit ergo tantum in Tabulis exhiberi omnium incognitarum valores datis totidem aequationibus.

2 aeqvatio *(1)* conferatur novis *(a)*: *(b)* assu *(2)* jungatur *L* 3 f^2 | + *ändert Hrsg.* | 4z^2 *L* 5 z. *(1)* Et huc jam illud video non esse. *(2)* Atqve *L* 8 exhibeantur *(1)* redu *(2)* conternationes *L* 8 f. aeqvationum; *(1)* qvoniam *(2)* semper *L*

4–7 Habemus ... valor: In den Überlegungen zur Lösung des benannten Gleichungsproblems in Z. 1–3 wirkt sich die doppelte Verwendung des Koeffizienten a aus. Zudem ordnet Leibniz hier die Koeffizienten des ursprünglichen Problems von S. 181 Z. 8–11 den Unbekannten zu.

28. DE SOLIDIS ANALYTICIS
[Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 17 Bl. 11+17. 1 Bog. 2°. $\frac{1}{3}$ S. auf Bl. 17 v°. — Auf dem restlichen Bogen N. 24_1.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: N. 28 ist vor dem auf Dezember 1674 datierten N. 24_1 auf den Bogen geschrieben worden, vermutlich in Zusammenhang mit den Exzerpten aus J. Wallis, *Mechanica*, 1670–1671 (VIII, 2 N. 8).

Solida Analytica possunt homogenea esse figuris quadratricibus non analyticis. Imo id quotidie evenit, quia solidorum elementa sunt spatia quorum spatiorum saepissime non habetur quadratura.

Cylindri Hyperbolici residuum ungula semiquadrantali absecta est homogeneum figurae logarithmorum. Idem de aliis solidis facile fingi potest. Hinc etiam quoties problema quoddam Mechanicum eo redactum est, ut quaeratur descriptio cujusdam figurae quadratricis, exhibeatur solidum quoddam Geometricum, id figurae quaesitae homogeneum erit. Et dici poterit vires esse ut solidorum ejusmodi portiones.

9 analyticis. | Exemplum in Hyperbola dari potest. *gestr.* | Imo *L* 12 f. homogeneum *(1)* figurae qvae sit f *(2)* figurae *L*

12 ungula semiquadrantali: Leibniz kennt den Ausdruck aus J. Wallis, *Mechanica*, 1670–1671, pars 2, S. 547 f. (*WO* I S. 918 f.); vgl. VII, 6 N. 34 S. 385.

29. NOTA AD SOVERUM
[Oktober 1676 – März 1679 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XI 18 A S. 439–440. 1 paginierter Zettel 17,5 × 2,5 cm. 1 S. auf S. 439, S. 440 leer.

Datierungsgründe: Leibniz notierte sich in der zweiten Oktoberhälfte 1676 Informationen über das Buch von Soverus aus dem Gregory-Collins-Briefwechsel (III, 1 N. 88_2 S. 487). Möglicherweise hat Leibniz bereits damals ein Exemplar in der Royal Society konsultiert, spätestens dürfte er die Notizen anhand des aus dem Nachlass von Martin Fogel für die herzogliche Bibliothek in Hannover erworbenen Exemplars (Nm-A 754) gemacht haben, in das er auf den S. 373 u. 377 Randbemerkungen eingetragen hat. Am 10./(20.) März 1679 hat Leibniz ausgehend vom Beweis der Prop. 4 in Buch 6 (S. 378 f.) seine Untersuchung *Tentamen ad dimensionem arcus alicujus circularis* (LH 35 VII 1 Bl. 34–48) begonnen.

B a r t h o l o m a e u s S o v e r u s in p r o p o r t i o n e c u r v i a d r e c t u m p r o m o t a defendit motum esse Geometricae tractationis. Quaedam demonstrat theoremata, ut ostenderet quibus Datis habituri essemus Quadraturam Circuli. Jam observavit illam in Hyperbola numerorum decretionem. Editus est ejus liber 1630. apud Variscum Varisci. Patavii 4°.

13 defendit: B. Soverus, *Curvi ac recti proportio promota*, 1630, S. 271–276, 361. 13 demonstrat: *a. a. O.*, S. 371–373 [Marg.]. 14 f. observavit: *a. a. O.*, S. 359 f.

30. MEA GEOMETRIA
[Juli – September 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 14 Bl. 21. **[Größe: noch]**. 3 Zeilen auf Bl. 21 v°. Vorderseite leer. — Gedr.: Cc 2, Nr. 991.
Cc 2, Nr. 991.

Datierungsgründe: Ausschlaggebend bei der Datierung erweisen sich Leibniz' Vergleiche seiner eigenen Leistungen mit denjenigen Descartes. Anfangs verweist Leibniz lediglich auf Bewertungen der Arbeiten von Descartes durch Fachkollegen (VII, 1 N. 6_3, 110, 114 (= VII, 4 N. 16_4); VII, 4 N. 36; VII, 7 N. 10, 11, 15) oder geht Hinweisen auf Unzulänglichkeiten des Werks nach (z. B. VII, 7 N. 48), ohne seine eigenen Beiträge zur Geometrie im Vergleich dazu einzuordnen. Mit den fortschreitenden Arbeiten zur Kreisquadratur erarbeitet Leibniz sodann ein Narrativ, in dem er seine Abweichungen gegenüber Descartes und seine Neuerungen in der Konzeption der Geometrie und der Systematisierung von Kurven durch ein Anknüpfen an andere Traditionslinien motiviert (so z. B. III, 1 N. 38, 39; VII, 3 N. 38_{12}; VII, 4 N. 36; VII, 5 N. 26; VII, 7 N. 49; VII, 8 N. 6). Gleichzeitig vermeidet er, direkte Kritik an Descartes zu äußern, seine eigenen Leistungen explizit zu benennen oder sie gar als überlegen zu bezeichnen. Für den Sommer 1676 ist schließlich eine intensive Beschäftigung mit der inversen Tangentenmethode belegt (III, 1 N. 89; VII, 5 N. 88–91). Leibniz ist überzeugt, im Vergleich zu Descartes eine in jeder Hinsicht vorzuziehende Methode entwickelt zu haben, die insbesondere die nach allgemeiner Auffassung bestehenden *difficilia* und *impossibilia* des descartesschen Ansatzes zu lösen im Stande sein soll (VII, 5 N. 90, 91; VII, 6 N. 51). Kontrastierend zur noch kurz zuvor stets sachlich formulierten inhaltlichen Kritik (z. B. VII, 6 N. 20) weist er bei der Lösung der 2. Debeauneschen Aufgabe zudem wiederholt darauf hin, dass er Descartes in der Geschwindigkeit der Lösung nun um ein Vielfaches übertreffen könne (VII, 5 N. 90, 91; VII, 6 N. 49_1, 51). In der Kritik an Descartes nimmt er außerdem Gedanken aus einem wohl Ende Mai 1676 von Collins an Tschirnhaus gerichteten Brief (III, 1 N. 82) auf, die schließlich den letzten Baustein eines neuen Narrativs ausmachen. Bereits im August 1676 wird dieses durch einen Brief an Oldenburg (III, 1 N. 89) einem größeren Personenkreis sichtbar. Wenn auch deutlich weniger konkret in seiner Kritik und um vieles zurückhaltender im Tonfall, weist das vorliegende Stück eine große Übereinstimmung mit dem Grundtenor dieses neuen Narrativs auf. Zudem besteht im letzten Satz des Stücks eine Ähnlichkeit in der Formulierung mit VII, 5 N. 91 S. 605 Z. 4–6 von Juli 1676. Somit kann das vorliegende Stück mit aller Vorsicht in die Zeit von Juli 1676 bis zu Leibniz' Abreise nach England datiert werden.

Mea Geometria

Jam eo mihi videor pervenisse ut non habeam cur sim amplius de Geometria valde solicitus. Possum nunc non minus audacter loqui quam Cartesius et fortasse majori jure. Praesertim cum absolverim quae video ei difficilia visa, et partim impossibilia.

34 absolverim | multa *gestr.* | qvae *L*   34 ei *(1)* difficilis imposs *(2)* difficilia *L*

31. DE MACHINA COMBINATORIA, SIVE ANALYTICA
[September 1674 – Anfang 1675 (?)]

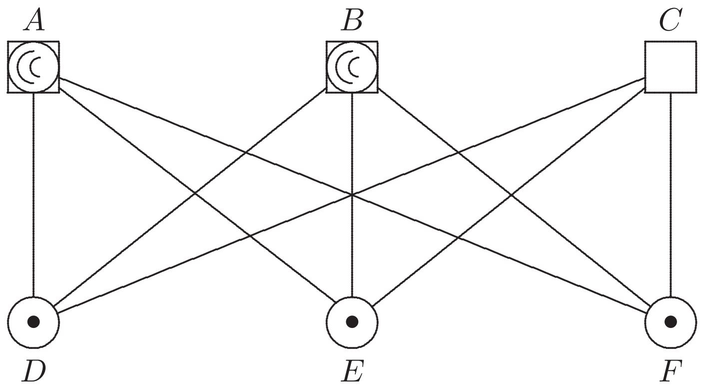
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 26 Bl. 13. 1 Bl. 4°. 1 1/2 S. Auf Bl. 13 v° am rechten Rand unten quer geschriebene Notiz in unbekannter Hand: ad. 50. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 572 (tlw. = Z. 25–27).
Cc 2, Nr. 818.

Datierungsgründe: Leibniz nutzt die Bezeichnung *Machina Analytica* erstmals in VII, 1 N. 8. Obwohl die Bezeichnung im später entstandenen Stück VI, 3 N. 44 im Desiderat einer *Machina, quae pro nobis faciat operationes analyticas,* erneut anklingt, findet sich diese oder eine andere Bezeichnung der dort beschriebenen *machina* im gesamten Stück nicht. Durch die Charakterisierung der Funktionen wird deutlich, dass VI, 3 N. 44 dieselbe *machina* wie das vorliegende Stück zum Gegenstand hat. Aufgrund der fehlenden Bezeichnung und der zugleich auftretenden Unterschiede zur in VII, 1 N. 8 benannten *Machina Analytica* kann VI, 3 N. 44 als Auftakt zur Arbeit an der im vorliegenden Stück als *Machina Analytica sive Combinatoria* titulierten *machina* gewertet werden. Die Entstehung von VI, 3 N. 44 stellt somit einen *terminus post quem* für N. 31 dar. Versteht man die Verwendung von *Machina Combinatoria* als alleinige Bezeichnung in N. 27 als Aufgabe der in VII, 1 N. 8 für eine in ihren Grundprinzipien abweichende *machina* verwendeten Bezeichnung *Machina Analytica,* um eine bessere Unterscheidbarkeit beider Ideen zu erzielen, so ist die Entstehung von N. 27 nach derjenigen von N. 31 anzusetzen. Eine solche Datierung zwischen VI, 3 N. 44 und N. 27 ist insofern stimmig, als dass Leibniz im vorliegenden Stück *signa ambigua* erwähnt, mit denen er sich im relevanten Zeitraum intensiv beschäftigt. Auch die Ausführung der Darstellungen der Kugeln im Diagramm stimmt mit der Art und Weise in anderen Handschriften derselben Zeit überein. Ebenso werden in diese Zeit Stücke datiert, in denen er sich intensiv und systematisch mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt und die Lösung von Systemen mehrerer Gleichungen behandelt.

Saepe cogito de Machina Combinatoria, sive Analytica, qua et calculus literalis perficiatur. Ut si sint aliquot aequationes, et totidem incognitae, id agitur ut omnes ordine incognitas tollamus usque ad unam. Omnis calculus iste redit ad additionem subtractionem Multiplicationem et divisionem.

26 ut *(1)* inveniamus valorem abs *(2)* omnes *L*

25 f. perficiatur: Einzelheiten eines instrumentellen Ansatzes zur Lösung desselben technischen Problems führt Leibniz in VII, 1 N. 142 aus.



[*Fig. 1*]

Sint plurima frusta, A. B. C tot scilicet quot ad summam membra habere potest calculus qui faciendus est. Haec frusta poterunt quidem facile ad numerum millenarium ascendere; pro calculis complurium incognitarum, sed et ille sufficiet credo. Sint totidem globi, D. E. F. quot literae sive cognitae sive incognitae. Ex quolibet globo exeat filum ad quodlibet frustum, quo filo regetur forma aenea vel stannea gerens literae characterem. Cum globum tanges in omnibus frustis litera ejus apparebit, si modo omnibus frustis laxata sunt frena. Nam in quibus laxata non sunt non apparebit. Quod Elaterioli ope fieri potest, quod cedet, tunc cum totum resistet. Aliisque multis modis pro multitudine scilicet frustorum, simplicioribus: aperies autem tot frusta quot membra calculus habere debet. Imo statim ab initio utile erit plura aperire frusta pro uno eodemque calculo; ita ut idem membrum appareat saepius, ut si debeat multiplicari $\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}$ in $\begin{matrix}d\\e\\f\end{matrix}$ in $\begin{matrix}g\\h\\r\end{matrix}$, novem aperiantur frusta pro ipso a novem alia pro ipso b, et totidem pro c. Erunt ergo aperta 27 frusta nam et sub finem calculi tot erunt termini. Inde ex his frustis ipsius a, tria, item ex frustis ipsius b tria, et ex frustis ipsius c. itidem tria tantum aperiantur, quando trahimus globum d, et quando globum e, et quando globum f. Denique horum 27. frustorum triens aperietur cum tanges per g, et alius triens cum tanges h, et alius cum tanges r.

2 A. B. C *erg.* *L* 3 est, *(1)* sint f *(2)* Haec *L* 4 calculis *(1)* decem incognitarum *(2)* complurium *L* 6 regetur *(1)* character *(a)* ge *(b)* pergerens *(2)* forma *L* 6 gerens *(1)* nomin *(2)* nomen charact *(3)* literae *L* 10 membra *(1)* |ad *nicht gestr.*| rem *(2)* calculus *L* 12 in *(1)* $\begin{matrix}\mathrm{g}\\\mathrm{h}\\\mathrm{l}\end{matrix}$ *(2)* $\begin{matrix}\mathrm{g}\\\mathrm{h}\\\mathrm{r}\end{matrix}$, *(a)* novem *(b)* sex *(c)* novem *L* 14 a, *(1)* pari *(2)* tria, *L* 17 cum |tangens *ändert Hrsg.*| h, *L*

Sed quoniam calculus ostendere potest longe post debere adhuc id ipsum multiplicari per aliam quantitatem ut $\begin{matrix}m\\n\\p\end{matrix}$ tunc quilibet ex terminis prioribus, ut *aer* rursus debet triplicari, vel si mavis m, 27^cuplari^, et n itidem, et p itidem: et tunc non globos, sed frusta illa 27. in quibus *adg*, *adh*, etc. trahes, horum fila ad globos respondentia, mediantibus globis rursus trahent quidem ubique, sed non nisi apertis in locis apparebunt, ut primum in omnibus 27. ipsius m, post in omnibus 27 ipsius n, et denique ipsius p. In hoc ergo consistet artificium potissimum, ut non tantum trahantur frusta sed et trahant. Ita enim totus calculus factus momento propagari potest. Aperire frusta poterimus v. g. deprimendo nonnihil, ita, ut ipsa tractura facta rursus in statum ordinarium se restituant. Signa peculiari filo in singulis frustis repraesentari possunt, +. opus habet nullo, sed pro filo − hoc fieri potest, ut bis tractu se mutet in + seu abeat, tertia tractura se restituat. Idem poterit esse de quibuslibet aliis signis ambiguis litera repraesentatis. Cum idem globus saepius tactus idem quoque frustum saepius trahit cum effectu fit ut in eo frusto eadem litera ad plures ascendat dimensiones. Sed cum rursus ipso frusto aliud frustum trahimus, difficile mihi videtur efficere, ut idem numerus dimensionum in frusto quoque tracto sit. Et vix aliud concipi poterit medium quam hoc; ut eo ipso dum repetitis initio tractionibus crevit in frusto nunc trahente literae trahendae columna. An forte rectius fila plura ab eodem globo ad idem frustum ibunt parallela inter se, sed uno tractu non nisi unum habebit effectum (nulla nova apertura, sed ex natura rei) et ita unum post alterum, etsi literae non multiplicetur character forte, sed in eodem charactere numerus circumgyratione quadam. Quando autem trahitur frustum non per globum sed per aliud frustum, omnia fila quae in frusto trahente jam velut c a p t a sunt simul agent, etsi globum tantum trahant, et per globum aliud frustum, plus tamen ut faciant fieri potest, quam si traheret ipse globus, quia forte facere possumus, ut prolixius seu longius vel brevius attrahatur; quam si globum manu tetigissemus. Et ita cesset artificium

1 qvoniam *(1)* ex *(2)* calculus *L* 1 longe post *erg. L* 2 qvantitatem *(1)* Ubi utile *(2)* ut *(a)* $\begin{matrix}\mathrm{m}\\ \mathrm{n}\\ \mathrm{p}\end{matrix}$ 3 *(b)* n *L* 2 ut |ael *ändert Hrsg.*| rursus *L* 4 horum *(1)* gl *(2)* fila *L* 4 respondentia, *(1)* per *(2)* mediantibus *L* 5 ut *(1)* in *(2)* primum *L* 9 ipsa *erg. L* 9 in *(1)* totum *(2)* statum *L* 10 habet *(1)* 0 *(2)* nullo *L* 13 cum effectu *erg. L* 15 dimensionum *erg. L* 17 columna |, seu filum eius ita factum brevius *gestr.*|. An *L* 18 rectius |ut *nicht gestr.*| |filo cuilibet additum sit aliud filum *gestr.*| fila *L* 21 qvadam. *(1)* Ut an *(2)* Sed *(3)* Qvando *L* 23 trahant, *(1)* sed p *(2)* tamen plus *(3)* et *L* 24 si *(1)* traherent ipsum frustum *(2)* traheret *L*

singularitatis filorum. Sed nondum satisfacit, subvenit tandem aliud artificium, nimirum globus trahit v. g. ter, literam cujusdam frusti. Ergo quaedam notae ut respondeant in frusto fieri potest. Ergo cum postea hoc frustum elevabitur filum illud transiens has notas ter vellicabitur, et ita exprimet tres dimensiones: et ita de caeteris, et hoc credo fere unicum esse remedium.

Porro eadem methodo etiam dividere poterimus; vel contrario motu, vel potius quia fila non possunt esse rigida atque adeo non servit regressus trahendo altius, seu longius. Sed tunc aperiemus non nisi ubi multiplicationis limitem tractio praeteriit, ne scilicet simul multiplicet et dividat.

Porro quoniam utile est non tantum conclusionem sed et vestigia calculi extare in charta, ideo impressoria arte, ex his characteribus semper exprimemus quae sunt ibi. Cum fiat, ut ex diversis multiplicationibus, idem membrum saepius confletur, hinc facilitate opus ad ista in unum jungendum aut destruendum. Ideo jam opus esset quoad frusta, ut in plano in quo sunt moveri sibique adjungi aut dejungi possint. Sed hoc caeterorum difficillimum, ob chordas sese implicantes.

Nota plura frusta non possunt simul elevari, alioqui idem globus simul tangeretur a pluribus quod confunderet. Nota etiam rectius deprimi quam elevari frusta.

Non ausim sperari hanc transpositionem in instrumento fieri posse.

1 satisfacit, *(1)* nimirum non *(2)* subvenit *L* 1 f. nimirum *(1)* filum *(2)* globus *L* 2 ut *erg. L* 5 fere *erg. L* 6 eadem *(1)* opera *(2)* methodo *L* 9 f. dividat. *(1)* Sed qvoniam labor describen *(2)* Porro *L* 12 multiplicationibus, *(1)* iidem *(2)* idem *L* 13 esset *erg. L* 13 f. frusta, *(1)* ut etsi summitas eorum sit in eodem plano, alia tamen aliis profundius per descendant *(2)* ut *L* 16 possunt | simuli *ändert Hrsg.* | elevari *L*

11 impressoria arte: vgl. die Überlegungen zur technischen Umsetzung einer Verbindung von Setzen und Drucken in VII, 1 N. 56.

32. GENERALIS DIATYPOSIS
Ende 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 249. 1 Bl. 4°. 2 S. Der Träger des Stückes hing ursprünglich mit jenem von N. 39 zusammen.
Cc 2, Nr. 00

Sub finem anni 1676

Generalis Diatyposis Methodorum mearum circa Mathesin puram

Methodi quas habeo sunt vel calculi, vel constructionis. Calculi initium est, ut nomina omnibus formis imponamus; ut absolvamus Tabulam formarum, et quomodo formae ex se invicem ducantur. Tabulae multiplicationum et divisionum; tum si literae aequiformes $a.\,b.\,c.$ tum si sint affecti progressionis Geometricae unius vel plurium $a+bx+cxx$, vel $a+bx+cy+dxy$, etc. Quin et Tabulae Differentiarum et Summarum ex quibus appareat quomodo plura in unum addita aliquando dent formulas satis simplices. Tabulae potestatum et regressus ex ipsis seu methodus extrahendi radices rationales, ex formulis. Summae et differentiae potestatum. Methodi directae sunt multiplicare, exaltare, differentias invenire. Methodi recip⟨rocae⟩ seu regressuum, sunt dividere, extrahere, summas invenire. Hae non semper absolvi possunt, nisi Signis praefixis. Huc pertinet quantitates in speciem impossibiles reducere ad possibiles, quando id fieri potest, vel saltem notare quod ad eas reducantur virtualiter.

De Rationibus et proportionibus, item de ratione replicata et communi mensura.

7 Methodorum *(1)* meorum *(2)* mearum *L* 7 f. puram *(1)* Sunt | Methodi, *erg.* | vel Calculi vel Constructiones. Et co *(2)* Methodi ... sunt vel *(a)* communes Numeris et lineis, vel propriae *(aa)* lineis *(bb)* Numeris, vel propri *(b)* calculi, vel constructionis. *(aa)* Calculus *(bb)* Calculi *L* 9 imponamus; *(1)* qvod ostendi *(2)* ut ... formarum; *(a)* Calculus directus *(b)* et qvomodo *L* 10 f. multiplicationum *(1)* et *(a)* formae *(b)* potestatum formulae; *(2)* et divisionum; ... aeqviformes *(a)*, tum si sint affecti ejus *(b)* a. b. c. *L* 12 Tabulae *(1)* Summarum, seu qvae *(2)* Differentiarum *L* 13 simplices. *(1)* ⟨Calculus regressus⟩ *(2)* qvorsum et Differentialia *(3)* Tabulae *L* 15 exaltare *(1)* reciproce, dividere *(2)*, differentias *L* 16 seu regressuum *erg.* *L*

De aequationibus et aequationum radicibus, seu radicibus affectis, et quando exacte extrahi possunt. De Resolvendo et ejus resolutione. De aliis resolvendi modis per extractiones utrinque. De extractionibus vel exactis vel per seriem infinitam, qualis et in potestatibus puris succedit. De aequationibus aequationem propositam dividentibus, de radicibus aequalibus. De uniformiter crescentibus aliisque. De aequationibus plurium incognitarum. Et primum fingendo eandem literam velut diversam, ita ut omnia reducantur ad aequationes rectangulares simplices quae si incompletae videndum quomodo suppleri possint. Hac methodo videtur compendiose obtineri posse resolutio aequationum, seu reductio radicum affectarum ad puras. Ordinaria vero methodus tollendi incognitas in eo consistit, ut semper exaltetur aequatio multiplicando eam per literam tollendam. Et omnes exaltatas componendo inter se, ut tollantur ordine potentiae altiores omnes. Methodus investigandi generalia pro seriebus indefinitis. Quod fit gradatim ascendendo ut obtineatur progressio. Hoc jam ante opus ad resolutiones aequationum unius incognitae. Methodus tollendi incognitam unam ex aequationibus duabus duarum incognitarum, coincidit cum extractione radicis per seriem infinitam tum scilicet tantum valor purus invenitur. Promovendus gradus ad tollendas incognitas plurium aequationum. Et inveniendos valores puros. Habita Tabula Tollendarum incognitarum, prope omnis calculus Algebraicus in potestate est, terminos Tabulae tantum explicando in nostris exemplis. Hinc jam veniendum ad methodum tollendi irrationales; et quomodo aequationis radix irrationalis exprimi possit per formulam. Jam veniendum ad problemata diophantea pro integris et pro numeris rationalibus. Et duplex solvendi methodus, una qua usu sum pro

1 aeqvationibus et *(1)* aeqvalis *(2)* aeqvationum divisoribus, et qvando *(3)* radicibus, *L* 3 f. de extractionibus. . . succedit *erg. L* 5 aliisqve. *(1)* De Methodo tollendi *(2)* de aeqvationibus *L* 10 tollendam *erg. L* 11 omnes. | Hac methodo etiam extrahitur radix pro seriebus infini *erg. u. wieder gestr.* | Methodus *L* 15 f. tum . . . invenitur *erg. L* 16 tollendas *(1)* aeqvatio *(2)* incognitarum *(3)* incognitas *L* 18 est, *(1)* ⟨Tabulas⟩ *(2)* terminos Tabulae tantum *(a)* exprimendo *(b)* explicando *L* 19 f. qvomodo *(1)* aeqvatio qvae radices rationales non habet *(2)* aequationis *L* 20 formulam. *(1)* Item *(a)* ⟨qvo⟩ *(b)* de modo ⟨aeqv⟩ *(2)* Jam *L* 21 rationalibus *erg. L*

20 problemata diophantea: Leibniz scheint sich vor allem im Zeitraum von August bis Oktober 1674 intensiver mit diophantischen Gleichungen beschäftigt zu haben (vgl. VII 1, S. 468). Sie sind der Gegenstand einer Reihe an Stücken, die in VII, 1 gedruckt sind. So untersucht er dort in N. 116–124 Methoden, um diophantische Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen und in rationalen Zahlen zu lösen. In N. 116 behandelt er dabei auf S. 715 insbesondere auch ihre Beziehung zu Kegelschnitten.

reducenda novissime Curva Conica ad Quadraturam rationalem; altera, reducendi rem ad integros, et integros, exhibendo, donec ex progressione aliorum semper minorum integrorum necessaria, appareat in integris solvi non posse. De divisibilibus, de Numeris primitivis, ubi methodus mea ex progressione Geometrica inveniendi an datus numerus sit primitivus, aut quos habeat divisores. De summis numerorum, ubi de Numeris Combinatoriis. Item de Methodo pro summis ex summis radicum aequationibus, et rectangulorum, nam et summae rectangulorum ex potestatum summis; et ex summis rectangulorum, caeterarum formularum eodem modo compositarum omnium. De summis quantitatum ex progressione Geometrica derivatarum, id est ⟨cum⟩ Abscissae progressionis Geometricae, quaeritur summa ordinatarum. Item pro progressione Arithmetica, ubi est utile, procedere per $x-1$, x, $x+1$. De calculo differentiali serierum; seu ex data differentiarum proprietate invenire seriem. Quo pertinet inventio summarum. Ostensio quod quaedam talia Algebraice impossibilia exhiberi. De serierum Terminationibus et duarum serierum Concursu. De seriebus replicatis. Cum seriei progressio determinatur per Terminos praecedentes. De quantitatibus in quibus exponens indeterminata ingreditur exponentem, de tollenda incognita ex exponente per seriem infinitam. De modo reducendi series infinitas ad finitas, quando id licet. Sive de modo agnoscendi quando series infinita sit reducibilis ad aequationem finitam, vel algebraicam vel transcendentem. Item quia omnia problemata in non transcendentibus terminis concepta, revera tamen transcendentia reduci possunt ad summam seriei infinitae absolutae, vel terminationem Concursumve cum alia seriei replicatae; potest semper fingi aequatio homoptotos ad aliquam Parametrum, vel etiam aequatio cujus differentialis sit data. Restat duplex Methodus pro exhibendis optime quantitatibus determinatis, v. g. ratione Circuli ad qua-

2 ad integros, et *(1)* solvendo in integris *(2)* integros *L* 7 nam *(1)* ex summis, rectangulorum et *(2)* et summae *L* 9 f. id est ⟨cum⟩ *(1)* Numeri *(2)* Term *(3)* Abscissae progressionis *(a)* Arithmeticae *(b)* Geometricae *L* 11 ubi *(1)* opus est consc *(2)* est utile *L* 13 talia *erg.* *L* 13 exhiberi. *(1)* De Qvantitatibus Transcendentibus *(2)* | de *nicht gestr.* | qvantitatibus *(3)* de serierum *L* 14 Concursu | , seu *gestr.* | de seriebus *L* 14 Cum *(1)* series dantur supponendo *(2)* seriei *L* 15 indeterminata *(1)* oritur *(2)* ingreditur *L* 18 aeqvationem *(1)* incog *(2)* finitam *L* 21 aeqvatio *(1)* ⟨homoeoptotis⟩ *(2)* ⟨homoeoptotis⟩, seu *(3)* homoioptotos *(4)* homoptotos *L* 22 Restat *(1)* una *(2)* duplex *L*

1 reducenda: Vgl. VII, 6 N. 31 S. 368 u. N. 51 S. 618–621 (Quadratura prop. 43 sowie Scholium). 3 De divisibilibus: Vgl. VII, 1 N. 86–92. 21 homoptotos: Es handelt sich um eine spezielle Kurve; vgl. VII, 1 N. 6_1 S. 61 Z. 18–21.

dratum circumscriptum, quae determinat etiam, utrum sit possibile exhibere per finitam Algebraicam, et una quidem est per quotientes replicatos, ubi semel habebitur methodus, et contra inveniendi quotientes replicatos ex data aequatione, et contra ab aequatione ad series replicatas regrediendi. Altera methodus non minus determinata, sed ad praxin utilior, est reducere ad infinitos terminos progressionis Geometricae, vel bimalis, quod simplicissimum vel alterius, ut decimalis. Sed optimum erit loco decimalium sumere bimalis potentias, ut octonariam vel sedecimalem progressionem; vel etiam altiorum; et has unius ejusdemque progressionis progressiones conferre inter se. Hac ratione exprimantur omnes quantitates, quarum in praxi usus. Hinc quia omnis fractio exprimitur per seriem infinitam terminorum ex progressione Geometrica excerptorum periodicam, investiganda periodus, quam et jam inveni, et ope considerationis primitivorum, referendo ad divisiones terminorum progressionis Geometricae. Eodem modo progressio pro irrationalibus investiganda, ubi est periodi alteratio aliqua perpetua. Et hinc pro omnibus aequationibus algebraicis, denique pro transcendentibus. Hic methodus duplex calculandi, una admodum exotica nec dum satis excussa, per perpetuas Alternativas; altera per egregium compendium additionis characterum, cujus occasionem dedit Examen abjectionis Novenarii. Cum enim summa characterum certa lege inita, numeri divisibilis per alium; sit divisibilis per summam characterum, eadem lege initam numeri divisoris. Et quae in unum addita aliquid componunt, eorum characterum summae etiam characterum alterius summam, eodem modo componant; hinc cum idem incognitum, ex diversis modis

2 f. replicatos, *(1)* exhib *(2)* ubi ... methodus *(a)* ex qvotientibus replicatis regrediendi ad aeqvationes *(b)*, et contra *(aa)* ex his datis *(bb)* inveniendi *(aaa)* per *(bbb)* Qvotientes *L* 7 etiam *(1)* progressionem *(2)* altiorum *L* 9 omnes *(1)* Numeri *(2)* qvantitates *L* 9 usus. *(1)* ⟨Hinc vel⟩ *(2)* Hic opus ⟨ex–⟩ ⟨inv⟩ *(3)* Hinc *L* 10 infinitam *(1)* geometrice *(2)* geometric⟨am vel⟩ periodicam *(3)* terminorum *(a)* progressionis *(b)* ex progressione *L* 11 inveni *(1)* ope divisionis et considerationis *(2)*, et ope *L* 13 Et *(1)* deniqve *(2)* hinc *L* 14 Hic *(1)* egregius da *(2)* egregia *(3)* methodus *L* 14 f. calculandi, *(1)* ali⟨us⟩ admodum exoticus *(a)* per *(b)* nec dum satis excussus *(2)* una *L* 16 f. dedit *(1)* proba *(2)* Examen abjectionis Novenarij. *(a)* Hac Methodo si tot hab *(b)* Cum *L* 17 characterum *(1)* certo modo *(2)* certa lege inita, *(a)* aeqvatur *(b)* numeri *L* 18 divisoris. *(1)* Hinc si idem numerus ex pluribus dividi possit, vel eo *(2)* Hin *(3)* Et si duo characteres summentur *(4)* Et aeqvalium characterum *(5)* Et qvae *L* 19 eorum *(1)* summae etiam characteres *(2)* characterum *L* 20 idem *(1)* incognitis, *(2)* incognitum, ex *(a)* pluribus cognitis *(b)* diversis *L*

16 compendium: Vgl. VII, 5 N. 7, insbesondere S. 58.

ex cognitis componi possit, certa quadam lege variationis servata, hinc si finiti ejus characteres (quod fit reductis omnibus ad integros rationales, si quidem quaesitum haberi potest) finito numero compositionum determinabuntur, sin vero infiniti, etiam infinitis modis variandum erit, servata certa progressione, donec habeatur characterum progressio. Caeterum est et alia Methodus pro inveniendis quaesitis determinatis per radicem aequationis Algebraicae (vel transcendentis) finitae quando id fieri potest. Si id quod quaeritur determinatum habeatur per aequationem infinitam pluribus communem; seu duarum incognitarum, et deinde fingatur adhuc nova aequatio duarum incognitarum; et harum duarum aequatione tollatur una incognita, quod si jam alterius incognitae valor inde haberi potest per seriem finitam, explicando arbitrariam sic, ut progressio terminetur; habebitur quaesitum. Sin minus seu id impossibile demonstratur, tunc etiam impossibile est reduci id quod quaeritur ad aequationem finitam algebraicam.

Haec methodus serviet etiam ad altiora; pro aequationibus duarum incognitarum infinitis, reducendo ad aequationes duarum incognitarum finitas, quando id fieri potest. Nimirum aequatio duarum incognitarum quaesita revocetur ad aequationes duas infinitas trium incognitarum, ipsam determinantes, seu a loco ad lineam, ad locum ad superficiem. Et fingendo aequationem finitam etiam trium incognitarum, harum trium aeqationum ope, eam conferendo cum una infinitarum inveniatur aequatio finita duarum incognitarum, et conjungendo cum altera infinitarum debet prodire aequatio finita duarum incognitarum eadem quae ante.

Applicatio hujus calculi ad Geometriam sequitur, et quae in lineis propria. Et primum methodus generalis problemata Geometri[c]a revocandi ad calculum, hoc fit tot sumendo aequationes quot sunt loca, quorum intersectione habetur quaesitum. Demonstrationes habebuntur optime aquationes revocando ad lineas rectas et earum rationes quod semper fieri potest, perpetuo triangula similia adhibendo. Omnis formula enim hoc modo considerari potest quasi compositum ex lineis rectis. Constructio quaerenda per

1 f. characteres *(1)* vel periodici; hinc *(2)* (qvod *L* 4 f. progressio. *(1)* Est et ali *(2)* Caeterum *L* 6 potest. *(1)* Nimirum, v. g. si qvaerat *(2)* Si id *L* 7 communem; *(1)* et deinde fingatur aeqvatio nova *(2)* seu duarum *L* 9 et *(1)* huius ope *(2)* harum *(a)* tollarum op *(b)* duarum aeqvatione *(aa)* toll *(bb)* tollunt unam incognitam *(cc)* tollatur *L* 10 finitam, *(1)* sumendo ar *(2)* explicando *L* 15 Nimirum *(1)* fingatur *(2)* fingantur *(3)* aeqvatio *L* 18 ope, *(1)* toll *(2)* eam *L* 18 aeqvatio *(1)* infinita trium *(2)* finita duarum incognitarum, *(a)* qvam jungendo *(aa)* cum *(bb)* ipsa fict⟨a⟩ habebitur aeqvatio duarum incognitarum, finita qvaesita, *(b)* et conjungendo *L* 19 aeqvatio *(1)* infinita eadem *(2)* finita *L* 22 fit *(1)* per intersec *(2)* tot *L* 24 optime *(1)* rationes *(2)* aeqvationes *L*

locorum intersectiones: De variis modis exhibendi loca, inprimis loca ad Circulum, rectam, et Conicas. De locis ad superficiem et horum intersectionibus. Quomodo sciatur gradus problematis propositi; si planum est quomodo optime per rectam et circulum vel plures rectas pluresque circulos, praeparatorios, qui denique ultimos circulos producant ultimas rectas, construentes, construi possit. Ubi enumerationes omnes possibiles habentur, et ex illis seligi possunt optimae. Idem pro Conicis utilem pro altioribus non est operae pretium. De modo seligendi incognitas quas quaeri utile est, de modo revocandi problema ad loca plura, libere seu a se invicem independenter enuntiata. De catalogo curvarum; de modo eas describendi per organa apta. De generali descriptione curvarum per intersectionem duarum rectarum parallele diversimode motarum, de aliis curvas describendi modis. De focis. De Tangentibus curvarum, et de proprietatibus earum conferendo ipsarum diversas ordinatas inter se. Ubi et de proprietatibus paradoxis, seu quae an possibiles sint magna dubitandi ratio est, donec contrarium appareat. Tangentes respondent differentiis, de calculo differentiali seu de tangentibus, vel de angulis curvae. De Curvedine seu quantitate anguli contactus plane nova, aliaque universalia. De curvarum proprietatibus, ut de earum parallelismo. De quadraturis et summis. De quadraturarum aliarum reductione ad rationales, et de rationalium gradibus, et quomodo ad Hyperbolas imaginarias reducantur, et videndum an res ita semper redeat ad Logarithmos. De curvis transcendentibus, et earum tangentibus mira. De calculi differentialis theorematibus generalibus. De summis summarum et differentialibus differentialium. Semper tolli possunt summae, ut maneant solae differentiae. De variis aequationibus differentialibus

2 horum *(1)* intersectionis *(2)* intersectionibus. *(a)* Geometria ⟨in⟩ *(b)* ⟨de lo⟩ *(c)* de ae *(d)* qvomodo *L* 4 f. deniqve *(1)* ultimum circulum *(2)* ultimos circulos producant *(a)* ultimam rectam, construentem, pro *(b)* ultimas *L* 8 enuntiata. *(1)* De curvilineo *(2)* De curvarum tangentibus seu differentiis *(a)* seu de modo *(b)* seu de collatione ordinatarum ejusdem *(3)* De catalogo *L* 9 De generali *(1)* conside *(2)* descriptione *L* 10 diversimode *(1)* mod⟨o⟩ *(2)* motarum *L* 13 f. appareat *(1)* de mod *(2)* Tangentes respondent differentiis, de *(a)* modo ex *(b)* calculo differentiali seu de *(aa)* modo ex data tangentium proprietate inveniendi curvam, seu ex angulo eius. *(bb)* tangentibus. *(aaa)* et *(bbb)* est *(ccc)* vel de *(aaaa)* angulo curvae *(bbbbb)* angulis curvae. *L* 16 ut *erg. L* 19 mira *(1)*; et Qvomodo differentiale *(2)*. De calculi *L*

11 De focis: Vgl. VII, 7 N. 33. 15 Curvedine: Vgl. VII, 1 N. 32. 16 parallelismo: Vgl. VII, 7 N. 53 u. 54. 16 De quadraturis et summis: Vgl. VII, 3 N. 38. 17 f. Hyperbolas: Vgl. VII, 7 N. 58. 18 f. De curvis transcendentibus: Vgl. deren Behandlung in VII, 6 N. 51 sowie in VII, 7 N. 49.

ex eadem aequatione ducibilibus. Si aequatione differentiali data quaeratur ejus summatrix seu absoluta, id fieri potest pluribus modis, unus est reducendo ad seriem infinitam, quod semper fieri potest, et tunc quaerenda infinitae reductio ad finitam methodo supra dicta. Quaerenda tamen methodus esset serierum infinitarum se cum licet finientium. Alius modus est effingendo seriem absolutam quasi jam habitam, sive algebraicam sive transcendentem, et inde ducendo differentialem, ea combinetur cum data differentiali et sublatis differentialibus. Habebitur denique absoluta adhuc semel, quae coincidere debet cum efficta. Alius modus pro quadraturis est specialiter per polygona; ubi res redit ad seriem replicatam terminorum finitas differentias habentium. Et quaerenda est parameter et aequatio seriei absoluta vel algebraice vel transcendenter; sed ut terminatio inveniatur alia methodus certo analytica haec est, si diversis methodis infinitis polygonorum progressiones sumendo quaeratur calculus generalis progressionem exhibens variis gradis communis, et tunc ipsam incognitam plerumque in exponentem ingredientem, licebit pro arbitrio sic explicare.

Nondum hic egi de mirabili nova characteristica geometriae, qua omnia effici possunt quae calculo, sic ut characteres perpetuo, situm et motum exprimant. Hoc admirandi usus pro Machinis inveniendis, et machinis a natura adhibitis divinandis.

Utile adhiberi semper eas series, quae, si finibiles, se ipsas finiunt ut idem ex terminis primis fiat quod ex secundis. Haec methodus incognitas absolute transcendenter exhibet, etiam incognitas determinatas, et ejus quoque ope inveniri poterit, an aliquando aequatio determinata transcendens solubilis in numeris. Constructio transcendentium, motu curvarum materialium se rectis ⟨vel⟩ aliis curvis applicantium. Fingantur aequationes plurium incognitarum plures; et ponendo quasdam incognitas esse curvas. Assumta curva algebraica generali et substituendo differentias in differentialibus, ut obtineatur differentialis data.

1 aqvatione *(1)* ducibilis *(2)* ducibilibus. *(a)* Data *(b)* Si *L* 3 tunc *(1)* methodo sae *(2)* qvaerenda *L* 5 sive *(1)* simpliciter Tran *(2)* algebraicam *L* 8 f. seriem *(1)* finitam *(2)* replicatam *L* 10 absoluta *(1)*. Qvae si *(2)* vel *L* 10 transcendenter; *(1)* si *(2)* vel etiam *(3)* sed *L* 20 an | an *streicht Hrsg.*| aliqvando *(1)* expo *(2)* problema transcendens solubile *(3)* aeqvatio *L* 22 applicantium. *(1)* Fingatur aeqvatio generalis *(2)* Fingantur *L*

8 f. seriem replicatam: Vgl. VII, 4 N. 40. 15 nova characteristica geometriae: Vgl. VII, 1 N. 9.

33. PASCALII FRAGMENTUM
[4. Juni 1675 – Januar 1676]

Überlieferung:

L Abschrift nach einer nicht mehr vorhandenen Vorlage: LH 35 XV 1 Bl. 2. 1 Bl. 2°. $1\frac{1}{4}$ S. (Unsere Druckvorlage.)

A Abschrift in der Hand von P. Guerrier nach nicht mehr vorhandenen Vorlagen: Premier Recueil Guerrier, n° 66, S. 232–234 (Privatbesitz).

E Erstdruck nach *A*: Pascal, *Oeuvres complètes* (Bossut), Bd IV, 1779, S. 408–411. — Weitere Drucke: 1. Pascal, *Oeuvres. Nouvelle Édition* (Lefèvre), Bd IV, 1819, S. 356 bis 359; 2. Pascal, *Oeuvres complètes* (Hachette), Bd III, 1864 u. ö., S. 219 f. — Drucke nach *L* und *E*: 3. Pascal, *PO* III, 1908, S. 305–308; 4. (mit frz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Chevalier), 1954, S. 71–74, S. 1402–1404; 5. (mit frz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Lafuma), 1963, S. 101–103. — Druck nach *L* und *A*: 6. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), Bd II, 1970, S. 1031–1035. — Weitere Drucke: 7. (mit frz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Le Guern), Bd I, 1998, S. 169 bis 173; 8. (mit dt. Übers.) *Pascal im Kontext*, 2006; 9. (mit ital. Übers.) Pascal, *Opere Complete* (Romeo), 2020, S. 344–347.
Cc 2, Nr. 1500 A

Datierungsgründe: Leibniz bestätigt am 4. Juni 1675 den Erhalt von Pascal-Handschriften (vgl. III, 1 N. 53, S. 253). In diesem Konvolut befand sich auch die Vorlage für unser Stück, wie aus Leibniz' Brief an H. Oldenburg vom 12. Juni 1675 hervorgeht (vgl. III, 1 N. 55, S. 255 f.). Leibniz erwähnt an dieser Stelle auch, dass er nach Rückgabe dieser Handschriften Manuskripte Pascals zu den Kegelschnitten erhalten werde. Am 28. Dezember 1675 schreibt Leibniz an Oldenburg, dass er demnächst weitere Handschriften von Pascal bekommen werde (III, 1 N. 70, S. 329). Aus der Datierung der Gesprächsaufzeichnung *Hexagrammum Pascalianum* (VII, 7 N. 61, S. 576) geht hervor, dass Leibniz die Manuskripte zu den Kegelschnitten spätestens im Januar 1676 zur Verfügung hatte. Die vorliegende Abschrift müsste folglich zwischen dem 4. Juni 1675 und Januar 1676 verfasst worden sein. — Eine detaillierte Untersuchung der Schrift von Pascal findet sich bei Taton, *L'oeuvre de Pascal en géométrie projective*, 1964; vgl. ebenso den ausführlichen Kommentar in Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), II, 1970, S. 1021–1031.

Pascalii fragmentum
Celeberrimis Matheseos professoribus:

Haec vobis, doctissimi ac celeberrimi viri, aut dono, aut reddo; vestra enim esse fateor, quae non nisi inter vos educatus mea fecissem, propria autem agnosco, quae adeo praecellentibus Geometris indigna video. Vobis enim non nisi magna et egregie demonstrata placent. Paucis vero genium audax inventionis; paucioribus (uti reor) genium elegans demonstrationis; paucissimis utrumque. Silerem itaque nihil vobis congruum habens nisi ea benignitas quae me a junioribus annis in erudito Lyceo sustinuit, et haec oblata qualiacunque sint exciperet.

Horum opusculorum primum magna ex parte agit de ambitibus, seu peripheriis numerorum quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum et in quocunque gradu constitutorum; et ideo de numericarum potestatum ambitibus inscribitur.

Secundum circa numeros aliorum multiplices versatur, et ut ex sola additione characterum agnoscantur, methodum tradit.

Deinceps autem si juvat Deus prodibunt et alii tractatus, quos omnino paratos habemus, et quorum sequuntur tituli:

De numeris magico-magicis seu methodus ordinandi numeros omnes in quadrato-numero contentos, ita ut non solum quadratus totus sit magicus, sed et quod difficilius sane est, ut ablatis singulis ambitibus reliquum semper magicum remaneat, idque omnibus modis possibilibus, nullo omisso.

1 Pascalii fragmentum *erg. L*

---

2 Matheseos professoribus: Nach den Recherchen von J. Mesnard dürfte damit der Kreis von Mathematikern gemeint sein, der sich bis 1654 regelmäßig bei J. Le Pailleur versammelte (vgl. Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), II, 1970, S. 1022 f.). 10 primum: Vgl. Bl. Pascal, *Potestatum numericarum summa*, 1665, sowie die Marginalie in N. 41_5. 13 Secundum: Vgl. Bl. Pascal, *De numeris multiplicibus*, 1665, sowie die Marginalie in N. 41_6. 17 De numeris magico-magicis: Zum Druck der Bl. Pascal zugeschriebenen Schrift *Solution d'un des plus celèbres et de plus difficiles problemes d'arithmetique, appellé communement les quarrez magiques* vgl. A. Arnauld, *Nouveaux Éléments de Géométrie*, 1667, S. 327–340 (Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), IV, 1992, S. 1586 bis 1600).

Promotus Apollonius Gallus id est Tactiones Circulares, non solum quales veteribus notae et a Vieta restitutae, sed et adeo ulterius promotae, ut vix eundem patiantur titulum.

Tactiones sphaericae pari amplitudine dilatae quippe eadem methodo tractatae. Utrarumque autem methodus singula earum problemata per plana resolvens, ex singulari Conicarum sectionum proprietate oritur, quae aliis multis difficillimis problematis succurrit, et vix unam adimplet paginam.

Tactiones etiam conicae, ubi ex quinque punctis et quinque rectis datis quinque quibuslibet ⟨—⟩ Conisection ⟨—⟩ quae data ⟨—⟩

Loci solidi cum omnibus casibus et omni ex parte absolutissimi.

Loci plani, non solum illi quos a veteribus tempus abripuit, nec solum illi quos his restitutis perillustris hujus aevi geometra subjunxit sed et alii huc usque non noti, utrosque complectentes, et multo latius exuberantes, methodo ut conjicere est omnino nova, quippe nova praestante, via tamen longe breviori.

Conicorum opus completum, et Conica Apollonii et alia innumera unica fere propositione amplectens, quod quidem nondum sedecimum aetatis annum assecutus excogitavi et deinde in ordinem congessi.

Perspectivae Methodus qua nec inter inventas, nec inter inventu possibiles ulla compendiosior esse videtur, quippe quae puncta ichnograφica per duarum solummodo rectarum intersectionem praestet, quo sane nihil brevius esse potest.

1–8 Promotus ... conicae: Zur Auseinandersetzung von Pascal mit den bei Pappos, *Mathematicae collectiones*, Buch II, überlieferten Hinweisen auf Apollonios, *Tactiones*, und die erweiterte Behandlung in Fr. Viète, *Apollonius Gallus*, 1600 (*VO* S. 325–346), sowie mit den in der Folge genannten Problemen vgl. den Brief von Pascal an P. de Fermat vom 29. Juli 1654 (*PO* III, S. 375–393).
8–10 Tactiones ... absolutissimi: Zu Leibniz' Nennung der Schriften von Pascal vgl. seinen Brief an É. Périer vom 30. August 1676 (III, 1 N. 90). 9 quibuslibet: Leibniz hat im folgenden Text drei Lücken gelassen, die auch in der Abschrift von Guerrier dokumentiert sind; vgl. Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), Bd II, S. 1035. 11 Loci plani: Vgl. die Hinweise auf Pascals Methode im Brief von R.-Fr. de Sluse an C. Brunetti vom Oktober 1657 (*PO* VII, S. 243–245). 12 perillustris ... geometra: Gemeint ist P. de Fermat. 15 Conicorum ... completum: Vgl. VII, 7 N. 60–64 u. N. 72 sowie den bereits erwähnten Brief von Leibniz an É. Périer vom 30. August 1676 (III, 1 N. 90).
15 Conica Apollonii: Apollonios, *Conica*.

Novissima autem ac penitus intentatae materiae tractatio scilicet de compositione aleae in ludis ipsi subjectis, quod Gallico nostro idiomate dicitur (*faire les partys des jeux*) ubi anceps fortuna aequitate rationis ita reprimitur, ut utrique lusorum quod jure competit, exacte semper assignetur. Quod quidem eo fortius ratiocinando quaerendum est quo minus tentando investigari possit. Ambiguae enim sortis eventus fortuitae contingentiae potius quam naturali necessitati merito tribuuntur. Ideo res hactenus erravit incerta, nunc autem quae experimento rebellis fuit, rationis dominium effugere non potuit. Eam quippe tanta securitate in artem per Geometriam reduximus, ut certitudinis ejus particeps facta jam audacter prodeat, et sic matheseos demonstrationes cum aleae incertitudine jungendo, et quae contraria videntur conciliando ab utraque nominationem suam accipiens, stupendum hunc titulum jure sibi arrogat aleae Geometria.

Non de Gnomonica loquor nec de innumeris miscellaneis, quae satis in promtu habeo, verum nec parata nec parari digna.

De Vacuo quoque subticeo, quippe brevi typis mandandum, et non tantum vobis ut ista, sed et cunctis proditurum, non tamen sine nutu vestro, quem si mereatur nihil metuendum; quod equidem aliquando alias expertus sum, maximo in instrumento illo Arithmetico, quod timidus inveneram, et vobis hortantibus exponens, agnovi approbationis vestrae pondus.

---

14 *Über* vobis: NB.

1 penitus *(1)* intractatae *(2)* intentatae *L* 4 exacte *(1)* ubiqve *(2)* semper *L* 7 incerta, *(1)* ideo qvae *(2)* nunc *L* 15 mereatur *gestr. L, erg. Hrsg.*

1–3 compositione . . . *jeux*: Vgl. hierzu Pascal an P. de Fermat vom 20. Juli 1654, vom 24. August 1654 und vom 27. Oktober 1654 (*PO* III, S. 375–393, S. 399–412, S. 429) sowie die posthum erschienene Abhandlung *Usage du Triangle Arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusierus parties*, 1665 (*PO* III, S. 478–498). 2 partys: Mit dieser Frage befasst sich Leibniz in N. 7, abgefasst am 7. Januar 1676. 14 De Vacuo . . . mandandum: Eine wohl bereits 1651 fertig gestellte Abhandlung über das Vakuum (*Traité du Vide*) ist in dieser Form nicht gedruckt worden. Seine einschlägigen Forschungen sind posthum erschienen in Bl. PASCAL, *Traités de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air*, 1663 (*PO* III, S. 143–292). 16 instrumento: Das erste Exemplar einer von Pascal entworfenen Zweispezies-Rechenmaschine stammt von 1642, vgl. hierzu ausführlich R. TATON, *Sur l'invention de la machine arithmétique*, in: P. COSTABEL [u. a.], *L'oeuvre scientifique de Pascal*, Paris 1964, S. 207–228.

Illi sunt Geometriae nostrae maturi fructus, felices et immane lucrum facturi, si hos impertiendo quosdam ex vestris reportemus.

Datum Parisiis, 1654. B. Pascal.

3 1654. *(1)* B. Pascalius *(2)* B. Pascal. *L*

34. EXTRAIT D'UN FRAGMENT DE PASCAL
[Januar – September 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Abschrift einer nicht aufgefundenen Vorlage: LH 35 XV 1 Bl. 13. 1 Bl. 4°. 1 S. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Desargues und Pascal*, 1892, S. 202–204; 2. *PO* IX, 1914, S. 291–294; 3. Pascal, *Oeuvres complètes* (Chevalier), 1954, S. 602–604; 4. Itard, *L'introduction*, 1962, S. 269–286, Faksimile S. 276–277; 5. Pascal, *Oeuvres complètes* (Lafuma), 1963, S. 359; 6. Itard, *L'introduction*, 1962, S. 270–272, Faksimile S. 276–277; Nachdruck, 1964, S. 103–107, Faksimile S. 104–105; 7. Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), III, 1991, S. 435–437; 8. (dt. Übers., teilw.) Zwierlein, *Pascal*, 1997, S. 126–128; 9. Pascal, *Oeuvres complètes* (Le Guern), I, 1998, S. 140–142, 1041–1042; 10. Descotes, *Géométries de Port-Royal*, 2009, S. 85–90; 11. (mit ital. Übers.) Pascal, *Opere complete* (Romeo), 2020, S. 278–283.
Cc 2, Nr. 1501

Datierungsgründe: Leibniz hat G. Filleau des Billettes vermutlich bereits 1672 kennengelernt. 1679 erinnert er sich in einem Brief an N. Malebranche (II, 1 N. 207, S. 724 f.), dass er A. Arnauld und Filleau des Billettes „un petit dialogue“ gezeigt habe. Es handelt sich dabei mit Sicherheit um die *Confessio philosophi* (VI, 3 N. 7), von der er im November/Dezember 1672 eine Reinschrift anfertigen ließ. In der *Theodicée* erwähnt Leibniz, dass er Arnauld die *Confessio philosophi* ungefähr 1673 gegeben hatte (*Theodicée* Praef., Gerhardt, *Phil. Schr.* 6, S. 43). Filleau des Billettes lebte im Haus von Arnauld. Unter den Schriften von Pascal aus dem Besitz von Arnauld befinden sich auch Abschriften von der Hand Filleau des Billettes' (vgl. Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), III, 1991, S. 430). Leibniz hat Pascals Handschriften zu den Kegelschnitten im Januar 1676 von E. Périer erhalten und im August zurückgegeben, nachdem er Exzerpte daraus angefertigt hatte. Falls die Bemerkung am oberen Rand zu diesen Exzerpten nicht wesentlich später entstanden ist als die vorliegende Abschrift, hat Leibniz letztere nicht vor Januar 1676 angefertigt.

Extrait d'un Fragment de l'Introduction à la Geometrie de Mons. Pascal, que Mons. des Billets m'a communiqué

Premiers principes et definitions

Principe 1. L'objet de la pure Geometrie est l'espace, dont elle considere la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, les quelles on distingue par les noms de longueur [,] largeur et profondeur en donnant indifferemment chacun de ce noms à chacune de ces dimensions, pourveu qu'on ne donne pas le même à deux ensemble. Elle suppose que tous ces termes là sont connus d'eux mêmes.

[+ Etendu est ce qui a des parties sensibles tout à la fois. Partie est une chose la quelle avec une autre chose; est le même qu'une troisieme que nous appellons Tout. Successif est ce qui a toutes ses parties Sensibles, en autant de temps differens. L'espace est une chose ëtendue et rien d'avantage. Un corps est une chose estendue capable d'agir. Agir est estre cause d'un changement. Cause est une chose prise dans un certain estat dans le quel elle ne peut estre sans qu'une autre arrive; et peut estre entendue parfaitement avant l'autre. L'autre s'appelle l'effect. Ou: *Effectus est, quicquid sequitur alio posito, et est natura posterius ipso. Natura prius est, quod ante alterum perfecte intelligi potest*. Deux choses sont continües

---

1–3 *Am oberen Rand:* Alia Pascalii vide in Conicis.

1 Extrait ... de l' *erg. L* 9 f. mêmes. [+ *(1)* l'espace est *(a)* une chose etendue d'un certain *(b)* un lieu etendu *(aa)* d'un certain point *(bb)* d'une partie en tous sens; ou c'est un lieu *(aaa)* dans leqvel un point peut estre pris et *(bbb)* qvi a des parties *(aaaa)* de tous *(bbbb)* en tous sens, d'un point qvi y peut estre pris. *(2)* Etendu *L* 13 differens. *(1)* Le lieu *(2)* L'espace *L* 14 estendue *(1)* sensible. *(2)* capable *L* 14 Agir est *(1)* causer *nicht gestr.* *(2)* estre cause d' *L* 15 chose *(1)*, dont *(a)* une certaine qvalité estant *(b)* un certain mode est *(2)* la qvelle prise d'un *(3)* prise *L* 15 f. autre *(1)* svit aussi en même temps *(2)* arrive *L* 18 prius | posteriusve *gestr.* | est, ... potest | , aut non potest *gestr.* | Deux *L*

1,19 Alia ... Conicis: Vgl. VII, 7 N. 60–64 u. 72. 10–204,4 [+ ...]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

quand elles ont une partie commune. Le Lieu est une chose dont l'espace a une partie qui est la même avec l'espace d'une autre chose. L'espace d'une chose est dont l'étendue est égale et semblable à celle de la chose; et chaque partie de l'une de ces étendues est apperceue avec chaque partie de l'autre.]

Princip. 2. L'espace est infini selon toutes les dimensions.

Princip. 3. Et immobile en tout et en chacune de ses parties.

Definition du corps Geometrique de la surface, de la ligne, du poinct, Princip. 4. 5. 6.

Princip. 7. Les poincts ne different que de situation; 8. les lignes de situation, de grandeur, et de direction. Les droites par le plus court chemin.

Princip. 9. La distance de deux poincts est la ligne droite.

Princip. 10. Les surfaces peuvent differer de situation, de longeur, de largeur, de contenu, de direction. Les surfaces planes sont bornées de toutes parts par des lignes droites, et qui s'etendent directement de l'une à l'autre.

(: *An minimae superficierum inter datas lineas. An cujus partes quibuslibet congruere possunt, ut et recta.* :)

Avertissement, nous ne considerons icy que les plans. Une ligne est egale à une autre quand l'etendue de l'une est egale à celle de l'autre.

Theoremes connus naturellement

1. Les lignes droites egales entre elles ne different que de situation, l'une estant quant au reste toute semblable à l'autre.

2. Les cercles qui ont les semidiametres égaux, sont égaux. Et les cercles égaux ne different que de situation.

1 commune *(1)* Estre eloigné *(2)* Le lieu *(a)* est un pa *(b)* d'un corps, et *(3)* Le Lieu est *(a)* la partie d'un espace qvi sert à trouuer une *(b)* une chose dont l'espace *(aa)* contient *(bb)* comprend l'espace d'une autre chose. Comprendre est estre le même en tout ou en partie. *(aaa)* Ergo ⟨me⟩ *(bbb)* donc ainsi plustost: *(4)* Le Lieu *L* 2 avec *(1)* la partie *(2)* l'espace *L* 4 f. l'autre. | *(1)* Et ⟨alors⟩ on peut dire qve le corps est dans l'Espace *(2)* Une chose est Dans une autre qvand toutes les parties de la premiere ne *(a)* sont sensibles *(b)* peuuent estre apperceues qv'avec au tant de parties de l'autre. Ainsi *(aa)* un tout est *(bb)* une partie est dans son tout: le corps dans une Vase aux *bricht ab* *(3)* NB. on ne dira pas qve l'espace est dans le corps qvi le remplit. Estre dans une chose, est estre placé en sorte qve pour estre avec l'un, il faut estre | auparavant *erg.* | avec l'autre *gestr.* | Princip. *L* 7 f. 4. 5. 6. | prop. *ändert Hrsg.* | 7. *L* 8 poincts *(1)* sont *(2)* ne different *L* 9 de *(1)* forme *nicht gestr.* *(2)* direction. *L* 11 f. largeur, *(1)* de forme, *(2)* de contenu, *L*

3. Les arcs égaux de mémes cercles ne different que de situation.

4. Les chordes des arcs egaux de deux cercles egaux ou d'un même cercle, ne different (: que de situation :) ou sont egales entre elles.

5. Tout diametre divise la circomference en deux portions égales dont chacune est appellée demycercle.

6. L'intersection de deux lignes est un poinct.

7. Si par un poinct pris au dedans d'un espace borné de toutes parts par une ou par plusieurs lignes passe une ligne droite infinie, elle coupera les lignes qui bornent cet espace en deux points pour le moins.

8. S'il y a deux points l'un au deça, l'autre au dela d'une ligne droite; alors une ligne droite qui tend d'un point à l'autre coupe la ligne droite qui est entre [les] deux, en un poinct, et en un seul.

9. La ligne droite infinie qui passe par un poinct qui soit au dedans d'un cercle coupe la circomference en deux points et en deux seulement.

10. La circomference qui passe par deux poincts, l'un au dedans d'un autre cercle, et l'autre au dehors, le coupe en deux points, et en deux seulement.

11. Si deux circomferences ont reciproquement des points l'un au dedans de l'autre, elles s'entrecouperont en deux points, et en deux seulement.

12. Si une circomference a un de ses poincts au-deçà d'une ligne droite infinie, et son centre au dela ou dans la même ligne droite, elle coupera la même ligne droite en deux points.

19 poincts | au dela *ändert Hrsg.* | d'une *L*

35. DE TABULA COMBINATORIA PERFECTA
[31. Oktober – November 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 11 Bl. 4. 1 Bl. 2°. 10 Zeilen auf Bl. 4 r° unten. Auf dem übrigen Blatt VII, 1 N. 17 sowie VII, 5 N. 41. — Gedr.: *LKK* 1, 1973, S. 71 (tlw. = Z. 10–12).
Cc 2, Nr. 1097 tlw.

Datierungsgründe: Das auf demselben Blatt geschriebene VII, 1 N. 17 ist auf den 31. Oktober 1675 datiert.

Pro Tabula combinatoria perfecta desiderantur: ut formae perfectae quaelibet tum inter se, tum cum inferioribus jungantur. Primum pro duabus literisque adeoque et duabus aequationibus ad 10^{mum} gradum, erunt combinationes formarum 10. numero 1024. Quod si contenti simus octo incognitis uti, non erunt nisi 256. Quae ab aliquot personis facile anni spatio elaborabuntur; praesertim si Tabula multiplicationum formularum perfectarum (diverse affectarum) adhibeatur; et praeterea progressiones observentur; quae ordine sine dubio progredientur.

Si ad octo usque gradus procedemus poterimus etiam Aequationes ad nonum usque gradum reddere puras. Difficultas quod oblitus sum, nam una combinatur cum pluribus inferioribus similibus. Hoc enim in calculo meo oblitus sum. Nota duae ejusmodi similes inferiores reductae ad unam ascenderent longe altius quam proxime major, et ita idem erit figuram v. g. 10^{mi} gradus conjungere cum duabus perfectis noni gradus, quam conjungere cum una 18^{mi}. Calculus instituatur generalis de reductione figurarum perfectarum similium ad se invicem, ut progressiones seu regulae generales mox inveniantur. Ideo sumamus exponentes ipsos indeterminatos, incipiendo non a primo seu infimo, sed a summo. Conferatur hoc calculus cum ordinario ubi incipitur ab imo.

10 duabus | curvis *gestr.* | literisqve *L* 11 ad *(1)* 15^{mum} *(2)* 10^{mum} *L* 11 combinationes *(1)* aeqvationum *(2)* formarum *L* 13 f. multiplicationum *(1)* formulas per *(2)* formularum perfectarum (*(a)* hanc *(b)* diverse *L* 14 f. qvae | mox *gestr.* | ordine *L* 16 Aeqvationes *(1)* adeo *(2)* ad *L* 19 ascenderent *(1)* forte *(2)* longe *L* 21 una *(1)* 8^{vi} *(2)* 18^{mi} *L* 23 indeterminatos, *(1)* sive a *(2)* incipiendo non a primo *(a)* sed ab *(b)* seu *L*

9 Tabula combinatoria perfecta: Vgl. S. 304 Z. 8–23.

36. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM

36_1. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM, PARTES PRIMA ET SECUNDA
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III A 34 Bl. 1–4. 2 Bg. 2°. 8 S. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 16–36.
Cc 2, Nr. 900.

Januar. 1675.

De formulis omnium dimensionum:

novo analyseos et characterum genere ex artis combinatoriae principiis.

Et calculus explicationis per binomium

De intercalatione numerorum combinatoriorum

Tentandum est, an Analysis promoveri possit longius adhibitis formulis, quae sint simul omnium dimensionum. Ut pro $by^4 + acy^3 + a^2dy^2 + a^3ey + a^4f$, scribemus: $by^z + acy^{z-1} + a^2dy^{z-2} + a^3ey^{z-3} + a^4fy^{z-4}$. etc. Quod si ponamus $z \sqcap 4$. seu $z - 4 \sqcap 0$. patet y in ultimo termino omitti posse: et etc. quoque omitti debere. Sin minus continuari poterit, donec fiat exponens ipsius y ipsi 0. aequalis. Quemadmodum autem hic incepi a summo, ita incipi potuisset ab imo, hoc modo:

$$a^zf + a^{z-1}ey^{+1} + a^{z-2}dy^2 + a^{z-3}cy^3 + a^{z-4}by^4 \text{ etc.}$$

Ponamus jam quantitatem y exponente z affectam esse explicandam sive esse $y \sqcap x + b$. quo modo generaliter explicabimus: y^z? Jam repertum est dudum a edoctissimis

10 f. novo ... binomium *erg. L* 12 De ... combinatorium *erg. L* 13 est, *(1)* ad *(2)* an *L* 18 f. modo: *(1)* $\mathrm{a^4f + a^3ey^{+1}}$ *(2)* $\mathrm{a^zf + a^{z-1}ey^{+1} + a^{z-2}dy^2 +}$ *(a)* $\mathrm{a^{z-3}dy^3 + a^{z-4}cy^4}$ *(b)* $\mathrm{a^{z-3}cy^3 + a^{z-4}by^4}$ *L* 20 f. $\mathrm{y} \sqcap$ *(1)* $\mathrm{a + b}$ *(2)* $\mathrm{x + b}$ *L*

21–208,1 edoctissimis Geometris: Welche Ereignisse Leibniz als Entdeckungen der figurierten Zahlen ansieht, konnte nicht ermittelt werden. Die im Folgenden genannten Personen führt Leibniz zum Verweis auf weitere Eigenschaften der figurierten Zahlen und des arithmetischen Dreiecks auf.

Geometris, numeros quos vocant Figuratos, 1. 2. 1.   1. 3. 3. 1 etc.

			triang.	pyram.	▽▽	▽P				
A	1	1	1	1	$^{(D)}1$ *D*	$^{(G)}1$	1	1	1	1
	1	2	3	$^{(F)}4$	$^{(D)}5$	6	7	8	9	
	1	3	$^{(C)}6$	$^{(F)}10$	15	21	28	36		
B	1	$^{(E)}4$	$^{(C)}10$	20	35	56	84			
C	$^{H}1$	$^{(E)}5$	15	35	70	126				
	$^{H}1$	6	21	56	126					
	1	7	28	84						
	1	8	36							
	1	9								
	1									

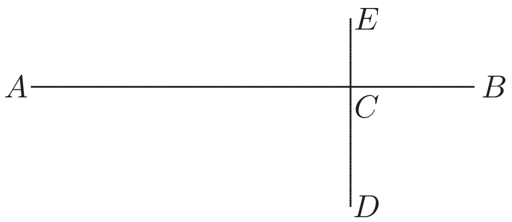
1–3 Figuratos, *(1)* 1. 1. *(2)* 1. 2. 1. 1. 3. 3. | 4 *ändert Hrsg.* | *(a)* itaqve *(b)* etc. | triang. . . . ▽P *verschiebt Hrsg. um eine Spalte nach rechts* | A 1 *(aa)* 2 *(bb)* 1 *L*   4 $^{(F)}4$ *(1)* $^{(C)}5$ *(2)* $^{(D)}5$ *L*   8 f. 126 *(1)* $^{H}1$ *(2)* 1 *L*   11–209,1 9 | 45 *gestr.* | 1 | 10 55 *gestr.* | *(1)* itaqve x + b,^{4} ⊓ 1x^4+ *(a)* x *(b)* 4x^3 + 6 *(2)* itaqve *L*

Itaque
$$x+b,^4 \sqcap 1x^4+4x^3b^1+6x^2b^2+4x^1b^3+1b^4.$$

Jam si dimensionis exponens non sit 4, sed universalis exempli causa z. explicanda ratio est, per quam ex data z exhibeantur caeteri numeri transversales, nempe quomodo ex data 8, inveniantur 28, 56, 70, et ex data 9 inveniantur 36, 84, 126. et ita in caeteris. Hoc vero fieri poterit, non quidem per unam quandam aequationem, attamen per unam quandam regulam; nam per Theorema a Maurolyco, Fermatio, Pascalio aliisque observatum. In progressione naturali ab unitate incipiente numerus quilibet ductus in proxime

---

1 *Am Rand:*



$AB \sqcap a$. $BC \sqcap x$. $AC \sqcap a-x$. sit $EC \sqcap z$. erit $\dfrac{CD}{z} \sqcap \dfrac{a-x}{x}$ et $CD \sqcap \dfrac{za-xz}{x}$.

10 a − x *(1)* erit *(2)* sit EC $\sqcap$ z. erit *(a)* $\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CD}}$ *(b)* EC *(c)* $\frac{\mathrm{ED}}{}$ *(d)* $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{z}}$ *L* 3 si *(1)* non dimension⟨um⟩ *(2)* dimensionis *L* 5 70 *(1)* 56, et ex data 9, 36 *(2)* et *L* 8 proxime *(1)* minorem *(2)* majorem *L*

---

10 fig: Die Figur zeigt Spuren der Überarbeitung: Leibniz ersetzt eine etwas weiter links ausgeführte und wieder getilgte vertikale Linie, die in ihrem oberen Abschnitt von Text unterbrochen ist, durch DE. Das obere Ende der getilgten Linie wurde ebenfalls mit E gekennzeichnet. Leibniz wählt Lage und Länge der Strecken derart, dass die in der begleitenden Rechnung auftretenden Verhältnisse im Diagramm eingehalten werden. Insbesondere gilt $CD : AC = CE : CB$. Die Endpunkte der getilgten Linie liegen mit B und E bzw. A und D jeweils auf gedachten Geraden, die gemäß den im Diagramm auftretenden Streckenverhältnissen zueinander parallel sind. Oberer und unterer Abschnitt der getilgten Senkrechten stehen somit im selben gleichen Verhältnis zum rechts bzw. links vom gemeinsamen Schnittpunkt befindlichen Abschnitt von AB wie die entsprechenden Abschnitte DE. 7 Maurolyco: vgl. F. MAUROLYCO, *Arithmeticorum libri duo*, 1575, S. 5, Buch 1, Propositio 7. 7 Fermatio, Pascalio: Fermats Beobachtung wurde veröffentlicht als Observatio D. P. F., in: *Diophanti Alexandrini De Multangulis Numeris Liber Unus*, 1670, S. 16 (*FO* I S. 341). Zuvor hatte Fermat seinen Befund Mersenne in einem Brief von Anfang Juni 1638 (*FO* II S. 70; *CM* VII S. 279) mitgeteilt. Im Anschluss an seine eigene Formulierung als Proposition 11 in Bl. PASCAL, *Traitté des ordres numeriques*, 1665, S. 5 [Marg.] (*PO* III S. 509–510) verweist Pascal auf Fermats ihm aus der Korrespondenz bekannte Fassung und gibt diese in französischer Übersetzung wieder. Diese Version von Fermats Beobachtung ist die Grundlage für Leibniz' Übersetzung in Z. 8 – S. 210 Z. 3.

majorem producit duplum sui trianguli; idem numerus ductus in $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ proxime majoris, producit triplum pyramidis; idem numerus ductus in pyramidem proxime majoris producit quadruplum Triangulo-Triangularis etc. Sed jam video offerri propius theorema ad usum nostrum; nempe consequentiam 12^mam^ tractatus Pascalii de Triangulo Arithmetico, nempe observat ille, in linea quadam transversa (ipse vocat basin) numerum quendam E, ut 4, esse ad proxime superiorem C, ut 6. ut numerus unitatum CB ad numerum BA sive ut numerus cellarum inferiorum quarum summa E, ad numerum cellularum superiorum quarum infima C.

Itaque sit dimensionis numerus, z, v. g. E. seu 4. numerus unitatum AC seu numerus numerorum transversalium lineae CD est $z+1$. Unde si auferatur BC seu γ, nempe 2 vel 3. vel 4, fiet $z+1-\gamma$, et erit $\dfrac{\text{Numerus datus}}{\text{ad proxime sequentem in eadem transversali}} \sqcap \dfrac{\gamma}{z+1-\gamma}$. Unde si $E \sqcap z$. et quaeratur C, fiet $\dfrac{C}{z} \sqcap \dfrac{z+1-\gamma}{\gamma}$ et $C \sqcap \dfrac{z^2+z-\gamma z}{\gamma}$, ubi $\gamma \sqcap 2$. et fiet: $C \sqcap \dfrac{z^2+z-2z}{2} \sqcap \dfrac{z^2-z}{2}$, et rursus $\dfrac{F}{C}$ seu $\dfrac{F}{z^2-z\smile 2} \sqcap \dfrac{z+1-3}{3}$, sive $F \sqcap$

$$\left.\begin{matrix} z^3-1z^2 \\ \quad -2..+2z \end{matrix}\right\} \smile 2,3. \text{ porro } \frac{D}{F} \text{ sive } \frac{D,2,3}{\ldots\ldots} \sqcap \frac{z-3}{4} \text{ et fiet } D \sqcap \left.\begin{matrix} z^4-1z^3 \\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-2...+2z^2} \\ -3...+3.. \\ \qquad +6..-6z \end{matrix}\right\} \smile$$

2, 3, 4 quam formulam si rursus multiplices per $\dfrac{z-4}{5}$ fiet:

1 proxime *(1)* minoris *(2)* majoris *L* 3 f. ad | idem *gestr.* | usum *L* 6 numerus *(1)* BC ad numer *(2)* | unitatum *erg.* | CB *L* 9 sit *(1)* Numerus AC $\sqcap$ z. *(2)* dimensionis *(a)* z numerus, 4 *(b)* numerus, *L* 9 AC *(1)* est z *(2)* seu *L* 10 f. 2 | vel *erg.* | 3 *L* 11 fiet *(1)* $\mathrm{z}-\gamma$ *(2)* $\mathrm{z}+1-\gamma$ *L* 11 erit *(1)* $\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{C}} \sqcap$ *(2)* $\dfrac{\text{Numerus datus}}{\text{ad } \ldots \text{ transversali,}}$ *(a)* ut γ ad *(b)* $\sqcap \dfrac{\gamma}{\mathrm{z}+1-\gamma}$. *L*

4 consequentiam 12^mam^: Vgl. Consequence douziesme in Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmetique*, 1665, S. 7–8 (*PO* III S. 455–457).

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
z^5 & - & 1z^4 & & & & & & \\
 & - & 2\ldots. & + & 2z^3 & & & & \\
 & - & 3\ldots. & + & 3\ldots & & & & \\
 & & & + & 6\ldots & - & 6z^2 & & \\
 & - & 4\ldots. & + & 4\ldots & & & & \\
 & & & + & 8\ldots & - & 8.. & & \\
 & & & + & 12\ldots & - & 12.. & & \\
 & & & & & - & 24.. & + & 24z
\end{array}\right\} \smile 2, 3, 4, 5 \sqcap G.$$

Hinc patet semper fieri summam $\sqcap$ 0. si sit $z \sqcap 1$.

Nimirum,
$$\begin{array}{lll}
E & \sqcap & z \\
C & \sqcap & z \frown \dfrac{z-1}{1} \\
F & \sqcap & \dfrac{z}{1}, \dfrac{z-1}{2}, \dfrac{z-2}{3} \\
D & \sqcap & \dfrac{z}{1}, \dfrac{z-1}{2}, \dfrac{z-2}{3}, \dfrac{z-3}{4} \\
G & \sqcap & \dfrac{z}{1}, \dfrac{z-1}{2}, \dfrac{z-2}{3}, \dfrac{z-3}{4}, \dfrac{z-4}{5}.
\end{array}$$

Unde patet hos numeros, ut 1, 5, 10, 10, 5, 1. esse productos continuorum, seu fractionum, quarum numerator decrescit, nominator crescit arithmetice. Unde pendet praxis notabilis Ganierii apud Pascalium pag. 32. tractatus de combinationibus. Observavit Huddenius hoc sane memorabile, si haec series 1 −2 +1 multiplicetur per progressionem Arithmeticam quamcunque, productum semper fieri aequale nihilo. Videamus an propositio sit universalior, sive an sequens

	1	−3	+3	−1.	
ducta in	1	3	6	10	
faciat productum:	+1	−9	+18	−10	nihilo aequale, idque

verum est. Hinc illud sequitur memorabile. Si qua sit aequatio quae tres habeat Radices

9 1. *(1)* z *(2)* | I *nicht gestr.* | 1 *(3)* | Nimirum, *erg.* | E ⊓ z *L* 15 1 | 3, *ändert Hrsg.* | *(1)* 30, *(2)* 10, *L* 17 notabilis | Domini *gestr.* | Ganierii *L* 18 si *(1)* propositio *(2)* haec *L*

17 Ganierii: A. de Gagnières; vgl. Bl. PASCAL, *Combinationes*, 1665, S. 32–33 (*PO* III S. 586–593). 18 Huddenius: Vgl. J. HUDDE, *Epistula secunda de maximis et minimis*, 1659, *DGS* I S. 508.

aequales eam multiplicari posse per numeros triangulares, sive earum generator sit unitas, sive alius quilibet, et nihilominus aequationem manere. Porro aequationes trium radicum aequalium serviunt tum ad inventiones Tangentium parallelarum, et perpendicularium, seu maximas et minimas ordinatas; exemplo eorum quae de Conchoeidis puncto flexus apud Schotenium dixit Heuratius. Eodem modo de caeteris sive numeris sive seriebus sive potestatibus facilis est, et sane memorabilis demonstratio.

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ \hline 0 & -3 & +9 & -6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrrr} 1 & -4 & +6 & -4 & +1 \\ 20 & 10 & 4 & 1 & 0 \\ \hline +20 & -40 & 24 & -4 & 0 \end{array} \ \sqcap\ 0$$

Nota quoniam series transversalis semper finita, perpendicularis infinita, ideo satius multiplicare infinitam per finitam demonstrandi theorematis causa.

Caeterum si multiplicatio instituatur alio modo alia orietur productorum repraesentatio, nempe:

$$z \frown z-1 \ \sqcap\ z^2 - z.$$

$$z \frown z-1 \frown z-2 \ \sqcap\ z^2 - z \frown z-2 \ \sqcap\ \begin{array}{l} z^3 - 2z^2 \\ \quad - z^2 + 2z \end{array}$$

$$z \frown z-1 \frown z-2 \frown z-3 \ \sqcap\ z-3 \quad \frown \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \sqcap\ \begin{array}{l} z^4 - 3z^3 \\ \quad - 2z^3 + 6z^2 \\ \quad - \ z^3 + 3.. \\ \qquad\quad + 2.. - 6z \end{array}$$

et hoc rursus multiplicando per $z-4$ fiet:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} z^5 & - & 4z^4 & & & & & & \\ & - & 3\ldots. & + & 12z^3 & & & & \\ & - & 2\ldots. & + & 8\ldots & & & & \\ & - & 1\ldots. & + & 4\ldots & & & & \\ & & & + & 6\ldots & - & 24z^2 & & \\ & & & + & 3\ldots & - & 12z^2 & & \\ & & & + & 2\ldots & - & 8z^2 & & \\ & & & & & - & 6z^2 & + & 24z \end{array}$$

4 maximas | ad *ändert Hrsg.* | minimas *L* 10 finita, *(1)* altera *(2)* perpendicularis *L*

5 apud …Heuratius: Vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 259–262.

Multa in hoc dispositione memoranda, sed quae omnia ex hoc capite pendent, quod nimirum terminus cujuslibet lineae multiplicatus per 2. vel 3, vel 4, dat sequentem, non ergo considerandi nisi qui lineas incipiunt, hi enim per $1 + 2$ vel $1 + 3$, vel $1 + 4$, etc. multiplicati dant reliquos, sunt autem:

$$\begin{array}{llllllllllllll}
1. & \text{vel } 1 & & \text{vel } 1 & & & \text{vel } 1 & & & & \text{nempe } 1 & & & \\
 & & -1 & & -2 & & & .\ -3 & & & & 1. & 2. & 3. & \\
 & & & & -1 & & & -2 & & & & & 2 & 3 & 6 \\
 & & & & & +2 & & -1 & & & & & & & 6 \\
 & & & & & & & & .\ +6 & & & & & & \\
 & & & & & & & & +3 & & & & & & \\
 & & & & & & & & +2 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & .\ -6 & & & & &
\end{array}$$

Piget adhuc unum calculare, etsi res forte mereatur. Caeterum inspiciendo apparet hoc calculandi modo non in summa tantum, sed et per partes idem quod ante provenisse. Caeterum summis initis fiunt aequationes:

$$1z. \qquad 1z^2 - 1z \qquad 1z^3 - 3z^2 + 2z \qquad 1z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z$$

et denique: $1z^5 - 10z^4 + 35z^3 - 50z^2 + 24z$. Porro semper numeri cujuslibet termini inter se juncti sunt aequales nihilo, multiplicetur haec formula, per $z - 5$,

---

16 *Am Rand:*

$$\begin{array}{ccc}
8 & \sqcap & 8 \\
8 & \sqcap & 4+4 \\
7 & \sqcap & 4+3 \\
 & & 3+4
\end{array}$$

3 per *(1)* $1 + 3$ *(a)* multiplica *(b)* vel $1 + 2$, *(2)* $1 + 2$ *L* 5 1. vel *(1)* $1 - 1$. vel *(a)* $1 - 2 +$ *(b)* $1 - 2$ *(2)* 1 *L* 13 calculare, *(1)* credo vero *(2)* etsi *L* **19** 8 $\sqcap$ *(1)* $2 \frown 4$ *(2)* 8 *L* 18 per *(1)* $-1+$
z − 4, fiet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
 & z^6 & - & 10z^5 & + & 35z^4 & - & 50z^3 & + & 24z^2 & & \\
 & & - & 4\ldots\ldots & + & 40\ldots\ldots & - & 140\ldots & + & 200\ldots & - & 96z \\
\hline
\text{seu} & 1z^6 & - & 14z^5 & + & 75z^4 & - & 190z^3 & + & 224z^2 & - & 96z. \\
 & \cancel{1} & & \cancel{4} & & \cancel{3} & & \cancel{8} & & \cancel{8} & & \cancel{3}
\end{array}$$

Ubi notandum omnes *(a)* te *(b)* numeros simul sumtos semper aeqvari nihilo. *(2)* z − 5, *L*

$$\begin{array}{llcccccccccc}
\text{fiet} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right. & 1z^6 & - & 10z^5 & + & 35z^4 & - & 50z^3 & + & 24z^2 & & \\
 & & - & 5\ldots\ldots & + & 50\ldots\ldots & - & 175\ldots & + & 250 & - & 120z \\
\hline
\text{seu} & 1z^6 & - & 15z^5 & + & 85z^4 & - & 225z^3 & + & 274z^2 & - & 120z \\
 & \cancel{1} & & \cancel{3} & & \cancel{4} & & 0 & & \cancel{4} & & \cancel{6}
\end{array}$$

Ubi notandum inductione apparere, quod semper crescent cognitae terminorum, usque ad penultimum, qui est omnium maximus; at ultimus rursus decrescit. Termini secundi sunt numeri triangulares, 0. 1. 3. 6. [10.] 15. Termini ultimi, 1. 2. 6. 24. 120. sunt producti numerorum continui deinceps ab unitate, nempe 1. (1, 2) 2. (1, 2, 3) 6. (1, 2, 3, 4) 24. (1, 2, 3, 4, 5) 120.

Sed reliquorum difficilior determinatio, v. g. tertiorum: 2. 11. 35. 85 etc. Patet tamen eos esse quodammodo sumtos ex pyramidalibus, 1. 4. 10. 20. 35. 56. 84. Quarti sunt 6. 50. 225. etc. qui quomodo ex Triangulo-Triangularibus deriventur non ita facile judicatur; et opus est prolixis inductionibus ad ista indaganda.

$$\begin{array}{cccccccc} 1. & 4. & 10. & 20. & 35. & 56. & 84. \\ & 2 & & 11 & & 35 & & 85 \end{array}$$

Si in qualibet formula in seriem ipsarum cognitarum seu numerorum inquiramus, omisso ultimo, ut,

$$\begin{array}{c} 1. \end{array} \qquad
\begin{array}{ccc} 1. & & 3. \\ & 2 & \end{array} \qquad
\begin{array}{ccccc} 1. & & 6. & & 11 \\ & 5. & & 6 & \\ & & 1 & & \end{array} \qquad
\begin{array}{ccccccc} 1. & & 10. & & 35. & & 50. \\ & 9 & & 25 & & 25 & \\ & & 16 & & 0 & & \end{array} \qquad
\begin{array}{ccccccccc} 1. & & 15. & & 85. & & 225. & & 274 \\ & 14. & & 70 & & 140 & & 49 & \\ & & 56 & & 70 & & 91 & & \end{array}$$

---

15 *Am linken Rand:*

$$\begin{array}{r} 7 \\ \underline{7} \\ 49 \\ \underline{7} \\ 343 \\ \underline{7} \\ 2401 \end{array}$$

15 *Am rechten Rand:* $5^0 \frown 3 \sqcap 3$. NB.

14 in *(1)* qvolibet termino *(2)* qvalibet *L*

---

17 f. 5. 6 ... 16 0: Einzelne Differenzen sind fehlerhaft. Die Fehler setzen sich in den nachfolgenden Zeilen fort.

Sed his nunc quidem missis redeamus ad nostras formulas generales:

Esto formula quaelibet:

$$\frac{by^z + ca^1y^{z-1} + da^2y^{z-2} + ea^3y^{z-3} + fa^4y^{z-4}}{gy^z + hay^{z-1} + ka^2y^{z-2} + la^3y^{z-3} + ma^4y^{z-4}}$$

Quaeratur ejus differentia a formula quae hoc solo ab ista differat, quod pro y ponatur $y+\beta$: ut autem res in numeris habeatur et vitetur error calculi, scribemus:

$$\begin{array}{lllll}
2b\ \ 625y^{4z} & +\,7ca125y^{4z-1} & +\,5da^2 25y^{4z-2} & +\,4ea^3 5y^{4z-3} & +\ \ 8fa^4 5^0 y^{4z-4} \\
4\ \ 2401 & \quad 5\quad 343 & \quad 8.\,.\ \ 49 & +\,2.\,.\ \ 7 & +\,10\quad 7^0 \\
\hline
10g5^4y^{4z} & +\,11ha5^3y^{4z-1} & +\,13ka^2 5^2 y^{4z-2} & +\,14la^3 5y^{4z-3} & +\,16ma^4 5^0 y^{4z-4} \\
11\ \ 7 & +\,13\quad 7 & +\,14\quad 7 & +\,16\quad 7 & +\,17\quad 7^0
\end{array}$$

Numerator Termini proxime majoris ejusdem seriei, in qua $y+4\beta$ ponatur in locum ipsius y, erit:

6 2b 625y^{4z}+ *(1)* 5 *(2)* 7ca125y^{4z-1}+ *(a)* 4 *(b)* 5 *L* 6 343 *(1)* 7 *(2)* 8 *L* 6 13ka^{2}5^2 | y^{z-2} *ändert Hrsg.* | + *L* 7 Numerator *erg. L*

$$\begin{array}{lllll}
2b5^4y^{4z} & +\ 2b\ \ 4z4\beta^1 5^3 y^{4z-1} & +\ 2b\ \ 4\beta^2 6_{\llcorner\llcorner}\dfrac{z,z-1}{1,2}{}_{\lrcorner\lrcorner}5^2y^{4z-2} & +\ 2b\ \ 4\beta^3 4_{\llcorner\llcorner}\dfrac{z,z-1,z-2}{1,2,3}{}_{\lrcorner\lrcorner}5^1y^{4z-3} & +\ 2\ b\ \ 4\beta^4 1\ {}_{\llcorner\llcorner}\dfrac{z,\ldots,z-3}{1,2,3,4}{}_{\lrcorner\lrcorner}\ 5^0y^{4z-4} \\
4.7\ . & 4.\qquad 7\ . & .\ 4.\quad .\qquad\qquad 7\ . & 4.\quad \ldots\qquad\qquad 7 & 4\ .\quad ..\qquad\qquad 7 \\
 & +\ 7\,ca\underline{\qquad\quad}\ \ldots & +\ 7\,ca\ \ 4\beta 3\ {}_{\llcorner\llcorner}z-1_{\lrcorner\lrcorner}\ \ldots\ldots & +\ 7\,ca\ \ 4\beta^2 3\ {}_{\llcorner\llcorner}\dfrac{z-1,z-2}{1,2}{}_{\lrcorner\lrcorner}\ \ldots . & +\ 7\ ca\ \ 4\beta^3 1_{\llcorner\llcorner}\dfrac{z-1,.,z-3}{6}{}_{\lrcorner\lrcorner}\ldots . \\
 & +\ 5\,..\qquad\quad \ldots & 5 & 5 & 5 \\
 & & +\ 5da^2\underline{\qquad\qquad\qquad}\ \ldots . & +\ 5da^2\ \ 4\beta 2\quad {}_{\llcorner\llcorner}\dfrac{z-2}{1}{}_{\lrcorner\lrcorner}\quad \ldots . & +\ 5\ da^2 4\beta^2 1\ {}_{\llcorner\llcorner}\dfrac{z-2,z-3}{2}{}_{\lrcorner\lrcorner}\ \ldots . \\
 & & 8 & 8 & 8 \\
 & & & +\ 4ea^3\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\ \ldots . & +\ 4\ ea^3\ \ 4\beta 1\quad {}_{\llcorner\llcorner}\dfrac{z-3}{1}{}_{\lrcorner\lrcorner}\quad \ldots . \\
 & & & 2 & 2\ .\quad \ldots \\
 & & & & +\ 8\ fa^4\underline{\qquad\qquad\qquad}\quad \ldots . \\
 & & & & 10\ .
\end{array}$$

Nominator ejusdem manet idem, mutatis tantum quibusdam literis, nempe cognitis, scilicet

$$\begin{array}{lllll}
10g\bullet\ .. & +10g\ \ \bullet\ .\quad .\ \bullet & +10g\quad ..\ .\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +10g\quad \ldots\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +10\ g\quad \ldots\qquad \ldots\qquad \bullet\ \bullet \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
 & +11ha\qquad .\ \bullet & +11ha\ \ .\ \ .\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +11ha\quad \ldots\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +11\ ha\quad \ldots\qquad \ldots\qquad \bullet\ \bullet \\
 & +13\,.. & 13 & 13 & 13 \\
 & & +13ka^2\underline{\qquad\qquad\qquad}\bullet\ \bullet & +13ka^2\quad \ldots\qquad .\qquad \bullet\ \bullet & +13\ ka^2\quad \ldots\qquad \ldots\qquad \bullet\ \bullet \\
 & & 14 & 14 & 14 \\
 & & & +14\ la^3\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\bullet\ \bullet & +14\ \ la^3\quad \ldots\qquad \ldots\qquad \bullet\ \bullet \\
 & & & 16 & 16 \\
 & & & & +16ma^4\underline{\qquad\qquad\qquad}\quad \bullet\ \bullet \\
 & & & & 17
\end{array}$$

---

1 *Am Rand:* $z,..,z-3 \sqcap z,z-1,z-2,z-3.$

1 $2b5^4y^{4z}$ *(1)* $+2b4z5^3y^{4z-1}+2b6_{\llcorner\llcorner}\frac{z,z-1}{1,2}{}_{\lrcorner\lrcorner}5^2y^{4z-2}+2b4_{\llcorner\llcorner}\frac{z,z-1,z-2}{1,2,3}{}_{\lrcorner\lrcorner}5^1y^{z-3}+2b1_{\llcorner\llcorner}\frac{z,\ldots,z-3}{1,2,3,4}{}_{\lrcorner\lrcorner}5^0y^{4z-4}4.7.4.7..4..7.4.\ldots 74..7+7ca3_{\llcorner\llcorner}z-1_{\lrcorner\lrcorner}.\ldots.$ *(2)* $2b4z4\beta^1 5^3y^{4z-1}$ *L* 5 $5da^2 4\beta^2 1 \mid {}_{\llcorner\llcorner}\frac{z-2,.,z-4}{2}{}_{\lrcorner\lrcorner}$ *ändert Hrsg.* $\mid .\ \ldots$ *L* 7 $4ea^3 4\beta 1 \mid {}_{\llcorner\llcorner}\frac{z-3,z-4}{1}{}_{\lrcorner\lrcorner}$ *ändert Hrsg.* $\mid .\ \ldots$ *L*

Differentia harum duarum fractionum quaerenda esset multiplicatione per crucem, sed cum illa futura sit prolixissima, sufficiet singulos terminos cum aliis de quibus mox loquar, conferendos excerpi.

Terminus summus I ǂ $2b$ $10g$ $5y^{ⓩ 4z}$
Numeratoris 4 . 11 . 7 ●
ǂ . . .. . . ● ● ● } ⊓ 0

Term. II ǂ $2b$ $\boxed{\frac{10g \;\; 4z4\beta}{11}}$ ǂ $10g$ $\boxed{\frac{2b \;\; 4z4\beta}{4}}$ ⊓ 0 } Unde habemus
4 11
$\boxed{\frac{11ha}{13}}$ ——— $\boxed{\frac{7ca}{5}}$ ———
$\boxed{\frac{7ca\;10g}{5\;\;11}}$ ——— $\boxed{\frac{11ha\;2b}{13\;\;4}}$

demonstrationem Theorematis, de evanescentibus semper duobus Terminis maximis Numeratoris differentiae.

---

6 *Am linken Rand:* I ǂz. ǂ z $\frac{5y^{ⓩ\,4z-1}}{7}$ ǂ z, $+z-1$. ǂ $z-1$, z.

2 prolixissima, *(1)* utile erit ea *(2)* eo *(3)* sufficiet *L* 4 summus *(1)* Nominatoris *(2)* Numeratoris *(a)* $+\frac{2b10g5y^{ⓩ4z}}{-4.11.7.}$ ⊓ $\frac{20n5y^{ⓩ4z}}{44\;7}$ idemqve *(aa)* $\frac{+2b}{+4.}$ ⊓ $\frac{20n}{44.}$ *(bb)* $\frac{10g}{11.}$ *(b)* ǂ$\frac{2b10g5}{4\;11}$ *(c)* I ǂ$\frac{2b10g5y^{ⓩ4z}}{4.11.7.}$ *(aa)* ⊓ ǂ . . . . . .● ● ● ⊓ I $\frac{20n5y^{ⓩ4z}}{44\;7}$ idemqve *(bb)* I $\frac{10n5y^{ⓩ4z}}{44\;7}$: ergo n ⊓ 0 } ⊓ 0 *L* 15 *(1)* $\frac{4,1,1,4}{}$ $y^{ⓩ4z-1}$ 3, 2, 2, 1 $y^{ⓩ4z-2}$ *(2)* II *(3)* I ǂz, | + z *gestr.* | ǂ | z, *gestr.* | z $\frac{5y^{ⓩ4z-1}}{7}$ ǂz, +z−1. ǂz−1, z. | III $\frac{5y^{ⓩ4z-2}}{7}$ ǂz, z−2.z−1, z−1 *gestr.* | *L*

7 ǂ $\frac{2b}{4}$ $\boxed{\frac{10g\;\;4z4\beta}{11}}$ | $\boxed{\frac{5y^{ⓩ4z-1}}{7}}$ *gestr.* | ǂ $\frac{10g}{11}$ $\boxed{\frac{2b\;\;4z4\beta}{4}}$ *L* 14–218,1 differentiae. | Exponentes Term I.
$\boxed{\frac{11ha}{13}}$ ——— . ● ● ●● $\boxed{\frac{7ca}{5}}$ ———
$\boxed{\frac{7ca\;10g}{5\;\;11}}$ ——— . ● ● ●● $\boxed{\frac{11ha2b}{13\;\;4}}$

(1) ǂ, zSA + zIP, , ǂ, zIP + zSA ⊓ 0 T *(2)* ⓩ 4z − 1 ⊓ ǂ, zSA + zIP, , ǂ, zIP + zSA ⊓ 0 Term II. ⓩ 4z − 2 ⊓ ǂ *erg. u. gestr.* | Sed *L*

Sed antequam pergamus, tentemus rescindere laborem calculi inutilem, inde ab initio: ad hoc enim praestandum generales ejusmodi formulae sunt in primis utiles, cum ea ratione plerumque etiam theoremata memorabilia offerantur; nam exempli causa, Methodus Huddeniana de Maximis et Minimis ejusmodi rescissionum consectarium est, ut Hugenius quoque ex Fermatiana Methodo ostendit.

Itaque formulam Anteriorem, sive sumtam, appellabimus $\underline{A}$. Posteriorem seu in qua pro y substituimus $y+\beta$. appellemus $\underline{P}$. Numeratorem quia Superior in qualibet formula appellemus S, Nominatorem quia inferior vocemus I. Termini autem qui reperiuntur in AS, vel AI, vel PS, vel PI. nominabuntur ab exponentibus nempe zAS. $z-1, AI$. $z-2, PS$ etc. Jam primum hos terminos inter se comparabimus: nempe Terminos ipsius P, operae pretium erit explicare per terminos ipsius A. nempe

3–5 Methodus: J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. 5 Hugenius ... ostendit: Chr. Huygens, *Demonstratio regulae de maximis et minimis*, 1667 (Ms., gedr. in *Ouvrages*, 1693, S. 326 bis 330; *HO* XX S. 228–241).

$$PS_{\overline{y}}z \quad \sqcap bASz$$
$$.\ I\ . \qquad g\,.\,I\,.$$
$$PS_{\overline{y}}z-1\sqcap bASz \quad \frown z \quad \beta+caASz-1$$
$$.\ I\ . \quad .\ g\,.\,I\,. \quad . \quad .\ +ha\,.\,I\,.-.$$
$$PS_{\overline{y}}z-2\sqcap bASz \ \frac{z,z-1}{1,2}\ \beta^2+caASz-1 \ \frac{z-1}{1}\ \beta+da^2ASz-2$$
$$.\ I\ . \quad .\ g\,.\,I\,. \quad . \quad +ha\,.\,I\,. \quad . \quad . \quad +ka^2\,.\,I\,. \quad .$$
$$PS_{\overline{y}}z-3\sqcap bASz \ \frac{z,.,z-2}{1,2,3}\ \beta^3+caASz-1 \ \frac{z-1,z-2}{1,2}\ \beta^2+da^2ASz-2 \ \frac{z-2}{1}\ \beta+ea^3ASz-3$$
$$I \quad g\ \ I \quad ha\ \ I \quad ka^2\ \ I \quad la^3\ \ I$$
$$PS_{\overline{y}}z-4\sqcap bASz \frac{z,.,.,z-3}{1,2,3,4}\beta^4+caASz-1\frac{z-1,.,z-3}{1,2,3}\beta^3+da^2ASz-2\frac{z-2,z-3}{1,2}\beta^2+ea^3ASz-3\frac{z-3}{1}\beta+fa^4ASz-4$$
$$I \quad g\ \ I \quad +ha\ \ I \quad ka^2\ \ I \quad la^3\ \ I \quad ma^4\ \ I$$

218,11–219,8 nempe *(1)* $\mathrm{PSz} \sqcap \mathrm{ASz}$ | $\mathrm{PSz}-1 \sqcap \mathrm{ASz} \frown z\, \beta + \mathrm{ASz}-1$ *(a)* $\mathrm{PSz}-2$ *(b)* $\mathrm{yPSz}-2$ *(2)* $\mathrm{PS}_{\overline{\mathrm{y}}}\mathrm{z} \sqcap \mathrm{ASz}$ | $\mathrm{PS}_{\overline{\mathrm{y}}}\mathrm{z}-1 \sqcap \mathrm{ASz} \frown z\, \beta + \mathrm{ASz}-1$

$.\mathrm{I}. \quad .\mathrm{I}. \quad .\mathrm{I}. \quad . \quad .\mathrm{I}. \quad ..+.\mathrm{I}... \quad .\mathrm{I}... \quad .\mathrm{I}... \quad .\mathrm{I}. \quad .\mathrm{I}. \quad .\mathrm{I}. \quad . \quad .\mathrm{I}. \quad ..+.\mathrm{I}...$

$\mathrm{PSz}-3 \quad \mathrm{yPSz}-3$

$.\mathrm{I} \quad .\mathrm{I}$

$\mathrm{PS}_{\overline{\mathrm{y}}}\mathrm{z}-2 \sqcap \mathrm{ASz} \frac{\mathrm{z},\mathrm{z}-1}{1,2}\ \beta^2+\mathrm{ASz}-1\frac{\mathrm{z}-1}{1}\ \beta+\mathrm{ASz}-2$ *(3)* $\mathrm{PS}_{\overline{\mathrm{y}}}\mathrm{z}\ L$

$.\mathrm{I}... \quad .\mathrm{I}. \quad . \quad +.\mathrm{I}. \quad . \quad . \quad +.\mathrm{I}. \quad .$

$\mathrm{PS}_{\overline{\mathrm{y}}}\mathrm{z}-3 \sqcap \mathrm{ASz}\frac{\mathrm{z},.,\mathrm{z}-2}{1,2,3}\beta^3+\mathrm{ASz}-1\frac{\mathrm{z}-1,\mathrm{z}-2}{1,2}\beta^2+\mathrm{ASz}-2\frac{\mathrm{z}-2}{1}\beta$

$.\mathrm{I} \quad \mathrm{I} \quad \mathrm{I} \quad \mathrm{I}$

Atque ita habemus formulam quae una est ex utilissimis totis Analyseos, continuata enim exhibet generaliter E x p l i c a t i o n e m f o r m u l a e c u j u s c u n q u e per binomium. Unde facile habetur et explicatio trinomii, scilicet explicando rursus ipsam β. per binomium; et per consequens habetur explicatio formulae cujuscunque per polynomium quodcunque. Progressiones hic occurrunt et harmoniae quocunque te vertas, et sufficiet inspexisse Tabulam, ad eas advertendas. Quot autem harmoniae, tot deteguntur theoremata generalia omnibus formulis communia, quae manifestum est, ex ipsa combinationum natura suam originem habere.

Illud praeterea notandum est videri posse in hac Tabula sive formula generali vel literas $\begin{matrix} b\,c\,d \\ g\,h\,k \end{matrix}$ vel exponentes terminorum, ut ASz. $ASz-1$. $ASz-2$. superfluas, cum una alterae indigitentur: verum usum hunc habet earum conjunctio, ut ex ipsa statim Tabula appareant exponentes pariter et literae. Literae quidem, ut reliquus calculus literarum absolvi possit, exponentes, ut generalia de exponentibus theoremata facilius condantur. Omisi autem numeros probatorios hoc loco, ne formulam plane novam, et per se multiplicem adhuc magis onerarem; praesertim cum in his formulis ipsis numeris probatoriis careri possit; nam ipsae series non interruptae neque dissimiles sibi probationis sunt loco. Operae pretium autem est formulam hanc inventam scribere paulo distinctius, ut ejus constitutio magis oculis objiciatur:

1 f. Analyseos, *(1)* exhibet enim *(2)* |continuata enim *erg.*| exhibet generaliter *(a)* Potestatem binomii cuiuscunqve *(b)* E x p l i c a t i o n e m *L* 5 qvodcunqve *(1)* progressio hic occurrit *(2)* Progressiones *L* 6 et *(1)* loco *(2)* sufficiet *L* 9 est *(1)* tametsi *(2)* videri posse *(a)* vel literas *(b)* in *L* 10 vel *(1)* series *(2)* exponentes *L* 12 appareant *(1)* series *(2)* exponentes *L* 12 literae. *(1)* Expo *(2)* Literae *L* 12 literarum *erg.* *L* 13 ut *(1)* reliqvus calcul *(2)* generalia *L*

Formula Explicatrix formulae cujuscunque:

$$P\left\{\begin{array}{l} S\,\overline{y}^{\,z} \\ I\ .\ \cdot \end{array}\right. \sqcap \left\{\begin{array}{l} b\ A \\ g\ . \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S\,z\,1 \\ I\ . \end{array}\right. \quad \beta^0 \Big|$$

$$P\left\{\begin{array}{l} S\,\overline{y}^{\,z-1} \\ I\ \ \cdot\ \ . \end{array}\right. \sqcap \left\{\begin{array}{l} b\ A \\ g \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S\,z\,z \\ I \end{array}\right. \quad \beta^1 \Big| + \left\{\begin{array}{l} ca\ A \\ ha \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S\,z-1\,1 \\ I \end{array}\right. \quad \beta^0 \Big|$$

$$\cdot\ \ :\ \cdot\ {}^{z-2} \sqcap\ \ :\ \cdot\ \ :\ \cdot\ \frac{z,z-1}{1,2}\ \beta^2 \Big| +\ :\ \cdot\ \ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-1}{1}\ \beta^1 \Big| + \left\{\begin{array}{l} da^2\ A \\ ka^2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} S\,z-2\,1 \\ I \end{array}\right. \quad \beta^0 \Big|$$

$$\cdot\ \ :\ \cdot\ {}^{z-3} \sqcap\ \ :\ \cdot\ \ :\ \cdot\ \frac{z,.,z-2}{1,2,3}\ \beta^3 \Big| +\ :\ \cdot\ \ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-1,z-2}{1,2}\ \beta^2 \Big| +\ :\ \cdot\ \ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-2}{1}\ \beta^1 \Big| \begin{array}{l} +\,ea^3\ A\,S\,z-3\,1 \\ \ \ la^3\quad I \end{array} \quad \beta^0 \Big|$$

$$\cdot\ \ :\ \cdot\ {}^{z-4} \sqcap\ \ :\ \cdot\ \ :\ \cdot\ \frac{z,.,.,z-3}{1,2,3,4}\ \beta^4 \Big| +\ :\ \cdot\ \ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-1,.,z-3}{1,2,3}\ \beta^3 \Big| +\ :\ \cdot\ \ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-2,z-3}{1,2}\ \beta^2 \Big| +:\ \ \cdot\ :\ \cdot\cdot\ \frac{z-3}{1}\ \beta^1 \Big| \begin{array}{l} +\,fa^4\ \ A\,S\,z-4\,1\ \beta^0 \\ \ \ ma^4\quad I \end{array}$$

Ubi considerandum est simplicissimum constructionis Tabulae fundamentum sumendum esse non tam in perpendiculari aut horizontali etsi hic quoque non desunt harmoniae, sed transversali, ita enim transversaliter habetur: z. $z-1$. $z-2$. $z-3$. $z-4$. et 1 1 1 1 1. | | et $\frac{z}{1}$. $\frac{z-1}{1}$ $\frac{z-2}{1}$ $\frac{z-3}{1}$ | | $\frac{z, z-1}{1,2}$. $\frac{z-1, z-2}{1,2}$. $\frac{z-2, z-3}{1,2}$ | | $\frac{z, ., z-2}{1,2,3}$. $\frac{z-1, ., z-3}{1,2,3}$ | | $\frac{z, ., ., z-3}{1,2,3,4}$ |. Eodem modo crescunt decrescuntve transversaliter potentiae ipsarum β et a. Sed et notandum z parentheticum semper tot esse dimensionum, quot β ascriptum, v. g. in $\frac{z, ., z-2}{1,2,3}\beta^3$, id est $\frac{z, z-1, z-2}{1,2,3}\beta^3$ ductis his in se invicem assurgetur ad z^3. ubi notandum est, maximum numerum dividentem, ex his, 1, 2, 3. esse 3. Innumerae id genus observari possent harmoniae sed ut ad rem denique nostram veniamus, examinandum jam est, si formula explicatrix ducatur per crucem in explicatam quid inde proveniat: Nimirum Numerator producti erit ǂ Aggregatum Combinationum omnium Terminorum AS cum omnibus Terminis PI, singulorum unius cum omnibus alterius; ǂ aggregatum Combinationum omnium Terminorum AI, cum omnibus Terminis PS. Nominator vero: combinationes omnium terminorum AI, cum omnibus PI. Ex his combinationibus eas in unum colligemus, quae ad unum assurgunt ipsius y exponentem z. Et quidem maximus omnium $2z$. Nam combinationibus fiunt multiplicationes quantitatum, et additiones exponentium. Habebimus ergo terminos hos: $2z$. $2z-1$. $2z-2$. $2z-3$. $2z-4$. $2z-5$. $2z-6$. $2z-7$. $2z-8$. etc. Jam $2z$. componi potest non nisi ex $z+z$, ut scilicet neuter terminorum excedat z. Itaque fiet

$$\begin{array}{l} DS2z \sqcap ǂb\, A\, S, z + P\, I, z \\ \qquad\quad ǂg\ .\ I\ \ .+\ .\ S\ \ . \end{array}$$

1 Tabulae *erg.* *L* 4 $\frac{z-3}{1}$ *(1)* $\frac{z-4}{}$ *(2)* | | $\frac{z, z-1}{1,2}$ *L* 5 $\frac{z-1, ., z-3}{1,2,3}$ | | | $z, ., ., z-3$ *ändert Hrsg.* | |. Eodem *L* 11 proveniat: *(1)* Nimirum faciendae sunt omnes Terminorum AS, cum omnibus terminis PI, et contra om *(2)* Nimirum *(a)* Nominator *(b)* Numerator producti erit *(aa)* Combinat *(bb)* ǂ *L* 14 Terminorum *(1)* PI *(2)* AI *L* 15 terminorum *(1)* AS *(2)* AI *L* 15 omnibus *(1)* A *(2)* PI. *L* 17 exponentium. *(1)* Combi *(2)* habebimus *L* 18 $2z-4$. *(1)* Ex $2z-5$. $2z-6$ *(2)* $2z-5$. *L* 20 excedat z. *(1)* Eodem modo eadem *(2)*, itaqve *L* 21–223,1 DS2z ⊓ *(1)* ǂ⌞AS, z+PI, z⌟ǂ⌞AI, z+PS, z⌟ *(2)* ǂ AS, z + PI, z *(3)* ǂ bAS, z + PI, z *(a)* nempe terminum superiorem cuius exponens sit 2z, differi
ǂ . I .+ .S . ǂ g . I .+ .S .
Numer *(b)* s⟨–⟩ *(c)* id est *L*

Id est in $\underline{D}$ifferentiae parte $\underline{S}$uperiore seu Numeratore; terminum cujus exponens $2z$. componi ex duabus quantitatibus; una Signo † altera Signo ‡ affecta ita ut prior fiat ex ductu termini exponentem habentis z in $\underline{A}$nterioris formulae nempe explicandae $\underline{S}$uperiore parte seu Numeratore reperti; in terminum ejusdem exponentis, z, in PI, seu $\underline{P}$osterioris formulae, nempe explicatricis parte $\underline{I}$nferiore seu Nominatore reperti. Jam explicando PI, z et PS, z per valores supra inventos, fiet $DS2z \sqcap 0$.

$$\begin{array}{llllll}
DS, 2z-1 \sqcap & \dagger\, b & AS, z & & +PI, z-1 \\
& \ddagger\, g & .\ I\ . & & +.\ S \\
& \dagger\, ca & AS, z-1 & + & PI\ \ z \\
& \ddagger\, ha & \ \ I & & \ \ S
\end{array}$$

Ubi rursus explicando $\underset{A}{PI}, z-1$. et $\underset{A}{PI}, z$ per valores supra inventos fiet $DS, 2z-1 \sqcap 0$.

3 termini *(1)* AS (id est anteri *(2)* exponentem *L* 3 nempe explicandae *erg. L* 4 reperti; *(1)* ⟨–⟩ in ⟨–⟩ *(2)* In *L* 7–10 $DS, 2z-1 \sqcap$ *(1)* $\dagger AS, z+PI, z-1 \ \dagger AS, z-1+PI, z \ \ddagger AI, z+PS\cancel{z}\ \ .\ddagger\ .\ I\ .\ \ .+.\ S\ .$ *(2)*

$$\begin{array}{llll}
\dagger AS, z & & +PI, z-1 \\
\ddagger\ .\ I\ . & & +.\ S \\
\dagger AS & z-1 & +\ PI\ \ z \\
\ddagger\ \ I & & \ \ S
\end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{lllll}
\dagger\, b & AS, z & & +PI, z-1 & L \\
\ddagger\, g & .\ I\ . & & +.\ S & \\
\dagger\, ca & AS\ \ z-1 & + & PI\ \ z & \\
\ddagger\, ha & \ \ I & & \ \ S &
\end{array}$$

$$DS, 2z-2\sqcap \begin{cases} \ddagger b & A \begin{cases} S,z \\ I. \end{cases} \\ \ddagger g & . \end{cases} \quad \boxed{+\ P \begin{cases} I, z-2 \\ S\ .\ . \end{cases}} \quad \overset{IIII}{\boxed{\begin{cases} gAIz \\ b\ \ S \end{cases} \binom{z, z-1}{1,2} \beta^2}} + \begin{matrix} haAI \overset{III}{z-1} \\ ca\ \ S \end{matrix} \binom{z-1}{1} \beta^1 + \begin{matrix} ka^2AI\ z \\ da^2\ \ S \end{matrix}\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} ca \\ ha \end{matrix} \cdot \quad : z-1 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-1} \quad \overset{III}{\boxed{: \cdot : \cdot \binom{z}{1} \beta^1}} \overset{II}{\boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ (1)\ \beta^0}}$$

$$: \begin{matrix} da^2 \\ ka^2 \end{matrix} \cdot \quad : z-2 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-0} \quad \underset{I}{\boxed{: \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}}$$

$$DS, 2z-3\sqcap \quad : \begin{matrix} b \\ g \end{matrix} \cdot \quad : z \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-3} \quad : \cdot : \cdot \binom{z, ., z-2}{1,2,3} \beta^3 + : \cdot : \overset{V}{\cdot}\ \cdot \binom{z-1, z-2}{1,2} \beta^2 + : \cdot : \overset{III}{\cdot}\ \cdot \binom{z-2}{1} \beta^1 + \begin{matrix} la^3 \\ ea^3 \end{matrix} A \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \overset{I}{\boxed{z}} - 3\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} ca \\ ha \end{matrix} \cdot \quad : z-1 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-2} \quad \overset{V}{\boxed{: \cdot : \cdot \binom{z, z-1}{1,2} \beta^2}} \overset{IIII}{\boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot \binom{z-1}{1} \beta^1}} + : \cdot : \overset{II}{\boxed{\cdot\ \cdot}}\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} da^2 \\ ka^2 \end{matrix} \cdot \quad : z-2 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-1} \quad \overset{III}{\boxed{: \cdot : \cdot \binom{z}{1} \beta^1}} \underset{II}{\boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ (1)\ \beta^0}}$$

$$: \begin{matrix} ea^3 \\ la^3 \end{matrix} \cdot \quad : z-3 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-0} \quad \overset{I}{\boxed{: \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}}$$

$$DS, 2z-4\sqcap \quad : \begin{matrix} b \\ g \end{matrix} \cdot \quad : z \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-4} \quad : \cdot : \cdot \binom{z, ., ., z-3}{1,2,3,4} \beta^4 + : \cdot : \cdot\ \overset{VII}{\cdot} \binom{z-1, ., z-3}{1,2,3} \beta^3 + : \cdot : \overset{VI}{\cdot}\ \cdot \binom{z-2, z-3}{1,2} \beta^2\ 2 + : \cdot : \overset{IIII}{\cdot}\ \cdot \binom{z-3}{1} \beta^1 + \begin{matrix} ma^4 \\ fa^4 \end{matrix} A \begin{matrix} I \\ S \end{matrix} \underset{I}{\boxed{z}} - 4\ (1)\ \beta^0$$

$$: \begin{matrix} ca \\ ha \end{matrix} \cdot \quad : z-1 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-3} \quad \overset{VIII}{\boxed{: \cdot : \cdot \binom{z, ., z-2}{1,2,3} \beta^3}} + : \cdot : \cdot\ \cdot \binom{z-1, z-2}{1,2} \beta^2 + : \cdot : \underset{V}{\cdot}\ \cdot \binom{z-2}{1} \beta^1\ 1\ [+]\ : \cdot : \underset{II}{\cdot}\ \cdot\ (1)\ \beta^0\ 1$$

$$: \begin{matrix} da^2 \\ ka^2 \end{matrix} \cdot \quad : z-2 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-2} \quad \overset{VI}{\boxed{: \cdot : \cdot \binom{z, z-1}{1,2} \beta^2}} \overset{V}{\boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot \binom{z-1}{1} \beta^1}} \underset{III}{\boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ (1)\ \beta^0}}$$

$$: \begin{matrix} ea^3 \\ la^3 \end{matrix} \cdot \quad : z-3 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-1} \quad \overset{IIII}{\boxed{: \cdot : \cdot \binom{z}{1} \beta^1}} \underset{II}{\boxed{+\ : \cdot : \cdot\ \cdot\ (1)\ \beta^0}}$$

$$: \begin{matrix} fa^4 \\ ma^4 \end{matrix} \cdot \quad : z-4 \quad \boxed{+\ \cdot\ \ : z-0} \quad \underset{I}{\boxed{: \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}}$$

12 f. $\boxed{+\cdot : z-1}$ | $\overset{IIII}{\boxed{: \cdot : \cdot \binom{z}{1} \beta^1}}$ *ändert Hrsg.* | $\underset{II}{\boxed{+\ : \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}}$: | $\begin{matrix} \mathrm{fa}^4 \\ \mathrm{ma}^4 \end{matrix}$ *erg.* | $\cdot : z-4$ | $+\cdot : z-0$ *ändert Hrsg.* | $\underset{I}{\boxed{: \cdot : \cdot\ (1)\ \beta^0}}$ *L*

$$
\begin{array}{llllll}
DS, 2z-5\,\sqcap & \cancel{:\dfrac{b}{g}} & \cancel{\cdot} & \cancel{:\; z \quad +\cdot} & \cancel{:\; z-5} \\
& :\dfrac{ca}{ha} & \cdot & :\; z-1+\cdot & :\; z-4 \\
& :\dfrac{da^2}{ka^2} & \cdot & :\; z-2+\cdot & :\; z-3 \\
& :\dfrac{ea^3}{la^3} & \cdot & :\; z-3+\cdot & :\; z-2 \\
& :\dfrac{fa^4}{ma^4} & \cdot & :\; z-4+\cdot & :\; z-1 \\
& : & \cdot & \cancel{:\; z-5+\cdot} & \cancel{:\; z-0} \\
DS, 2z-6\,\sqcap & \cancel{:} & \cancel{\cdot} & \cancel{:\; z \quad +\cdot} & \cancel{:\; z-6} \\
& \cancel{:} & \cancel{\cdot} & \cancel{:\; z-1+\cdot} & \cancel{:\; z-5} \\
& :\dfrac{da^2}{ka^2} & \cdot & :\; z-2+\cdot & :\; z-4 \\
& :\dfrac{ea^3}{la^3} & \cdot & :\; z-3+\cdot & :\; z-3 \\
& :\dfrac{fa^4}{ma^4} & \cdot & :\; z-4+\cdot & :\; z-2 \\
& \cancel{:} & \cancel{\cdot} & \cancel{:\; z-5+\cdot} & \cancel{:\; z-1} \\
& \cancel{:} & \cancel{\cdot} & \cancel{:\; z-6+\cdot} & \cancel{:\; z-0} \\
DS, 2z-7\,\sqcap & \left\{\begin{array}{l} \dagger \\ \ddagger \end{array}\right. & \begin{array}{l} A \\ . \end{array} & \left\{\begin{array}{l} S, \cancel{z \quad +P} \\ I\; \cancel{.\quad .\quad .} \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} \cancel{I\; z-7} \\ \cancel{S\; .\; .\; .} \end{array}\right. \\
& : & \cdot & :\; \cancel{z-1+\cdot} & \cancel{:\; z-6} \\
& : & \cdot & :\; \cancel{z-2+\cdot} & \cancel{:\; z-5} \\
& :\dfrac{ea^3}{la^3} & \cdot & :\; z-3+\cdot & :\; z-4 \\
& :\dfrac{fa^4}{ma^4} & \cdot & :\; z-4+\cdot & :\; z-3 \\
& : & \cdot & :\; \cancel{z-5+\cdot} & \cancel{:\; z-2}
\end{array}
$$

---

14 *Darüber:* Plag. 2. Schediasmatis de formulis omnium Dimensionum

1 $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{g}}$ *erg. L* 2 $\frac{\mathrm{ca}}{\mathrm{ha}}$ *erg. L* 3 $\frac{\mathrm{da}^2}{\mathrm{ka}^2}$ *erg. L* 4 $\frac{\mathrm{ea}^3}{\mathrm{la}^3}$ *erg. L* 5 $\frac{\mathrm{fa}^4}{\mathrm{ma}^4}$ *erg. L* 9 $\frac{\mathrm{da}^2}{\mathrm{ka}^2}$ *erg. L* 10 $\frac{\mathrm{ea}^3}{\mathrm{la}^3}$ *erg. L* 11 $\frac{\mathrm{fa}^4}{\mathrm{ma}^4}$ *erg. L* 13 ~~: · : z − 6 + · : z − 0~~ | vide seq plag *gestr.* | DS, 2z − 7 *L* 18 $\frac{\mathrm{ea}^3}{\mathrm{la}^3}$ *erg. L* 19 $\frac{\mathrm{fa}^4}{\mathrm{ma}^4}$ *erg. L*

$$
\begin{array}{rccll}
 & : & \cdot & : \cancel{z-6+\cdot} & \cancel{: z-1} \\
 & : & \cdot & : \cancel{z-7+\cdot} & \cancel{: z-0} \\
DS, 2z-8 \sqcap & : & \cdot & : \cancel{z \quad +\cdot} & \cancel{: z-8} \\
 & : & \cdot & : \cancel{z-1+\cdot} & \cancel{: z-7} \\
 & : & \cdot & : \cancel{z-2+\cdot} & \cancel{: z-6} \\
 & : & \cdot & : \cancel{z-3+\cdot} & \cancel{: z-5} \\
 & : & \dfrac{fa^4}{ma^4}\cdot & : z-4+\cdot & : z-4 \\
 & : & \cdot & : \cancel{z-5+\cdot} & \cancel{: z-3} \\
 & : & \cdot & : \cancel{z-6+\cdot} & \cancel{: z-2} \\
 & : & \cdot & : \cancel{z-7+\cdot} & \cancel{: z-1} \\
 & : & \cdot & : \cancel{z-8+\cdot} & \cancel{: z-0}
\end{array}
$$

Ista assumtio ipsius z. hunc habet usum, ut ipse exponens dimensionis pro arbitrio sumi, et ita problemata alioquin insolubilia forte solvi possint. Hac enim ratione efficitur, ut exponens dimensionis ingrediatur ipsas quantitates. Efficere praeterea possumus, ut cessent omnes destructiones, si scilicet in Nominatore seu I exponens non sit z ut in Numeratore seu S. verum alius, v. g. μ. Ita enim etsi aliquae eveniant destructiones, operae pretium tamen erit eas dissimulare, et sine destructione relinquere; cum duae ita in cujuslibet differentiae Termini quantitate cognita habeantur series, una pendens a z. altera ab μ. et una quaeque valde regularis et simplex, pendens a numeris combinatoriis.

Nota si sit exponens, e. g. $\sqrt{3}$. $\sqcap$ z v. g. $y^{\sqrt{3}}$. et pro y velis ponere $x+\beta$ videamus quomodo $x+\beta$ multiplicari possit in se secundum exponentem $\sqrt{3}$ sane si secundum regulam quandam generalem binomiorum scribas, ut supra; continuanda erit in infinitum operatio. Nam faciendo $z-1$ $z-2$ $z-3$. etc. patet jam 2 esse $\sqcap$ quam z adeoque exponentes fieri nihilo minores; exponentes autem nihilo minores significant divisiones loco multiplicationum; poterit ergo in infinitum continuari progressio; et vicissim seriei hujus infinitae summa erit binomii potentia secundum exponentem z. Itaque si z non sit numerus rationalis, explicatio, subtrahendo ab exponente, unitates fiet semper infinita. Et ecce novam accessionem ad doctrinam de summa serierum infinitarum. Sed quid si

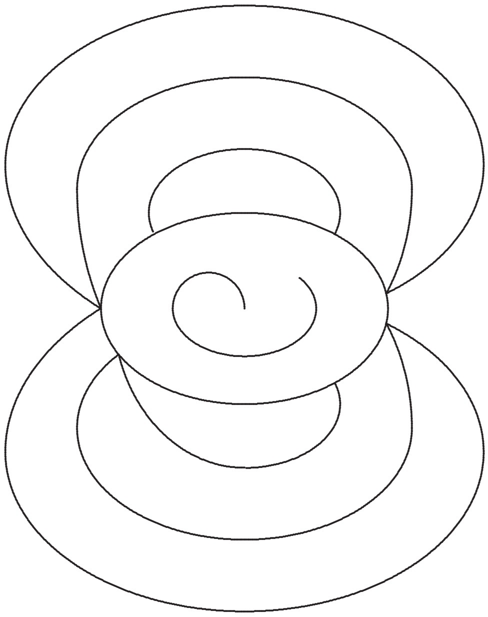
7 $\dfrac{\mathrm{fa}^4}{\mathrm{ma}^4}$ *erg. L* 12 ut *(1)* ⟨–⟩ *(2)* ipse *(a)* pro *(b)* exponens *(aa)* aeqvationis *(bb)* dimensionis *L* 14 qvantitates. *(1)* Ingrediamur *(2)* Inqviramus itaqve in *(a)* qvanti *(b)* formulam, cuius differentia *(aa)* sit $\dfrac{1}{\mathrm{y}^2+\dfrac{\beta}{2}\mathrm{y}\,*}$ *(bb)* sit ea *(aaa)* $\mathrm{y}^{\mathrm{z}}+$ *(bbb)* $\dfrac{\mathrm{by}^{\mathrm{z}}+\mathrm{cay}^{\mathrm{z}-1}}{}$ *(3)* Efficere *L* 18 in *(1)* qvalibet *(2)* cuiuslibet differentiae *(a)* Cogni *(b)* Termini *L* 23 jam *(1)* z − 2 *(2)* z − 0 *(3)* 2 *L*

ipsam z hoc loco $\sqrt{3}$ dividas in partes aequales pro arbitrario, v. g. $\dfrac{z}{3}$, aut si numerum partium aequalium definire nolis initio: $\dfrac{z}{\mu}$. fiet enim $z - \dfrac{z}{\mu}$. $z - \dfrac{2z}{\mu}$ etc. et μ erit numerus rationalis.

Quid si μ sit numerus irrationalis non video commodum exprimendi modum, quemadmodum et nondum video rationem explicandi binomium, ope exponentis secti in partes inaequales. Illud primo in numeris experiundum, et inde ad caetera traducendum foret: Caeterum ex his in mentem venit, etiam rationalium exponentium potestates explicari posse binomiis infinitis, nempe si sit: $y^{z-\mu}$ $y^{z-2\mu}$. $y^{z-3\mu}$. pone z. et μ. sive rationales sive irrationales esse inter se incommensurabiles aut certe multiplicatos per numeros naturales uno μ, nunquam productum alteri z. coincidere; tunc certe in infinitum producetur explicatio. Ut autem finita sit explicatio non est necesse ipsam μ esse unitatem, sed tantum ipsi z. commensurabilem per numerum naturalem. Sed quidsi jam longius adhuc progrediamur, et loco $-\mu$ -2μ -3μ, adhibeamus: -2μ -4μ -6μ, -8μ. vel etiam incipiendo aliter. $-\mu$ -3μ -5μ -7μ. ubi quaeritur an semper incipiendum sit necessario ab unitate, et an intervallum sumi possit quodlibet.

Nimirum Tabula numerorum combinatoriorum condi potest, non tantum etsi generator non sit unitas, sed etiam etsi sit numerus irrationalis. Finge jam aliud: in Tabula quadam numerorum combinatoriorum quaeri medios, aut bimedios, aut trimedios etc. Sed et finge continua ejusmodi mediarum interpositione describi lineas combinatorias, quibus repraesentantur numerorum figuratorum progressiones. Videndum an secando has lineas in partes inaequales, sed invicem respondentes binomiorum tamen potestates exprimi queant. Tantum sumendum est Triangulum Arithmeticum et in partes inaequales secandum, etc. Ut autem ista universaliter demonstrentur; dividenda quaelibet potestas in infinitas ratiunculas; et ostendendum ista coincidere cum lineis istis combinatoriis.

1 $\dfrac{z}{3}$, *(1)* seu $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ item qvid si *(2)* aut *L* 6 f. foret: *(1)* nempe y^4 *(2)* Caeterum *L* 8 pone *(1)* μ esse numerum vel *(2)* z *L* 9 incommensurabiles *(1)* usus aut certe multiplicatione *(2)* aut *L* 9 f. numeros *(1)* num *(2)* naturales *(a)* nunqva *(b)* uno *L* 20 qvibus | repraesentur *ändert Hrsg.* | *(1)* numeris figuratis *(2)* numerorum *L* 24 cum *(1)* numeris *(2)* lineis *(a)* figurarum *(b)* istis *L*



[*Fig. 1*]

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$			
$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$			
$\frac{1}{2}$	1	3	6		
	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$			
$\frac{1}{2}$	1	4			
	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{2}$	1				

Nimirum manifestum est, si generator non sit unitas sed $\frac{1}{2}$ et ita porro subdividendo in infinitum. Adeoque intelligi potest sumto quolibet generatore, si modo unus coincidat coincidere omnes.

3 $\frac{1}{2}$ *(1)* 0 *(2)* 1 *L* 5 $\frac{1}{2}$ *(1)* 0 *(2)* 1 *L* 7 $\frac{1}{2}$ *(1)* 0 *(2)* 1 *L* 9 $\frac{1}{2}$ *(1)* 0 6 *(2)* 1 *L*

2–11 $\frac{1}{2}$ ... 4 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1: Leibniz versucht, durch Interpolation ein Pascalsches Dreieck mit Basis $\frac{1}{2}$ aus einem Dreieck zur Basis 1 zu erzeugen. Dafür müsste er eigentlich nur wie in S. 234 Z. 2–6 bei allen Einträgen des Dreiecks mit Basis 1 den Nenner $\overline{\ 2\ }$ ergänzen.

Esto ergo Theorema: Figura combinatoria quaelibet coincidit cuilibet, quicunque sit generator, modo unitas sit eadem: Hinc etsi diversa sit unitas omnia tamen proportionalia sunt, sive, diversae Figurae Combinatoriae sunt similes inter se. Figuram autem Combinatoriam voco, cujus curva transit per extremitates omnium rectarum numeros combinatorios, secundum ordines numericos repraesentantium, a d h i b i t a interpolatione indefinite continuata. Si interpolatio in infinitum absolvi intelligatur, et Figurae Combinatoriae reddantur Geometricae (: hactenus enim non nisi Arithmeticae sunt, desinent: Triangulares in parabolam; pyramidales in paraboloeidem cubicam simplicem; et caetera in paraboloeides simplices altiores [:)].

In transversali Tabulae Combinatoriae, ut H. E. C. F. D. G. terminus quilibet, ut E est ad proxime superiorem, ut numerus inferiorum cum ipsa E, ad numerum superiorum cum ipsa C. sive ut numerus ordinis ipsius inferioris E, ad exponentem ordinis ipsius superioris C. nempe ut numerus ipsarum H. E, nempe 2, ad numerum ipsarum C. F. D. G. nempe 4. Summa ergo semper numerus terminorum lineae transversalis hoc loco 6.

Itaque si omnes sequentes, ab aliqua praecedente vel superiore vel inferiore deriventur, et intervallum ordinis primi, quod hoc loco per unitatem repraesentatur appelletur β, et numerus omnium terminorum lineae transversalis vocetur q, tunc uno ex terminis cujus ope scilicet alii investigandi sunt, appellato z, fiet Terminus sequens ad hunc h, ut

1 qvaelibet | concidit *ändert Hrsg.* | cuilibet, *L*   4 f. numeros *(1)* Triangul *(2)* combinatorios *L*   5 f. interpolatione *(1)* in infinitum continuata *(2)* indefinite *L*   7 f. sunt, *(1)* | degenerabunt in *nicht gestr.* | *(2)* desinent *L*   8 cubicam | *(1)* puram *(2)* simplicem *erg.* |; et *L*   9 paraboloeides *(1)* altiores *(2)* simplices *L*   10 In *(1)* basi *(2)* transversali *L*   10 G. *(1)* num *(2)* terminus *L*   11 proxime *(1)* seqventem, ut *(2)* superiorem, *(a)* | ut *nicht gestr.* | *(aa)* G *(bb)* C *(b)* ut *L*   12 ut *(1)* exponens ordinis *(2)* numerus ordinis *(a)* demto ⟨un⟩ *(b)* pri *(c)* inferioris *(d)* ipsius *L*   19 fiet *(1)* z *(2)* ut *(a)* terminus seqvens, ad hunc; ut z, sive hic ipse ad $q - z$ adeoqve: Terminus seqvens $\sqcap \dfrac{z^2}{q-z}$, et terminus tertius seu seqvens seqventem, ad seqventem $z^2 \smile q - z$, ut ipse seqvens $z^2 \smile q - z$, ad $q, -, z^2 \smile q - z$, sive seqvens seqventem $\sqcap \dfrac{z^4}{q^2 - 2qz + z^2} \smile \dfrac{q^2 - qz - z^2}{q - z} \sqcap$ *(aa)* $z^4 \smile q - z \smile qz$ *(bb)* $z^4 \smile q - z \smile q^2 - qz - z^2 \sqcap z^4 \smile \begin{array}{r} q^3 - q^2z \\ -\, q^2z \end{array} \boxed{\begin{array}{l} -\, qz^2 \\ + \ldots \end{array}} - z^3 \sqcap z^4 \smile q^3 - 2q^2z - z^3$ et ita porro. tamqve *(aaa)* harum *(bbb)* intelligi *(aaaa)* posset *(bbbb)* possit a termino | qvodam in medio sumto vel descendi vel ascendi tunc judicari potest duplicem semper esse valorem harum Qvantitatum. *Dazu, nicht gestr.* Imo, video me committere errorem hoc de qvolibet termino enuntiando, *(aaaaa)* cum sit verum, *(bbbbb)* falsum est enim *(ccccc)* sic ergo redinchoandum: | *(b)* Terminus *L*

p ad $q-p$ adeoque terminus sequens $\sqcap\, hp \smile q-p$. et sequens sequentem, ad sequentem $hp \smile q-p$, ut $p\dagger\beta$ ad $q-p\ddagger\beta$ adeoque sequens sequentem erit $\sqcap\, hp^2\dagger hp\beta \smile q-p \smile q-p\ddagger\beta$. Ascenditur autem vel descenditur, prout $q-p$, vel p inferior aut superior, et prout $\dagger$. significat $+$ aut $-$. Si h sit $\sqcap\, z$. seu primi ordinis tunc h et q differunt unitate ipsius β. Itaque z adhibere utilius; itaque notandum priora resumi posse, modo pro 1, ponamus 1β, unde fiet v. g. $E \sqcap \dfrac{z}{1}$. $C \sqcap \dfrac{z, \frown z-1\beta}{1,2}$, $D \sqcap \dfrac{z, z-1\beta, z-2\beta}{1,2,3}$ etc. Itaque si sit potestas: y^z. possumus z resolvere in quotcunque β inter se aequales, vel in numeros, vel in alias quantitates rationales vel surdas, vel fractas, ut si z sit 2, seu $y^z \sqcap y^2$, ponendo $y \sqcap x+\gamma$ binomium hoc quadratice in se multiplicatum erit, etiamsi non scribatur: $x^2+2\gamma x+\gamma^2$, sed v. g. pro 1. sumatur $\dfrac{1}{2} \sqcap \beta$ unde binomii hujus quadratum erit compositum ex quatuor terminis, nempe fiet: $y^2 \sqcap \frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}}+\frac{4}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{2}\gamma^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}}+\frac{4}{2}\gamma^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$. Unde facile intelligi potest, eodem modo etiam explicari posse per binomia, potestatem cujus exponens est irrationalis, v. g. $\sqrt{2}$. dividendo eam in partes quotcunque aequales. Horum omnium veritas tum numeris tum calculo explicari debet. Prioris et calculo et in numeris, posterioris non nisi in numeris. Notandum vero hanc formulam in qua exponens fractus, semper reduci posse ad formulam exponentium integrorum, ope aequationis; sed si exponentes sint irrationales, non videre me modum reducendi ad ordinarios, utcunque formetur aequatio.

Illud tantum superest excutiendum, an aliqua ratione sive arte possint ipsae β. esse inaequales, ut scilicet necesse non sit exponentes crescere vel decrescere aequaliter. Caeterum valor ipsius y^2, ita more Communi expressus, daret: $y^2 \sqcap \dfrac{1}{2}x^2+2\sqrt{x^3}\gamma+3\gamma x+2\sqrt{\gamma^3}x+\dfrac{1}{2}\gamma^2$. quod facile in numeris experiri licebit, modo x et γ intelligantur

1 seqvens *(1)* $\sqcap$ p $\smile$ q $-$ p *(2)* $\sqcap$ hp $\smile$ q $-$ p *L* 8 rationales | sive fra *erg. u. gestr.* | vel *L* 8 f. $y^z \sqcap y^2$, *(1)* mu *(2)* ponendo *(a)* $y \sqcap x+\beta$ *(b)* $y \sqcap x+\gamma$ *L* 9 hoc *(1)* cubice *(2)* qvadratice *L* 9 f. scribatur: *(1)* y^2 *(2)* x^2+ *(a)* 2β *(b)* $2\gamma x+\gamma^2$ *L* 10 pro 1. *(1)* compon *(2)* sumatur *L* 10 unde *(1)* binomium *(2)* binomii | huius qvadratum *erg.* | erit *L* 11 fiet: *(1)* $y^2 \sqcap \frac{1}{2}\beta x^{\frac{4}{2}}+\frac{6}{2}\beta^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{2}\beta^{\frac{4}{2}}x^{\frac{4}{2}}$ *(2)* $y^2 \sqcap \frac{1}{2}\beta x^{\frac{4}{2}}+\frac{4}{2}\beta^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{2}\beta^{\frac{4}{2}}x^{\frac{4}{2}}+\frac{4}{2}\beta^{\frac{2}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\beta^{\frac{4}{2}}$ *(3)* $y^2 \sqcap \frac{1}{2}\gamma x^{\frac{4}{2}}$ *(4)* $y^2 \sqcap \frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}}+\frac{4}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{2}\gamma^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}}+\frac{4}{2}\gamma^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$ *L* 13 partes | qvodcunqve *ändert Hrsg.* | aeqvales *L* 21 daret: *(1)* 1γ *(2)* $\frac{1}{2}x^2+(a)2x^3(b)2x\sqrt{x\gamma}+3\gamma x+2y^2\sqrt{x\gamma}$ *(3)* $y^2 \sqcap$ *L*

esse numeri quadrati, nempe sit $x \sqcap 9.$ et $\gamma \sqcap 4$, fiet: $y \sqcap x + \gamma \sqcap 9 + 4 \sqcap 13$. Jam $13 \frown 13 \sqcap\ \ 39$. Unde

$$\begin{array}{r} 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} y^2 & \sqcap & \frac{1}{2}x^2 & + & 2x\sqrt{x\gamma} & + & 3\gamma x & + & 2\gamma\sqrt{\gamma x} & + & \frac{1}{2}\gamma^2 \\ 169 & & \frac{81}{2} \sqcap 40\frac{1}{2} & + & 2 \frown 9\sqrt{36} \sqcap 108 & + & 108 & + & 2 \frown 4 \frown 6 \sqcap 48 & + & 8. \end{array}$$

Sed hic calculus non consentit.

Ideoque rei investigandae causa scribamus: $bx^2 + cx\sqrt{x\gamma} + d\gamma x + e\gamma\sqrt{\gamma x} + f\gamma^2 \sqcap ax^2 + 2a\gamma x + a\gamma^2$. et junctis in unum irrationalibus caeterisque ordinatis:

$$B\left\{\begin{array}{l} +b\,x^2 \\ -a\,.\,. \end{array}\right. D\left\{\begin{array}{l} +\ \ d\,\gamma x \\ -2a\,.\,. \end{array}\right. F\left\{\begin{array}{l} +f\,\gamma^2 \\ -a\,.\,. \end{array}\right. \begin{array}{l} \quad -cx\,\sqrt{x\gamma}. \\ \sqcap -e\gamma\ \ .\,.\,. \end{array}$$

et quadrando,

$$\begin{array}{l} B^2\ x^4\ +\ 2BD\ x^3\gamma\ +\ 2BF\ x^2\gamma^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +\ \ D^2\ \ \ldots.\ +\ 2DF\ x\gamma^3\ +\ F^2\ \gamma^4\ \sqcap\ 0. \\ \qquad\quad -\ \ c^2\ \ \ldots.\ -\ 2ce\ \ \ldots.\ \ -\ \ e^2\ \ \ldots. \end{array}$$

Jam ponatur $b \sqcap f$. adeoque $B \sqcap F$. item $c \sqcap e$. quod ex ipsa calculi natura pendet, cum enim x et γ. sint indefinita, altera pro altera sumi potest, neque ulla diversitatis ratio intelligi potest, cum non nisi situ sive ordine varient, idem enim est $x+\gamma$. et $\gamma+x$. quare et quadrata eorum eadem, aequatio ergo et pro F ponendo B, et pro e ponendo c, ita stabit

---

4 *Am Rand:*

$$\begin{array}{rrr} 2 & & \\ 9 & 18 & 36 \\ \underline{6} & \underline{6} & \underline{3} \\ & 108 & 108 \end{array}$$

1 fiet: *(1)* y $\sqcap$ x + 9 *(2)* y $\sqcap$ x + γ. *L* 4 169 *(1)* $\frac{96}{2} \sqcap 48$ *(2)* $\frac{81}{2} \sqcap 40\frac{1}{2}$ *L* 14 ponatur *(1)* B $\sqcap$ F. *(2)* b $\sqcap$ f. *L* 17 ergo *(1)* per B^2 sive F^2 divisa, *(2)* ⟨eas⟩ ponendo *(3)* et pro *(a)* f b *(b)* F *L*

$$B^2\ x^4 \left\{\begin{array}{llllllll} + 2BD & x^3\gamma & + 2B^2 & x^2\gamma^2 & + 2BD & x\gamma^3 & + B^2 & \gamma^4 \\ & & + D^2 & & & & & \\ - c^2 & \ldots\ldots & - c^2 & & - c^2 & & & \end{array}\right. \qquad \odot$$

Jam haec aequatio cum alia simili ejusdem valoris conferatur, scilicet: $x^2+2x\gamma+\gamma^2$, ducatur in $x^2+\dfrac{h}{a}x\gamma+\gamma^2$. productum ducatur in B^2, fiet:

$$\begin{array}{llllllll} B^2\ x^4 & + 2B^2 & x^3\gamma & + B^2 & x^2\gamma^2 & & & \\ & + B^2\dfrac{h}{a} & \ldots\ldots & + 2\dfrac{B^2h}{a} & \ldots\ldots & + \dfrac{B^2h}{a} & x\gamma^3 & \\ & & & + B^2 & \ldots\ldots & + 2B^2 & \ldots\ldots & + B^2\ \gamma^4 \end{array} \qquad ☽.$$

Hanc formulam priori non similem tantum sed et coincidentem esse, intelligi potest, si fingamus formulam $bx^2+cx\sqrt{x\gamma}$ etc. esse aequationem duarum radicum aequalium potius, quam formulam quadrati binomii. Unde suffecerit eam potius aequalem poni nihilo quam alteri $ax^2+2ax\gamma+a\gamma^2$ adeoque omissa $\underline{a}$. ponemus B et b, vel D vel d, et F vel f. aequales. Aequationes ergo collatitiae oriuntur duae, una, per quam $D \sqcap \dfrac{2B^2a+B^2h-c^2a}{2Ba}$. adeoque

$$\begin{array}{lllll} D^2 \sqcap & + 4a^2\ B^4 & \underset{\text{III}}{\boxed{-4a^2\ B^2c^2}} & + a^2\ c^4 & \smile 4B^2a^2 \\ & \underset{\text{II}}{\boxed{+\ 4ah}} & -2ah & & \\ & +\ h^2 & & & \end{array}$$

quem valorem inserendo alteri collatitiae, fiet:

$$\underset{\text{I}}{\boxed{\begin{array}{l} 8B^4a^2 \\ -8\ldots\ldots \end{array}}}\ \underset{\text{III}}{\boxed{+4a^2\ B^2c^2}}\ \underset{\text{II}}{\boxed{-4B^4\ ha}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sqcap 0.$$

4 scilicet: *(1)* $\mathrm{ax}^2+2\mathrm{ax}\gamma+\mathrm{a}\gamma^2$, *(2)* $\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}\gamma+\gamma^2$ *L* 5 in |h *gestr.*| $\mathrm{x}^2+\dfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}\gamma+\gamma^2$. *(1)* fiet: *(2)* productum *L* 9 priori *(1)* et *(2)* non *L* 13 collatitiae *erg.* *L*

3 $-c^2\ldots\ldots-c^2-c^2$: Hier und im Folgenden bis S. 233 Z. 2 treten einzelne Verschreibungen und kleinere Versehen bei den Umformungen auf, die sich auf die Bestimmung der Gleichungen von S. 233 Z. 10–12 auswirken.

Habemus ergo inventas aequationes duas, unam $D \sqcap \begin{array}{l} 2aB^2 - ac, \smile 2aB \\ + \; h \end{array}$, alteram: $h^2 - \dfrac{2c^2a}{B^2}h + \dfrac{a^2c^2 + 4a^2B^4}{B^2} \sqcap 0$. Unde duae habebuntur arbitrariae, nempe B. et c. quas determinare licebit, si cogitemus si velimus habere qualitatem numerorum combinatoriorum, ut scilicet, ex duobus primo β, ut alias pro Tabula combinatoria appellavimus, sive ut hoc loco vocabimus b; et secundo antea appellato z, hoc loco vero c, caeteri sequantur, proxime scilicet sequentem nempe D (quem supra appellaveramus c) faciendo $\dfrac{z, z-\beta}{1, 2.}$. Imo praeterea necesse est hoc loco c (supra D) seu $\dfrac{z, z-1\beta, z-2\beta}{1, 2, 3}$ aequari ipsi $\underline{c}$ hoc loco $\underline{z}$, ut scilicet numerorum combinatoriorum natura servetur, Denique necesse est ipsam b (supra β) aequari ipsi f sive per numerorum combinatoriorum naturam, ipsi $\dfrac{z, z-1\beta, z-2\beta, z-3\beta}{1, 2, 3, 4.}$. Habemus ergo aequationes: $D \sqcap \begin{array}{l} 2aB^2 - ac \smile 2aB \\ + \; h.. \end{array}$, et $h^2 - \dfrac{2c^2a}{B^2}h + \dfrac{a^2c^4 + 4a^2B^4}{B^2} \sqcap 0$ et $D \sqcap \dfrac{c, c-B}{1, 2}$ et $c \sqcap \dfrac{c, c-B, c-2B}{1, 2, 3}$, et denique $B \sqcap \dfrac{c, c-B, c-2B, c-3B}{1, 2, 3, 4}$. Quae aequationes cum sint numero quinque, incognitae autem sint D, h, c, B adeoque quatuor tantum, hinc praesumendum est calculum esse impossibilem, nisi theorema subsit, cujus subtilitate ipsa rerum natura calculo consuluisse putanda sit. Itaque si nihil aliud hoc scilicet ex ejusmodi inquisitione discemus, an scilicet Numerorum Combinatoriorum Tabulam interpolatam potestatibus exponentium fractorum accommodare possibile sit, nam si de fractis impossibilitas detegatur, non erit cur de surdis laboremus.

4 f. appellavimus, *(1)* hoc *(2)* hoc loco vero b. *(3)* sive *L* 6 f. faciendo *(1)* z − *(2)* $\dfrac{\mathrm{z, z} - \beta}{1, 2.}$ *(a)* incognitas ergo habemus D (supra c) B (supra β) c (supra z) *(b)* Imo *L* 7 loco *(1)* e ⊓ c *(2)* c | ⊓ *nicht gestr.* | (supra *(a)* z *(b)* D) *(aa)* aeqvari *(bb)* seu *L* 9 ipsi f *(1)* hoc loco *(2)* sive *L* 11 C ⊓ *(1)* $^{\mathrm{z, z} - 1}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{C, C - B, C - 2B}}{1, 2, 3}$, *L* 14 subsit, *(1)* in qvo ipsa na *(2)* cuius *L* 16 Tabulam *(1)* Subsectione *(2)* interpolatam *L* 17 fractis *(1)* spes non *(2)* impossibilitas *L*

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{2}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}$			
$\frac{1}{2}$				

Si $y \sqcap x+\gamma$. deberet esse

$$y^{\frac{4}{2}} \sqcap +\frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{2}x^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$$

Sed hoc esse absurdum facile judicari potest, quia ponendo x. et γ numeros esse quadratos, et x imparem et γ parem vel contra; patet non posse non summam esse numerum fractum, cum tamen $y^{\frac{4}{2}}$ sit numerus integer, nisi velis aequationem esse inter $\frac{1}{2}y^{\frac{4}{2}}$ et $\frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}}+\frac{4}{2}x^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}$ etc. quemadmodum $1y^2 \sqcap 1x^2+2x\gamma+1\gamma^2$. Sed nec sic res procedet, fiet enim binomium istud nimis magnum; itaque haec Tabulae Combinatoriae interpolatio locum non habet, per $\frac{1}{2}$.

Generaliter quaestio eo redit, magnitudinis datae potentiam datam, datis magnitudinis et potentiae partibus exprimere. Quod si res per numeros combinatorios exitum reperire non potest, quaerendi sunt alii ope methodi supra praescriptae, per aequationes similes, et inductione aliquot casuum facta. Construatur Tabulae species, quae forte et ad irrationalia poterit extendi.

3 $\frac{1}{2}$ *(1)* $\frac{1}{2}$ *(2)* $\frac{2}{2}$ *L* 4 $\frac{1}{2}$ *(1)* $\frac{3}{4}$ *(2)* $\frac{3}{2}$ *L* 6 f. $\frac{1}{2}$ *(1)* $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$ *(2)* Si *L* 9 hoc *(1)* imposs *(2)* esse *(a)* ge *(b)* absurdum *L* 15 redit, *(1)* datam potentiam cuiusdam literae, aliarum literarum potentia exprimere, *(a)* da *(b)* magnitudine | et *nicht gestr.* | *(aa)* ratione in partes sectis, *(b)* potentia | datis *erg.* | in partes sectis, *(c)* magnitudini *(2)* magnitudinis *L* 19–235,1 extendi. *(1)* $\mathrm{y}^{\frac{4}{2}}$ seu *(2)* $\mathrm{y}^{\frac{4}{2}}$ seu $\sqrt{\mathrm{y}^4}$ *(3)* $\mathrm{y}^{\frac{3}{2}}$ seu $\sqrt{\mathrm{y}^3} \sqcap \beta\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + 1\mathrm{x}^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + 2\mathrm{x}^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \beta$ | x *gestr.* | $\gamma^{\frac{3}{2}}$ *(c)* $\sqrt{\mathrm{y}^3} \sqcap \beta\mathrm{x}^{\frac{1}{2}} + \mathrm{zx}^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + \mathrm{zx}^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \beta\gamma^{\frac{3}{2}}$ *(4)* Qvoniam *L*

Quoniam necesse non est, numeros illos esse combinatorios, et quoniam semper erunt arbitrariae literae, hinc eae ita explicentur semper constante modo, ut inde Tabula numerorum ejusmodi condi possit, etsi plane diversa a combinatoria vel combinatoria interpolata, modo constans. Denique quaerendum est quod inveniri possint expressiones pro exponentibus surdis. Malum est quod tunc ista reductio institui non potest. Sed videtur alia institui posse reductio per appropinquationes perpetuas, pro surdis sumendo fractorum seriem simul appropinquantem more meo, at videndum an ita res reduci possit ad analysin, seu an harum appropinquationum Termini reperiri possint.

Sequitur Schediasma *de Exponentibus Fractis et Surdis*.

36_2. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM, PARTES TERTIA ET QUARTA

Februar 1675

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 III A 34 Bl. 5. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 5 r°. Rückseite leer. Cc 2, Nr. 909

Feb. 1675

De formulis omnium dimensionum

De Exponentibus Fractis et Surdis

De infiniti et indefiniti differentia

Vide Schediasma Januarii 1675. *de formulis omnium dimensionum* constans duabus partibus.

Constat si exponentes sint integri aut rationales, numeris combinatoriis valores binomiorum exprimi. At vero si sint fracti, aut irrationales nullam video rationem inter-

1 combinatorios, *(1)* hinc procedendo per omnes series eligatur nova *(2)* et *L*   16 De … dimensionum *erg. L*   18 De infiniti … differentia *erg. L*   19 Vide *(1)* pro *(2)* Schediasma *L*   21 rationales, *(1)* eos exprimi numeris combinat⟨–⟩ valores *(2)* numeris *L*

7 more meo: vgl. VII, 3 N. 33.   9 *de Exponentibus*: vgl. N. 36_2.   19 *de formulis*: vgl. N. 36_1.

polandi numeros combinatorios, praeter inquisitionem analyticam, non nisi pro fractis tamen tentabilem. Hoc loco vero venit in mentem rationis, quae hoc nititur fundamento, quod omnis numerus irrationalis repraesentari potest infinita serie rationalium; et omnis numerus fractus infinita serie integrorum; quare videamus an numerorum quoque combinat[or]iorum seriebus infinitis uti liceat.

Experiamur primum in finitis, sit $y \sqcap x+b$, videamus quid sit $y^{z-\omega}$, fiet

$$1y^{z-\omega}\ [+]\ \frac{z-\omega}{1}y^{z-\omega-1}\ [+]\ \frac{z-\omega, z-\omega-1}{1,2}y^{z-\omega-2} \text{ etc.}$$

Cumque z et ω sint integri, et posito eorum numero finito etiam $z-\omega$, sit integer, patet modo series numerorum $z-\omega$ etc. sit finita, succedere hunc numerorum combinatoriorum usum.

$$\frac{1}{1+b} \sqcap 1\left(\frac{-b}{1+b}\right) - b\left(\frac{+b^2}{1+b}\right) + b^2 - b^3\frac{+b^4}{1+b}.$$

b autem est integer ideo $b^3 \sqcap b^2$. Sed et $-b+b^2 \sqcap -b^3+b^4$. Itaque non potest demonstrari quod de finitis quotcunque verum est, de infinitorum quoque serie verum esse. Quoniam scilicet posteriora non decrescunt; ideoque nec locum habet ratiocinatio Archimedea, per deductionem ad absurdum; unde sequitur fallacem esse Methodum infinitorum, neque admittendam, nisi quando deductione ad absurdum demonstrari potest; alioqui enim demonstrari posse, ex eo quod in finitorum numero quantocunque res

1 numeros *(1)* combinat⟨–⟩ *(2)* combinatorios, *(a)* nisi qvam nunc *(b)* praeter *L* 1 f. fractis | illic *gestr.* | tamen *L* 5 f. liceat. *(1)* Sit y^{4-1} *(2)* Experiamur … sit *(a)* y^{4-1} et *(aa)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}+\mathrm{a}$ *(bb)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}+\mathrm{b}$. fiet: $\mathrm{y}^{4-1} \sqcap 1\mathrm{x}^{4-1}+$ *(b)* $\mathrm{y}^{z-\omega} \sqcap$ *(c)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}+\mathrm{b}$ *L* 10 f. usum *(1)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}} \sqcap$ *(a)* $1+\frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}$ *(b)* $\mathrm{a}\left(\frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right)$ *(2)* $\frac{1}{1+\mathrm{b}}$ *L* 12 $\mathrm{b}^3 \sqcap \mathrm{b}^2$. *(1)* Videndum an sit $1-\mathrm{b} \sqcap \mathrm{b}^2-\mathrm{b}^3$ *(2)* Sed et *(a)* $\mathrm{b}^2-\mathrm{b}^3$ *(b)* $-\mathrm{b}^2+\mathrm{b}$ *(c)* $-\mathrm{b}+\mathrm{b}^2$ *L* 12 f. potest *(1)* effici *(2)* demonstrari *L*

---

6 fiet: Anstatt wie angekündigt y durch $x+b$ zu ersetzen, substituiert Leibniz y mit $y+1$. Dies beeinträchtigt die grundsätzliche Überlegung nicht. 11 $\frac{1}{1+b}$: Auf der rechten Seite der Gleichung wendet Leibniz sukzessive die ersten Schritte einer Entwickung einer Reihendarstellung durch fortgesetzte Division auf $\frac{1}{1+b}$ an. Den Term $\frac{-b}{1+b}$ der ersten Zerlegung von $\frac{1}{1+b}$ stellt Leibniz im darauffolgenden Schritt als $-b+\frac{b^2}{1+b}$ dar, $\frac{b^2}{1+b}$ im Anschluss als $b^2-b^3+\frac{b^4}{1+b}$. Die Streichung der ersetzten Terme kennzeichnet Leibniz, indem er diese einklammert. Die rechte Seite ist somit als $1-b+b^2-b^3+\frac{b^4}{1+b}$ zu lesen. 14 f. ratiocinatio: vgl. ARCHIMEDES, *Quadratura parabolae*, prop. XXIII u. XXIV.

succedit, idem succedere etiam in infinito. Unde sequitur illustri exemplo quantum intersit inter infinitum, et indefinitum. Quod enim de indefinito terminorum numero verum est, non est de infinito. Et certe: indefinitus terminorum numerus est finitus; non ergo infinitus. Indefinitum ergo non est infinitum. Sed si fractio resolvi posset in integros infinitos in infinitum decrescentes; verum foret, quod scilicet numerorum Combinatoriorum adhiberi posset interpolatio; ad numeros potestatum exprimendos; deductione ad absurdum; assumta differentia, si scilicet error adsit et continuata serie ad terminos usque differentia majores; quin etiam etsi termini crescant, si tamen differentiae terminorum $-b^3 + b^4$, etc. concrevissent, idem potuisset demonstrari. Hinc sequitur si qua methodus demonstretur de fractis, eandem demonstrari posse de s u r d i s , hac ad absurdum deductione, quia omnes surdae quantitates possunt resolvi in fractas rationales, ita ut termini continue decrescant. Methodus autem pro fractis videtur indagari posse, ea quam coepi ratione in schediasmate *de formulis omnium dimensionum* parte 2^{da}, nempe per arbitrarias ascriptas, reducta postea aequatione, cum enim sint literae arbitrariae, videtur methodus quaedam generalis ipsius z ope caeteras inveniendi literas haberi posse. Quo semel facto, omnium figurarum quadraturae analyticae poterunt haberi; et laborandum erit postea de reductione expressionum transcendentium, quando id fieri potest.

6 exprimendos; *(1)* demon *(2)* s⟨um⟩ *(3)* deductione *L* 7 error *(1)* absit *(2)* adsit *L* 10 s u r d i s , *(1)* qvia mutato *(2)* hac *L* 11 rationales, *(1)* qvare si qvi possu *(2)* Tantum ergo *(3)* ita *L* 17 reductione *(1)* figura *(2)* expressionum *L*

13 parte 2^{da}: vgl. N. 36$_1$ ab S. 227 Z. 16.

37. DE AEQUATIONE QUADRATICA
[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 2 Bl. 76–77. 1 Bog. 2°. 2 S. zweispaltig beschrieben. Textfolge Bl. 76 r°, 77 v°. Rest des Bogens leer.
Cc 2, Nr. 849_1

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für das Frühjahr 1673 und von Herbst 1674 bis Frühjahr 1675 belegt. In den Jahren 1673–1675 verwendet Leibniz das Gleichheitszeichen = bis Mitte 1674, *Rq* als Quadratwurzelzeichen bis Herbst 1673. Das vorliegende Stück wird durch VII, 2 N. 1 fortgesetzt.

Des Cartes *Geom.* lib. 1. lit. K. pag. 6. edit. 1659.

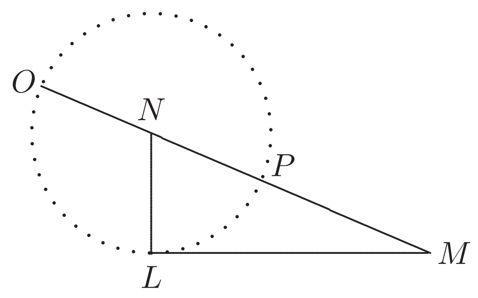
Si habeatur aequatio: $z^2 = az + b^2$. ut inveniam z. facio Triangulum rectangulum NLM. cujus unum latus LM. sit aequale b. radici videlicet $\square^{\text{tae}}$ quantitatis cognitae b^2 alterum autem latus $LN. = \frac{1}{2}a$. Deinde producta MN. base ejusdem Trianguli usque ad O. ita ut NO sit aequalis NL. erit tota $OM = z$. Ergo: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\llcorner \frac{1}{4}a^2 + b^2 \lrcorner}$. Quodsi habeatur $y^2 = -ay + b^2$. a base MN. aufero NP. aequalem NL. eritque reliqua PM. aequalis y. Ita ergo $y = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. (Nota hic Cartesius jungit lineola capiti imminente partes ejusdem quantitatis, ubi potest esse aequivocatio. Item Cartesius semper dicit potius $y^2 = -ay + b^2$. quam $y^2 = b^2 - ay$. ut malit praefigere $-$ initio, quam ordinem illum turbare.)

---

10 *Darüber:* NB. *Transact. Φil.* num. 64 et num. 63 ubi de lib. Slus. et Ferguson num. 49.

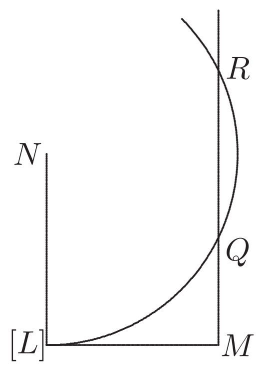
---

10 Des Cartes: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 6 f. **1**,**20** f. Transact. . . . num. 49: Gemeint sind *An account of two books. I. Renati Franc. Slusii Mesolabum*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 903–912; J. COLLINS, *An account, concerning the resolution of equations in numbers*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 46 vom 12./22. April 1669, S. 929–934; *An Accompt of four books. III. Labyrinthus Algebrae, auct. Joh. Jac. Ferguson*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 49 vom 19./29. Juli 1669, S. 996–999.



[*Fig. 1*]

Denique si habeatur $z^2 = az - b^2$. facio $NL = \frac{1}{2}a$. et $LM = b$. ut ante. Deinde non duco lineam per puncta M et N. ut in duobus aliis casibus sed duco MQR. parallelam ipsi LN. centroque N descripto per L. circulo secante MQR in punctis Q et R. erit MQ. vel MR. aequalis lineae quaesitae z. Hoc enim casu illa duobus modis exprimitur: $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ vel $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.



[*Fig. 2*]

Si circulus centrum habens in puncto N. transiensque per punctum L. non secet nec tangat rectam MQR; nullam aequatio radicem admittet, seu problema erit impossibile. Possunt autem hae radices infinitis ferme aliis modis inveniri, sed hae sunt simplicissimae.

Beaunius ad hoc locum duplices annotat demonstrationes, alteras Geometricas, alteras Algebraicas. Missis G e o m e t r i c i s , Algebraicam consideremus. $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ ita demonstrat: Ergo $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} = z - \frac{1}{2}a$. Et $=$ eorum $\square^{\text{ta}}$. $z^2 - az + \cancel{\frac{1}{4}a^2} = \cancel{\frac{1}{4}a^2} + b^2$. Ergo $z^{[2]} = b^2 + az$. Ita demonstrabitur $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Nam ideo $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Et horum $\square^{\text{ta}}$ $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$. Ergo $y^2 = -ay + b^2$. Ita demonstrabitur $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ergo: $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ergo horum $\square$. $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$. Ergo $z^{[2]} = az - b^2$. Ita demonstrabitur quoque ultimus modus tertii casus $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ergo $\frac{1}{2}a - z = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Et $\square^{\text{ta}}$ $\frac{1}{4}a^2 - az + z^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$. Ergo $z^2 = az - b^2$.

Tota inventi ratio eo nititur, ut statuendo incognitos in eodem loco, adscriptoque aliquo cognito posset extrahi Radix. Cum nec Cartesius nec alii dicant hanc aequationes reducendi Methodum ab ipso inventam, nec ego id dicere ausim. Est tum utique summae utilitatis Beaunii demonstratio contraria forma resoluta, monstrat inventi modum. Sed hoc notabile est, quod ex ipsius Cartesii lib. 3. p. 69. annotat Schotenius, eandem aequationem $z^2 = az + b^2$ aliam quoque habere Radicem, minorem quam nihil, nempe loco $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ hanc $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Quod eodem modo demonstratur.

1 ad *(1)* hunc Cartesii *nicht gestr.* *(2)* hoc locum *(a)* duas *(b)* duplices *L*

1 annotat: Fl. de Beaune, *Notae breves*, 1659, *DGS* I S. 112–114. 14 annotat: Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 162 f. u. 281–283.

$z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. Ergo $\square =$ sunt: $z^2 + \cancel{\frac{1}{4}a^2} - az = -\llcorner\cancel{\frac{1}{4}a^2} + b^2\lrcorner$. Hic quaestio oritur an jam cum Schotenio istud $-\llcorner\frac{1}{4}a^2 + b^2\lrcorner$ ubi videtur totum $\frac{1}{4}a^2 + b^2$ esse $-$ seu adimi debere nihilo, possit concipi, ut $b^2 - \frac{1}{4}a^2$. Quae quaestio ad aliam redit, an radicis nihilo minoris quadratum possit esse aliquid. Rem in numeris experiamur, si $2 - 4. = 0 - 2.$ ducas in se habebis priore modo $4 + 16 - 16 = 4.$ perinde ac si multiplicasses $4 - 2$. Si 0. adhibeas habebis: $0^2 + 4 - 4. \frown 0.$ en ergo 4. Loco numeri ergo nihilo minoris intelligenda ejus inversa. Sed haec innituntur isti regulae $- \frown - = +$. $0 - 4. \frown 0 - 3. = 12.$ Nota cum dicitur $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ cum z. sit minor 0. ideo $0 - z = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} - \frac{1}{2}a =$ aliquid. Et ideo $0 - z$ (etc.) non est semper numerus nihilo minor, si scilicet ipse z. sit nihilo minor. Eodem modo Schotenius admonet $y^2 = -ay + b^2$. habere non tantum radicem $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. sed et pro $+\surd$. ponendo $-\surd$. radicem falsam. Idem in $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. et aliis Schotenius non dicit, sed videtur subintelligi posse,

---

4–7 *Nebenbetrachtung: NB*. additio numeri nihilo minoris est subtractio, et subtractio ejus additio, alterius numeri nihilo majoris.

1 $+b^2$. *(1)* Ergo $\square$. $z^2 + \cancel{\frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}az = -\cancel{\frac{1}{4}a^2} + b^2$. Ergo $z^2 - az = -b^2$. Ergo $z = -b^2 + az$. Ego ergo ex demonstratione ista reperi errasse Schotenius, non enim oritur ut ipse ait *(2)* Ergo *L*

4 experiamur, *(1)* esto $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ (a) esto 1 et b esto: (2). $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{4}}$. Ergo $z = \frac{2}{4} -$ *(a)* $\frac{17}{4} = (0 - \frac{15}{4})$ *(b)* Rq $\frac{17}{4}$ Ergo $z - \frac{1}{2}a = -\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ $+\cancel{\frac{2}{4}} - \text{Rq}\,\frac{17}{4} - \cancel{\frac{2}{4}} = -\text{Rq}\,\frac{17}{4}$. Ergo $\square^{ta}$ eorum $z^2 + \frac{1}{4}a^2 - az = -\llcorner\frac{1}{4}a^2 + b^2\lrcorner$ $+\llcorner\frac{1}{4} + \frac{16}{4}\lrcorner + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \text{Rq}\,\frac{17}{4} =$ *(2)* si *L*

---

1 $\square =$ sunt: Leibniz erkennt zunächst nicht, dass das Minuszeichen durch das Quadrieren wegfällt, und vermutet einen Fehler bei Schooten. Kurz danach erkennt er seinen Irrtum, korrigiert aber den Text nicht durchgehend.

etsi hoc ille non innuat. Notat Cartesius eodem modo si has aequationes habeas: $x^4 = -ax^2 + b^2$ tunc $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$. Addit Schoten: Si sit $z^4 = az^2 + b^2$ fore $z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$. Item si sit $z^4 = az^2 - b^2$. fore $z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}}$. Radix ex $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a - z^2$.

Schoten ad Cartes. lib. 1. lit. M. p. 164. Quoties in problemate Geometrico determinata est unitas, seu linea quaedam quae pro unitate habetur, tunc radicem quadratam extrahere ex linea quadam, est invenire mediam proportionalem inter ipsam et unitatem. (: Addo 1 — 2 — 3 — (6). Multiplicare lineam per lineam eo casu est invenire quartam proportionalem quae ita sit ad secundam, uti tertia ad primam, vel quae ita sit ad secundam, ut prima ad tertiam, ac proinde invenienda est linea, quae ita est ad unam datarum, ut altera datarum est ad unitatem. Dividere lineam per lineam est 3 — 6 — 1 — (2) itidem invenire quartam proportionalem, 6 — 3 — 1 — $\left(\frac{1}{2}\right)$ seu invenire lineam quae ita sit ad unitatem, ut duae datae sunt inter se. Et haec linea quaesita repraesentat duarum linearum rationem. [:)] Quotiescunque in problemate geometrico eadem quantitas ex partibus inaequalium dimensionum componitur, toties necesse est unitatem esse datam; alioquin problema non est Geometricum, sed in Numeris solvendum. Data unitate dimensio minor supponenda multiplicari per unitatem, ut aequetur majori. (: Si unitas data non est tunc multiplicatione linearum et augetur dimensio, divisione et radicum extractione minuitur, ratio est, quia pro unitate supponitur Quadratillum vel Cubulus minor qualibet dabili. :) Caeterum si nobis data sit aequatio Geometrica in qua unitas in linea quadam data est, multiplicatio ista divisioque et differenda est, dum absoluta sit aequationis politura seu reductio. Et reductio facienda est, quasi problema esset in Numeris, facta politura, fiant multiplicationes divisionesque etc. [per] 1 ut adhibita data unitate.

1 Cartesius *(1)* idem esse, si loco *(a)* z = *(b)* $z^2 = az + b^2$. intelligas $z^4 = az^2 + b^4$. fieri enim $z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$ *(aa)* Et si y *(bb)* Et si $x^4 = -a$ *(2)* eodem *L*

Schoten ad Cartes. lib. 1. lit. M. p. 164. *Geom.*

In aequatione data $z^2 = az - b^2$. necesse est b non esse majus quam $\frac{1}{2}a$. alioquin aequatio est impossibilis. Debet enim b^2 subtrahi ex $\frac{1}{4}a^2$. Sed cum sit $z^2 - az = -b^2$. seu $az - z^2 = b^2$. et fiat: $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$ non video quid coegerit Schotenium dicere b^2 subtrahi debere ex $\frac{1}{4}a^2$. cum addantur potius sibi. Idem in numeris experiamur. a esto 6. b esto 4. patet b esse majus quam $\frac{1}{2}a$. Quaeritur z. Cum z. sit $Rq\,\overline{b^2 + \frac{1}{4}a^2}, +a$.

$$b^2 = 16.\quad \frac{1}{4}a^2 = 9.\quad a = 6.\ \text{Ergo}\ \begin{array}{ccc} Rq & \llcorner b^2 + \frac{1}{4}a^2 \lrcorner & +\ a \\ & 16 + 9 & \\ & \diagdown\ \diagup & \\ Rq & 25 = 5 & +\ 6\ = 11. \end{array}$$

Sed hoc absurdum. Ratio est quod non dicendum $z = Rq\,\llcorner b^2 + \frac{1}{4}a^2 \lrcorner + a$. quasi fuisset initio quidem $z - a$. Nam quid in eodem jure dici potuisset $a - z$. Utrum ergo eligi debeat ex aequatione determinandum, et aequatio data monstrat a esse majus quam z. quoties b

---

4 f. *Dazu:* Recte Schotenius. Vide sequentem plagulam. NB.

1 Schoten ... Geom. *erg. L* 3 $\frac{1}{4}$a^2. *(1)* Cum fiat $z^2 + az - \frac{1}{4}a^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$ *(2)* sed *(3)* sed *L* 6 f. +a. *(1)* Erit 6 + Rq *(2)* Erit 6 + (Rq$\llcorner$ *(a)* 16 + 9$\lrcorner$ =) 5. Ergo z erit 11. probemus *(aa)* $z^2 = b^2$ *(bb)* $z^2 = az - b^2$. *(b)* 4 + 9$\lrcorner$ =) Rq 13. z = Rq 13 + 6. Ergo z^2 = 13 + 36 + Rq 156 (12) Ergo $\begin{array}{ccc} z^2 = & az & -b^2 \\ 61 & 36+21\ \text{circiter} & 36 \\ \text{circiter} & \diagdown\ \diagup & \\ & 57\text{c.} & \end{array}$ *(3)* $b^2 = 16$ *L* 12 z − a. *(1)* sed intelligi debet *(2)* Nam *L* 13 qvam z. *(1)* est enim $z^2 = az - b^2$ *(2)* qvoties *L*

---

4 fiat: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung müsste $-b^2$ stehen. Leibniz glaubt zunächst irrtümlich an einen Fehler bei Schooten, erkennt aber später seinen Irrtum und merkt dies an. Im Folgenden beeinträchtigen weitere Versehen die Rechnungen. 6 $+a$: Richtig wäre $\frac{1}{2}a$. Der Fehler pflanzt sich fort. **6,14** sequentem plagulam: VII, 2 N. 1.

est majus quam $\frac{1}{2}a$. Quod quaeremus ex ipsa aequatione. Necessaria enim ista inquisitio est, ad extrahendas radices ex Apotomis. $z = az - b^2$. Jam z supponitur esse quantitas nihilo major, ergo az est majus quam b^2. Ergo $az = b^2 + bx$. Ergo $\frac{az}{b} = b + x$. Ergo $\frac{az}{b} - b = x$. seu $\frac{az - b^2}{b} = x$. Jam suppon⟨itur⟩ a majus quam b. seu $b + y = a$. Erit $\frac{bz + yz - b^2}{b} = x$. seu $bz + yz - b^2 = xb$. vel $bz + yz = xb + b^2$. vel $z = \frac{xb + b^2}{b + y}$. Sed quaerenda est brevior via.

$z^2 = az - b^2$. Ergo $z = Rq\,\llcorner az - b^2 \lrcorner$.

$z^2 + b^2 = az$. $\quad z^2 + b^2 + 2zb = az + 2zb$.

$z + b = Rq\,\llcorner az + 2zb \lrcorner$.

Item: $z^{[2]} + 2az + a^2 = 3az + a^2 - b^2$.

Ergo $z + a = Rq\,\llcorner 3az + a^2 - b^2 \lrcorner$.

Similiter $2az + b^2 + a^2 = z^2 + 2b^2 + az$.

Ergo $a + b = Rq\,\llcorner z^2 + 2b^2 + az \lrcorner$.

Sed jam quaeramus $a - b$. quoniam a supposuimus majus quam b. et videamus qualia caetera futura sint. Id ita fiet:

$z^2 + b^2 + a^2 - 2ab = az - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} + a^2 - 2ab$. Ergo

$b^2 + a^2 - 2ab = az - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} + a^2 - 2ab - z^2$. Ergo cumque a sit majus ex hypothesi pro eo supponamus $b + c$. Ergo erit

$$\cancel{b^2} + \cancel{b^2} + c^2 + \cancel{2cb} - \cancel{2b^2} - \cancel{2bc} = bz + cz + \cancel{2b^2} + \cancel{2c^2} + 4cb - \cancel{2b^2} - \cancel{2bc} - z^2.$$

Ergo $c = Rq, bz + cz + 4cb - z^2$.

Ergo $c^2 + z^2 = bz + cz + 4cb$.

$c^2 = bz + cz + 4cb - z^2$.

Ergo $z^2 = bz + cz + 4cb - c^2$.

4 seu *(1)* $\mathrm{a + y = b}$. erit $\frac{\mathrm{az + yz - b^2}}{\mathrm{b}} = \mathrm{x}$ *(2)* $\mathrm{b + y = a}$ *L* 7 Ergo $|\,\mathrm{z^2}$ *ändert Hrsg.* $|\, = \mathrm{Rq}$ *L* 11 f. $\mathrm{z + a = Rq\,\llcorner 3az + a^2 - b^2 \lrcorner}$ *(1)* Similiter $\mathrm{z + b^2 + 2zb = az + 2zb}$ Ergo z– *(2)* Similiter *L* 14 jam *(1)* constituamus a– *(2)* qvaeramus *L*

2 $z = az - b^2$: Leibniz weicht ab von der Anfangsgleichung $z = az - b^2$, zu der er ab Z. 7 zurückkehrt. 12 Similiter: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Term $+a^2$, die anschließende Folgerung ist nicht richtig. 18 Ergo erit: Die folgenden Umformungen sind fehlerhaft.

Ergo $\frac{z^2}{z} = z = b + c + \frac{4cb}{z} - \frac{c^2}{b}$.

Ergo si a est majus quam b. tunc z. est majus quam b. item majus quam c. Restat inquirendum an sit majus quam $b+c = a$. Quod sciemus si determinabimus utrum majus sit $\frac{4cb}{z}$ an $\frac{c^{[2]}}{b}$. $\frac{4cb}{z} \times \frac{c^2}{b} = \ldots \frac{4cb^2 - c^2 z}{zb}$. $4cb^2$ etc. $= c^2 z$ etc. Ergo $\cancel{4}b^2 \frac{\text{etc.}}{c4} = \frac{cz}{4}\ \frac{\text{etc.}}{c4}$. Ergo $b = \frac{Rq\,cz}{2}$. Ergo $c^2 = z \frown \frac{Rq\,cz}{4} + cz + 4c\,Rq\frac{cz}{2} - z^2$. $c^2 = \frac{Rq\,z^3 c}{2} + cz + \frac{Rq\,16c^3 z}{2} - z^2$. $c^4 + z^4 + \cancel{2}z^2c^2 = \frac{z^3 c}{2} + \cancel{c^2 z^2} + \frac{8c^3 z}{\cancel{2}}$. Nondum Exitum reperio. Per numeros manifestum est z. non esse majus quam a. sed contra dicendum $a - z = Rq\llcorner b^2 + \frac{1}{4}a^2 \lrcorner = 5$. Ita enim

6
$a = 5 + z$. Ergo $a - 5 = z$. Ergo $z = 1$.

---

4 *Nebenrechnung:* $\frac{4cb^2 - c^2 z}{zb}$

8 *Darunter:* Vide seq.

3 b + c = a. *(1)* Redeamus ad initia. $z^2 = az - b^2$. si a = b. Ergo $z^2 = bz - b^2$. Ergo $z^2 + b^2 +$ *(2)* Qvod *L* 8 z = 1. | *(1)* z = *(2)* $z^2 = \underset{6}{az} - \underset{16}{b^2}$ Male calcularam initio *(3)* $\frac{aa + 4zz = 4az}{4}$ 4az − aa = 4a $\frown$ z − a 4zz 4az− *gestr.* | *L*

---

6 $c^4 + z^4 + \cancel{2}z^2c^2$: Leibniz unterlaufen beim Quadrieren Flüchtigkeitsfehler. Er versucht eine numerische Probe. **8,10** Vide seq.: Leibniz setzt die Untersuchung in VII, 2 N. 1 fort.

38. DE AEQUATIONIBUS PER LOGARITHMOS RESOLUTIS
Juni 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 94–97. 2 Bog. 2°. 8 S.
Cc 2, Nr. 985

38_1. DE AEQUATIONIBUS PER LOGARITHMOS RESOLUTIS (NUM. 1)

Junii 1675

De Aequationibus per Logarithmos resolutis (num. 1)

6 f. Junii 1675 | De Aeqvationibus ... (num 1) *erg.* || Hac Schedula sub finem continetur Resolutio omnium aeqvationum per logarithmos: et inventio geometrica logarithmi binomii propositi ex datis logarithmis nominum; et qvantitatibus; et logarithmis ac *(1)* nominibus *(2)* qvantitatibus nominum alterius binomii unum cum proposito nomen commune habentis, cuius *(a)* logarithm *(b)* binomii logarithmus datur. *erg. u. gestr.* | *Dazu, nicht gestr.*: appropinqvando concedo. *L*

Si sit $z \sqcap m+n$

fiet … $z^2 \sqcap m^2+n^2, +\, 2mn \frown 1$

$z^3 \sqcap m^3+n^3, +\, 3mn \frown \underbrace{m+n}_{z}$

$z^4 \sqcap m^4+n^4,, +\, 4mn \frown \llcorner \underbrace{m+n}_{z^2}\boxed{2} - \frac{1}{2}mn\lrcorner$. Nempe $m^4 + \underbrace{4m^3n+6m^2n^2+4mn^3}_{4mn \frown m^2+\frac{6}{4}mn+n^2} + n^4$

$z^5 \sqcap m^5+n^5,, +\, 5mn \frown \llcorner \underbrace{m+n}_{z^3}\boxed{3}\lrcorner$ fere $m^5 + \underbrace{5m^4n+10m^3n^2+10m^2n^3+5mn^4}_{5mn \frown m^3+\frac{10}{5}m^2n+\frac{10}{5}mn^2+n^3} + n^5$

$z^6 \sqcap m^6+n^6,, +\, 6mnz^4$ fere $z^6 \sqcap m^6 + \underbrace{6m^5n+15m^4n^2+20m^3n^3+15m^2n^4+6mn^5}_{6mn \frown m^4+\frac{15}{6}m^3n+\frac{20}{6}m^2n^2+\frac{15}{6}mn^3+n^4} + n^6$

$z^7 \sqcap m^7+n^7,, +\, 7mnz^5$ fere

$z^8 \sqcap m^8+n^8,, +\, 8mnz^6$ fere

1–11 *Nebenbetrachtung:*

1	1	1	1	
2	3	4	5	6
3	6	10	15	
4	10	20	35	
5	15	35	70	
6	21	56		
7	28	84		
8	36			
9	45			
10	55			

4 $-\frac{1}{2}$mn *erg. L*

Nota $\underset{+\,c\,\ldots}{+\,1m^3}\ \boxed{\overset{2mn \frown m+n}{+2m^2n + 2mn^2}} \underset{c}{+\,1n^3}$ debet esse cubus, conferatur cum $p^3 + 3pq \frown$ $p\ +q, +p^3$ erit $\begin{matrix} p \sqcap m\sqrt{③1+c} \\ q \sqcap n \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}$ et $3mn\sqrt{③1+2c+c^2} \sqcap 2mn$. Ergo $1+2c+c^2 \sqcap \frac{8}{27}$ et $c \sqcap 1 \text{ ǂ } \sqrt{\frac{8}{27}}$. Ergo dici potest:

$$z^5 \sqcap + m^3 + n^4 + 5mnz^3 - 5mn \frown \underset{1}{-c} \frown \underset{n^3}{m^3}.$$

$$z^3 \sqcap -3mnz$$
$$+m^2+mn+n^2 \frown z$$

$$z^3 \sqcap m^2z - 2mnm$$
$$+2mnn$$
$$+n^2 \frown m-n$$

$z^5 \sqcap * + qz^3 * -rz + s \sqcap 0$. Erit $m \sqcap \frac{q}{5n}$ et $m^5 \sqcap \frac{q^5}{\llcorner 5n \lrcorner^5}$. Erit $\frac{q^5}{3125n^5} + n^5 \sqcap s$.

---

12 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{5} \\ 25 \\ \underline{5} \\ 125 \\ \underline{25} \\ 625 \\ \underline{250} \\ 3125 \end{array}$$

1–12 Nota ... $+n^5 \sqcap s$ *erg. L*

1–12 Nota ... $+n^5 \sqcap s$: Vgl. S. 272 Z. 11–16. 3 $3mn\sqrt{③1+2c+c^2} \sqcap 2mn$: Leibniz vergisst auf der linken Seite der Gleichung einen Faktor $\sqrt[3]{1+c}$ und verfehlt so das Ergebnis $c = -\frac{1}{3}$. Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus. 4 $c \sqcap 1 \text{ ǂ } \sqrt{\frac{8}{27}}$: Folgerichtig gerechnet ergibt sich $c = \text{ǂ}\sqrt{\frac{8}{27}} - 1$. 5 $z^5 \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung müssten die ersten Terme $+m^5 + n^5$ lauten. 7–11 $z^3 \ldots + n^2 \frown m - n$: Leibniz versucht den Ansatz $z = m - n$.

Unde hoc tandem colligo:

$$
\begin{array}{llll}
\overset{\text{♃}}{z} \sqcap m+n & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\oplus}} \\
z^2 \sqcap m^2+n^2+\overbrace{2mn \frown 1}^{\text{♄}} & \odot & & \\
z^3 \sqcap m^3+n^3+3mn,, \frown m+n & \text{☽} & & \\
z^4 \sqcap m^4+n^4,,,+4mn,, \frown \llcorner m^2+2mn+n^2 & -\dfrac{1}{2}mn\lrcorner & & \text{vel } z^4 \sqcap 4mn \frown \llcorner m+n\boxed{2},,+m^2-n^2\boxed{2} \\
z^5 \sqcap m^5+n^5,,,+5mn,, \frown \llcorner m+n\boxed{3} & -\dfrac{2}{2}\begin{cases} m^2n \\ mn^2\lrcorner \end{cases} & & \\
z^6 \sqcap m^6+n^6,,,+6mn,, \frown \llcorner m+n\boxed{4} & -\dfrac{3}{2}\begin{cases} m^3n \\ mn^3 \end{cases} & -\dfrac{\cancel{1}}{3}m^2n^2\lrcorner & \text{vel } z^6 \sqcap 6mn \frown m+n\boxed{4},,+m^2-n^2,\boxed{3},-6m^2n^4,+m^3-n^3,\boxed{2} \\
 & & \odot\,\text{☿}\,\text{♌} & \\
z^7 \sqcap m^7+n^7+7mn \frown m+n\boxed{5} & -\dfrac{4}{2}\begin{cases} m^4n \\ mn^4 \end{cases} & -\llcorner 2+\dfrac{2}{3}\lrcorner m^3n^3 & \text{sive } z^6 \sqcap 6mn \frown m-n\boxed{4} - 6m^2n^2 \frown \begin{matrix} m^2 \\ n^4 \end{matrix}
\end{array}
$$

---

6 *Nebenbetrachtung:* $z^4 \sqcap * \; \underset{5\ mn}{4}mnz^2+m^3+m^2n\,[+]\,mn^2+n^3z+2mn$

$z^4 \sqcap$

8 *Neben* $-\dfrac{\cancel{1}}{3}m^2n^2$*:* Error

---

8 $-\dfrac{\cancel{1}}{3}m^2n^2$: Richtig wäre $-\dfrac{8}{3}m^2n^2$. Leibniz erkennt den Fehler und markiert ihn, korrigiert ihn aber nicht. Auch die folgenden Gleichungen für z^6 sind fehlerhaft.

10 $-\llcorner 2+\dfrac{2}{3}\lrcorner m^3n^3$: Richtig wäre $-5(m^3n^2+m^2n^3)$.

Sit Trinomium: $z \sqcap m+n+p$. Cubus erit: $\begin{array}{llll} m^3 + 3m^2n + 3mn^2 & & + n^3. \\ + 3m^2p & \cdot\ 2np & + 3n^2p & \\ & \cdot\ p^2 & + 3np^2 & \\ & & + p^3 & \end{array}$

Videamus an disserari possit haec propositio in multiplum ipsius $m+n+p$. et in multiplum $m^2+2mn+2mp, +n^2+2np+p^2$. Scilicet excerpemus: $\cancel{2}mn+\cancel{2}mp \frown m+n+p \sqcap$ $\cancel{2}m^2n + \cancel{2}mn^2 + \overset{2}{\boxed{4}}mnp, +\cancel{2}m^2p + \boxed{2mnp} + \cancel{2}mp^2$, et restat:

$$m^3 + 2m^2n + 2mn^2 \quad + n^3$$

1–251,8 *Nebenbetrachtung auf Bl. 97 r°:*

$$\begin{array}{llll} m^3 + 3m^2n + 3mn^2 & & n^3 \\ & p & 2np & 3n^2p \\ & & p^2 & 3np^2 \\ & & & p^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} m+n, \boxed{3} \\ m+p, \boxed{3} \end{array} \quad -m^3 + 3mnp$$

$$\begin{array}{ll} 6mnp & 3n^2p + 3np^2 \\ \text{seu} \ \ldots\ldots & 3np \frown n+p \\ \text{seu } 3np \frown \underbrace{n+p+m}_{y} & \end{array}$$

$$m^3 + n^3 + \frac{q^3a^3}{27n^3} \sqcap a^2l \qquad \odot\ \begin{array}{llll} m^3 + 3m^2n + 3mn^2 & n^3 & \\ & 3mnp & & \sqcap a^2l \\ 3m^2p & 3mp^2 & p^3 & \end{array}$$

$$\frac{aq}{3} + 3nm + 3n^2 + \frac{3qam}{3n} + \frac{3q^2a^2}{9n^2} \sqcap 0 \qquad \begin{array}{l} 3mn \frown m+n \\ 3mp \frown \underset{+\frac{qa}{3n}}{m} + \underset{+\frac{qa}{3n}}{p} \end{array} \quad + \frac{aq}{3}m \qquad p \sqcap \frac{qa}{3n}$$

$\frac{aqm}{3}[+]3nm+3n^2+\frac{3q^2a^2}{9n^2}+\frac{3q^2a^2}{9n^2} \sqcap a^2l$. Separetur aequatio $\odot$ in duas, unam, $m+n \sqcap 0$ alteram: $\frac{aqm}{3} + \frac{q^3a^3}{27m^3} + \frac{3q^2a^2}{9m^2} + \frac{3q^2a^2}{9m^2} \sqcap a^2l$ et rursus faciendo $\frac{q^3\aleph^9}{a^9 27m^3} \sqcap \frac{a^2l\aleph^3}{a^3}$. sive $m \sqcap \frac{\aleph^2}{v}$. fiet $\frac{aq\aleph^4}{v} + \frac{3q^2a^2}{9v^2} + {}^3$ [*bricht ab*]

$$\begin{array}{lll} p & 2np & 3n^2p \\ & p^2 & 3np^2 \\ & & p^3 \end{array}$$

Videamus jam an quadrati ab $m+n+p$ multiplum invenire possimus. Excerpendo: $m^3+2m^2n+2m^2p, +mn^2+2mnp+mp^2$ restabit: $mn^2+2mnp+mp^2, +n^3+3n^2p+3np^2+p^3$. sive restabit $n+p$, $\boxed{2}$, $\frown m$. et $n+p$, $\boxed{3}$.

Ergo erit $z^3 \sqcap mz^2 + m \frown \llcorner n+p \lrcorner z + m \frown n+p\boxed{2}$.

$$+\, n+p\boxed{3}$$

Conferatur aequationi. Sit jam aequatio:

$y^3 * ahy + a^2l \sqcap 0$. Pro y pone $z+c$ fiet $\begin{array}{l} z^3+3cz^2+3c^2z+c^3 \\ \qquad\qquad + ah \cdot + ahc \\ \qquad\qquad\qquad + a^2l \end{array}$ erit $m \sqcap 3c$. et

$cn+cp \sqcap 3c^2+ah$, sive $n+p \sqcap \dfrac{3c^2+ah}{c}$. Unde denique:

$$\frac{9c^4+6c^2ah+a^2h^2}{\frac{c}{3}} + \frac{27c^6+27ahc^4+9a^2h^2c^2+a^3h^3}{c^3} \sqcap c^3+ahc+a^2l.$$

Fiet: $53c^6 * + 44ahc^4 - a^2lc^3 + a^2h^2c^2 * + a^3h^3 \sqcap 0$. quae reapse cubica est.

Quod etsi nihil dederit quod desideravimus, haec tamen binomiorum expressio memorabile exhibet theorema.

Invenio hinc quaedam memorabilia duci circa logarithmos.

Aequationes omnes potestatum reducimus ad aequationes inter logarithmos binomiorum, ut $\log \overline{y+f}.\ \log \overline{y+g} \sqcap \log \overline{y+h} + \log \overline{y+l}$.

Jam logarithmus alicujus numeri velut b. est ad logarithmum a 10 cognitum, quem vocabo $\aleph$ aliumve certi numeri constantis, qui etiam est cognitus, ut $10 - \dfrac{100}{2} + \dfrac{1000}{3} -$

---

7 f. *Daneben:* $y^3 \quad d\aleph y^2 \quad \aleph^2 qy \quad \aleph^3 \quad \sqcap \quad 0$ $\qquad \begin{array}{r} 27 \\ 18 \\ \hline 45 \end{array}$

$m \sqcap d\aleph \qquad d\cancel{\aleph} \frown n+p \sqcap \aleph^{\cancel{2}} q$

9–15 Conferatur ... cubica est: Beim Koeffizientenvergleich unterlaufen Leibniz mehrere Versehen. 21 logarithmus alicujus numeri: Leibniz verwendet im Folgenden irrtümlich die Reihenentwicklung für $\ln(1+x)$ zur Darstellung von $\ln(x)$. Das Versehen beeinträchtigt die weiteren Überlegungen.

$\dfrac{10000}{4}$ etc. est ad $\dfrac{b}{1} - \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^4}{4}$ etc. seu $\log \bar{b} \sqcap \dfrac{\dfrac{b}{1} - \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^4}{4} \text{ etc.} \frown \aleph}{\dfrac{10}{1} - \dfrac{100}{2} + \dfrac{1000}{3} - \dfrac{10000}{4} \text{ etc.}}$

Ideoque in aequatione omnia poterunt dividi per $\dfrac{\aleph}{\dfrac{10}{1} - \dfrac{100}{2} + \dfrac{1000}{3} \text{ etc.}}$ adeoque perinde erit evanescenti illo multiplicatore et divisore perpetuo ac si dicas $\log b \sqcap \dfrac{b}{1} - \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^4}{4}$ etc. Notandum est tamen, ipsum b. esse numerum minorem unitate seu fractionem. Ergo si sit b vel $z \sqcap$ a $m+n$. binomium, tunc erit logarithmus a $m+n$ aequalis a:

$$\begin{array}{l|c|l}
+\dfrac{z}{1} & + & \dfrac{m+n}{1} \\
-\dfrac{z^2}{2} & - & \dfrac{m^2}{2} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{2mn}{2} \frown 1 \\
+\dfrac{z^3}{3} & + & \dfrac{m^3}{3} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{3mn \frown m+n}{3} \\
-\dfrac{z^4}{4} & - & \dfrac{m^4}{4} + \dfrac{n^4}{4} + \dfrac{4mn}{4} \frown \llcorner m+n, \boxed{2}, -\dfrac{\frac{1}{3}m^2n^2}{4} \lrcorner \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

Jam $\dfrac{m}{1} - \dfrac{m^2}{2} + \dfrac{m^3}{3} - \dfrac{m^4}{4}$ [etc.] est logarithmus a m; et $\dfrac{n}{1} - \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n^4}{4}$ etc. logarithmus a n. Et quoniam in serie infinita $-\dfrac{2mn}{2} \frown 1 + \dfrac{3mn \frown m+n}{3} - \dfrac{4mn}{4} \frown m+n, \boxed{2}$ etc. evenit feliciter ut qui termini multiplicantur per 2 vel 3 etc. iidem per eosdem numeros dividuntur, hinc fit divisa tota serie per $m\,n$ ut series fiat progressionis geometricae, atque ideo omisso primo termino, $-mn \frown 1$, reliqui summa erit: $\dfrac{m+n}{1+m+n}$. Supersunt termini qui supra in ⊙ qui non sunt nisi binomia facta ex mn, vel m^2n etc., ita tamen ut semper solida sibi respondentia jungantur, in terminos unius seriei descendentis. Prima series descendens est ⊙ ☽. ubi primus terminus mn quia nihil in eo variabile, secundus m^2n. et mn^2, tertius m^3n et mn^3 etc. Ubi rursus hoc commodum habemus, quod numeri divisores, qui sunt progressionis arithmeticae evanescunt ob respondentes

16 supra in ⊙: s. o. S. 249 Z. 4–9.

eosdem multiplicatores ex natura binomii. Praeterea etiam totum ⊙ dividi potest per mn. Restat ergo ut reliquarum illarum serierum in infinitum procedentium, quarum prima ☽ incipit ab mn secunda ☿ incipit ab m^2n^2. sequens m^3n^3 ab aliis inciperet, et quarum quaelibet resolvi potest in duas progressiones ex Geometricis deformatas, multiplicando quemlibet terminum per numerum respondentem progressionis Geometricae. Exempli causa series ⊙ ☽. multiplicata prius per 2. (: quemadmodum sequens ☿ multiplicanda est per 3. et alia quae crescit ab m^3n^3 per 4, ut scilicet fractiones evanescant) resolvetur in has duas:

unam $+\,mn - 2m^2n + 3m^3n - 4m^4n + 5m^5n$ etc.
et alteram $-\,2mn^2 + 3mn^3 - 4mn^4 + 5mn^5$ etc.

Quarum quaelibet si numeri arithmetici auferantur est Geometrica continua multiplicatione per mn producta.

Nimirum prima series divisa per n, dat: $+\,m - 2m^2 + 3m^3 - 4m^4 + 5m^5$ etc.
secunda per m dabit $-\,2n^2 + 3n^3 - 4n^4 + 5n^5$ etc.

Quales series necesse est ratione quadam ad Logarithmorum valores contraria reperiri. Nam Logarithmus est $m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \frac{m^5}{5}$ etc. Si esset: $\frac{m}{\frac{1}{1}} - \frac{m^2}{\frac{1}{2}} + \frac{m^3}{\frac{1}{3}} - \frac{m^4}{\frac{1}{4}} + \frac{m^5}{\frac{1}{5}} - \frac{m^6}{\frac{1}{6}}$ etc. Pone esse ordinatam $z \sqcap 1 \frown 1 - 2 \frown 2y + 3 \frown 3y^2 - 4 \frown 4y^3 + 5 \frown 5y^4$ etc. Summa omnium z, posito ultimam esse m, erit: $\sqcap \frac{1 \frown 1m}{1} - \frac{\cancel{2} \frown 2m^2}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3} \frown 3m^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{4} \frown 4m^4}{\cancel{4}}$ etc. Quaerenda est ergo figura cujus ordinata z, eo quo dixi, modo exprimi possit.

Et potest rursus fingi ipsam $-z$ auferendo inde $1 \frown 1$ et postea signa mutando aequari summae omnium $1 \frown 1 \frown 1 - 2 \frown 2 \frown 2v + 3 \frown 3 \frown 3v^{[2]}$ etc. Sed haec ad majores potius quam minores difficultates ducunt, id ergo agendum est, ut quaeratur figura quaedam, cujus ordinata aequetur a, $1m - 2m^2 + 3m^3 - 4m^4 + 5m^5$ etc. ponendo m. esse abscissam. Sed haec per ordinatam fieri non potest, itaque quaerendum per summam aliarum ordinatarum, nempe quaerenda exempli causa summa omnium ordinatarum quarum una $\sqcap 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^4}$. Jam talium serierum: $\frac{1}{y^2}$ aut $\frac{1}{y^3}$ aut $\frac{1}{y^4}$ summas secundum

17 $-\frac{m^5}{\frac{1}{5}} + \frac{m^6}{\frac{1}{6}}$ *L ändert Hrsg.* 20 ipsam | $-$ *erg.* | z | auferendo ... mutando *erg.* | aeqvari *L*

Arithmeticam infinitorum Wallisii quaerere operae pretium erit. Nempe figura quaelibet simplex seu quae aequatione binomia exprimitur, est ad Rectangulum Circumscriptum, ut 1 ad $\text{ח} + 1$ ponendo ח. esse seriei indicem. Jam reciprocarum indices sunt negativi, unde pro ח ponemus $-\,\text{ש}$. et fiet $\dfrac{\text{omn. } y \text{ seu summa ordinatarum}}{\text{ad } mv\text{. Rectang. Circumscriptum}} \sqcap \dfrac{1}{-\text{ש}+1}$ seu omn. ponendo m esse ultimam abscissam v. ultimam ordinatam $y \sqcap \dfrac{mv}{-\text{ש}+1}$. vel summa omnium $-y \sqcap \dfrac{mv}{\text{ש}-1}$. Quod faciendum tunc cum ש major quam 1. Sed cum ש fractio est, seu cum valor ordinatae y est $\sqcap \sqrt{ax}$. vel $\sqrt{ax^3}$ etc. ponendo x. abscissam, pone jam $\text{ש} \sqcap \frac{1}{2}$. vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{3}{4}$ vel $\frac{4}{5}$ etc. et generaliter exponentem esse fractionem, in qua numerator a nominatore differt unitate tunc eveniet ut habituri simus expressionem spatii, vel summae ordinatarum non per fractionem sed per integrum v. g. sit aequatio $y \sqcap \dfrac{1}{\sqrt{③ x^2}}$ quae est reciproca Heuratianae parabolae, cujus parabolae curvam dimensus est Heuratius (idemque locum habet in omnibus aliis Reciprocis figurarum quarum curvas dimensus est Heuratius,) erit $\text{ש} \sqcap \frac{2}{3}$. adeoque omn. $y \sqcap \dfrac{mv}{-\frac{2}{3}+1} \sqcap \dfrac{mv}{\frac{-2+3}{3}} \sqcap \dfrac{3mv}{1}$. Idemque in caeteris habet locum, itaque ut quaeratur summa hujus seriei $1m - 2m^2 +$ [etc.] quaerenda ergo figura; est autem $v \sqcap \dfrac{1}{\sqrt{③ m^2}}$ adeoque $3mv \sqcap \dfrac{3m \smile \sqrt{③ m^2}}{1}$. Ergo summae figurarum numero fracto carentes sunt:

1 f. qvaelibet *(1)* circumscripta est ad *(2)* simplex *(a)* est ad Rectangulum circumscriptum ut *(b)* seu qvae aeqvatione *(aa)* pura ex *(bb)* binomia *L* 4 $\sqcap \dfrac{1}{-\text{ש}+1}$ *(1)* Qvod si jam ponamus *(2)* seu *L* 10 unitate | *(1)* qvalis *(2)* qvalium scilicet curvas definivit Heuratius *erg. u. gestr.* | tunc *L* 12 aeqvatio *(1)* y $\sqcap$ *(a)* $\sqrt{\text{a}}$ *(b)* $\sqrt{③\text{y}^2}$ *(c)* $\sqrt{③\text{x}^2}$ qvalis est illius parabolae Heuratianae primi gradus, eius index erit *(2)* y $\sqcap \dfrac{1}{\sqrt{③\text{x}^2}}$ *L*

13 dimensus: H. van HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum in lineas rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520.

$$
\begin{array}{lcccc}
 & \dfrac{2m \smile \sqrt{2m}}{1} & \dfrac{3m \smile \sqrt{③ m^2}}{1} & \dfrac{4m \smile \sqrt{④ m^3}}{1} & \dfrac{5m \smile \sqrt{⑤ m^4}}{1} \\[2ex]
\text{a figura:} & y^2 \sqcap 2ax & y^3 \sqcap ax^2 & y^4 \sqcap ax^3 & y^5 \sqcap ax^4 \\[2ex]
\text{sed deberet esse:} & \dfrac{2M \frown M}{1} & \dfrac{3M \frown M^2}{1} & \dfrac{4M \frown M^3}{1} & \dfrac{5M \frown M^4}{1}
\end{array}
$$

Sed patet facile ex his istam seriem esse cum inventa inconciliabilem nec proinde per ordinatas paraboloeidum aut hyperboloeidum seriei: $1m - 2m^2 + 3m^3 - 4m^4$ etc. iniri posse summam.

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Generaliter in numeris} & \dfrac{1}{m} & - & \dfrac{2}{m^2} & + & \dfrac{3}{m^3} & - & \dfrac{4}{m^4}\ \text{etc.} \\[2ex]
\text{summae sunt:} & \dfrac{1}{m} & & \dfrac{m-2}{m^2} & + & \dfrac{m^2-2m+3}{m^3} & + & \dfrac{m^3-2m^2+3m-4}{m^4}
\end{array}
$$

Unde patet summam seriei in qua numeri progressionis Geometricae directae multiplicantur per numeros progressionis arithmeticae ordine ad ordinem exponentium inverso,

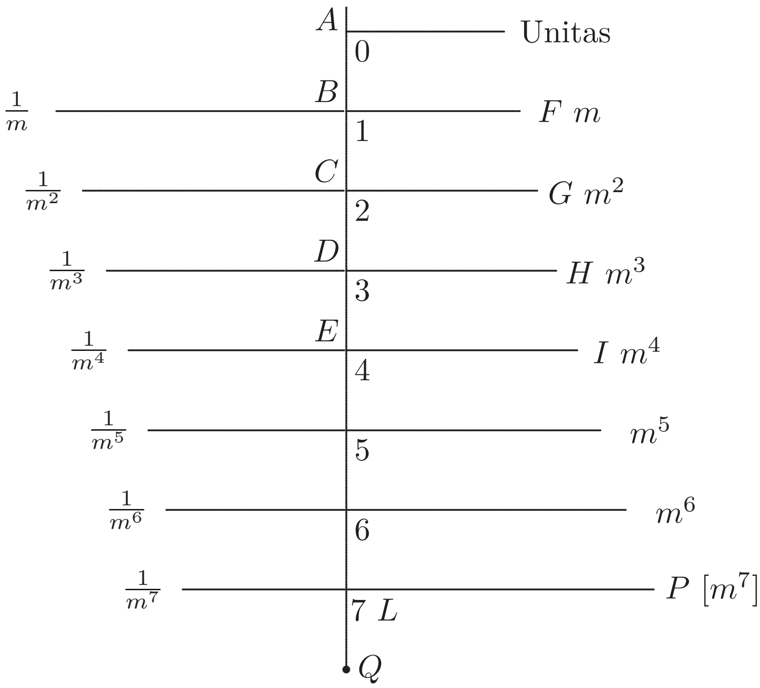
---

9–256,2 *Nebenbetrachtungen u. Nebenrechnungen:*

$$
\begin{array}{rr}
2 \frown 1 & 1 \\
4 \frown 2 & 9 \\
8 \frown 3 & 33 \\
16 \frown 4 & 97 \\
32 \frown 5 & 257 \\
64 \frown 6 & 641
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \sqcap
\begin{array}{rcl}
0 & [+ & 1] \\
8 & + & 1 \\
32 & + & 1 \\
96 & + & 1 \\
256 & + & 1 \\
640 & + & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
9 \\
\underline{24} \\
33 \\
\underline{64} \\
97 \\
\underline{160} \\
257 \\
\underline{384} \\
641
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
32 \\
\underline{5} \\
160
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
64 \\
\underline{6} \\
384
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
+\dfrac{1}{2} \frown 1 & \dfrac{1}{2} \\[1.5ex]
-\dfrac{1}{4} \frown 2 & +0 \\[1.5ex]
+\dfrac{1}{8} \frown 3 & \dfrac{3}{8} \\[1.5ex]
-\dfrac{1}{16} \frown 4 & \dfrac{2}{16} \\[1.5ex]
+\dfrac{1}{32} \frown 5 & \dfrac{9}{32} \\[1.5ex]
-\dfrac{1}{64} \frown 6 & \dfrac{12}{64}
\end{array}
$$

reduci ad summam seriei progressionis geometricae multiplicatae per numeros arithmeticos ordine exponentium directo. Videntur autem utique directae esse inversis naturaliores ac tractabiliores. Ecce theorema valde memorabile.



[*Fig. 1*]

Sit Axis $ABCDE$ etc. Applicentur aequali[bu]s intervallis ordine, termini m. m^2. m^3. m^4. Ducantur in distantias a basi quadam LP seu a puncto Q proximo ultra L cui omnium ultima v. g. LP seu m^7 applicata est, fiet:

$$7m.\ \ 6m^2 \quad 5m^3 + 4m^4 + 3m^5 + 2m^6 + 1m^7.$$

Applicentur reciprocae ex opposito latere, quae ducantur in distantias ab A, fiet $\dfrac{1}{m}$. $\dfrac{2}{m^2}$. $\dfrac{3}{m^3}$ etc. Summa eorum rectangulorum ponatur y. Haec summa erit ad summam rectangulorum sub directis et distanti[i]s a vertice, ut una directa est ad unam reciprocam, seu ut $\dfrac{1}{m}$ ad m. seu ut 1 ad m^2; qui una est ad unam ut alia ad aliam respondentem.

6 qvadam *(1)* EG sumta seu a puncto 7F | *(a)* ultra *(b)* proximo *(aa)* post *(bb)* ultra *(cc)* ultra F *erg.* | cui omnium ultima, v. g. *(aaa)* FG *(bbb)* LP *(2)* M *(3)* LP seu … ultra | F *ändert Hrsg.* | cui L

Summa ergo rectangulorum ex directis et a vertice distantiis erit m^2y. at y etiam aequatur summae rectangulorum ex directis in a basi distantias, aut potius a puncto Q ultra basin unitate remoto, excepto tantum ultimo, ob unitatem, breviter, differentia saltem inter eas duas summas nota est, quam vocabimus $\gimel$ vel $-\gimel$. Erit $y+\gimel$ aequalis summae horum rectangulorum sub terminis directis et distantiis a basi, vel puncto ultra basin, etc. Jam summa harum duarum summarum rectangulorum sub directis et distantiis a basi et sub directis et distantiis a vertice, simul sumta aequatur summae omnium horum terminorum, in rectam constantem AL vel si mavis AQ ductorum, vel saltem differentia nota est, quam vocabimus $\triangle$ vel $-\triangle$. Datur autem haec summa quam vocabimus S. et fiet: $m^2y+y+\gimel \sqcap S+\triangle$ eritque $y \sqcap \dfrac{S+\triangle-\gimel}{m^2+1}$. Ergo inventa est summa numerorum progressionis geometricae finitorum, per arithmeticam ordine directo vel inverso multiplicatorum, nec refert termini se sequantur per + et + an quomodocunque, dummodo constanti regula interrumpantur.

Ausim dicere hoc problema inter subtilissima et utilissima, et addo difficillima eorum quae novi censendum esse.

Hinc enim habetur jam ratio admirabilis profecto, per quam summa facilitate calculari possit logarithmus binomii ex logarithmo partium sine ullo calculo; qua ratione longe melius habebimus logarithmos altiorum terminorum, quam quod in tabulis esse possint.

14,1–4 *Nebenbetrachtung:* In aequatione 4. dimensionum hoc modo 15 habebuntur arbitrariae scribendo non $y+b$. sed $\dfrac{1}{a}y+b$. ex quibus quatuor insumuntur in comparationem analogiae in aequationem, tres aut quatuor in destructionem fractionum $\dfrac{1}{y+e}$. reliquae in $\dfrac{1}{1+y}$. vel $\dfrac{1}{1-y^2}$ destruendas quousque licet.

2 in a *(1)* vertice *(2)* basi *L* 4 vel $-\gimel$ *erg.* *L* 4 f. aeqvalis | summae *erg.* | horum *L* 6 summa *(1)* horum rectangulorum *(2)* harum *L* 8 ductorum *(1)* datur autem haec summa *(2)*, vel *L* 9 vel $-\triangle$ *erg.* *L* 17 partium, *(1)* et qvod est majoris longe momenti hinc haberi poterit resolutio omnium aeqvationum facillima, per logarithmos. In numeris qvantum libet vero propinqvis sine calculo prorsus nullo. Qvod ne sperare qvidem audebam. *(2)* sine *L*

Quod attinet ad aequationes, primum si sumamus $\dfrac{y+a, \frown y+c}{y+b, \frown y+d} \sqcap \dfrac{y+e \frown y+f}{y+g \frown y+h}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} y^2+dy+bd \\ +b\,. \end{array}}$$

Unde log. $\overline{y+a}$ + log $\overline{y+c}$ − log $\overline{y+b}$ − log $\overline{y+d}$ $\sqcap$ log $\overline{y+e}$ + log $\overline{y+f}$− log $\overline{y+g}$ − log $\overline{y+h}$.

Unde patet quando aequalis est logarithmorum affirmativorum et negativorum numerus, tunc tolli logarithmum incognitae ex aequatione, si scilicet logarithmos quaeramus binomiorum.

Nimirum log. $\overline{y+e}$ $\sqcap$ log. ${}^{\asymp}y$. log. e„ $+ye \frown \dfrac{1}{y+e} + \odot$. Vicissim si cognita sit y. hinc inveniemus accurrate summam infinitae progressionis $\odot$ ope hujus aequationis et quantitas $\odot$ quam volumus propinque inveniri potest tum $\odot$☽, tum $\odot$☿ et sequentes; miscendo tamen valorem, y. ita scilicet, ut habeamus $\dfrac{1}{1-y}$. vel similia et $\dfrac{1}{1-y^2}$. etc. neque aliter reperietur y. in valore ipsius $\odot$. nisi quatenus contingit etiam aliquando $\dfrac{y}{\text{cognita}}$ et y^2 cognita scilicet $\dfrac{y}{\text{cognita}}$ et $\dfrac{1}{1-y^2}$ ob $\odot$☽ et $\dfrac{y^2}{\text{cognita}}$ et $\dfrac{1}{1-y^2}$ ob $\odot$☿ et ita de caeteris et raro opus erit ire ultra y^2. Poterunt $\odot$ sequentia post $\odot$☿ negligi plerumque. Porro $\dfrac{1}{1-y}$ et $\dfrac{1}{1-y^2}$ occurrentes in logarithmo unius binomii occurrent eodem modo in logarithmo alterius binomii eo solo discrimine, ut in uno sit v. g. $\dfrac{1}{1-y}$ in altero erit

---

8 *Dazu am Rand:* Correxi $\dfrac{1}{y-e}$. cum debent reddi $\dfrac{1}{y+e}$ item $\dfrac{1}{1-y^2}$.

8 +ye $\frown$ *(1)* $\dfrac{1}{\text{y}-\text{e}}$ *(2)* $\dfrac{1}{\text{y}+\text{e}}$ *(3)* $\dfrac{1}{\text{y}+\text{e}}$ *L* 8 f. Vicissim ... aeqvationis *erg. L* 12 qvatenus *(1)* tota $\odot$ multiplicetur *(2)* contingit *L*

---

8 Nimirum: Entsprechend der Zerlegung der Potenzen des Binoms im Schema S. 249 Z. 2–10 würde die Reihenentwicklung des Logarithmus zu folgender Formel führen: $\ln\big(1+(y+e)\big) = \ln(1+y) + \ln(1+e) - ey\Big(\dfrac{1}{1+(e+y)} + \odot\Big)$.

v. g. $\dfrac{f}{1-y}$ quod non auget difficultatem. Quod si jam efficiamus ut summa omnium logarithmorum cognitarum binomia ingredientium sit nihilo aequalis, quod fieri poterit, quia sine dubio ex tot literis aliqua erit arbitraria, quam sumamus talem affirmativam vel negativam, prout e re erit, ut ejus logarithmus aliorum omnium logarithmos destruat. Si velimus aliter sumere arbitrariam ut non logarithmi, sed ipsae literae cognitae binomia ingredientes se destruant, tolletur $\dfrac{1}{1-y}$. Si faciamus ut eorum quadrata se destruant destruetur $\dfrac{1}{1-y^2}$, et ita porro.

Corollarium autem quod hinc sequitur potissimum est, quod hac methodo aequatio gradus altioris non est difficilior quam aequatio gradus inferioris. Et res eodem redit, nam an progredi necesse sit ad $\dfrac{1}{1-y^3}$, non dependet ab altitudine dimensionum aequationis sed a numeris cognitis, prout scilicet judicari potest accurratioris appropinquationis causa, longius eundum esse, quo serviet methodus Schotenii multiplicandi radices aequationis, quo fit, ut non sit opus longe ire appropinquando.

Unde an ♊ [*bricht ab*]

---

14 *Darunter:* Imo error. Quia non tantum habetur $\dfrac{1}{y+e}$. sed et $\dfrac{1}{y+f}$ etc. Itaque invenienda est methodus destruendi summam harum fractionum, fit autem ex illis reductis aequatio duplo altior data. Sed nil refert, nam quoniam tot in ea arbitrariae, ob analogiam, etiam post quasdam ob comparationem reductas, poterit aequatio illa altior, v. g. octo dimensionum dividi per aequationem 7 dimensionum; Restabit aequatio unius dimensionis, cujus termini duo nihilo aequales ponantur, opus est non nisi duabus adhuc explicationibus, et habebimus quaesitum, ope ut patet trium arbitrariarum hactenus supernumerariarum.

2 logarithmorum *(1)* terminorum cogni *(2)* cognitarum *L* 4 destruat *(1)*, imo eodem possumus faciendo ope alterius arbitrariae et ita po *(2)* si *L* **15,17** aeqvationem 7 | dimensionem *ändert Hrsg.* |; Restabit *L* **15,20** supernumerariarum. | sed hic malum qvod similiter tribus aliis impensis arbitrariis tolli deberet *gestr.* | *L*

---

12 methodus: Vgl. Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 294 f. 14 Unde an ♊: S. o. S. 258 Z. 8.

Hic aliquid obiter tentandum[:]

$$\frac{y+b,\frown\frac{c}{a}y+d}{\frac{e}{a}y+f\frown\frac{g}{a}y+h}\sqcap\frac{y+b\frown y+m}{\frac{n}{a}y+p\frown\frac{q}{a}y+r}$$ sive:

$$\frac{\frac{c}{a}y^2+\ dy+bd \atop +\frac{bc}{a}.}{\frac{eg}{a^2}y^2+\frac{eh}{a}y+fh \atop +\frac{fg}{a}.}\sqcap\frac{\boxed{y^2+my+bm \atop +b\ .}}{}\qquad\frac{y+b}{y+p}$$

et multiplicando per crucem:

2–261,9 *Nebenbetrachtung:* Videamus in aequatione adhuc uno gradu inferiore.

$$\frac{y+b}{y+b}\sqcap\frac{y+c}{\frac{d}{a}y+e}\quad\sqcap\frac{\begin{array}{c|l} \frac{d}{a} & y^2+\ \frac{d}{\cancel{a}}by \\ & \quad +\ ea.+bea \\ -1 & y^2-\ ca. \\ & \quad -\ ba.-bca \end{array}}{d-a}$$

conferenda cum $y^2+fy+ag\sqcap 0$ erit $\dfrac{df-af+ca-ea}{d-a}\sqcap b\sqcap f+\dfrac{ca-ea}{d-a}$ adeoque $\genfrac{}{}{0pt}{}{fe\cancel{a}}{c\cancel{a}}\ \dfrac{-c^2a^{\cancel{2}}+2cea^{\cancel{2}}-e^2a^{\cancel{2}}}{d-a}\sqcap\cancel{a}g$. Ergo $c-e$ pro una quantitate habenda.

16,7 adeoque: Richtig wäre $\dfrac{fe\cancel{a} \atop -fc\cancel{a}}{d-a}+\dfrac{-c^2a^{\cancel{2}}+2cea^{\cancel{2}}-e^2a^{\cancel{2}}}{(d-a)^2}\sqcap\cancel{a}g.$

$$\left.\begin{array}{l|lllll}
\frac{c}{a} & y^3+ & d\;y^2+ & bdy & \\
 & & +\frac{bc}{a}\,.. & & \\
 & & +\frac{pc}{a}\,.. & +\;pd\,. & +pbd \\
 & & & +\frac{pbc}{a}. & \\
-\frac{eg}{a^2} & \ldots & -\frac{eh}{a}\,.. & -\;fh\,. & \\
 & & -\frac{fg}{a}\,.. & & \\
 & & -\frac{beg}{a^2}\,.. & -\frac{beh}{a}. & -bfh \\
 & & & -\frac{bfg}{a}. & \\
\hline
\multicolumn{6}{c}{\frac{ac-eg}{a^2}}
\end{array}\right\}\sqcap 0.$$

Aequationem productam comparemus cum aliqua cubica data, ut $y^3a+aly+m\sqcap 0$. Ut ergo $da^2+bca+pca-eha-fga-beg\sqcap 0$. fiet: $d\sqcap\dfrac{beg+fga+eha-pca-bca}{a^2}$ et $d\sqcap\dfrac{acm\cancel{a^2}-egm\cancel{a^2}+bfh\cancel{a^2}}{pb\cancel{a^2}}$ fiet:

$b^2egp+fgapb+ehapb-p^2cab-b^2cap\sqcap a^3cm-a^2egm+bfha^2$ et erit

$$f\;\sqcap\;\frac{\overset{eg}{p^2ca\cancel{b}}\;\boxed{+b^2cap-b^2egp}\;\overset{eghp}{-ehap\cancel{b}}\;\boxed{-a^3cm-a^2egm}}{gap\cancel{b}-\cancel{b}ha^2}\;\sqcap\;\frac{epg}{a}\frown\frac{p+h}{gp-ha}\;\sqcap\;f$$ ponendo $ca\sqcap eg$.

Tertius valor $d\sqcap\dfrac{fha^{\cancel{2}}l+beh\cancel{a}l+bfg\cancel{a}l-pbc\cancel{a}l,+a^2cl-aegl}{a^2b+a^2p}$.

---

12 $d\sqcap\dfrac{acm\cancel{a^2}-egm\cancel{a^2}+bfh\cancel{a^2}}{pb\cancel{a^2}}$: Richtig wäre $d=\dfrac{acm-egm+bfha^2}{pba^2}$. 14 $f\sqcap$: Leibniz ersetzt im Zähler des folgenden Bruches irrtümlich ea durch den Wert eg für ca. 16 Tertius valor: Die Erweiterung der ersten vier Terme im Zähler mit $\frac{l}{a}$ ist unbegründet.

Unde conferendo valores ipsius d. primum et tertium fiet:

$$b^2eg + bfga + beha - bpca - b^2ca + pbeg + pfga + peha - p^2ca - pbca$$

adeoque

$$f \sqcap \frac{\boxed{b^2eg} + beha - bp\overset{eg}{\vee}ca\,\boxed{-b^2ca}\,\boxed{+pbeg} + pfga + peha - p^2c\overset{eg}{\vee}a\,\boxed{-pbca} - behl + pbc\overset{\frac{eg}{a}}{\vee}l\,\boxed{-a^2cl + aegl}}{\begin{array}{ll} \boxed{bga + pga} & \boxed{-hal - bgl} \\ +b \frown ga & ha \frown -l \\ +p & bg \end{array}}$$

$$[\sqcap]\ \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{lll} eha & \frown p + b & pg \frown pa \\ pbeg & \frown -1 & \qquad fa \\ & + \dfrac{l}{a} & \end{array} \\ \dfrac{-behl}{\begin{array}{ll} b \frown ga + ha \frown -l \\ p \qquad\qquad bg \end{array}} \sqcap \dfrac{epg}{a} \frown \dfrac{p+h}{gp - ha}. \end{array} \right.$$

Unde $b \sqcap \dfrac{\begin{array}{c} peha + pg \frown pa, \dfrac{pga - hal}{gp - ha} \frown p + h \\ fa \end{array}}{eha - peg + \dfrac{pegl}{a} - ehl\ \dfrac{\begin{array}{l} -ga \frown \dfrac{epg}{a} \\ +gl \end{array}}{\dfrac{p+h}{gp+ha}}}.$

Ubi certe nisi b fiat magnitudinis infinitae aut infinite parvae, non video quid exitum vetet. Ponendo $p \sqcap 0$ fuisset et $f \sqcap 0$ et fieret $b \sqcap \dfrac{\cancel{-}h^{\cancel{2}}\cancel{a}l \smile \cancel{-}\cancel{h}\cancel{a}}{eha - ehl} \sqcap \dfrac{\cancel{h}la^2}{e\cancel{h}a - e\cancel{h}l}$. Sed hoc est

---

1 Unde conferendo: Beim folgenden Koeffizientenvergleich unterläuft Leibniz eine Reihe von Versehen. Er zweifelt schließlich das Ergebnis an.

absurdum, valorem ipsius $b.$ haberi per solam $l.$ sine $g.$ Suspectus ergo hic calculus esse debet, memorabilis interim haec inquisitio est de origine aequationum ex analogiis.

$\dfrac{y^2+by+ca}{y+d} \sqcap \dfrac{\frac{f}{a}y^2+gy+ha}{y+d}$. Reducendo fiet:

$$\begin{array}{rrrr} y^3 & +\ by^2 & +\ cay & \\ & +\ d.. & +\ db. & +\ dca \\ -\dfrac{f}{a}y^3 & -\ gy^2 & -\ ha. & \\ & -\ \dfrac{df}{a}.. & -\ dg. & -\ dha \end{array}$$

Ubi patet jam evitatio prolixitatis inutilis. Primum ducantur in se quae debent, (omisso multiplicatore vel divisore communi) et quia plures literae simul reperiuntur fiet ex una $y^2+by+ca$ item $\frac{f}{a}y^2+gy+ha$, reducendo multitudinem literarum ad paucas. Jam fac rursus quantitati $1-\frac{f}{a}$, item $b-g$, item $c-h$ attribue unum nomen, fiet formula qualis $y^2+ky+aw$. Nam $1-\frac{f}{a}$ habenda pro unitate. Quae formula multiplicanda per $y+d$. Itaque res reducitur ad investigationem aequationum, comparando cum excitata ex radicibus. Ubi nihil novi, eadem methodo procedendum pro investigandis analogiis, nisi quod $y+d$ non occurret bis. Res eadem in diversis analogiae terminis.

Sit $\dfrac{1}{y+n} \dagger \dfrac{1}{y+p} (\dagger) \dfrac{1}{y+q} \sqcap 0$. Fiet:

$$\underset{q\,.}{y^2+py+pq}, \dagger \frown \underset{q\,.}{y^2+ny+nq}\ (\dagger)\ \underset{p\,.}{y^2+ny+np} \sqcap 0.$$

---

1 f. *Dazu am Rand:* $\dfrac{\odot}{(\odot)}\ [\sqcap]\ \dfrac{h}{e}$. Ergo $\odot \sqcap (\odot)\dfrac{h}{e}$. Error commissus est ingens. Falsum enim $\odot$ et $(\odot)$ habere rationem constantem.

17 et | $\odot$ *ändert Hrsg.* | habere *L* 8 jam *(1)* ratio errori *(2)* evitatio *L* 15 f. bis *(1)* in multiplicatore simul et divisore *(2)* in diversis terminis *(3)*. Res eadem *(a)* in *(aa)* multiplicato *(bb)* Numeratoribus oppositis aut in *(b)* in ... terminis. *(aa)* Elegantior paulo inqvisitio est *(bb)* sit *L*

Imo opus est dici non $\dfrac{1}{y+n}$ sed $\dfrac{1}{\frac{h}{a}y+n}$ et ita in caeteris excepto uno. Et ita faciendum erat ab initio in analogiis nostris ad logarithmos reducendis. Unde in tanta multitudine arbitrariarum cum sint hic numero 5 explicandae sunt tres hoc loco, ut destrui possit haec formula non attingendo ipsam y. Sed tunc non satis habebimus arbitrariarum ad ipsas analogias. Quod si in qualibet aequatione haec possent fieri nihilo aequalia, et tamen reliquae arbitrariae ad analogiam sufficerent, tunc omnis aequatio esset resolubilis per quadraticam. Primum enim ponendo terminos analogiae dividentes aequales numero multiplicantibus, seu logarithmos negatos affirmatis tolletur logarithmus incognitae: Porro ponendo aequationem ex fractionibus incognitam continentibus productam destructis singulis terminis sublatam; tunc tollentur omnia ♃ simul, cujuslibet binomii logarithmici, et restabit aequatio inter logarithmos cognitos, et plures $\odot$; in $\odot$ autem est m. incognita, et n cognita, pro n substituatur summa omnium cognitarum binomium logarithmicum ingredientium. Imo video hoc fieri non posse. Sed ita videtur procedendum, unum $\odot$ haberi potest. Sumatur aliud pro n ponendo aliam literam, ut f patet singulos terminos unius esse ad terminos respondentes, alterius ut f ad n ergo et summae seu totae $\odot$ ita erunt inter se. Ex aequatione ergo logarithmica:

$$\log y+l+\log y+f \sqcap \log y+g+\log y+h+\log y+e$$

fieri poterit aequatio haec:

$$\log \overline{y+e}\;\begin{array}{|l|r|l|l} + \log y & + \log h & - yh \frown \dfrac{1}{y+h} & + yh \frown \dfrac{\odot h}{e} \sqcap 0. \\ + \ \ldots\ . & g & - yg \frown \dfrac{1}{y+g} & + yg \frown \dfrac{\odot g}{e} \\ - \ \ldots\ . & - \log f & + yl \frown \dfrac{1}{y+l} & - yl \frown \dfrac{l\odot}{e} \\ - \ \ldots\ . & l & + yf \frown \dfrac{1}{y+f} & - yf \frown \dfrac{\odot f}{e} \end{array}$$

Destruendo ergo omnia inter $\big|\quad\big|$ duas lineas comprehensa, quod fit reducendo fractiones et aequationem inde ortam per aliquam uno gradu inferiorem, aut duobus divisibilem

7 analogiae *(1)* aeqvales, et affirmatos *(2)* dividentes *L* 12 pro n *(1)* ponatur *(2)* subintelligatur suum *(3)* substituatur *L* 14 potest *(1)* est autem unum a l *(2)* sumatur *L* 23 comprehensa, *(1)* dum scilicet reducitur aeqvatio *(2)* qvod *(a)* in *(b)* fit *L* 24 aliqvam *(1)* arbitrari *(2)* uno *L*

faciendo, et quotientis singulos terminos qui non nisi duo aut tres sunt destruendo, explicatione totidem arbitrariarum. Est autem

$$\odot \sqcap \log \overline{y+e} - \log y - \log e - ye \frown \frac{1}{y+e}$$

Ergo tota aequatio quotcunque graduum, reducitur ad eandem formam, in quam ingrediuntur tantum haec: y. $\log y$. $\log \overline{y+e}$. Et patet nihil referre quantus sit numerus ipsarum quantitatum: h. g. f. l. seu dimensionum; et una reducta nempe quadratica, reducuntur aequationes aliae omnes; sed radices habentur non nisi duae. Videtur hoc esse ultimus subtilitatis humanae gradus in his rebus.

Et hinc patet etiam mirabilis ratio, inveniendi logarithmos binomiorum, datis logarithmis nominum, et datis nominum quantitatibus, et dato logarithmo alterius binomii unum nomen commune habentis, cujus etiam nominum quantitates et logarithmi dantur. Quoniam semper deest $\odot$ tantum quod dicto modo facile invenitur, quia rationem habet notam ad alterius binomii $\odot$ cognitam.

38_2. DE AEQUATIONE PER LOGARITHMOS (NUM. 2)

Jun. 1675

D e   A e q u a t i o n e   p e r   L o g a r i t h m o s   (n u m. 2)

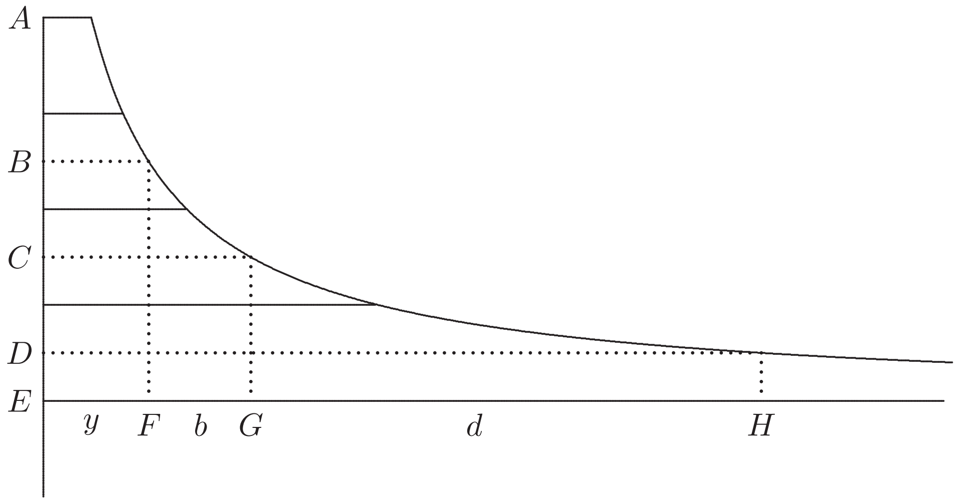
Sit Analogia $\dfrac{y+b \frown \frac{c}{a}y+d}{\frac{e}{a}y+f, \frown \frac{g}{a}y+h} \sqcap \dfrac{y+l}{m}$ in quam aequatio cubica resoluta intelligi possit. Erit aequatio Logarithmica talis:

$$-\,\mathrm{L}\,\overline{y+b} - \mathrm{L}\,\overline{\frac{c}{a}y+d} - \mathrm{L}\,\overline{m} + \mathrm{L}\,\overline{y+l} + \mathrm{L}\,\overline{\frac{e}{a}y+f} + \mathrm{L}\,\overline{\frac{g}{a}y+h} \sqcap 0.$$

2 arbitrariarum. *(1)* Est autem $\odot \sqcap$ log y+ log e+ye $\frown \dfrac{1}{\mathrm{y+e}}$ *(2)* Est *L*   9 binomiorum, *(1)* uno dato semper enim datos logarithmos alterius bin *(2)* datis *L*   10 alterius *(1)* nomini *(2)* binomii *L*
16 D e ... L o g a r i t h m o s |resoluta *erg. u. gestr.*| (n u m. 2) *erg. L*

---

3 $\odot$ $\sqcap$: S. o. die Erl. zu S. 258 Z. 8.



[*Fig. 2*]

Unus Logarithmorum, v. g. L $\overline{y+l}$ consideretur nunc in exemplum. Constat, et sequitur ex demonstratis a Gregorio a S. Vincentio et Nic. Mercatore, Logarithmum alicujus quantitatis ut z, esse $\sqcap \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6}$ etc. Aliquando est $\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}$ etc. aliquando: $\frac{1}{1z} \dagger \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} \dagger \frac{1}{4z^4}$ etc. prout scilicet z. est major minorve unitate, sed quicquid sit semper caetera exempla ad instar hujus tractari possunt quod proponam.

$$\text{Est ergo logarithmus } y+l \ \sqcap \ \frac{\begin{array}{l}+y\\+l\end{array}}{1} \dagger \frac{\begin{array}{l}+y^2\\+2yl\\+l^2\end{array}}{2} + \frac{\begin{array}{l}y^3\\3y^2l\\3yl^2\\l^3\end{array}}{3} + \frac{\begin{array}{l}y^4\\4y^3l\\6y^2l^2\\4yl^3\\l^4\end{array}}{4} \text{ etc.}$$

id est componitur ex $\frac{y}{1} \dagger \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \dagger \frac{y^4}{4}$ etc. seu l o g a r i t h m o a b y. itemque ex

5 $\dagger \frac{1}{4z^4}$ etc. *(1)* | sed *nicht gestr.* | hi om *(2)* prout *L*

---

3 ex demonstratis: Vgl. Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI; A. A. de SARASA, *Solutio*, 1649; N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 28–30 [Marg.]. Leibniz verwendet in der Folge wieder irrtümlich die Reihenentwicklung für $\ln(1+z)$.

$\frac{l}{1} \mp \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{3} \mp \frac{l^4}{4}$ etc. l o g a r i t h m o a b l ac praeterea ex quantitatibus ex ipsarum y. et l. aut potestatum ab ipsis in se invicem ductu factis, nempe $\mp \frac{2yl}{2} + \frac{3y^2l + 3yl^2}{3} \mp \frac{4y^3l + 6y^2l^2 + 4ly^3}{4}$ etc. Quam quantitatem appellabimus $\oplus$. Ergo ita dicere licebit:

$$\mathrm{L}\ \overline{y+l} \sqcap \mathrm{L}\ \overline{y} + \mathrm{L}\ \overline{l} + \oplus.$$

Si sumatur jam alius Logarithmus ut L $\overline{\frac{e}{a}y + f}$. isque eodem tractetur modo, comperietur similiter resolvi posse in tres partes, Logarithmum scilicet ab $\frac{e}{a}y$. Logarithmum ab f. et tertiam partem, quae respondet ipsi $\oplus$, et quae ita procedet: $\mp \frac{\frac{2e}{a}yf}{2} + \frac{\frac{3e^2}{a^2}y^2f + \frac{3e}{a}yf^2}{3} \mp \frac{\frac{4e^3}{a^3}y^3f + \frac{6e^2}{a^2}y^2f^2 + \frac{4e}{a}yf^3}{4}$ etc. Porro pars $\oplus$ superiore plagula resoluta in duas ♄ et ☉. et quidem seriei ♄. haberi potest summa quae est $-mn \frown \frac{1}{1+n}$. Pars ☉ dividetur in partes ☽. ☿. etc. quarum summa haberi non quidem exacte potest, attamen per appropinquationem, quia methodum reperi dandi summam terminorum progressionis geometricae per arithmeticos multiplicatorum numero finitorum.

Notabile est $\frac{ey}{1} \mp \frac{e^2y^2}{2} + \frac{e^3y^3}{3} \mp \frac{e^4y^4}{4}$ etc. $\sqcap \frac{e}{1} \mp \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} \mp \frac{e^4}{4}$ etc. „ $+\frac{y}{1} \mp \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \mp \frac{y^4}{4}$ [etc.]

Inquiramus in summam finitorum Terminorum progressionis Geometricae multiplicatorum per terminos progressionis harmonicae: v. g.

Termini	1	$\frac{1}{1e}$	$\frac{1}{2e^2}$	$\frac{1}{3e^3}$	$\frac{1}{4e^4}$
Summae:	1	$\frac{1e+1}{1e}$	$\frac{2,1e^2+2e+1}{1,2e^2}$	$\frac{3,2,1e^3+3,2e^2+1}{3,2,1,e^3}$	$\frac{4,3,2,1,e^4+4,3,2e^3+4,3e^2+4e+1}{4,3,2,1,e^4}$

3 f. Ergo … + $\oplus$ *erg. L* 16 f. v. g. *(1)* $\frac{\mathrm{e}}{1} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{\mathrm{e}^3}{3} + \frac{\mathrm{e}^4}{4}$ etc. *(2)* $\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2\mathrm{e}^2} + \frac{1}{3\mathrm{e}^3} + \frac{1}{4\mathrm{e}^4}$ summae erunt *(3)* Termini *L*

8 superiore plagula: S. 249 Z. 2–10. 18 Summae: Der Zähler des vierten Terms müsste $3,2,1e^3 + 3,2e^2 + 3e + 2$ lauten, der Zähler des fünften Terms $4,3,2,1e^4 + 4,3,2e^3 + 4,3e^2 + 8e + 6$.

Unde patet summam ejusmodi seriei

$$4,3,2,1e^4 + 4,3,2e^3 + 4,3e^2 + 4e + 1$$

redire ad priorem, quod patet dividendo totam per $4,3,2,1\ e^4$.

Differentiae $\dfrac{1e-1}{1e}$ $\quad \dfrac{2e-1}{1,2e^2}$ $\quad \dfrac{3e-2}{2,3e^3}$ $\quad \dfrac{4e-3}{3,4e^4}$ etc. Cujus seriei haberi potest summa. Sed haec satis manifesta de seipsis. Tamen pro e ponendo $f+1$. Posset sic dici: Haberi summam seriei:

$$\frac{f}{f+1} + \frac{2f+1}{1,2\llcorner f^2+2f+1\lrcorner} \quad \frac{3f+2}{2,3\llcorner f^3+3f^2+3f+1\lrcorner} \quad \frac{4f+3}{3,4,f^4+4f^3+6f^2+4f+1}$$

etc. Quae series separari potest in duas, quarum una data daretur etiam altera:

Prior $\dfrac{f}{f+1}$ $\quad \dfrac{f}{1\llcorner\llcorner f+1,\boxed{2}\lrcorner\lrcorner}$ $\quad \dfrac{f}{2\llcorner f+1\boxed{3}\lrcorner}$ etc. Multiplicetur ea per $f+1$. dividaturque per f. Conferendo unitatem quae est ab initio habebitur logarithmus ipsius $\dfrac{1}{f+1}$.

Posterior portio est $\dfrac{1}{2\llcorner f+1,\boxed{2}\lrcorner}$ $\quad \dfrac{1}{3\llcorner f+1,\boxed{3}\lrcorner}$ etc. Quae etiam facit logarithmum ab $\dfrac{1}{f+1}$ demto tantum aliquo et signis forte mutatis.

Et haec addita priori (scilicet reductae seu divisae et minutae ut dixi) faciet logarithmum quadrati $\dfrac{1}{f+1}$. Logarithmus enim numeri duplicatus est logarithmus quadrati. Sint ergo duae quantitates A. portio prior et B. portio posterior. Datur $A+B \sqcap$ cognito γ. et A divisa per cognitum $\dfrac{f}{f+1}$ et minuta unitate dabit $\dfrac{A \frown f+1}{f} - 1 \sqcap B+1 \sqcap$ Log $\dfrac{1}{f+1}$ sive $\dfrac{A \frown f+1}{f} \sqcap \underset{\substack{\wedge \\ \gamma - A}}{B} + 2$ et $Af + A1 \sqcap \gamma f - Af + 2f$. Unde haberetur valor

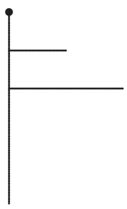
13 f. mutatis. *(1)* Una partium *(2)* sint *(a)* part *(b)* ergo duae series, non *(3)* Et *L*

---

7 $\dfrac{f}{f+1}$: Die Zähler der folgenden Terme müssten $2f+1$, $3f+1$, $4f+1$ lauten. Der Fehler beeinträchtigt die abschließende Zerlegung, so dass die Folgerungen unbegründet bleiben. Leibniz rechnet nicht konsequent weiter und zweifelt schließlich das Ergebnis an.

ipsius A, nempe ipsius logarithmi absolutus, quod non est verisimile. Crediderim ergo potius ipsam A. reducendo destrui.

Alibi demonstratum est a me momentum differentiarum dare summam figurae; unde omittendo $\frac{1e-1}{1e}$ et reliquos terminos multiplicando per 1. 2. 3. etc. fiet: $\frac{2e-1}{2e^2}$ $\frac{3e-2}{3e^3}$ etc. Sed optime sic faciemus: Differentias partiemur in duas portiones. Prior $\frac{1e}{1e}$. $\frac{2e}{1,2e^2}$. $\frac{3e}{2,3e^3}$. $\frac{4e}{3,4e^4}$ etc. ubi omittendo $\frac{1e}{1e} \sqcap 1$. reliquos terminos $\frac{2e}{1,2e^2}$ $\frac{3e}{2,3e^3}$ multiplicando per 1. 2. 3. etc. fiet $\frac{2e}{2e^2}$ $\frac{3e}{3e^3}$ etc. sive $\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^2}$ etc. termini scilicet progressionis Geometricae, quorum haberi potest summa. Altera portio est: $\frac{-1}{1e}$ $\frac{-1}{1,2e^2}$ $\frac{-2}{2,3e^3}$ $\frac{-3}{3,4e^4}$ etc. quam multiplicando per 1. 2. 3. 4. fiet $\frac{-1}{e}$ $\frac{-1}{1e^2}$ $\frac{-2}{2e^3}$ $\frac{-3}{3e^4}$ etc. quae est itidem progressio Geometrica adeoque summabilis. Habetur ergo summa omnium rectangulorum ex differentiis in distantias ductis. Adeoque et supplementum summae ordinatarum. Sed hoc mihi suspectum. Daret enim rursus expressionem logarithmi. Et credo in eo esse errorem quod non ducuntur in distantias uti jacent sed una pars sic alia aliter.



[*Fig. 3*]

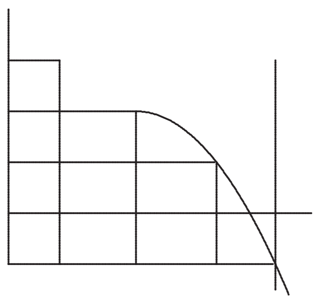
Methodus interim ista qua quaeruntur summae serierum ducendo earum differentias in numeros arithmeticos magnos habet usus. Nam sic etiam videtur inveniri posse summa

3 differentiarum *(1)* aeqvari summae *(2)* dare L 8 f. est *(1)* $-\frac{1}{1\text{e}} - \frac{1}{1,2\text{e}^2} - 1$ *(2)*: $\frac{-1}{1\text{e}} \ldots \frac{-3}{3,4\text{e}^4}$ etc. *(a)* ubi rursus omittendo $\frac{-1}{1\text{e}}$ et reliqva multiplicando per *(b)* qvam L

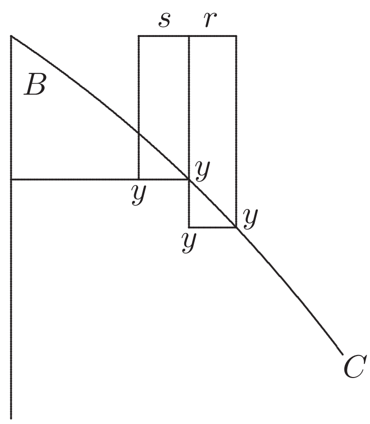
3 Alibi: Vgl. VII, 4 N. 40$_4$ S. 705 u. VII, 3 N. 40.

hujus seriei: $1m\ 2m^2\ 3m^3$ etc. Ejus enim summa est supplementum summae figurae, cujus differentiae sunt $m.\ m^2.\ m^3$. At summa figurae cujus differentiae sunt $m.\ m^2.\ m^3$. etc. haberi potest. Est enim progressionis Geometricae (cum differentiae sint progressionis Geometricae), ergo et ejus supplementum haberi potest, id est summa figurae, $1m.\ \ 2m^2$ $3m^3$ etc. Idemque locum habet turbatis etiam numeris arithmeticis.

Hinc si $\overbrace{\frac{m}{1}\ \frac{m^2}{2}\ \frac{m^3}{3}\ \frac{m^4}{4}}^{A}$ etc. ducatur in distantias, fiet $\overbrace{m.\ m^2.\ m^3.\ m^4}^{B}$ Geometrica. Ergo momentum differentiarum Figurae summatricis, seriei Harmonicogeometricae, id est supplementum ipsius figurae summatricis haberi potest. Ergo et ipsa summatrix figurae summatricis. Ergo quanquam non semper ipsa figura summatrix. Nam quando figurae alicujus tangens haberi non potest tunc ex data summatrice non datur figura. Sed hic videtur subesse error, ut:



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

$\frac{1}{y}$ ductae in distantias dant parallelogrammum. Sint y. lineolae Applicatis Hyperbolae proportionales[,] BC linea logarithmica. Rectangula omnia erecta ry. sy. inter se aequalia erunt. Hinc tamen jam video non ideo haberi supplementi summam, quia

7 Ergo *(1)* si A harmonico-geom *(2)* summatrix *(3)* supplementum summae *(a)* summatricis harmonico-geometricarum *(b)* summarum harmonico-geometricae *(4)* Ergo summatric *(5)* id *(6)* | id est *nicht gestr.* | *(7)* differentia *(8)* momentum *L* 9 qvanqvam non semper *erg. L* 9 f. summatrix. *(1)* Unde videtur seqvi *(2)* | Nam ... figura *erg.* | Sed *L*

ipsa basis vel altitudo geometrice non habetur. Et ratio hic particularis, quia omnino destruitur incognita.

$z \sqcap m - n$. Ergo $z^5 \sqcap m^5 - n^5 - 5mn \frown m - n\boxed{3} + m^2n^2 \frown m - n$.
Aliter $z^5 \sqcap -5mn \frown m - n\boxed{3} + m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4$.
Unde $z^5 \sqcap -5mn \frown m - n\boxed{3} \begin{array}{l} + m^4 \\ + n^4 \\ + m^2n^2 \end{array} + mn \frown \begin{array}{l} m^2 \\ n^2 \end{array} \frown m - n$.

Itaque si aequatio surdesolida quaevis nullum alium habeat terminum, quam primum et alterutrum ex duobus mediis reddi potest quadrato-quadratica.

Sit enim aequatio surdesolida: $z^5 \sqcap ahz^3 + a^4r$.

$$z^6 * 2apz^3 + a^2p^2 \sqcap h^2z^4 + \begin{array}{l} aqz^3 \\ + 2ap\cdot \end{array} + a^3rz^2 + a^4sz + \begin{array}{l} a^5t \\ a^2p^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{|llll|} \hline hz^2 & \dfrac{aq+2ap}{2h}z & \dfrac{a^3r}{2h} & -\dfrac{a^2q^2+4aqp^2+4a^2p^2}{8h^3} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l|} 2hz^2 \quad + \dfrac{aq+2ap}{2h}z \\ \hline \end{array}$$

$$-\frac{a^2q^2+4a^2qp+4a^2p^2}{4h^2}z^2$$

$$\boxed{2hz^2 \qquad \frac{-aq-2ap}{h}z}$$

$$z^6 - p^3 \sqcap ah\begin{array}{c} z^5 \\ z+p \end{array} + lz^3 + mz^2 * \begin{array}{c} p^3 \\ n \end{array}$$

9 *Darunter:* Error

14 $2hz^2+$ | $\dfrac{ap+2ap}{2h}$ *ändert Hrsg.* | *L*

3 Ergo: Bei den folgenden Umformungen unterlaufen Leibniz Fehler, die seine Schlussfolgerung beeinträchtigen. Er erkennt den Irrtum und markiert ihn.

$$
\begin{array}{l}
z^4 - a^2p^4 \sqcap h^2z^2 + a^2qz + a^3r \;⨍\; h^2z + a^2q \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - a^2p^2 \qquad\qquad - h^2p \\
\hline
\qquad\qquad z + p \\
\hline
\qquad\qquad - h^2p\,. \\
\qquad\qquad\qquad \boxed{z + p} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - a^2qp \\
\qquad\qquad\qquad\quad + h^2p^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
z^9 - a^4p^2 \sqcap z^7 \\
z^5 \sqcap m^5 + \underbrace{5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4}_{5mn \frown m^3 + \frac{10}{5}m^2n + \frac{10}{5}mn^2 + n^3} + n^5 \\
\qquad\qquad \text{sive } 5mn \frown \underbrace{\llcorner m^3 + 2m^2n + 2mn^2 + n^3 \lrcorner}_{z\boxed{3} - mn \frown z}
\end{array}
$$

Aliter inde faciamus cubum, nempe faciamus $+\underset{c}{1}\,m^3 + 2m^2n + 2mn^3 + \underset{c}{1}\,n^3$. Quaeritur qualis sit quantitas c, ut totum fiat cubus, comparetur cum $p^3 + 3pq \frown p + q + q^3$, fiet $p \sqcap m\sqrt{③\ 1 + c}$. et $q \sqcap n\sqrt{③\ 1 + c}$. et erit: $3pq \frown p + q$, id est $3\boxed{mn \frown m + n}, \frown 1 + c \sqcap 2\boxed{mn \frown m + n}$ et $c \sqcap \frac{2}{3} - 1$. sive $c \sqcap -\frac{1}{3}$ et erit

$$
\begin{array}{l}
z^5 \sqcap m^5 \quad 5mn \frown \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{3}m^3 \frown mn \\
\qquad n^5 \qquad\qquad\qquad\quad ..\ n^3
\end{array}
$$

Sit jam aequatio: $z^5 \sqcap * \ aqz^3 + a^4t$. erit $m \sqcap \frac{3aq}{10n}$ et $m^5 \sqcap \frac{243a^5q^5}{100,000n^5}$ et $\frac{1}{3}m^3 \sqcap \frac{27a^3q^3}{1000, n^3}$ et $\frac{243a^5q^5}{100,000n^5} + n^5 + \frac{\cancel{3}aq}{2} \frown \frac{1}{\cancel{3}}n^3 + \frac{27a^3q^3 \frown \frac{3aq}{2}}{1000n^3} \sqcap a^4t$. Ubi ponendo radices aequationis datae multiplicatas per n, aequatio proposita fieret plana, si nullus in calculo error, videamus in Cubo: Nec video quomodo aliquis existere possit dividi enim poterunt omnia:

15 $\frown mn$: Richtig wäre $\frown 5mn$. Der falsche Wert wird in S. 273 Z. 4 übernommen.

$$\begin{array}{l}
z^5 * \quad aqz^3 \quad * z^2 \; * z + \quad \dfrac{n^5 t}{a} \qquad \sqcap 0 \\
\hline
z^5 * \dfrac{10mn}{3} z^3 \; * \quad * \left. \begin{array}{l} + \quad m^5 \\ + \quad n^5 \\ + mn \frown \dfrac{1}{3} m^3 \\ + \qquad \dfrac{1}{3} n^3 \end{array} \right\} \sqcap 0
\end{array}$$

Conferantur hae duae aequationes; fiet: $m \sqcap \dfrac{3q}{10}$ adeoque $\dfrac{m^3}{3} \sqcap \dfrac{27q^3}{3, 1000}$ et $m^5 \sqcap \dfrac{243q^5}{100000}$ et fiet: [*bricht ab*]

$$\begin{array}{llllll}
z^y & lz^{y-1} & mz^{y-2} & nz^{y-3} + p & \not\int & z^{y-1} + lz^{y-2} \\
 & & & \qquad\quad q & & \qquad - p \\
\hline
\boxed{z \; + \; p} & & & & & \\
\quad - \; pz^{y-1} & & & & & \\
 & \boxed{z \; + \; p} & & & & \\
 & \quad - \; lp\, z^{y-2} & & & & \\
 & \quad + \; p^2 & & & &
\end{array}$$

---

2 *Darunter Koeffizientenvergleich der kubischen Terme:* $5mn \sqcap \dfrac{3aq}{2}$

6 m ⊓ *(1)* $\dfrac{3nq}{10a}$. adeoqve $\dfrac{m^3}{3} \sqcap \dfrac{27n^3q^3}{3, 1000, a^3}$. et $m^5 \sqcap \dfrac{243n^5q^5}{10000, a^5}$ *(2)* $\dfrac{3q}{10}$ *L* 7 fiet: | $\dfrac{243n^5\cancel{q^5}}{100, 000\cancel{a^5}} + n^5 + \dfrac{27\cancel{n^3}q^3 \frown 3}{3, 1000, a^3} + \dfrac{1}{3} n \sqcap ta^4$ *gestr.* | *Dazu, nicht gestr.* nugae *L*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & L\aleph^1 & & M\aleph^2 & & N\aleph^3 & & P\aleph^4 & & & & Q\aleph^6 & & \\
z^6 - b^3 \sqcap & & lz^5 & + & mz^4 & + & nz^3 & + & pz^2 & + & * & + & q & ⨍ & lz^3 \quad mz^2 + nz + p \\
 & & & & & & & & & & & - & b^3 & & \qquad\quad - bl \quad - mb \\
 & & \boxed{z^2 + b} & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & - bl\ldots & & - mb.. & & - & nbz & - & pb & & & \\
 & & & & & & & & + & b^2 l & + & mb^2 & & & \\
 & & & & \boxed{z^2 + b} & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \boxed{z^2 + b} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \boxed{z^2 \quad + \quad b} & & & & & &
\end{array}$$

Ut ergo divisio haec exacte procedat, necesse est duas fieri aequationes, unam, residuorum termini penultimi $b^{\cancel{2}}l \sqcap n\cancel{b}$ sive $b \sqcap \frac{n}{l}$; alteram residuorum termini ultimi, in qua inseramus valorem ipsius. Porro in locum cognitarum substituamus majusculas per potestatem ab arbitraria $\aleph$ multiplicatas, ut supra aequationem scripsi, quia id semper fieri potest. Unde $b \sqcap \frac{N\aleph^3}{L\aleph} \sqcap \frac{N}{L}\aleph^2$. Unde novissima aequatio erit:

$$Q\aleph^6 - \frac{N^3}{L^3}\aleph^6 \sqcap -\frac{PN}{L}\aleph^6 + \frac{MN^{[2]}}{L^{[2]}}\aleph^6.$$

Unde destruitur arbitraria, nec adeo quicquam hinc duci potest.

Erit ergo aequatio: $q - b^3 \sqcap -pb + mb^2$. Itaque videndum an aliqua alia arbitraria in hac aequatione haberi possit, quod fiet, si ponamus natam ex aequatione quinti gradus multiplicata per arbitrariam. Sit: $z^5 \sqcap lz^4 + mz^3 + nz^2 + q$. Scribatur: $\aleph^2 z^6 - b^3 l\aleph^2 z^4 + m\aleph^2 z$ etc. Male nam ita etiam in divisore foret $\aleph$. Rectius:

$$\begin{array}{ccccccc}
z^5 & - lz^4 & - mz^3 & - nz^2 & - pz & - q & \\
 & & & & z & + r & \\
\hline
z^6 \sqcap & lz^5 & mz^4 & nz^3 & pz^2 & qz & \\
 & - r & lr\ldots. & mr\ldots & nr.. & pr. & qr
\end{array}$$

10 *(1)* et fient aeqvationes duae, una: $n\cancel{b} \sqcap b^{\cancel{2}}l$ seu $b \sqcap \frac{n}{l} \sqcap \frac{L}{N\aleph^2}$ unde $q\aleph^6 - \frac{N^3}{L^3\aleph^6} - \frac{p\aleph^2 L}{N\cancel{\aleph^2}} + \frac{m\cancel{\aleph^2}L^2}{N^2\aleph^{\cancel{4}2}}$ $\sqcap 0$. in qva $\aleph$ ascendit ad gradus 12. 8. 4. 0. adeoqve habetur aeqvatio *(a)* qvadrato-cubica *(b)* qvae ex cubica et qvadrato quadratica pendet. Qvod si verum esset seqveretur omne problema surdesolidum reddi posse solidum *(2)* Ut *L* 10 f. unam *(1)* in qva de *(2)* | residuorum termini penultimi *erg.* | $b^{\cancel{2}}l \sqcap n\cancel{b}$ *L*

Unde fient ex divisione aequationes duae, una: $b^2l - b^2r \sqcap +nb + mrb + q + pr$. Altera erit: $qr - b^3 \sqcap -pb - nrb + mb^2 + lrb^2$. Quae duae aequationes conjunctae restituunt aequationem surdesolidam. Haec ergo inutilia.

An rectius ita:

$$\begin{array}{l} \quad z^2 + cz + b \\ \text{per } \underline{z^4 \quad dz^3 \quad ez^2 + f. + g} \end{array}$$

Productum hujus multiplicationis ponatur ab utroque aequationis latere, et tentetur an utrobique dividi possit per $z^2 + cz + b$.

Tentemus in quadratoquadratica:

$$\begin{array}{llll} z^2 + bz & + ac & & \\ \underline{z^2 + dz} & \underline{+ ae} & & \\ z^4 + bz^3 & + acz^2 & & \\ \quad + d\ldots & + db\,.. & + dacz & \\ & + ae\,.. & + aeb\,. & + a^2ce \end{array}$$

Aequatio:

$$\begin{array}{llllllll} z^4 + bz^3 & + acz^2 & + dacz & + a^2ce \sqcap & + bz^3 & acz^2 & + dacz & + a^2ce \\ \quad d. & db.. & + aeb\,. & & + d\,. & db & aeb & \\ & ae.. & & & & ae & & \\ & & & & + l\,. & am & a^2n & a^3p \end{array}$$

Una pars aequationis divi[di] potest per $z^2 + bz + ac$.
Videndum est an altera quoque dividi possit per eandem, ideo mult. per

$$\begin{array}{llll} & \underline{z} & \underline{f} & \\ z^3 + bz^2 & + acz & + fac & \\ \quad + f.. & + fb. & & \end{array}$$

Conferendo erit: $b \sqcap a - d - l$. et ex secundis: $ac + ad - d^2 - ld + ae + am \sqcap a^2 - ad - al + af$ eritque $af \sqcap ac + ad - d^2 - ld + ae + am - a^2 + ad + al$. Ex tertiis: $dac + a^2e - aed - ael + a^2n \sqcap a^2c + [a]fb$. Multiplicando autem f per b. assurget d ad

1 duae, *(1)* |una, *nicht gestr.*| $\begin{array}{l} +b^{\cancel{2}}l \sqcap \cancel{b}n \\ -b^{\cancel{2}}r \quad \cancel{b}mr \end{array}$ sive bl $\sqcap$ +br + n + mr altera: *(2)* una *L*

6 f. +g *(1)* $\sqcap$ $z^6 + b^6$. dividi poterit utiqve aeqvatio *(2)* productum *L* 25 erit: *(1)* f $\sqcap$ d et e $\sqcap$ ⟨a⟩ *(2)* b $\sqcap$ a − d − l *L*

cubum, et l ad quadratum: Novissima est aequatio, ubi multiplicando f per c. etiam c surget ad quadratum. Non video quomodo omnes assurgant ad quadratum. Operae pretium erit tentare rem in cubo, ubi calculus minor.

$$\begin{array}{rl} & z+d \\ & z+e \\ \hline z^2+dz & \\ +e.+ed & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{llll} z^2 & +bz & +ac & \\ & z & +d & \\ \hline z^3 & +bz^2 & +acz & \\ & +d.. & +db & +dac \end{array}$$

$z^3 \sqcap pz^2+aqz+a^2r$

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{rrrrl} z^3 & +bz^2 & +acz & +dac \sqcap & pz^2+aqz+a^2r \\ & +d.. & +db & & b..+ac.+dac \\ & & & & d..+db. \end{array}\right\}\sqcap 0 \\ \hline \left.\begin{array}{ll} az^2 & adz+aed \\ & ae. \end{array}\right\}\sqcap 0 \end{array}$$

Conferendo: $b \sqcap a-p-d$. ex secundis: et $ac \sqcap ad+ae-da+dp+d^2-aq$. ex tertiis, et denique: $a^2r+ad^2+aed-d^2a+d^2p+d^3-aqd \sqcap aed$ et redeunt priora, adeoque inutilis inquisitio.

$$\begin{array}{rcccccccccc} z^6-p^6 \sqcap & lz^4 & +\ mz^3 & nz^2 & qz & r & \mathrel{\rlap{\,-}f} & lz^3 & mz^2 & nz & q \\ & & & & & p^6 & & & -pl & -pm & -np \\ & & -plz^3 & -pm & -np & -qp & & & & +p^2l & +p^2m \\ & \boxed{z+p} & & +p^2l & +p^2m & +np^2 & & & & & -p^3l \\ & & \boxed{z+p} & & -p^3l & -p^3m & & & & & \\ & & & \boxed{z+p} & & +p^4l & & & & & \\ & & & & \boxed{z+p} & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & N & P & & Q & & R & & S & \\ z^5 & nz^4 & pz^3 & + & qz^2 & + & rz & + & s & \sqcap\ 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{llccccccccccc}
 & & & & n & & p & & q & & r & & s \\
\text{Sit}\quad z^5 & \sqcap & y^5 & + & 5y^4b & + & 10y^3b^2 & + & 10y^2b^3 & + & 5yb^4 & + & b^5 \\
Nz^4 & \sqcap & y^4 & + & 4y^3b & + & 6y^2b^2 & + & 4yb^3 & + & b^4 & & \\
Pz^3 & \sqcap & y^3 & + & 3y^2b & + & 3yb^2 & + & b^3 & & & & \\
Qz^2 & \sqcap & y^2 & + & 2yb & + & b^2 & & & & & & \\
Rz & \sqcap & y & + & b & & & & & & & & \\
S & \sqcap & S & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Ergo $n+5b \sqcap 0$. $b \sqcap -\dfrac{n}{5}$. Quod si possit esse etiam: $q+3pb+6nb^2+10b^3 \sqcap 0$.

Nempe $q - \dfrac{3n}{5p} + \dfrac{6n^3}{25} - \dfrac{\overset{2}{\boxed{10}}n^3}{\underset{25}{\boxed{125}}} \sqcap 0$ seu $q - \dfrac{3np}{5} + \dfrac{4n^3}{25} \sqcap 0$.

Itaque $N+5B - \llcorner\dfrac{3}{5}N+5B, P+N4B+10B^2\lrcorner + \dfrac{4}{3}\boxed{3}\llcorner N+5B\lrcorner \sqcap 0$. Quae res per aequationem Cubicam effici potest praeformando; quaerendo scilicet valorem ipsius b. primae explicationis, quae ejusmodi relationem, dabit $q - \dfrac{3np}{5} + \dfrac{4n^3}{25} \sqcap 0$. sumendo scilicet N. P. Q. R. S. pro cognitis aequationis ut initio posita est, et n. p. q. r. s. pro

3 n ... s *erg. L* 4 sit *(1)* $y^2 \sqcap bz^2+cy+dx+ea$ *(2)* z^5 *L* 5 *(1)* n *(2)* $Nz^4 \sqcap$ | n⌒ *erg. u. gestr.* | y^4 *L* 6 *(1)* p *(2)* $Pz^3 \sqcap$ | p⌒ *erg. u. gestr.* | y^3 *L* 7 *(1)* q *(2)* $Qz^2 \sqcap$ | q⌒ *erg. u. gestr.* | y^2 *L* 8 *(1)* r *(2)* $Rz^2 \sqcap$ | r⌒ *erg. u. gestr.* | y *L* 10 q + 3 | p *erg.* | b + 6 | n *erg.* | b^2 *L* 13 praeformando; *(1)* qvo effectos habebimus *(2)* qvaerendo *L* 14 $\sqcap$ 0. *(1)* qva obtenta *(2)* sumendo *L*

10 Ergo: Leibniz rechnet mit den im Schema Z. 3–9 ergänzten und wieder gestrichenen Faktoren n, p, q.

productae aequationis cognitis[,] literam B pro arbitraria prima, literam b pro secunda. His positis non video quid impediat hos terminos simul tolli:

$$\begin{array}{lrrrr} z^3 & y^3 + 3by^2 + & 3b^2y + & b^3 \\ pz^2 & p.. + & 2pb\ . + & pb^2 \\ qz & & q\ . & qb \\ r & & & r \end{array}$$

Ut duo termini secundus et tertius simul tollantur, erit: $b \sqcap -\dfrac{p}{3}$ et $b^2 \sqcap \dfrac{p^2}{9}$ et $b^2 \sqcap \dfrac{-2pb-q}{3} \sqcap \dfrac{p^2}{9}$. $\dfrac{p^2}{3} \sqcap +\dfrac{2p^3}{9} - q$. $-6pb - 3q \sqcap p^2$ et $b \sqcap \dfrac{p^2+3q}{-6p} \sqcap \dfrac{p^2}{9}$. sive $6p^3 - 3p^2 - 9q$.

Denuo: Suppono semper a nobis effici posse ut terminus q sit affirmativus, pone enim negativum esse ab initio, ergo adjectis $3b^2 + 2pb$ affirmativis (nam p semper potest esse affirmativa) reddi potest quantuscunque cum b. sit tantae magnitudinis quantum volumus. Hoc posito cum velimus nunc facere ut duo termini secundus et tertius simul absint, habebimus aequationes duas, $3b + p \sqcap 0$. et $3b^2 + 2pb + q \sqcap 0$. Ex prima aequatione $b \sqcap \dfrac{-p}{3}$. Ergo $b^2 \sqcap \dfrac{p^2}{9}$. Inserantur hi valores in secunda, fiet: $\boxed{\dfrac{3p^2}{9}} - \dfrac{2p^2}{3} + q \sqcap 0$. et erit $q \sqcap \dfrac{p^2}{3}$ adeoque $3b^2 + 2pb + q \sqcap \dfrac{9b^2 + 6pb + p^2}{3}$. Ubi destructis omnibus redit prior aequatio: $\dfrac{p^2}{3} \sqcap q$. Ad hanc ergo praeformationem obtinendam alia opus est methodo, et adhibenda est explicatio major. Videndum aute⟨m⟩. Contra sit:

$$\frac{3b^2 + 2pb + q}{b^3 + pb^2 + qb + r}\,\boxed{2} \sqcap \frac{9b + 3p}{b^3 + pb^2 + qb + r} \text{ sive}$$

$$9b^4 \quad +12b^3p \quad +6b^2q, + 4\ p^2b^2 \quad +2pbq \quad +q^2 \sqcap$$

7–9 $\mathrm{b}^2 \sqcap \dfrac{-2\mathrm{pb}-\mathrm{q}}{3} \sqcap \dfrac{\mathrm{p}^2}{9}$. *(1)* et *(2)* eritqve: *(3)* | $\dfrac{\mathrm{p}^2}{3} \sqcap +\dfrac{2\mathrm{p}^3}{9} - \mathrm{q}$ *erg.* | $-6\mathrm{pb} \ldots \sqcap +\dfrac{\mathrm{p}^2}{9}$. | sive … $-9\mathrm{q}$ *erg.* | *(a)* id est: $-6\mathrm{B}^2 - 18\mathrm{B}^2 - 6\mathrm{PB} - 9\mathrm{B}^2 - 2\mathrm{PB} - \mathrm{Q} \sqcap 9\mathrm{B}^2 + 6\mathrm{PB} + \mathrm{P}^2$ *(b)* Denuo *L*

---

8 $\dfrac{p^2}{3} \sqcap$: Leibniz unterlaufen in der Rechnung einige Flüchtigkeitsfehler. Er setzt danach neu an.

19 $+2pbq$: Richtig wäre $+4pbq$. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Abschätzung.

$$\boxed{9b^4}\ \boxed{\begin{array}{l}+9b^3p\\+3pb^3\end{array}}\ +\underset{3}{\boxed{9}}\,qb^2+9br\,\boxed{+3p^2b^2}+\boxed{3}\,pbq+3pr$$

Unde $p^2b^2+q^2 \sqcap 3qb^2+9br+pbq+3pr$. Suppono non esse $3qb^2 \sqcap p^2b^2$, quia nondum $3q \sqcap p^2$.

$$\text{Ideo } b^2\ \frac{\left\{\begin{array}{l}-\ 9rb\\-\ pq\end{array}\right.}{p^2-3q}\ \ \frac{\left\{\begin{array}{l}+81r^2\\+18rpq\\+p^2q^2\end{array}\right.}{4p^4-24p^2q+36q^2} \sqcap \frac{\left\{\begin{array}{ll}81r^2 & -q^2\\18rpq & +3pr\\p^2q^2 & \end{array}\right.}{4p^4-24p^2q+36q^2}$$

$\text{•ǂ}\,9r^2\ \text{•ǂ}\,p^2q \sqcap \text{•ǂ}\,2p^2\ \text{•ǂ}\,6q \frown \sqrt{+q^2+3rp}$. Pone $\boxed{q^2}+3rp \sqcap \boxed{q^2}+2qg+g^2$ erit $q \sqcap \dfrac{3rp-g^2}{2g}$. et fiet $\text{•ǂ}\,9r^2\ \text{•ǂ}\,p^2 \frown \dfrac{3rp-g^2}{2g} \sqcap (\text{•ǂ})\,2p^2(\text{•ǂ})\,6 \frown \dfrac{3rp-g^2}{2g}$„ $\frown \dfrac{3rp\,\overset{+}{\boxed{-}}\,g^2}{2g}\boxed{+g}$

8 *(1)* | debet esse *nicht gestr.* | $81r^2+18rpq+p^2q^2 \sqcap 8p^4q^2-12p^5r$ *(2)* $\text{•ǂ}\,9r^2$ *L*

---

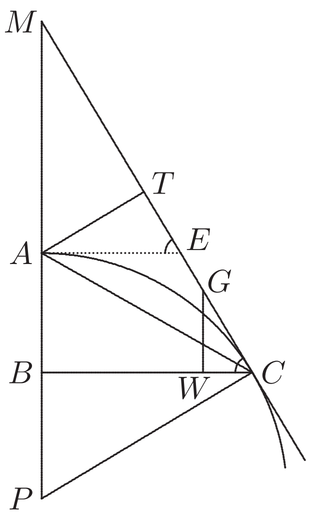
5 f. $-q^2$ $+3pr$: Die beiden Terme müssten durch p^2-3q geteilt werden, nicht durch $4p^4-24p^2q+36q^2$.

8 $\text{•ǂ}\,9r^2$: Der folgende Ansatz ergibt sich nicht konsequent aus den vorhergehenden Rechnungen.

39. INVENIRE GENERATRICEM TROCHOIDIS
[Ende 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 10 Bl. 8. 1 Bl., ca. 20 cm × 12 cm. $1\frac{1}{2}$ S.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Der Träger des Stückes hing ursprünglich mit jenem des von Leibniz auf Ende 1676 datierten Stückes *Generalis diatyposis* (N. 32) zusammen.



[*Fig. 1*]

BP, p. GC, c.

$dx : dy :: y : p$. Ergo $\overline{dx}\, p$ aequ. $\overline{dy}\, y$ et $\int\overline{p\,dx}$ aequ. $\dfrac{1}{2}yy$, si p datur ex data x. Quod si p datur ex y, fiet x aequ. $\int \dfrac{dy\, y}{p}$.

$AT : TE :: dx : dy$. TE aequ. $AT\,\dfrac{dy}{dx}$.

8 *(1)* AT : TE :: dx : dy. *(2)* BP, p. *L* 11 TE aeqv. AT $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ *erg. L*

$EC:\underset{x}{AB}::dc:dx$ fiet EC aequ. $\dfrac{dc}{dx}x$ et TC aequ. $TE+EC$, seu TC aequ. $AT\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dc}{dx}x$.

Jam AT^2+TC^2 aequ. $xx+yy$. Sit AT aequ. θ, et TC sit z fiet θ^2+z^2 aequ. $xx+yy$ unde differentialiter fiet: $\theta\,d\theta+z\,dz$ aequ. $x\,dx+y\,dy$.

$AT:AE::dx:dc$ seu AT aequ. $AE\dfrac{dx}{dt}$.

$MA:MB$ seu $t-x:x::AE:BC,y$.

Ergo AE aequ. $\dfrac{ty-xy}{x}$. Ergo AT aequ. $\dfrac{\overline{ty-xy}\;dx}{x\,dc}$. Est autem t aequ. $y\dfrac{dx}{dy}$. Ergo AT seu θ aequ. $\dfrac{yy\,\overline{dx}^2}{x\,dy\,dc}-y\dfrac{dx}{dc}$. Jam data curvae quadratura datur $\int\theta\,dc$, et eadem data datur $\int y\,dx$. Ergo data curvae quadratura datur $\int\dfrac{yy\,\overline{dx}^2}{dy}$. Quam relationem in curva praesenti habent AT, TC, AC, eam in trochoide ejus habent CB, BP, PC.

AT ductae in GC, seu θ in dc, sunt in trochoide ipsae y ductae in $dx+dp$.

Data trochoide invenire ejus generatricem, reducitur ad hoc problema, dato elemento trochoidis invenire curvam. Nam data curva dantur ejus AP, ergo et differentiae ipsarum; sunt autem ipsae eaedem cum ipsis GC generatricis, seu cum curvae generatricis Elementis. Contra ex data methodo inveniendi generatricem, videndum an habeatur methodus inveniendi curvam elementi quaesiti. Et desideratur, ut ex datis differentiis

1 TE + EC. *(1)* fiet: *(2)* seu *L* 3 f. fiet . . . differentialiter *erg. L* 5 seu *(1)* AE t − x *(2)* AT aeqv *L* 7 $\dfrac{\mathrm{ty}-\mathrm{xy}}{\mathrm{x}}$. Ergo *(1)* AE *(2)* AT *L* 12 Data *(1)* curva invenire eius trochoidem, est *(2)* trochoide *L* 12 f. problema, *(1)* data curva invenire elementum curvae *(2)* dato elemento | trochoide *ändert Hrsg.* | invenire *L* 13 data *(1)* Trochoide *(2)* curva *L* 14–16 GC *(1)* Trochoidis, seu cum curvae trochoidis *(2)* generatricis, . . . Elementis. *(a)* Et contra si data *(b)*: sed non contra licebit ex data generatric *(c)* contra ex | dato *ändert Hrsg.* | methodo inveniendi generatricem, *(aa)* non habetur methodus *(bb)* videndum . . . inveniendi *(aaa)* curvae *(bbb)* curvam *L*

6 $t-x:x$: Leibniz setzt $t=MB$. Das korrekte Verhältnis lautet daher $(t-x):t=AE:y$. Der Fehler belastet die Überlegungen bis Z. 9. Das dortige Ergebnis für die Quadratur wird durch weitere Versehen beeinträchtigt.

ipsarum AP habeatur curva; seu ut ex datis $dx + d\,\frac{\overline{\overline{dy}\,y}}{dx}$ aequ. $dx\,x^{\cdot\cdot}$ fiet $x + \frac{dy\,y}{dx} \sqcap \int\overline{dx\,x^{\cdot\cdot}}$ et $x\,dx + dy\,y$ aequ. $\overline{dx\int\overline{dx\,x^{\cdot\cdot}}}$ seu $\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}yy$ aequ. $\int\overline{dx\int\overline{dx\,x^{\cdot\cdot}}}$. Unde patet opus prius esse ad quadraturas, adhoc ut ex data methodo inveniendi trochoidis generatricem, reperiatur methodus pro elemento curvae. Prius enim invenienda (trochoides) curva cujus differentiae AP sint datae quod fit ut dixi per quadraturas.

1 ex datis *(1)* x et *(2)* dx + *(a)* dy *(b)* $\frac{\mathrm{d}\,\overline{\overline{\mathrm{dy}}\,\mathrm{y}}}{\mathrm{dx}}$ *(c)* $\mathrm{d}\,\frac{\overline{\overline{\mathrm{dy}}\,\mathrm{y}}}{\mathrm{dx}}$ *L* 2 x dx + dy y *(1)* aeqv $\iint$ *(2)* aeqv *(a)* $\int\overline{\mathrm{dx}\int\overline{\mathrm{dx\,x}^{\cdot\cdot}}}$ *(b)* $\overline{\mathrm{dx}\int\overline{\mathrm{dx\,x}^{\cdot\cdot}}}$ *L* 4 invenienda *(1)* tro *(2)* (trochoides) *L*

---

1 $x^{\cdot\cdot}$: Leibniz erklärt diese ungewöhnliche Notation hier nicht. Ihre Bedeutung ergibt sich aus der Gleichung, in der sie verwendet wird. Diese ist äquivalent zu $dx\,x^{\cdot\cdot} = dx + dp$ und lässt sich zu $x^{\cdot\cdot} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2}$ beziehungsweise zu $x^{\cdot\cdot} = \left(\frac{dc}{dx}\right)^2$ umformen; $x^{\cdot\cdot}$ ist hier also das Quadrat des Bogenelements. — Andere Stücke, in welchen sich Leibniz dieser Notation bedient, sind einige Jahre jünger (etwa LH 35 VIII 10 Bl. 1–2, datiert auf den 29. November 1681). Zwar verwendet er die Notation auch in dem gut drei Jahre älteren Stück VII, 4 N. 39_2 auf S. 650, dort allerdings ist sie nur ein merktechnisches Hilfsmittel.

40. AUS UND ZU PIERRE COURCIER, SUPPLEMENTUM SPHAEROMETRIAE

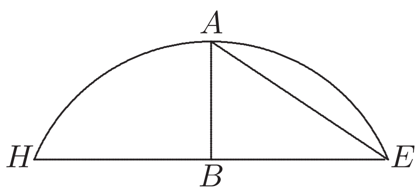
8. März 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 206. 1 Bl. 2°. 2 S. — Leibniz hat im separierten Index, S. 73–76 des Druckes (LH 35 XIII 3 Bl. 207–208; Cc 2, Nr. 1350 B), die auf S. 73 befindliche Überschrift *Index* ergänzt zu: „Index Supplementi Sphaerometriae P. Courcier". — Wörtliche Zitate werden kursiviert, dabei werden Auslassungen von einzelnen Wörtern in der Regel nicht eigens vermerkt. Orthographie und Interpunktion von Leibniz, gegebenenfalls abweichend von der Quelle, werden stillschweigend übernommen. Cc 2, Nr. 1350 A

8. Martii 1676.

Supplementum Sphaerometriae, sive Triangularium et aliarum in Sphaera figurarum quoad areas mensuratio per R. P. Courcier S. J. Mussiponti apud Claudium Cardinet 1675.

Superficies cujuslibet integrae portionis Sphaerae demta sua circulari basi est aequalis circulo, cujus semidiameter aequatur *lineae rectae ductae a vertice ad* circumferentiam basis *illius portionis*.



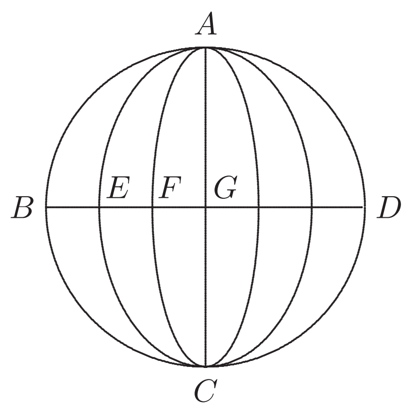
[*Fig. 1*]

Circulus rad. $AE \sqcap$ superf. AHE.

Quae *linea est chorda subtendens arcum maximi circuli transeuntis per verticem dictae portionis, et in ejusdem peripheriam cadentis ad angulos rectos;* portio sphaerae comprehensa duobus semicirculis magnis in eisdem polis se secantibus, vocatur Sectio peponalis.

12 sive | Triangulorum *ändert Hrsg.* | et *(1)* aliorum *(2)* aliarum *L*   16 f. ad *(1)* basim *(2)* circumferentiam basis *L*   18 f. *Fig. 1* ... AHE *erg. L*

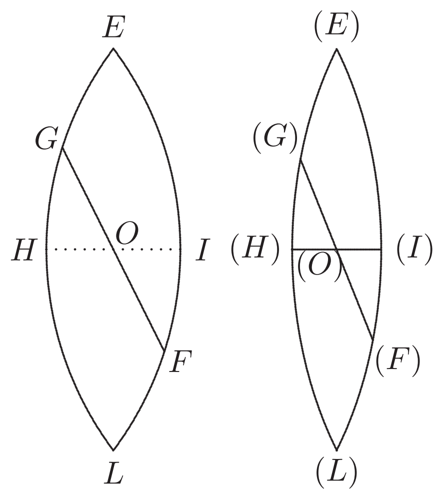
Residua sphaerae portio sectio Antipeponalis. Sectio peponalis ab aequatore secatur in duo Triangula, quae vocat birectangula, quia duo anguli ad aequatorem recti. Complementum Trianguli ad superficiem hemisphaerii vocat Anti-birectangulum.



[*Fig. 2*]

Theor. 1. *In sectionibus peponalibus est area ad aream, ut angulus* ad polum *ad angulum.*

Seu sectiones peponales sunt ut anguli ad polum. Hoc non satis probat, etsi satis videatur clarum. Ut *totum ad totum*, ait, *ita pars similis ad similem partem.* Anguli et sphaera eodem modo secantur.

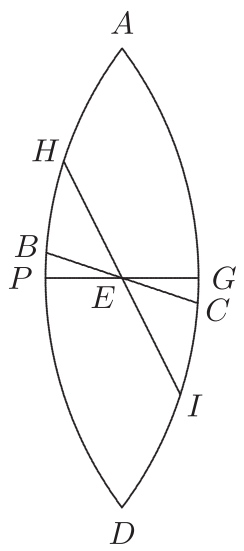


[*Fig. 3*]

5 ad polum *erg. L*

Theor. 2. *In Triangulis Sphaericis* (+ circulis magnis comprehensis +) *in quibus duo latera simul sumta semicirculo aequalia, se habent areae, ut anguli* duobus *lateribus comprehensi* scilicet $GEFG$ ad $(G)(E)(F)(G)$, ut angulus in E ad ang. in (E). Nam $GEFG$ Triangulum aequale Triangulo HEI. si arcus GOF transeat in O medio per aequatorem. Nam utrumque sectionis peponalis dimidium. Patet sectiones peponales esse ut angulos, ergo et eorum dimidia. $GE + EF$ faciunt semicirculum, ut patet.

Prop. 3. Problema: *Triangulo sphaerico cujus duo latera simul sumta sunt aequalia semicirculo invenire aliud aequale quod habeat vel latus vel angulum datum, cum duobus lateribus semicirculo aequalibus*. Hoc facile.

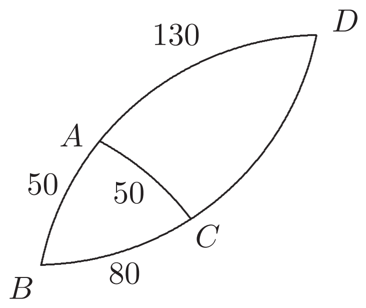


[*Fig. 4*]

Datum ABC. quaesitum cujus angulus AH, erit HAI, et I determinatur circuli magni arcu ducto HEI.

Nunc progrediamur ad Triangula in quibus latera simul sumta non faciunt semicirculum et *Prop. 5.* Problema: *Invenire aream Trianguli Sphaerici isoscelis cujus crura simul sumta sunt semicirculo majora aut minora.*

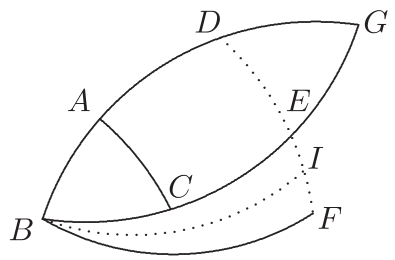
4 medio *erg. L* 6 f. patet | Iam porro progressus ostendit, qvomodo dato Triangulo Sphaerico (magno scil.) aliud inveniri possit, cuius duo latera simul aeqvalia semicirculo. *gestr.* | *(1)* In *(2)* Hoc praestat *(3)* prop. *L*



[*Fig. 5*]

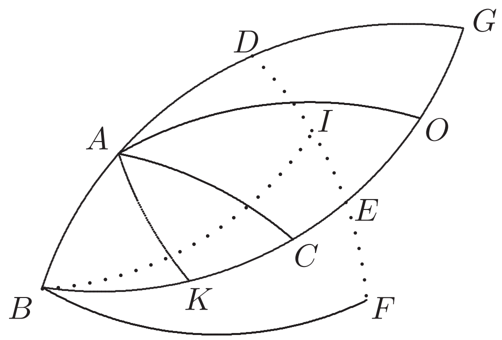
Sit Triang. ABC. $AB \sqcap AC$. BA et BC continua in D ut sectio peponalis fiat erit ADC Triangulum cujus duo latera AD, AC faciunt semicirculum (nam $AD + AC \sqcap AD + AB$.) Ergo Triangulum ADC haberetur, ergo si auferatur a sectione peponali, etiam data, restabit area dati ABC.

Hinc problema solvit *prop. 6. Invenire isosceles birectangulum dato alteri isosceli aequale:* hoc modo: Si[t] propositum triangulum isosceles, tolle supplementum anguli verticalis, ex summa angulorum ad basin residuum, erit angulus verticalis Trianguli birectanguli aequalis cum isoscele dato. *Scilicet p r o p. V I. Invenire isosceles birectangulum dato alteri isosceli aequale:*



[*Fig. 6*]

Dati isoscelis ABC. producatur basis BC. lat., AB. ut fiat *pepo.* [...] *Anguli ABC. duplus ABF.* Ergo *Birectangulum DBF* $\sqcap$ *peponi $ABCG$. Si* tollas *GAC ex pepone sive ex DBF vel quod eodem recidit, ut* patet *ex prop. 2. Si tollatur angulus GAC vel ipsi sumtus aequalis DBI ex DBF remanebit verticalis angulus* ∇^{li}*IBF,* quod aequale ∇^{lo} *isosceli dato ABC.*



[*Fig. 7*]

Prop. VII. Invenire isosceles birectangulum dato Triangulo rectangulo vel scaleno cuilibet non rectangulo aequale. In isoscele ABC. ducatur a vertice A. perpendicularis arcus AK, ergo bisecatur isosceles *in duo aequalia Triangula rectangula. AKB. AKC.* utriusque area, seu birectangulum ei aequale sic invenietur facile. Si ex $\nabla^{\text{ang.}}$ ABC. dimidio anguli ABF tollatur angulus ABI seu dimidus anguli CAG *relinquetur enim angulus IBE qui est verticalis, angulus Trianguli birectanguli IBE quod est aequale cum rectangulo AKB vel AKC in isoscele ABC. Hic enim processimus per medietates sicut in praecedenti problemate per totalitates. Ut autem se habet totum ad totum, ita medietas ad medietatem. Eodem modo in omnibus* rectangulis *Triangulis reperiri potest birectangulum aequale, ut satis patet, si nempe ex altero acutorum tollatur* dimidium supplementum duplicati alterius acuti anguli, id est, *dimidium supplementum anguli BAC qui est angulus duplicatus anguli BAK. Quod enim relinquetur erit angulus verticalis birectanguli cum dato rectangulo aequalis.* [. . .] *Hinc autem satis* patet *idem quod supra contingere, id est obtineri birectangulum aequale dato rectangulo, sive istud datum sit pars isoscelis ut contingit in triangulo isoscele ABC, sive sit pars Scaleni, ut contingit in triangulo Scaleno ABO. Semper enim eodem modo obtinebitur dictum birectangulum dato rectangulo aequale. Imo hinc colligitur modus facillimus metiendi Triangula sphaerica quaelibet. Nam isosceles birectangulum aream suam prodit angulo suo verticali. Quodlibet autem isosceles non birectangulum facile revocatur ad birectangulum, sicut et quodlibet rectangulum revocari potest ad birectangulum. Imo et quodlibet etiam scalenum revocari potest ad birectangulum, quia dividi potest in duo rectangula, et duo rectangula ad duo birectangula, et duo birectangula ad unum birectangulum, cujus videlicet angulus verticalis adaequet duos angulos verticales duorum aliorum birectangulorum.*

Prop. 8. Triangula aequalia sphaerica habent aequalem summam angulorum.

Et prop. 9. est hujus conversa. Sequuntur aliquot problemata usque ad prop. 15. quae horum consequentiae; item alia in quibus ex tribus datis Trianguli reliqua inveniuntur, et area anguli unius vel lateris locum subit. Meminisse autem oportet per Trignometriam, quodlibet trianguli latus facile reperiri, datis aut repertis angulis ∇^{li} sphaerici.

Prop. 25 ad 29. notanda habet Problemata de arcuum trientibus, exempli causa, *si latus aequilateri Trianguli facti ad verticem isoscelis birectanguli abscindat in tertia parte complementum anguli verticalis dicti isoscelis, erit istud aequilaterum illi isosceli aequale.*

Prop. 31. Si sphaerico isosceli birectangulo fiat ad ejus verticem aliud isosceles aequale prioris tantae parti, quantae ipsum posterius est pars certi polygoni regularis, et habens in vertice centralem angulum istius certi polygoni; angulus ad basin istius posterioris isoscelis compositus erit ex semiangulo polygoni rectilinei regularis cujus assumtus est centralis angulus, et ex dimidia parte tantae portionis anguli verticalis prioris isoscelis, quot habet polygonum latera. Nimirum *ut habeantur* polygonorum regularium *centrales anguli oportet tantum dividere 360 per numerum laterum polygoni, quotiens enim erit centralis angulus. Ut vero habeantur anguli polygoni rectilinei, tollendus est angulus centralis polygoni ex 180. residuum erit angulus polygoni rectilinei.*

Polygona:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Centrales anguli	120	90	72	60	$51\frac{3}{7}$	45	40	36	$32\frac{8}{11}$	30
Anguli polygoni rectilinei	60	90	108	120	$128\frac{4}{7}$	135	140	144	$147\frac{3}{11}$	150
Semiang. polyg. rectil.	30	45	54	60	$64\frac{2}{7}$	$67\frac{1}{2}$	70	72	$73\frac{7}{11}$	75

In *Prop. 41.* ait autor se dare jam dimensionem omnium arearum superficiei sphaerae, circulis comprehensorum non vero linearum aliarum *quae in superficie sphaerae describi possent*, ut *parabolicae, Hyperbolicae, Ellipticae, de quibus* inquit *olim nobis sermo fuit in o p u s c u l o de Sectione Conicae, Sphaericae, Cylindricae, superficierum ab in-*

15 polygonorum *(1)* rectilineorum *(2)* regularium *L*

26 *o p u s c u l o*: P. COURCIER, *Opusculum de sectione superficiei sphaericae*, 1663.

vicem. NB (+ non capio quomodo in sphaerae superficie describi possent hujusmodi curvae. +)

Determinare limites angulorum quos habet quodlibet polygonum regulare. Prop. 32. Polygona regularia [*Sphaerica*] *non habent se semper eodem modo in quantitate suorum angulorum, sicut polygona rectilinea, quae angulos suos semper eosdem habent. Puta Trigona semper habent angulos grad. 60. Tetragona 90.* [...] *At sphaerica angulos illos variant, cujus variationis limites hic postulantur. Quoniam autem ex praecedenti propositione et Corollario angulus polygoni Sphaerici componitur ex angulo polygoni rectilinei et tanta parte anguli verticalis isoscelis birectanguli polygono Sphaerico aequalis, quot habet polygonum latera fit ut minimus limes tunc habeatur, si anguli polygoni rectilinei nihil addatur; maximus vero si angulo polygoni rectilinei tanta portio addatur, quanta est pars numeri 360 per numerum laterum polygoni divisa in quotiente relicta. Quorum limitum differentia excursio angulorum nominari potest.* [...] *Et haec excursio juncta cum primo sive minimo limite, dat limitem maximum.*

His omnibus si jam addatur Archimedis artificium quo invenit portiones sphaericae superficiei, et circulo parallelo comprehensas, jam omnes denique circulorum in sphaera intersectiones puto haberi possunt.

Hinc subjicit problema *Prop. 42. Data trium* in terrae superficie *locorum longitudine* et *latitudine, invenire* aream superficiei interceptam.

Et *Prop. 43.* hoc notat: *Areae triangulorum Sphaericorum habentium aequalia cum Triangulis rectilineis latera aliquando sunt minores areis rectilineorum, aliquando majores aut aequales.*

Non est hic, inquit *consulenda imaginatio sola, quae gibbositatem sphaericae superficiei considerans facile sibi persuadebit, nunquam contingere, ut areae Triangulorum sphaericorum habentium aequalia cum rectilineis latera, sint minores areis rectilineorum. Verum rationem et experientiam sequendo dico, innumera, esse* tam quae majorem, quam quae *minorem habeant* aream: *Hic libentissime* (inquit in fine) *subjicerem tabulam quam pro gradibus et minutis compositam birectangulorum quam peponum habeo, sed cogit omittere defectus typorum numeralium.* Subjicit recapitulationem.

21 minores | angulis *ändert Hrsg.* | rectilineorum *L*

41. MARGINALIEN IN BLAISE PASCAL, TRAITÉ DU TRIANGLE ARITHMETIQUE

Überlieferung: *LiH* Marginalien und Unterstreichungen in Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmetique*, Paris, 1665: HANNOVER *Leibniz-Bibl.* Nm–A 605. — Gedr.: VII, 3 N. 28 S. 323 Z. 25–29 (tlw.)
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz' Beschäftigung mit Pascals Schriften, die 1665 im Band *Traité du triangle arithmetique* erschienen sind, spiegelt sich in zahlreichen Stücken wider. Für alle Texte mit Ausnahme von N. 41_6 finden sich Belege, die die einzelnen Marginalien und Unterstreichungen in verschiedenen Zeiträumen zwischen Frühjahr 1672 und Frühjahr 1673 sowie Ende 1673 bis Mitte 1674 verorten.

Aufschluss auf die Datierung der Marginalien an N. 41_6 gibt die letzte Anmerkung, die in Verbindung mit der Notiz LH 35 XII 2 Bl. 1 v° und dem Konzept *De periodis fractionum decimalibus* (LH 35 III A 25 Bl. 1–3 u. 7–10) steht. Inhaltlich baut das Konzept auf den Arbeiten an den Stücken LH 35 III A 25 Bl. 15 r° u. 14 v° sowie LH 2 V 2 Bl. 46 v° auf. Leibniz' Datierung der Schrift *De periodis fractionum decimalibus* auf Januar 1687 sowie sein Hinweis, dass die zugrundeliegenden Beobachtungen erst kürzlich entstanden seien, lässt eine Entstehung der Marginalie im Winter 1686/87 erschließen. Aus formalen und inhaltlichen Gründen ist von einer zeitgleichen Entstehung der übrigen Marginalien an diese Schrift Pascals auszugehen.

Die Schriften des Marginalexemplars erscheinen als Text, die zugehörigen Seitenzahlen sind in eckigen Klammern vorangestellt. Die Orthographie und ein Großteil der Textauszeichnungen wurden an die Grundsätze der Textgestaltung dieser Ausgabe angepasst. Kursivierungen einzelner Wörter oder kurzer Passagen, mit denen in den Schriften von Pascal Einzelheiten wie neue Bezeichnungen oder in den konkreten Rechenbeispielen allgemeiner Lösungsansätze auftretende Werte hervorgehoben werden, wurden nicht mit übernommen. Marginalien aus Leibniz' Hand werden als Fußnoten zum Text wiedergegeben, seine Unterstreichungen durch Sperrung der entsprechenden Passagen hervorgehoben.

41_1. ZUR KLAPPTAFEL
[Frühjahr – Herbst 1672]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

Z	1	2	3	4	5	6	7	L 8	9	10
1	G 1	σ 1	π 1	λ 1	μ 1	δ 1	ζ 1	1	1	1
2	ϕ 1	ψ 2	θ 3	R 4	S 5	N 6	7	8	9	
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ξ 15	21	28	36		
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	Y 35	56	84			
5	H 1	M 5	K 15	35	70	126				
6	P 1	Q 6	21	56	126					
7	V 1	7	28	84						
T 8	1	8	36							
9	1	9								

Rangs paralleles

Triangle Arithmetique

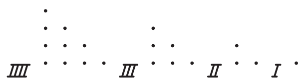
Rangs perpendiculaires

2,4 *Daneben:*

	Combinaisons			*in Tabula*
1	dans 6 se peut prendre à	6	differentes fois	N
2	....	15	....	ξ
3	....	20	....	ρ
4	....	15	....	K
5	....	6	....	Q
6	....	1	....	V

2,5 *Daneben:*

$$\begin{array}{lll} y \text{ rerum diversae} & \left\{\begin{array}{l} \text{unitates} \\ \\ \text{com2nationes} \\ \\ \text{con3nationes} \\ \\ \text{con4nationes} \end{array}\right. & \begin{array}{l} \dfrac{y}{1} \\ \dfrac{y, y-1}{1,2} \\ \dfrac{y, y-1, y-2}{1,2,3} \\ \dfrac{y, y-1, y-2, y-3}{1,2,3,4} \end{array} \\ y \text{ rerum} & & \end{array}$$

2,8 *Daneben in Spalte 6:* 

2,10 diversae *erg. LiH*

3,2–8 Combinaisons: Vgl. Bl. PASCAL, *Divers usages du triangle arithmetique*, 1665, S. 4 f. [Marg.] (*PO* III S. 469–471) und DERS., *Combinationes*, 1665, S. 22 u. S. 32 f. [Marg.] (*PO* III S. 557 u. 586–593). Vgl. auch Leibniz' Auseinandersetzung mit dieser Thematik in N. 25. **3,10–13** y rerum diversae: Leibniz gibt hier die *a. a. O.*, S. 32 f. [Marg.] (*PO* III S. 586–593) dargestellten Zusammenhänge wieder. N. 25 belegt ebenfalls Leibniz' Beschäftigung mit diesem Thema, enthält jedoch keine Ansätze zur Formalisierung. **3,14**  : Gleiche und ähnliche Figuren finden sich in VII, 3 N. 3 S. 21–26.

41_2. ZUM TRAITTÉ DES ORDRES NUMERIQUES
[Herbst 1672 – Winter 1672/73]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 5 f.]

... La maniere dont il a pris cette mesme proposition est telle.

En la progression naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque estant mené dans le prochainement plus grand, produit le double de son triangle.

Le mesme nombre estant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le triple de sa pyramide.

Le mesme nombre mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le quadruple de son triangulo-triangulaire; et ainsi à l'infiny, par une methode generale et uniforme.

Voila comment on peut v a r i e r l e s e n o n c i a t i o n s. Ce que je monstre en cette proposition s'entendant de toutes les autres, je ne m'arresteray plus à cette maniere accommodante de traitter les choses, laissant à chacun d'exercer son genie en ces recherches, où doit consister toute l'estude des Geometres: car si on ne sçait pas tourner les propositions à tous sens, et qu'on ne se serve que du premier biais qu'on a envisagé, on n'ira jamais bien loing: ce sont ces diverses routes qui ouvrent les consequences nouvelles, et qui, par des enonciations assorties au sujet, lient des propositions, qui sembloient n'avoir aucun rapport dans les termes où elles estoient conceües d'abord. ...

---

5 il: Bei der Passage in Z. 6–12 handelt es sich um eine französischsprachige Wiedergabe einer Beobachtung von Fermat, die dieser in einem Brief von Anfang Juni 1638 (*FO* II S. 70; *CM* VII S. 279) Mersenne mitgeteilt hatte. Später wurde sie als Observatio D. P. F. in *Diophanti Alexandrini De Multangulis Numeris Liber Unus*, 1670, S. 16 (*FO* I S. 341) veröffentlicht. Leibniz bezieht sich auf diese Übersetzung in S. 209 Z. 8 – S. 210 Z. 3. 13 v a r i e r l e s e n o n c i a t i o n s: Leibniz weist auf die unterstrichene Passage in *Aus und zu Galileis Discorsi*, VI, 3 N. 11_2 S. 167 Z. 10 f. sowie später in VI, 3 N. 22_2 S. 331 Z. 8–11 hin.

41_3. ZU DE NUMERORUM CONTINUORUM PRODUCTIS
[Ende 1672 – Frühjahr 1673 sowie Ende 1673 – Mitte 1674]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 13]

De numerorum continuorum productis,
seu
De numeris qui producuntur
ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium.

Numeri qui producuntur ex multiplicatione numerorum continuorum a nemine, quod sciam, examinati sunt. Ideo nomen eis impono nempe, producti continuorum.

. . .

[S. 16]

. . .

---

7 *Neben der zweiten Überschrift:* Producti continuorum cum progressione harmonica, plurimum habent connexionis. Sed hoc Pascalius non observavit. Nimirum:
$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ etc. est series progressionis harmonicae, reducendo omnes ad unum nomen fiet:

$$\frac{2,3,4+1,3,4+1,2,4+1,2,3}{1,2,3,4}$$

14 f. continuorum *(1)* sunt progressionis harmonicae. *(2)* cum progressione harmonica | plurimum habent connexionis *erg.* |, sed . . . non *(a)* noverat *(b)* observavit *LiH*

14–18 Producti . . . $\frac{2,3,4+1,3,4+1,2,4+1,2,3}{1,2,3,4}$: Leibniz' Beschäftigung mit der Summation der ersten Glieder der harmonischen Folge und die in der späteren Ergänzung der Marginalie angegebene Partialsumme sind in VII, 3 N. 10 S. 134 f. sowie in N. 11 S. 140 f. belegt. Zudem sind der Summe der harmonischen Progression die Stücke VII, 3 N. 27 und 28 gewidmet. In letzterem weist Leibniz explizit auf S. 323 Z. 2 – S. 324 Z. 5 auf den in der Marginalie erwähnten Zusammenhang zwischen den Produkten aufeinanderfolgender Zahlen und der harmonischen Progression hin.

Problema.

Dato quocunque numero, invenire tot quot imperabitur, numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus, sit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur.

Oportet autem datum numerum non esse minorem producto totidem numerorum ab unitate continuorum.

Datus sit numerus verbi gratia 4335. Oporteatque reperire verbi gratia quatuor numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus sit maximus qui in dato 4335 contineatur, eorum omnium qui producuntur ex multiplicatione quatuor numerorum continuorum.

Sumantur ab unitate tot numeri continui quot sunt numeri inveniendi, nempe quatuor in hoc exemplo, 1, 2, 3, 4, quorum per productum, 24, dividatur numerus datus sitque quotiens, 180. Ipsius quotientis inveniatur r a d i x o r d i n i s numerici non quidem quarti sed sequentis nempe quinti sitque ea, 6. Ipse, 6, est primus numerus, secundus 7, tertius 8, quartus 9.

. . .

41_4. ZU NUMERICARUM POTESTATUM GENERALIS RESOLUTIO
[Ende 1672 – Frühjahr 1673]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 19]

. . .

Problema.

Dato quolibet numero invenire radicem propositae potestatis maximae quae in dato contineatur.

---

13 r a d i x o r d i n i s: Die von Leibniz unterstrichene Passage steht in einem inhaltlichen Bezug zu Bl. Pascal, *Numericarum potestatum generalis resolutio*, 1665, S. 19 [Marg.] (*PO* III S. 550 f.), die Leibniz ebenfalls mit einer Unterstreichung und einer Anmerkung versehen hat. VII, 1 N. 106 S. 673 Z. 19 f. belegt Leibniz' Auseinandersetzung mit dem von Pascal vorgestellten Problem.

Sit datus numerus v. g. 4335, et invenienda sit radix gradus v. g. quarti maximi numeri quarti gradus seu quadrato quadrati qui in dato numero contineatur.

Inveniantur, e x p r a e c e d e n t e t r a c t a t u, quatuor numeri continui, quia quartus gradus proponitur, quorum productus sit maximus ejus speciei qui in 4335 contineatur, sintque ipsi, 6, 7, 8, 9.

. . .

41_5. ZU POTESTATUM NUMERICARUM SUMMA
[Juli – Dezember 1672]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 36]

. . .

Ad summam Potestatum cujuslibet progressionis inveniendam
unica ac generalis methodus.

Datis quotcunque numeris, in qualibet progressione, a quovis numero inchoante, invenire quarumvis potestatum eorum summam.

---

14 *Ergänzung von* arithmetica *über* progressione

3 *Gestr. Bem. an* p r a e c e d e n t e t r a c t a t u*:* Sed in praecedente tractatu opus fuit radicum extractione. *LiH*

---

3 p r a e c e d e n t e t r a c t a t u: Vgl. Bl. Pascal, *De numerorum continuorum productis*, 1665 [Marg.] (*PO* III S. 528–543), insbesondere *Problema*, S. 538–543. **15** opus fuit: Beim Verweis auf die Stelle im vorausgehenden Traktat in VII, 1 N. 106 S. 673 Z. 19 f. erwähnt Leibniz den vermeintlichen Fehler Pascals nicht. **17** arithmetica: Die Anmerkung, dass Pascals Beobachtung nur für die arithmetische Progression gilt, findet sich ebenso in VII, 3 N. 4_3 S. 442 Z. 15–17.

41_6. ZU DE NUMERIS MULTIPLICIBUS
[Winter 1686/87]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 42]

De numeris multiplicibus.
Ex sola characterum numericorum additione agnoscendis.

. . .

[S. 42 f.]

. . .

Propositio unica.

Agnoscere ex sola additione characterum dati cujuslibet numeri, an ipse sit alterius dati numeri multiplex.

Ut haec solutio fiat generalis, litteris utemur vice numerorum. Sit ergo divisor, numerus quilibet expressus per litteram A; dividendus autem, numerus expressus per litteras $T\,V\,N\,M$, quarum ultima M exprimit numerum quemlibet in unitatum columna collocatum; N, vero, numerum quemlibet in denariorum columna; V, numerum quemlibet in columna centenariorum; T, autem numerum quemlibet in columna millenariorum, et sic deinceps in infinitum: ita ut si litteras in numeros convertere velis, assumere possis loco

6 *Im Anschluss:* Non haec tantum sed et his ampliora mea methodo inveni.

18–298,2 *Am Rand:*

$10 - fA$ aequ. B

$100 - fA10 - gA$ aequ. C

$1000 - fA100 - gA10 - hA$ aequ. D

19 mea methodo: Gemeint sind wohl Ergebnisse, die Leibniz in seinem Konzept *De periodis fractionum decimalibus* (LH 35 III A 25 Bl. 1–3 u. 7–10) vom Januar 1687 vorstellt. Auf die vorliegende Schrift Pascals verweist Leibniz zuvor schon in VII, 2 N. 5 S. 37 Z. 11. Den dort verfolgten Ansatz arbeitet Leibniz jedoch nicht vollständig aus.

ipsius, M, quemlibet ex novem primis characteribus verbi gratia 4, loco N quemlibet numerum ut 3, loco V quemlibet numerum ut, 5; et loco T, quemlibet numerum ut 6; et collocando singulos illos characteres numericos in propria columna; prout collocatae sunt litterae quae illos exprimunt, proveniet hic numerus, 6 5 3 4, divisor autem A erit numerus quilibet ut 7. Missis autem peculiaribus his exemplis generali ista enunciatione omnia amplectimur.

Dato quocumque dividendo $T\,V\,N\,M$, et quocumque divisore A, agnoscere ex sola additione characterum numericorum T, V, N, M, utrum ipse numerus $T\,V\,N\,M$ exacte dividatur per ipsum numerum A.

Ponantur seorsim numeri serie naturali continui 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, et caet. a dextra ad sinistram sic.

et caet.	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
et caet.	K	I	H	G	F	E	D	C	B	1

Jam ipsi primo numero, 1, subscribatur unitas.

Ex ipsa unitate decies sumpta, seu ex 10 auferatur A quoties fieri poterit, et supersit B qui sub 2 subscribatur.

Ex B decies sumpta seu ex $10\,B$, auferatur A quoties poterit, et supersit C qui ipsi 3 subscribatur.

Ex $10\,C$, auferatur A quoties poterit et supersit D qui ipsi 4 subscribatur.

Ex $10\,D$, auferatur A etc. in continuum.

Nunc sumatur ultimus character dividendi M, qui quidem et primus est a dextra ad sinistram, scribaturque seorsim semel; primo enim numero 1, subjacet unitas.

Jam, sumatur secundus character N et toties repetatur quot sunt unitates in B, qui secundo numero subjacet, hoc est multiplicetur N per B et sub M ponatur productus.

jam sumatur tertius character V, et toties repetatur quot sunt unitates in C, sub tertio numero subjecto, seu multiplicetur V per C et productus sub primis ponatur.

Sic denique multiplicetur quartus T per D, et sub aliis scribatur.

Et sic in infinitum.

---

21 *Marginalie im Druck:*

M
N in B
V in C
T in D

Dico prout summa horum numerorum, M, † N in B, † V in C, † T in D, est ipsius A multiplex aut non, et quoque ipsum numerum $T\,V\,N\,M$, esse ejusdem multiplicem, vel non.

Etenim si propositus dividendus unicum haberet characterem M sane prout ipse esset multiplex ipsius A, numerus quoque M esset ejusdem A multiplex, cum sit ipse numerus totus.

Si vero constet duobus characteribus, $N\,M$, dico quoque, prout M, † N in B, est multiplex A, et ipsum numerum, $N\,M$, ejusdem multiplicem esse.

Etenim character N in columna denarii, aequatur $10\,N$,

Verum ex constructione, est	$10 - B$. multiplex A.
Quare ducendo $10 - B$ in N est	$10\,N - B$ in N multiplex A.
Si ergo contingit et esse	M, † B in N multiplicem A.
Ergo ambo ultimi multiplices juncti	$10\,N$ † M erunt multipl. A.
Id est N in columna denarii et M in columna unitatis, seu numerus	$N\,M$ est multiplex A.

Q. E. D.

Si numerus dividendus constet tribus characteribus, VNM, dico quoque ipsum esse aut non esse multiplicem A, prout, M, † N in B † V in C, erit ipsius A multiplex, vel non.

Etenim character V, in columna centenarii, aequatur 100, V.

At ex constructione, est	$10 - B$, multiplex, A.
Quare multiplicando $10 - B$ per 10	$100 - 10\,B$, multip. A.
Et ducendo ipsos in V	$100\,V - 10\,B$ in V, mult. A.
Sed est etiam ex constructione,	$10\,B - C$, multip. A.
Quare ducendo in V,	$10\,B$ in $V - C$ in V, mult. A.

10–15 *Am Rand:*
$10 - B$ aequ. fA
$10N - BN$ aequ. NfA
$10N - BN + BN + M$ aequ. $NfA + VA$
Ergo $10N + M$ aequ. $NfA + VA$

Sed ex ostensis	$100\,V - 10\,B$, in V, mult. A.
Ergo juncti duo ultimi	$100\,V - C$ in V, mult. A.
Jam vero ostendemus ut in secundo casu	$10\,N - B$ in N, mult. A.
Ergo juncti duo ultimi	$100\,V \dagger 10\,N - C$ in $V - B$ in N, mult. A.
Ergo si contingat hos numeros	C in $V \dagger B$ in $N \dagger M$, esse mult. A.
Ambo ultimi juncti nempe	$100\,V$, $\dagger 10\,N$, $\dagger M$; et mult. A.

Seu V in columna centenarii N denarii et M unitatis, hoc est numerus $V\,N\,M$, est multiplex, A. Q. E. D.

Non secus demonstrabitur de numeris ex pluribus characteribus compositis. Quare prout etc. Q. E. D.

Exemplis gaudeamus.

Quaero, qui sint numeri multiplices numeri 7? Scriptis continuis, 1, 2, 3, 4, 5, etc. subscribo, 1, sub 1.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

Ex unitate decies sumpta, seu ex 10 aufero 7 quoties potest, superest 3 quem pono sub 2.

Ex 3 decies sumpto, seu ex 30 aufero 7 quoties potest, superest 2 quem pono sub 3.

Ex 20 aufero 7 quoties potest, superest 6 et pono sub 4.

Ex 60 aufero 7 quoties potest, superest 4 et pono sub 5.

Ex 40 aufero 7 quoties potest, superest 5 et pono sub 6.

Ex 50 aufero 7 quoties potest, superest 1 et pono sub 7.

Ex 10 aufero 7 quoties potest, et redit 3 et pono sub 8.

Ex 30, aufero 7 quoties potest, et redit 2 et pono sub 9.

299,21–300,6 *Am Rand:*

$$
\begin{array}{lllll}
100V & -\ 10BV & & \text{aequ.} & 10V f A \\
 & +\ 10BV & & \text{aequ.} & V g A \\
 & -\quad CV & & & \\
 & +\ 10N & -\ BN & \text{aequ.} & N f A \\
 & \quad CV & +\ BN +\ M & \text{aequ.} & V\ \ A \\
\hline
100V + 10\ \ N & & +\ M & \text{aequ.} & ..\,A
\end{array}
$$

E t s i c r e d i t s e r i e s n u m e r o r u m , 1 , 3 , 2 , 6, 4, 5, in infinitum.
. . .

---

1 *Bemerkung am Rand:* Est periodus residuorum decimalis fractionis dati numeri

$$\overset{1}{0}\,\overset{}{1}\,\overset{B}{3}\,\overset{C}{2}\,\overset{D}{6}\,\overset{E}{4}\,\overset{F}{5}\;1\,3\,2\,6\,4\,5\,1\,3\,2 \text{ etc. nam: } \frac{1}{7} \text{ aequ. } 0142857142857 \text{ etc.}$$

1 *BCDEF*
1 1 1 1 1 1 1 *PQRSTUV*
$\cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\ \not\!\!\!\!\!\int\ 0\,1\,4\,2\,8\,2\,5\,7$
$\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{7}\,\cancel{7}$

$$\begin{array}{lll} AP + B & \text{aequ.} & 10 \\ AQ + C & & B0 \\ AR + D & & C0 \end{array}$$

B. C. D. etc. sunt minores quam 7.

3 f. periodus *(1)* decimalis fractionis dati numeri $\frac{1}{7}$ aeqv. 0132645 *(a)* imo error: non sunt *(b)* imo error est, *(aa)* non sunt *(aaa)* numeri, sed *(bbb)* qvotientes periodici, sed residui *(bb)* nam $\frac{1}{7}$ aeqv. 0142857142857 etc *(2)* residuorum . . . numeri *(a)* $\overset{1\,\mathrm{ABCDEFGHI\,KLMN}}{0\,1\,3\,2\,6\,4\,5}$ *(b)* $\overset{1\,\mathrm{BCDEF}}{0\,1\,3\,2\,6\,4\,5\,1\,3\,2\,6\,4\,5\,1\,3}$ etc *LiH* **5–8** $\overset{\mathrm{PQRS\,TUV}}{0\,1\,4\,2\,8\,2\,5\,7}$ *(1)* $\begin{array}{l}\text{AP aeqv. 10}\\ \text{AQ aeqv B0}\\ \text{AR aeqv. C0}\end{array}$ *(2)* $\begin{array}{ll}\text{AP + B aequ 10} & \\ \text{AQ + C} & \text{B0}\\ \text{AR + D} & \text{C0}\end{array}$ *(a)* P. Q. R. *(b)* B. C. D. etc. *LiH*

---

5 $\overset{PQRSTUV}{0\,1\,4\,2\,8\,2\,5\,7}$: Leibniz gibt die Dezimalperiode von $\frac{1}{7}$ fehlerhaft an. **6–8** $AP + B$ aequ. 10 . . . $C0$: Vgl. S. 298 Z. 14–20. **10–12** 132645: Dieselbe falsche Annahme, dass es sich bei der urprünglich angegebenen Zahlenfolge 132645 um die Dezimalperiode von $\frac{1}{7}$ handelt, findet sich ebenso im Stück LH 35 XII 2 Bl. 1 v°, in dem sich Leibniz mit der vorliegenden Schrift Pascals auseinandersetzt. Leibniz erkennt dort den Fehler und korrigiert ihn.

42. FORMAE COMBINATORIAE
20. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 16. Der Länge nach ungefähr halbiertes Bl. 2°, ca 35 × 13 cm, rechts relativ glatte, links unregelmäßige Schnittkante. 1 S. auf Bl. 16 r°. Auf Bl. 16 v° VII, 7 N. 56. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 48–51.
Cc 2, Nr. 1079

20. Octob. 1675

F o r m a e   C o m b i n a t o r i a e

In Omni combinatione sunt characteres. Ex characteribus existunt formae. Formae sunt perfectae aut imperfectae. Imperfectae reducuntur ad perfectas, addendo aut adimendo et in plures resolvendo. Characteres sunt Capitales aut incidentes. Characteres in Combinatoria generali non aliud habent discrimen, quam ut intelligantur diversa, nec opus est, ut diversitatis speciem excutiamus. Formae perfectae Elementares sunt aut Compositae. Elementares sunt ut $\begin{array}{c}m\\n\end{array} \Big| \; m^2 \; \Big| \; mn \; \Big| \begin{array}{c}m^2n\\.\;\; v\end{array} \Big| \; mnv$ etc. vel $\begin{array}{c}m^2\\bn^2\end{array} \quad \begin{array}{c}m^2n,\\dm^2v\end{array}$ ubi in posteriori b et d. sunt incidentes. Cum eaedem incidentes afficiunt Capitales similes

7 f. 20' Octob. ... C o m b i n a t o r i a e *erg. L* 9 Ex *(1)* characteris *(2)* characteribus *(a)* Elementa existunt Combinandi, *(b)* existunt *L* 11 resolvendo. *(1)* Formarum perfectarum sunt gradus. Sunt | enim *nicht gestr.* | *(2)* Characteres *L* 13 excutiamus. *(1)* | Si *nicht gestr.* | *(a)* cha *(b)* in form *(2)* Formae *L* 14 $\begin{array}{c}m\\n\end{array}$ | $\Big|$ *erg. Hrsg.* | *(1)* $\begin{array}{c}m^2\\n^2\end{array}$ *(2)* m^2 $\Big|$ *(a)* $\begin{array}{c}mn\\v\end{array}$ *(b)* mn *L* 14 $\begin{array}{c}m^2\\bn^2\end{array}$ *(1)* $\begin{array}{c}m^2v\\dm^2n\end{array}$ *(2)* $\begin{array}{c}m^2n,\\dm^2v\end{array}$ *L*

9 characteres: Vgl. N. 54.

tunc formas Elementares appello concordantes ut $\begin{array}{l} m^2n, \\ .\ \ v \\ n^2\,m \\ .\ \ v \\ v^2\,m \\ .\ \ n \end{array}$ vel quod coincidit $\begin{array}{l} mnm \\ .\ \ n \\ mvm \\ .\ \ v \\ nv\,n \\ .\ \ v \end{array}$ (NB. ubi u t o b i t e r dicam has duas formas coincidere est t h e o r e m a demonstrabile et quod alias in infinitum formas extenditur, et tamen quivis videt esse identicam propositionem, re resoluta usque ad characteres simplicissimos. Ut hinc appareat theoremata nihil aliud dare quam modum contrahendi cogitationes per characteres ut facilior reddatur ratiocinatio sed hoc obiter) discordantes essent si quilibet terminus haberet peculiarem affectorem, ut si esset $\begin{array}{l} \frac{1}{b}m^2n. \\ c\,m^2v \\ \text{etc.} \end{array}$ S e m i c o n c o r d a n t e s sunt, si concordant quaedam partes formae, ut $\begin{array}{l} bm^2n. \\ \quad\ \ v \\ cn^2\,m \\ \quad\ \ v \end{array}$ et harum sunt varii gradus. Nam fieri potest, ut non sit hoc in singulis partibus ut si his addatur adhuc $\begin{array}{l} dv^2m. \\ e..n \end{array}$ P a r t i a l e s f o r m a e sunt, quaecunque enuntiandi aliquod compendium constans accipere possunt, ut $\begin{array}{l} m^2n. \\ \ \ v \end{array}$ Totum enim affectionem habet communem. Rectius appelles Membrum, etc. Potest fieri semi concordantia, si forma aliqua concordet quae ipsa per se constituit perfectam formam,

1 f. formas |Elementales *ändert Hrsg.*| appello *(1)* consonas *(2)* concordantes *(a)*. Sin mi *(b)* ut $\mathrm{m^2n}$, *(aa)* Sin *(bb)* vel |qvod coincidit *erg.*| mnm (|NB. *erg.*| ubi *L* 6 obiter |, *ändert Hrsg.*| *(1)* $\begin{array}{l} .\ \ \mathrm{v} \\ \mathrm{n^2\,m} \\ .\ \ \mathrm{v} \\ \mathrm{v^2\,m} \\ .\ \ \mathrm{n} \end{array}$ $\begin{array}{l} .\ \ \mathrm{n} \\ \mathrm{mvm} \\ .\ \ \mathrm{v} \\ \mathrm{nv\,n} \\ .\ \ \mathrm{v} \end{array}$ praetere *(2)* discordantes *L* 7 peculiarem *(1)* multiplicatorem, *(2)* affectorem, *L* 8 qvaedam *(1)* formae, qvae ipsae per se perfectae intelligi possent, aliis scilicet literis *(2)* partes *L* 8 ut *(1)* m *(2)* $\begin{array}{l} \mathrm{bm^2n.} \\ \quad\ \mathrm{v} \\ \mathrm{cn^2\,m} \\ \quad\ \mathrm{v} \end{array}$ *L* 9 adhuc *(1)* m *(2)* $\begin{array}{l} \mathrm{dv^2m.} \\ \mathrm{e..n} \end{array}$ *L* 11 appelles *(1)* Coef *(2)* coaffectas *(3)* Membrum, *L* 12 constituit *(1)* gradum *(2)* perfectam *L*

ut $\begin{array}{c} mnm. \\ n \end{array}$ est perfecta per se, si non accedat litera v. Unde melior est dispositio haec: $\begin{array}{c} mm \\ n \end{array}$ etc. quam $\begin{array}{c} m^2n \\ v \end{array}$ etc. quia praecedens distinguit formas per se perfectas. Haec de formis Elementaribus. Sequuntur Formae Graduum, quae scilicet gradum integrum complent, ut: si in unam surgas, $\begin{array}{l} m^2 + mn \\ n^2 \end{array}$ $\begin{array}{c} m \\ n \end{array}$ item $\underbrace{\begin{array}{ll} m^3 & mnm \\ n^3 & n \end{array}}_{A} \Bigg| \underbrace{\begin{array}{ll} m^2 & mn\ m. \\ n^2 & n \end{array}}_{B}$ Eaeque rursus sunt aut repetunt formas graduum priorum, aut omnes aut quasdam ut A. B. simul, aut non repetunt ut A. tantum. Hae jam formae continent apicem Combinatoriae artis, et ipsius Calculi generalis in universum.

Condantur jam Tabulae, ubi statim si inceperimus nonnihil Caetera se ipsis patebunt, ac scribi poterunt prima pro formis illis Elementaribus Concordantibus, quae ducantur in se invicem, prodibunt aliae graduum superiorum, et hinc jam apparet resolutio aliarum similium. Et modus formam datam investigandi, sitne divisibilis an indivisibilis etc. et quo nam addito vel ademto fiat resolubilis. Hoc elegantissima theoremata dabit pro concordantibus, et forte modum resolvendi omnes aequationes etc. Pro discordantibus, eodem procedendum modo, et habebitur etiam progressio ac tabula, ut imposterum talia nullo negotio scribi possint. Condita discordantium Tabula, sequetur major illa Tabula, qua continetur apex combinatoriae. Nimirum Tabula tollens literas, ob plures aequationes. Nimirum formulae graduum cogitentur esse aequationes, sive nihilo aequales, et ope tabularum superiorum facilius calculabitur, admirabilis illa Tabula, qua semel data et ad gradus satis altos continuata, restabit calculus omnis et omnes multiplicationes, divisiones, radicum extractiones, fient imo saepe et formularum additiones et subtractiones fient transscribendo tantum ex tabula, et quasdam in ea literas supponendo nihilo aequales. Hac Tabula continetur omnis comparatio formarum, cum enim quaedam coincidere dicimus aequationem dicimus. Comparatio autem formarum combinatoria est. Hactenus omnis consideratio fuit non nisi rationalium, at ex iisdem jam oriuntur irrationalium

1 haec: *(1)* m^2 *(2)* $\begin{array}{c}\mathrm{mm} \\ \mathrm{n}\end{array}$ *L* 3 Seqvuntur *(1)* formae perfectae *(2)* Formae *L* 4 item *(1)* $\mathrm{m}^2\ \mathrm{v}^3$ *(2)* $\underbrace{\begin{array}{ll} \mathrm{m}^3 & \mathrm{mnm} \\ \mathrm{n}^3 & \mathrm{n} \end{array}}_{\mathrm{A}} \Bigg|$ *(a)* $\underbrace{\begin{array}{ll} \mathrm{m}^2 & \mathrm{mn} \\ \mathrm{n}^2 & \mathrm{n} \end{array}}_{\mathrm{aut}}$ *(b)* $\underbrace{\begin{array}{ll} \mathrm{m}^2 & \mathrm{mn\ m.} \\ \mathrm{n}^2 & \mathrm{n} \end{array}}_{\mathrm{B}}$ *L* 12 elegantissima *(1)* dabit *(2)* theoremata | dabit *erg.* | *(a)* qvo *(b)* pro *L* 18 superiorum *(1)* facillime cal *(2)* facilius *L* 21 f. aeqvales. *(1)* Haec Tabula comparetu *(2)* Hac *L*

inventiones omnes. Nimirum cum comparando obtinetur pura quaedam potestas coincidens cuidam dato. At affectae quaelibet potestas secundi gradus reddi potest pura. Et Cubica reddi potest pura ex data secundi gradus affecta. Et ita porro in infinitum. Id est pro cubo resolvendo habetur aequatio $x^6 \,.\, x^3 \,.\, x^0 \sqcap 0$. pro quadrato-quadrato: $x^{12} \,.\, x^8 \,.\, x^4 \,.\, x^0 \sqcap 0$. pro surdesolido $x^{20} \,.\, x^{15} \,.\, x^{10} \,.\, x^5 \,.\, x^0 \sqcap 0$. Quaelibet autem aequatio data surdesolida v. g. $y^5 \,.\, y^4 \,.\, y^3 \,.\, y^2 \,.\, y^0 \sqcap 0$. reduci potest ad ejusmodi aequationem 20^{mi} gradus per artem infallibilem analyticam; quod ope Tabulae superioris jam conditae, nullo negotio fiet. Hinc jam progrediemur ad resolutiones per irrationales aequationum plurium incognitarum, quando scilicet fieri potest, ut nulla ex pluribus incognitis in irrationali contineatur, vel una non, vel duae non, etc. Sed et hic explicabitur quando aequatio aliqua dividi potest per aliam rationalem vel irrationalem; ut simplicissimae obtineantur reductiones.

Omni theoremate compendioso oblato quaerendus est modus quo commode inveniri potuisset, quod semper fiet per certos quosdam novos characteres, ipsam relationem sive progressionem indicantes combinationum. Quando calculando redimus ad aequationem similem datae, et quasi per Circulum, signum est tamen quibusdam sublatis vel destructis, potuisse nos hoc praevenire. In Geometria jam situs addendus, cujus ope plurima compendiose habentur, quaerendus semper modus demonstrandi per analysin compendiosam, theorema Geometricum, et contra per ductum linearum theorema analyticum. Hunc enim velut lapidem lydium nobis natura dedit et originem inventionum. Memini quae calcularam de meae curvae anonymae ad cissoeidem ventione facile ostendi per $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia. Praeclarum illud Vietae de Supplemento Geometriae. Quaerendae constructiones simplicissimae ex ipsa Geometria: Novis opus ad eam rem characteribus. Geometria sine

1 obtinetur *(1)* qvantitas qvaedam *(2)* pura *L* 4 est *(1)* cubus reducitur *(2)* pro *L* 6 v. g. *(1)* $\mathrm{x}^5 \,.\, \mathrm{x}^4$ *(2)* $\mathrm{y}^5 \,.\, \mathrm{y}^4 \,.\, \mathrm{y}^3 \,.\, \mathrm{y}^2 \,.\, \mathrm{y}^0 \sqcap 0$. *L* 7 analyticam; *(1)* si scilicet *(2)* | qvod *erg.* | ope *L* 22 de *(1)* situ *(2)* Supplemento *L*

21 f. qvae . . . similia: Gemeint sind die Berechnungen in VII, 6 N. 8 S. 94–106, die Leibniz in der auf dieser Vorlage basierenden französischsprachigen Fassung III, 1 N. 39_2 wohl im Oktober 1674 an Huygens gesendet hatte. In beiden Stücken wählt er für die von ihm erstmals in VII, 6 N. 8 S. 94 Z. 11 – S. 95 Z. 12 eingeführte Kurve die auch hier genannte Bezeichnung. Auf die Verwendung der Kurve in J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, 1668, prop. VI, S. 23 f. hatte Huygens Leibniz allerdings bereits in seinem Antwortschreiben III, 1 N. 40 vom 6. November 1674 hingewiesen. Vgl. die Erl. zu VII, 6 N. 8 und zu III, 1 N. 39_2 u. N. 40. 22 Vietae: Fr. Viète, *Supplementum geometriae*, 1593 (*VO* S. 240–257).

figuris demonstrari potest imo demonstratur reapse. Nam non magis figurae necessariae ad demonstrationes Geometricas quam moduli ad Mechanicas. Itaque falsum est Geometriam servire ad imaginationem nam et ipsa contrahit ideas, adhuc magis quam Algebra, quemadmodum doctrina de motu adhuc magis quam utraque. Nam ejus characteres plus essentiae involvunt, nam Geometria per magnitudinem etiam situm seu locum; Motus praeterea et ordinem sive tempus. Data descriptione Logarithmicae et Quadratricis uno tractu, sive sectrice anguli et sectrice rationis, constructiones omnes Geometricae eo reduci debent, unde videndum quomodo sine analysi ex ipsis ducantur irrationales per ductum tantum linearum.

1 figuris *(1)* demonstratur *(2)* demonstrari *L* 7 sive *(1)* sectione *(2)* sectrice *L*

43. DE DISCERPTIONIBUS NUMERORUM
[April – Dezember 1670 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 17. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 17 r°. Bl. 17 v° leer. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 256–258.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Aus inhaltlichen Gründen fällt das vorliegende Stück in die Anfänge von Leibniz' Auseinandersetzung mit Zerfällungen. Die Erwähnung der *Dissertatio de arte combinatoria* legt Ende März 1666 als gesicherten *terminus post quem* für die Entstehung fest. Die intensive Verwendung diakritischer Zeichen spricht für eine Datierung noch vor Leibniz' Aufenthalt in Paris. Vor diesem Hintergrund erweist sich Leibniz' Hinweis auf den Begriff *Zerfällung* als deutschsprachige Entsprechung für *discerptio* ebenfalls als stimmig. Unmittelbar im Anschluss an die *Dissertatio de arte combinatoria* führt Leibniz lediglich Arbeiten zum Teilbereich der juristisch-kombinatorischen Themen fort, und dies auch nur in geringem Umfang. Insbesondere sind für diese Zeit keine Hinweise auf eine Weiterführung der Beschäftigung mit Fragen der Kombinatorik oder die kombinatorische Behandlung mathematischer Probleme im überlieferten Textkorpus vorhanden. Erst um die Zeit des ersten Briefs an Athanasius Kircher vom 16. Mai 1670 (II, 1 N. 20_a), in dem sich Leibniz auf Kirchers 1669 neu erschienene *Ars Magna Sciendi sive Combinatoria* bezieht und sich selbst als Gelehrten im Bereich der Kombinatorik vorstellt, beginnen Bezüge auf die Kombinatorik erneut und in der vollen Breite des thematischen Spektrums sichtbar zu werden — sei es durch Verweise auf seine *Dissertatio*, der Verwendung der Kombinatorik als Methode in den Rechtswissenschaften, dem Auftreten der Kombinatorik als Methode und als Teilbereich der Mathematik, oder auch im grundsätzlichen Verständnis der Welt als *combinatio* etwa in Bezug auf Materie oder Bewegungen von Planeten. Somit liegt eine genauere Datierung des vorliegenden Stücks in die Zeit ab etwa April 1670 nahe. Leibniz verweist außerdem auf die Nutzung maschineller Rechenverfahren zur Lösung umfangreicher Berechnungen. Zudem bestehen enge inhaltliche und methodische Bezüge (Gewichte; Rechenverfahren; als *Zerfällungen* auffassbare Zahlenzerlegungen auf LH 42, V Bl. 16 r°; Verwendung von Differenz-Schemata als Analysemittel) zu Passagen auf dem Bogen LH 42 V Bl. 15–16, auf dem sich auch der Anfang von Leibniz' ältestem überlieferten Konzept *Instrumentum arithmeticum* (Druck in Reihe VIII) zur Rechenmaschine befindet. Üblicherweise werden die ältesten erhaltenen Arbeiten zu Leibniz' Rechenmaschine in das Jahr 1670 datiert. Die Entstehungszeit des vorliegenden Stücks lässt sich dadurch weiter auf die Zeit bis Ende 1670 eingrenzen.

D e D i s c e r p t i o n i b u s n u m e r o r u m dixi nonnihil in *Arte combinatoria*. Discerptio *Zerfällung* est enumeratio partium omnium numeri dati. Duo hic indagari summatim merentur, primum via exhibendi dati numeri discerptiones omnes, deinde discerptio ex qua componi possunt numeri omnes. De illo alibi. Delibavi nonnihil in *combinatoria*, ubi ostendi numeros progressionis Geometricae duplae componi ex omnibus complexionibus numeri dati.

De Discerptione ex qua omnes numeri componantur nunc aliquid dicam. Sciendum ergo ex numeris progressionis geometricae duplae ab unitate deinceps componi numeros alios omnes qui non sint summo progressionis majores, v. g.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & \\ 1. & & 2. & & 4. & & 8. & & 16. & & 32. \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 64. & 128. & 256. & 512. & 1024. & 2048. & 4046. & 8192. \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array}$$

Sume numerum minorem quam 8192. Is componetur ex quibusdam numeris antecedentibus simul sumtis. Ultimus semper ex omnibus addito 1. ut 16 ex 1. 2. 4. 8 + 1. Numerus datus 5205 ex

$$\begin{array}{r} 4096. \\ 1024 \\ 64 \\ 16 \\ 4 \end{array}$$

Hujus rei ratio

---

1 Darüber am oberen Rand des Blatts:

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & & & & & & \\ & & 4 & & 12 & & \\ & 2 & & 6 & & 18 & \\ 1 & & 3 & & 9 & & 27 \end{array}$$

14–17 *(1)* $\begin{array}{ccccc} & & \langle 12\rangle & & \\ & 6 & & 18 & \\ 3 & & 9 & & 27 \end{array}$ *teilw. gestr.* *(2)* $\begin{array}{ccccccc} & & & \langle 8\rangle & & & \\ & & 4 & & 12 & & \\ & 2 & & 6 & & 18 & \\ 1 & & 3 & & 9 & & 27 \end{array}$ *L* 2 dati. *(1)* Notabile *(2)* duo *L* 4 f. in | practica *gestr.* | combinatoria, *L* 9 v. g. *(1)* $\begin{array}{cc} 1. & 2. \\ 1 & 2 \end{array}$ *(2)* $\begin{array}{c} 1. \\ 0 \end{array}$ *L* 10 $\begin{array}{c} 8192. \\ 13 \end{array}$ *(1)* sumere *(2)* sume *L*

14–17 Das Zahlenschema erläutert den Zusammenhang zwischen den beiden Gewichtssätzen in Aufgabe XI in Teil 9 von Schwenters *Deliciae Physico-Mathematicae*, auf die sich Leibniz auf S. 309 Z. 19 f. bezieht. 1 dixi nonnihil: *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, S. 9 f. u. S. 55–57 (VI, 1 N. 8 S. 176 u. S. 209 f.). 4 alibi: Vgl. N. 45 und N. 44. 5 ostendi: *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, S. 9 f. (VI, 1 N. 8 S. 176).

profundius consideranti facile apparet. Quia eadem est differentia differentiarum, quaesita differentia, progressionum et cum additae semper praecedentes in progressionibus differant unitate, idem erit in differentiis progressionum, jam semper differentiae differentiarum unitate pauciores et differentiae differentiarum de differentiis rursus et ita porro, ergo prodeunt numeri omnes, quod non fit in aliis progressionibus. Seco numerum datum in binas partes, et partes rursus. Datus ergo numerus vel est aliquis horum vel non est sed datis minor, si non est sume progressionem proxime minorem. Si addes ei omnes sequentes, habebis ipsum duplum, sed hic non debet duplus ergo in caeteris continetur v. g. in 1. 2. 4. 8. 16. Si esset 15. contineretur in 1. 2. 4. 8. simul si esset 14. contineretur in 8. 4. 2. ita ademisti 1. Si esset 13. contineretur in 8. 4. 1. ita ademisti rursus 1. ergo semper procedendo potes adimere unitatem. Ergo omnes numeros exhibere. Et hoc verum est de omnibus numeris progressionis geometricae duplae etiam non incipientibus ab unitate. Dummodo progrediaris usque ad fractiones.

Ex hac proprietate multa sequuntur usus non contemnendi, primum enim si pondera, mensurasque tam longitudinum quam capacitatum ita ordines, non erit opus nisi tot ponderibus quot sunt numeri progressionis duplae, et non nisi semel quolibet. V. g. pone libram divisam esse in 8192. partes, et te habere 14 illa pondera enumerata quorum primum ponderet $\frac{1}{8192}$. secundum $\frac{2}{8192}$, tertium $\frac{4}{8192}$ etc. Poteris cuilibet ponderi dato minori his solis inter se conjunctis aequipondium dare. Animadvertit jam quiddam tale Schwenterus. Potest et alius esse usus in divinando. Divinabo enim numerum sumtum ab alio non nominatum modo ordine detraham numeros progressionis Geometricae duplae. Pone numerum sumtum divinandum esse 19. Jubeo eum dicere sitne numerus supra 100. aut 200 aut 500. Si dicit esse infra 100 v. g. jubeo detrahere 64. Si negat se posse jubeo detrahere sequentem etc. Si potest jubeo detrahere 64 inde 32. quamdiu potest. Ubi desinit

1 apparet. *(1)* Qvia omnes praecedentes differunt unitate a seqvente *(2)* qvia *L* 3 semper *(1)* differentia differentiae unitate minor *(2)* differentiae *L* 6 et *(1)* dat *(2)* partes *L* 7 sume *(1)* datum qv *(2)* progressionem *L* 9 in 1. 2. 4. 8. 16 *(1)* sume 8. *(2)* Si *L* 9 in | 1. 2. 3. 4. 8. *ändert Hrsg.* | simul *L* 10 in 8. 4. 2. *(1)* 1. Si *(2)* ita *L* 11 exhibere *(1)* Ex hac p *(2)* Et *L* 16 duplae, *(1)* usque *(2)* | et *erg.* | non *L* 17 et | de *ändert Hrsg.* | habere *L* 17 pondera *(1)* praecedentia *(2)* enumerata *L* 18 cuilibet *(1)* numero *(2)* ponderi *L* 24 detrahere *(1)* 32 *(2)* 64 *L*

19 Animadvertit: D. Schwenter, *Deliciae Physico-Mathematicae oder Mathematische und Philosophische Erquickstunden*, 1636, Teil 9, XI. Aufgabe, S. 368 f. 20 usus in divinando: *a. a. O.*, Teil 1, I. Aufgabe, S. 17–19.

posse numeros pares continuos detrahere noto, sumo proximum per saltum unum duosve et ita usque ad unitatem sumendi a. numeri progressionis duplae palliati, v. g. pro 16 detrahe 9. 3. 2. si non potest successive omnes jam scis non posse detrahere 16. Ultimus maximusque usus erit, ut puto, in multiplicando et dividendo ope practicae Italicae huc restrictae. Esto numerus 5205. multiplicandus per 365. Sume omnes discerptiones numeri multiplicandi 5205. ex numeris progressionis duplae, omnes item multiplicantis 365. illius sunt enumeratae paulo ante, hujus sunt 256. 64. 32. 8. 4. 1. Jam debet esse Tabula pythagorica magna, cui jam omnium numerorum progressionis duplae in se invicem multiplicationes sint inscriptae. His inter se additis habebis productum. Sed cogitandum hic de compendiis primum inveniendi dati numeri discerptiones, deinde addendi. Utrumque praestandum per machinam. Nota pro 256 possunt in se duci 3. et 5. etc.

1. ^{3} 4. ^{5} 9. ^{7} 16. ^{9} 25. Notum est numeros quadratos differre numeris imparibus deinceps ab unitate, hinc sequitur ex numeris quadratis quoque inter se compositis posse oriri alios omnes. v. g. 23. ex 16. $9-2$. 18 ex $16+4-2$. Paulo aliter res instituenda.

1 pares *(1)* detrahere noto *(2)* continuos *L* 3 omnes *erg. L* 5 per *(1)* 301 *(2)* 365 *L*
6 multiplicandi *erg. L* 6 f. multiplicantis 365. *(1)* nempe *(2)* illius sunt *(a)* enumerata *(b)* enumeratae *L*
11 Nota ... etc. *erg. L* 14 alios | detraho 1. *erg. u. gestr.* | omnes. *L* 14 ex 16. *(1)* $9+1$. *(2)* $9-2$ *L*
14 instituenda. | Summae numerorum imparium constituunt numeros progressionis Geometricae duplae, v. g. *(1)* 1. 2. *(2)* $\begin{array}{ccccc}1. & 3. & 5. & 7. & 9\\ & 4 & 8. & & \end{array}$ *gestr.* | *L*

44. REGULA DISCERPTIONUM UNIVERSALIS
[Juli – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 14 Bl. 4. Fragment eines Blattes, max. [**noch**] cm × [**noch**] cm. Obere Kante gerade beschnitten, unten und links ursprüngliche Blattränder, auf der rechten Seite erstreckt sich von der oberen Ecke bis etwa [**noch**] cm über der unteren Ecke eine max. [**noch**] cm keilförmig nach innen reichende Schnittkante, wobei die schmalste Stelle des Blattes ca [**noch**] cm über dem unteren Rand liegt. Bl. 4 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 XII 1 Bl. 15 (N. 45) die unteren beiden Drittel eines Blattes 2°. 1 S. auf Bl. 4 v°. Bl. 4 r° leer. An der linken Schnittkante fehlen Teile einzelner Zeichen, die auf LH 35 XII 1 Bl. 15 r° erhalten sind. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 261.
Cc 2, Nr. 520 A

Datierungsgründe: S. N. 45.

Regula Discerptionum Universalis

Si qua quaeritur discerptio dati Numeri et Exponentis seu partium numeri, quaerantur discerptiones exponentis unitate minoris omnium numerorum praecedentium, ita tamen ut semper adimatur a sequentis numeri discerptionibus numerus numerorum praecedentium, quorum discerptiones assumuntur, productum erit discerptiones dati exponentis quaesitae. Haec est solutio universalis, cujus compendia particularia pro numerorum et exponentium ratione privata methodo inveniri possunt.

13 f. Universalis *(1)* Sumantur *(a)* excerptiones *(b)* excerp *(c)* discerpti *(2)* Si *L*
14 f. Exponentis | seu partium numeri *erg.* |, *(1)* qvaeratur discerptio *(2)* qvaerantur *(a)* com2nationes, *(b)* discerptiones com2natae eius numeri, *(3)* discerptiones *L*

45. REGULA DISCERPTIONUM ET TRISCERPTIONUM UNIVERSALIS [Juli – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 15. Unregelmäßig beschnittener Teil eines Blattes, das ursprünglich zusammen mit LH 35 III Bl. 4 (N. 44) die unteren beiden Drittel eines Blattes 2° bildeten, max. **[noch]** cm × max. **[noch]** cm. Linke Kante gerade beschnitten, obere Kante bogenförmig beschnitten, rechte und untere Kante ursprüngliche Ränder des Blattes. In der rechten unteren Ecke fehlt N. 44. 1 S. auf Bl. 15 r°. Bl. 15 v° leer. An der Schnittkante Fragmente von Zeichen von N. 44. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 259–261.
Cc 2, Nr. 520 B

Datierungsgründe: N. 44 wurde nach N. 45 auf demselben Textträger begonnen. Der letzte Absatz von N. 45 entstand nach Abschluss von N. 44, aber noch vor der physischen Trennung beider Stücke. N. 44 befand sich ursprünglich zwischen S. 315 Z. 19 und S. 316 Z. 1 von N. 45. — Das Wasserzeichen des Papiers ist für Juli – Dezember 1672 belegt. Die Verwendung von ⨍ als Gleichheitszeichen und die Nutzung von f. als Abkürzung von *facit* in Gleichungen verweisen ebenfalls auf eine Entstehung von N. 45 zu Beginn von Leibniz' Aufenthalt in Paris.

Regula discerptionum et triscerptionum universalis

[*Erster Ansatz*]

1	1	6						
2	3	$5+1.$					$4+2.$	$3+3.$
3	3	$4+1+1.$					$3+2+1.$	$2+2+2.$
4	2	$3+1+1+1.$					$2+2+1+1.$	
5	1	$2+1+1+1+1.$						
6	1	1	1	1	1	1	1	

16 Regula ... universalis *erg. L* 20 3 *(1)* $4+2+\langle 6\rangle$ *(2)* $4+1+1.$ *L* 21 $3+1+1+1.$ *(1)* $2+1+$ *(2)* $2+2+1+1.$ *L*

1	1	8			
2	4	7 + 1.	6 + 2.	5 + 3.	4 + 4.
3	4	6 + 1 + 1.	5 + 2 + 1.	4 + 3 + 1.	3 3. 2.
4	4	5 + 1 + 1 + 1.	4 + 2 + 1 + 1.	3 + 3 + 1 + 1.	2 + 3 + 1 + 1.
5	3	4 1 1 1 1	3 2 1 1 1	2 2 2 1 1	
6	2	3 1 1 1 1 1	2 2 1 1 1 1		
7	1	2 1 1 1 1 1 1			
8	1	1 1 1 1 1 1 1 1			

1	1.	4	
2	2	3 + 1.	2 + 2.
3	1	2 + 1 + 1.	
4	1	1 1 1 1	

10. 6. 5. 1. 1. 1. 1. 1. 4. 2. 1. 1. 1. 1. 3. 3. 1. 1. 1. 1. 3. 2. 2. 1. 1. 1. 2. 2. 2. 2. 1. 1.
10. 5. 6. 1. 1. 1. 1. 5. 2. 1. 1. 1. 4. 3. 1. 1. 1. 3. 3. 2. 1. 1. 3. 2. 2. 2. 1.

Discerptio numeri in partes tot quot sunt in eo unitates et in partes tot quot sunt in eo unitates demta 1. est semper non nisi una.

---

1 *Am Rand:* $\begin{array}{cc} 3 & \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ \underline{1} & \underline{3} \\ 7 & 6 \end{array}$

17–21 *Am Rand: (1)* $\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \end{array}$ *(2)* $\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \underline{1} \\ 7 \end{array}$ *L* 3 | 3 | *(1)* 3 *(2)* 4 *L* 5 | 5 | *(1)* 4 *(2)* 3 | 4 1 1 1 1 | *(a)* 2 *(b)* 3 2 1 1 1 *(aa)* 2 3 1 1 *(bb)* 2 2 1 *(cc)* 2 2 2 1 1 *L* 8 | 1 | *(1)* 2 *(2)* 1 1 1 1 1 1 1 1 *L*
13 10. *(1)* 5 *(2)* 6 *L* 13 4. 2. 1. 1. 1. 1. |3. 3. 1. 1. 1. 1. *erg.*| *(1)* 3. 2. 1. *(2)* 3. 2. 2. 1. 1. 1. *L*
14 5. 2. 1. 1. 1. *(1)* 4. 3. 2. 2. *(2)* 4. 3. 1. 1. 1. *L* 14 f. 3. 2. 2. 2. 1 *(1) unter 4. 3. 1. 1. 1.:* 4. *(a)* 2. *(b)* 3. 2. 1 *(2)* omnes discerptiones numeri in partes tot qvot sunt unitates et in partes tot qvot sunt in eo unitates demta 1. sunt *(3)* discerptio ... qvot sunt |in *erg.*| |eo *erg. Hrsg.*| unitates *L*

---

3 f. | 3 | ... 2 + 3 + 1 + 1.: Es fehlen die Zerfällungen 4 + 2 + 2, 3 + 2 + 2 + 1 und 2 + 2 + 2 + 2; die Zerfällung 2 + 3 + 1 + 1 ist fehlerbehaftet. Tatsächlich gibt es somit fünf Zerfällungen von 8 in je drei sowie fünf Zerfällungen in je vier Teile. 14 10. 5. ... 3. 2. 2. 2. 1: Es fehlen die Zerfällungen 2. 2. 2. 2. 2 und 4. 2. 2. 1. 1.

Quaerere summam discerptionum sine Tabula, id ego aliis relinquo.

Usus quidam discerptionum Harsdorf. Recreat. 2. contin. 2. pars 1. prop. 21. Adde Arnaldi Elementa Geometrica.

[*Zweiter Ansatz, gestrichen*]

1	1	1)	1.		
	1	1)	2		
2	2	1)	1 + 1.		
	1	1)	3		
	2	1)	2 + 1.		
3	3	1)	1. 1. 1.		
	1	1)	4		
	2	2)	3 + 1.	2. 2.	
	3	1)	2. 1. 1.		
5	4	1)	1. 1. 1. 1.		
	1	1)	5		
	2	2)	4. 1.	3. 2.	
	3	2)	3. 1. 1.	2. 2. 1.	
	4	1)	2. 1. 1. 1.		
7	5	1)	1. 1. 1. 1. 1.		
	1	1)	6		
	2	3)	5. 1.	4. 2.	3. 3.
	3	3)	4. 1. 1.	3. 2. 1.	2. 2. 2.
	4	2)	3. 1. 1. 1.	2. 2. 1. 1	
	5	1)	2. 1. 1. 1. 1.		
11	6	1)	1. 1. 1. 1. 1. 1.		

2 Harsdorf. *(1)* Scr. *(2)* Recreat. 2 *(a)* contin 1. *(b)* contin. *L* 9 f. 2 + 1. *(1)* 6 *(2)* 3 *L* 12 3 + 1. *(1)* 2 + 2 *(2)* 2. 2. *L* 13 f. 2. 1. 1. *(1)* 10 *(2)* 5 *L*

---

2 Harsdorf ... prop. 21.: G. Ph. HARSDÖRFFER, *Delitiae mathematicae et physicae. Der Mathematischen und Philosophischen Erquickstunden zweyter Theil*, 1651, Teil 1, 21. Aufgabe, S. 23–25.
3 Arnaldi ... Geometria: [A. ARNAULD], *Nouveaux elemens de Geometrie*, 1667, Solution d'un des plus celebres et des plus difficiles Problèmes d'Arithmetique, appellé communement Les Quarrez Magiques, S. 325–345.

	1.	1)	7.				
	2.	3)	6. 1.	5. 2.	4. 3.		
	3	4)	5. 1. 1.	4. 2. 1.	3. 3. 1.	3. 2. 2.	
	4	3)	4. 1. 1. 1	3. 2. 1. 1.	2. 2. 2. 1.		
	5	2)	3. 1. 1. 1. 1.	2. 2. 1. 1. 1.			
	6	1)	2. 1. 1. 1. 1. 1.				
13	7	1)	1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.				
	1.	1)	8				
	2	4)	7. 1.	6. 2.	5. 3.	4. 4.	
	3	5)	6. 1. 1.	5. 2. 1.	4. 3. 1.	3. 3. 2.	4. 2. 2.
	4	5)	5. 1. 1. 1.	4. 2. 1. 1.	3. 3. 1. 1.	3. 2. 2. 1.	2. 2. 2. 2.
	5	4)	4. 1. 1. 1. 1.	3. 2. 1. 1. 1.	2. 3. 1. 1. 1.	2. 2. 2. 1. 1.	
	6	4)	3. 1. 1. 1. 1. 1.	2. 2. 1. 1. 1. 1.	1. 3. 1. 1. 1. 1.	1. 2. 2. 1. 1. 1.	
	7	2)	2. 1. 1. 1. 1. 1. 1.	1. 2. 1. 1. 1. 1. 1.			
26	8	1)	1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.				

Ut inveniatur discerptio dati Exponentis et numeri, primum a Numero subtrahendus est exponens demta unitate ut 7 − ˛3 − 2˛ f. ⟨5⟩.

[*Dritter Ansatz, nicht gestrichen*]

7 + 1.	6 + 2.	5 + 3.	4 + 4.	3 + 5.	2 + 6.
6. 1. 1. 5. 2. 1. 4. 3. 1.	~~5. 1. 2.~~ 4. 2. 2. 3. 3. 2.	~~4. 1. 3.~~ ~~3. 2. 3.~~	~~3 + 1. 4.~~ ~~2 + 2 + 4.~~	~~2 + 1. 5.~~	~~1. 1. 6.~~

16–18 exponens *(1)* ut *(a)* 6 − 3. ~~f.~~ 3. *(b)* 7 − 3. f. 4. *(2)* demta *L*   18–316,1 2 + 6 ~~1. 1. 6.~~ | |1. 7. *gestr.* | 1. | Nota *L*

7 13: Die Angabe der Gesamtzahl der Zerfällungen von 7 ist fehlerbehaftet.   12–15 5: In den Zeilen der Zerfällungen von 8 in fünf, sechs und sieben Teile treten Dopplungen auf. Die Einträge der zweiten Spalte spiegeln somit die Anzahlen der Einträge in den Zeilen dieser Tabelle, nicht jedoch diejenigen der voneinander verschiedenen Zerfällungen von 8 in die jeweils in der ersten Spalte angegebenen Anzahlen von Teilen wider. Dies überträgt sich auf die Angabe der Gesamtzahl links neben der Tabelle.   16 7 − ˛3 − 2˛: Leibniz führt die Modifikation des Beispiels nicht konsequent zu Ende.

Nota sunt tot discerptionum colligendarum classes quot numeri antecedentes, semper prima novae classis jam continetur in prima classe, et secunda novae classis in 2^{da} classe, et si plures sunt vel totidem classes (seu numeri praecedentes) quot termini novae tota nova nihil valet seu non nisi repetitio est. Hinc statim apparet quae classes abolendae ea scilicet cujus discerptiones (exponentis praecedentis) non sunt plures unitatibus numeri classium praecedentium. Et si una classis ergo omnes classes numerorum reliquorum minorum.

1 Nota *(1)* semper prima discerptio sumta a discerptionibus *(2)* sunt *L* 5 praecedentis) *(1)* pauciores *(2)* non *L*

46. DE NUMERO FORMARUM
Februar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 18. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 18 r°. Bl. 18 v° leer. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 264 f.
Cc 2, Nr. 1342

Febr. 1676.

De Numero Formarum.

Exemplum memorabile fallentis inductionis. Nimirum sex primi termini numerorum hujus seriei coincidere cum sex primis terminis seriei Numerorum primitivorum. Reliqui vero expectationi non respondere

10 terminis *(1)* numerorum *(2)* seriei Numerorum *(a)* primorum *(b)* primitivorum *L* 11–318,2 respondere *(1)* 0 0 *(2)* Diff^{iae} 1 a. *(a)* b *(b)* 1 *L*

Diff^iae^ 1 $a.$

1

2 a^2 ab

1

3 a^3 a^2b abc

2

5 a^4 a^3b a^2b^2 a^2bc $abcd$

2

7 a^5 a^4b a^3b^2 a^3bc $\underset{*}{a^2b^2c}$ a^2bcd $abcde$

4

11 a^6 a^5b a^4b^2 a^4bc $\underset{*}{a^3b^3}$ a^3b^2c a^3bcd $\underset{*}{a^2b^2c^2}$ a^2b^2cd a^2bcde $abcdef$

4

15 a^7 a^6b a^5b^2 a^5bc a^4b^3 a^4b^2c a^4bcd a^3b^3c $a^3b^2c^2$ a^3b^2cd a^3bcde $a^2b^2c^2d$ a^2b^2cde a^2bcdef $abcdefg$

5

20 a^8 a^7b a^6b^2 a^6bc a^5b^3 a^5b^2c a^5bcd a^4b^4 a^4b^3c $a^4b^2c^2$ a^4b^2cd a^4bcde $a^3b^3c^2$ a^3b^3cd $a^3b^2c^2d$ a^3b^2cde a^3bcdef $a^2b^2c^2d^2$ a^2b^2cdef $a^2bcdefg$ $abcdefgh$

5

25 a^9 a^8b a^7b^2 a^7bc a^6b^3 a^6b^2c a^6bcd a^5b^4 a^5b^3c $a^5b^2c^2$ a^5b^2cd a^5bcde $\underset{*}{a^4b^4c}$ $a^4b^3c^2$ a^4b^3cd $a^4b^2c^2d$ a^4b^2cde a^4bcdef $\underset{*}{a^3b^3c^3}$ $a^3b^3c^2d$ a^3b^3cde a^3b^2cdef $a^3bcdefg$ $a^2b^2c^2d^2e$ $a^2bcdefgh$ $abcdefghj$

6 f. 2 *(1)* 4 *(2)* 5 *L* 15 $\mathrm{a^4b^2c^2}$ *(1)* $\mathrm{a^4bcde}$ *(2)* $\mathrm{a^4b^2cd}$ *(a)* $\mathrm{a^4b^2cd}$ *(b)* $\mathrm{a^4bcde}$ *(aa)* $\mathrm{a^4}$ *(bb)* $\mathrm{a^3b^3c^2}$ ... $\mathrm{a^3b^2cde}$ *(aaa)* $\mathrm{a^2}$ *(bbb)* $\mathrm{a^3bcdef}$ | $\mathrm{a^2b^2c^2d^2}$ *erg.* | $\mathrm{a^2b^2cdef}$ *L* 16 f. 5 *(1)* 24 *(2)* 25 *L* 17 $\mathrm{a^2b^2c^2d^2e}$ *erg. L*

14–17 5 20 ... *abcdefghj*: Die Angaben zu den Anzahlen der Formen vom Grad 8 und 9 beziehen sich auf den Stand in der Handschrift vor der Ergänzung der Einträge $a^2b^2c^2d^2$ in Z. 15 und $a^2b^2c^2d^2e$ in Z. 17. Tatsächlich gibt es zusammen mit den nicht aufgeführten Formen $a^2b^2c^2de$ bzw. $a^3b^2c^2d^2$, $a^3b^2c^2de$, $a^2b^2c^2def$ und $a^2b^2c^2cdefg$ insgesamt 22 Formen vom Grad 8 und 30 vom Grad 9. Die Differenzen zu den Anzahlen an Formen vom vorausgehenden Grad müssten korrekt 7 und 8 betragen.

Patet hinc facile esse aliquando condere Hypothesin primis initiis satisfacientem. Ut hoc loco si quis ordine ponat seriem numerorum ab unitate crescentium quorum differentiae sint Numeri progressionis Geometricae duplae geminati, continuando ad sextum usque terminum eosdem reperiet numeros cum sex prioribus numeris primitivis 1. 2. 3. 5. 7. 11. coincidentes.

Hinc si quis aestimare velit probabilitatem successus, sive quanto pignore contra aliud datum a quovis propositum pignus, certandum sit: considerare debet quam variis modis satisfieri possit huic problemati: seriem invenire, quae propositos numeros habeat terminos primos.

Deinde considerare debet quae possit esse inter seriem propositam et hypothesin a nobis factam, connexio.

Hoc loco tres habemus Hypotheses seu serierum fundamenta, quae sex dant primos numeros 1. 2. 3. 5. 7. 11. eosdem. Prima est seriei numerorum primitivorum. Secunda est seriei quae continet Numeros formarum in quolibet gradu; tertia est seriei, cujus terminorum differentiae sunt numeri progressionis Geometricae duplae ab unitate incipientis geminati.

Facile est Numerum formarum gradus cujusdam dati concinnare ex Numero formarum graduum praecedentium certa ratione alteratorum. Unde regula habebitur naturam explicans progressionis.

4 terminum *(1)* eundem reperiet terminum *(2)* eosdem *L* 8 f. habeat, *(1)* pro terminis primis *(2)* terminos *L* 12 serierum *(1)* regulas *(2)* fundamenta, qvae *(a)* omnes *(b)* sex *(aa)* habent *(bb)* dant *L* 13 Prima est *(1)* series *(2)* seriei *L* 13 f. Secunda est *(1)* series *(2)* seriei *L* 14 est *(1)* series, qv *(2)* seriei, *L*

47. NOTAE AD TRIANGULA NUMERORUM ET AD ALGEBRAM
[Erste Hälfte Mai 1676]

Überlieferung: *LuT* Aufzeichnung (Tschirnhaus für Leibniz mit Bemerkungen von Leibniz): LH 35 XV 5 Bl. 16. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 16 v°. — Auf Bl. 16 r° Leibniz' eigenhändiger Auszug seines Briefes an H. Bond vom 13. Mai 1676 (II, 1 N. 127 bzw. III, 1 N. 80_2).
Cc 2, Nr. 1418

Datierungsgründe: Die Anordnung der beiden Stücke lässt vermuten, dass das vorliegende Stück zuerst auf dem Blatt gestanden hat. Es dürfte aber nicht wesentlich früher als der Auszug anzusetzen sein. Der Brief an H. Bond war bereits am 18. Mai 1676 in London (s. III, 1 S. 374), woraus sich die Datierung ergibt.

[*Erster Teil*]

[*Tschirnhaus*]

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15

0 1 2 3 4 5 6 7

1	3	5	7	9	2	3		
2	4	6	8	10		9		
						27		
						81		81
							24	24
								57

1,13–19 Die Verbindungsstriche sowie einige der Einsen des Schemas stammen möglicherweise von Leibniz' Hand. 20 Den Verbindungsbogen hat wahrscheinlich Leibniz hinzugefügt; vgl. VII, 1 N. 92 S. 594 (Februar 1676) u. N. 94 S. 613 (April 1676).

[*Zweiter Teil*]

[*Leibniz*]

$$0,1\,„\ +1 \sqcap 1$$
$$1,2\,„\ +2 \sqcap 4$$
$$2,3\,„\ +3 \sqcap 9 \quad \text{etc.}$$

$$0,1,2\,„\ +1 \sqcap 1$$
$$1,2,3\,„\ +2 \sqcap 8$$
$$2,3,4\,„\ +3 \sqcap 27$$

$$1,4\,„\ +4,3 \sqcap 16$$
$$3,6\,„\ +6,3 \sqcap 36$$

[*Dritter Teil*]

[*Tschirnhaus*]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$
$$1\text{——}2\text{——}3$$

$$a+b, \backsim 2c$$

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{a+b}+\frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{3}{2a+b}+\frac{3}{a+2b}+\frac{1}{b}$$

---

17 *Darunter in Tschirnhaus' Hand, schräg gesetzt und verwischt*: $\dfrac{2c+4cc \quad 2c^3}{2c \quad \cdot\cdot \quad 2c^3}$

6 $0,1,2\ldots \sqcap 1$ *erg. L* 9 *(1)* $3{,}4„ + \ 4 \ \sqcap 16$ *(2)* $1,4\,„$ *L* 15 $\mathrm{a}+\mathrm{c}, \backsim 2\mathrm{b}$ *T, ändert Hrsg.*
$3{,}6„ + 3{,}6 \ \sqcap 36$
$3{,}6„ + 3{,}4 \ \sqcap$

16 $\dfrac{1}{\mathrm{a}} \left(\dfrac{2}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right) + \dfrac{1}{\mathrm{c}}$ *T, ändert Hrsg.*

13–17 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$: Vgl. das drei Monate zuvor von Tschirnhaus in VII, 3 N. 55 S. 732 Z. 11 – S. 733 Z. 6 entwickelte harmonische Dreieck.

[*Vierter Teil*]

$$\cancel{a} + \cancel{b} \propto \cancel{cc} + \cancel{2cd} + dd$$

$$a \propto cc \qquad\qquad b \propto 2cd$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{2ab} + b^2 \propto \cancel{c^3} + \cancel{3cd^3} + 3c^3d + d^3$$

$$a^2 \propto c^3 \qquad\qquad 2ab \propto 3c^2d \qquad\qquad b^2 \propto 3cd^2 + d^3$$

$$a \propto \sqrt{c^3} \qquad\qquad b \propto \frac{3c^2d}{2a} \qquad\qquad \frac{9c^4dd}{4\cancel{c^3}} \propto 3c^3d + d^3$$

$$\frac{9cdd}{4}$$

$$9cdd \propto 12c^3d + d^3$$

$$9cd \propto 12c^3 + dd$$

$$dd \propto 9cd - 12c^3$$

$$d \propto 3c + \sqrt{9cc - 12c^3}$$

$$d \propto 3c + c\sqrt{9 - 12c}$$

3 b $\propto$ 2cd | a + b $\propto$ *gestr.* | *T* 5 *(1)* $b^2 \propto d^2$ *(2)* $b^2 \propto 3cd^2 + d^3$ *T* 6 *(1)* $c^3 + 3c^2d + \frac{9c^4dd}{4a^2} \propto 3c^3d + d^3$ *(2)* $\frac{9c^4dd}{4\cancel{c^3}} \propto 3c^3d + d^3$ *T*

1–323,13 Vierter Teil: Im letzten Teil des Stückes werden Gleichungen der Form $(a+b)^n = (c+d)^{n+1}$ für $n = 1, 2$ und 3 betrachtet, wobei jeweils $a^n = c^{n+1}$ sowie $na^{n-1}b = (n+1)c^nd$ gesetzt wird.
3 $b \propto 2cd$: Unter den gegebenen Voraussetzungen ergibt sich $d = 0$ und folglich auch $b = 0$. Außer den trivialen Lösungen der so reduzierten Gleichung existieren für $n = 1$ keine Lösungen.
4 $c^3 + 3cd^3 + 3c^3d + d^3$: Gemeint ist $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$. Das Versehen geht in die rechte Gleichung von Z. 6 ein und belastet so die Berechnung von d im vorliegenden Ansatz; weitere Fehler treten hinzu. Im Neuansatz ab S. 323 Z. 1 geht Tschirnhaus von der korrekten 3. Potenz des Binoms $c + d$ aus und gelangt zu einem aussagekräftigen Ergebnis. Diesem zufolge existieren für $n = 2$ auch nicht-triviale reelle Lösungen der Gleichung. Dabei legt die Wahl einer der Größen die drei anderen fest.

$$a^2 \propto c^3 \qquad 2ab \propto 3c^2 d \qquad b^2 \propto 3cd^2 + d^3$$

$$a \propto \sqrt{c^3} \qquad 2b\sqrt{c^3} \propto 3c^2 d \qquad \frac{9ddc}{4} \propto 3cd^2 + d^3$$

$$\cancel{2}b \propto \frac{3c^2 d}{2\sqrt{c^3}} \qquad 9d\cancel{d}c \propto 12c\cancel{d}^2 + 4\cancel{d}^3$$

$$b \propto \sqrt{\frac{9c^4dd}{4\cancel{c^3}}} \qquad 9\cancel{d}c \propto 12c\cancel{d} + 4\cancel{d}d$$

$$b \propto \sqrt{\frac{9cdd}{4}} \qquad \cancel{9c} \propto 12c + 4d$$

$$b \propto \frac{3d}{2}\sqrt{c} \qquad 0 \propto 3c + 4d$$

$$bb \propto \frac{9ddc}{4} \qquad -3c \propto 4d$$

[*Leibniz*]

$$\boxed{a^3} + \boxed{3a^2b} + 3ab^2 + b^3 \sqcap \boxed{c^4} + \boxed{4c^3d} + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$$

$$a^3 \sqcap c^4 \qquad 3a^2b \sqcap 4c^3d \qquad b \sqcap \frac{4c^3d}{3a^2 \sqcap 3\sqrt[3]{c^8}} \qquad a \sqcap \sqrt[3]{c^4}$$

$$\text{Ergo } b \sqcap \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{\cancel{c^8}d^3}{\cancel{c^8}c^2}} \qquad b \sqcap \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{d^3}{c^2}} \qquad ab \sqcap \frac{4c^3d}{3\sqrt[3]{c^4}}$$

$$3ab^2 \sqcap 3\sqrt[3]{c^4},\ \frac{16d}{9}\sqrt[3]{\frac{1}{c^2}} + b^3$$

$$3\sqrt[3]{c^2},\ \frac{16\cancel{d}}{9} \qquad + \frac{64}{27}\,\frac{d^{\cancel{3}2}}{c^2} \sqcap 6c^2d^{\cancel{2}} + 4cd^{\cancel{3}2} + d^{\cancel{4}3}$$ [*Rechnung bricht ab*]

10 f. $b \sqcap \frac{4c^3d}{3a^2 \mid \sqcap 3\sqrt[3]{c^8}\ \textit{erg.} \mid}$ $a \sqcap \sqrt[3]{c^4}$ *(1)* Ergo $\frac{3\sqrt[3]{c^4},\ 16c^6d^2}{3\sqrt[3]{c^8}} + \frac{64c^9d^3}{.}$ *(2)* Ergo 3a *(3)* Ergo b $\sqcap$ *(a)* $\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{c^3d^3}{c^8}}$ *(b)* $\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{\cancel{c^8}d^3}{\cancel{c^8}c^2}}$ *L*

11 $b \sqcap \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{\cancel{c^8}d^3}{\cancel{c^8}c^2}}$: Richtig wäre $b = \frac{4}{3}d\sqrt[3]{c}$. Zusammen mit weiteren Versehen in der Gleichung der nächsten Zeile belastet der Fehler die Rechnung bis zu ihrem Abbruch. — Tatsächlich gilt für $n = 3$, dass die Gleichung nur triviale Lösungen mit $b = 0$ und $d = 0$ besitzt. 12 $3ab^2 \sqcap \ldots b^3$: Leibniz rechnet fortlaufend, daher besteht keine Gleichheit zwischen den beiden Seiten der Gleichung.

48. DE AEQUATIONIBUS CUBICIS ET BIQUADRATIS REDUCTIS [Oktober – Dezember 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XII 2 Bl. 150. 1 Bl. 2°. Ca $\frac{2}{3}$ S. auf Bl. 150 v°. Die erste Zeile der Seite gehört zu VII, 3 N. 73 (vgl. ebd., S. 835 Z. 13). — Auf Bl. 150 r° der Rest von VII, 3 N. 73 sowie VIII, 2 N. 99. Beschriftung der beiden Seiten des Blattes gegenläufig. Cc 2, Nr. 1515 B

Datierungsgründe: Vgl. die Gründe für die Datierungen von VII, 3 N. 73 sowie VIII, 2 N. 99, insbesondere die Erwähnung von J. B. TAVERNIER, *Les six voyages*, 2 Bde, Paris, 1676 in letzterem Stück. Wie wir aus einem Brief von Leibniz an Ferdinand von Fürstenberg aus dem Dezember 1676 (I, 2 N. 209 S. 239) wissen, hatte er das am 1. Oktober 1676 erschienene Werk noch zur Kenntnis genommen, bevor er drei Tage darauf Paris verließ. Da auf dem Blatt offensichtlich zuerst VII, 3 N. 73, dann VIII, 2 N. 99 und zuletzt unser Stück niedergeschrieben wurde, stellt der 1. Oktober 1676 den *terminus post quem* dar. Das Papier stammt aus Paris; sein Wasserzeichen ist ansonsten für März bis August 1676 belegt. Eine Verwendung des Papiers in den auf Leibniz' Abreise aus Paris folgenden Monaten ist naheliegend.

$$x^4 \;*\; qx^2 + rx + s \sqcap 0$$

$$x \sqcap \frac{ay+b}{cy+d} \qquad x^2 \sqcap \frac{a^2y^2+2aby+b^2}{c^2y^2+2cdy+d^2}$$

$$x^4 \sqcap \frac{y^4+4by^3+6b^2y^2+4b^3y+b^4}{c^4y^4+4c^3dy^3+6c^2d^2y^2+cd^3y+d^4}$$

Et aequatio erit:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
x^4 & 1 \frown & a^4y^4 & + & 4a^3by^3 & + & 6a^2b^2 & + & 4ab^3y & + & b^4 \\
* & & * & & * & & * & & * & & * \\
qx^2 & q \frown & a^2c^2y^4 & & 2a^2cdy^3 & & a^2d^2y^2 & & 2abd^2y & & d^2b^2 \\
 & & & & 2abc^2y^3 & & 4abcdy^2 & & 2b^2cdy & & \\
 & & & & & & c^2b^2y^2 & & & & \\
rx & r \frown & ac^3y^4 & & 3ac^2dy^3 & & 3acd^2y^2 & & ad^3y & & bd^3 \\
 & & & & bc^3y^3 & & 3bc^2dy^2 & & 3bcd^2y & & \\
s & s \frown & c^4y^4 & & 4c^3dy^3 & & 6c^2d^2y^2 & & 4cd^3y & & d^4
\end{array}$$

18 f. erit: *(1)* | 1 y^4 + 4b y^3 + 6b^2 y^2 + 4b^3 y + b^4 *nicht gestr.* | *(2)* x^4 1 ⌒ *L*
s ···· + 4sc^3d ··· + 6sc^2d^2 ·· + 4scd^3 · + d^4s

$$d \sqcap -\frac{4\cancel{b} + 2q\cancel{b}c^2 + r\cancel{b}c^3}{2qc + 3rc^2 + 4sc^3}, \underset{c^2}{b}$$

1,17–19 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & a^2\,y^2 + & 2ab\,y + & b^2 \\
 & & c^2\,y^2 + & 2cd\,y + & d^2 \\
\hline
 & + & a^2d^2\,y^2 + & 2abd^2\,y & d^2b^2 \\
 & + 2a^2cd\,y^3 + & 4acdb\,\cdot\cdot + & 2cdb^2\,\cdot & \\
a^2c^2\,y^4 + & 2abc^2\,\cdots + & c^2b^2\,\cdot\cdot & &
\end{array}$$

1,20 f. *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & a\,y + & b \\
 & & & c\,y + & d \\
\cline{4-5}
 & & & ad\,y & db \\
 & & ac\,y^2 & bc\,y & \\
\cline{3-5}
 & & c^2\,y^2 + & 2cd\,y + & d^2 \\
\cline{3-5}
 & & ad^2c\,y^2 & ad^3\,y & d^3b \\
 & & & d^2bc\,\cdot & \\
\cline{3-4}
 & & + 2acd^2\,y^2 + & 2cd^2b\,y & \\
 & + 2ac^2d\,y^3 & 2bc^2d\,y^2 & & \\
\cline{2-3}
 & ac^2d\,y^3 & c^2bd\,y^2 & & \\
ac^3\,y^4 & c^3b\,y^3 & & &
\end{array}$$

---

1 $d \sqcap$: Konsequent gerechnet ergäbe sich $d = -\dfrac{4a^3 + 2qac^2 + rc^3}{2qa^2c + 3rac^2 + 4sc^3}\,b$. Der Fehler geht darauf zurück, dass Leibniz den Koeffizienten a und seine Potenzen in S. 324 Z. 16–26 erst ergänzt, nachdem er bereits die Gleichung für d aufgestellt hat. Auch die verbesserte Gleichung in der folgenden Zeile ist noch belastet. Der Ansatz, den Leibniz hier verfolgt, um d zu bestimmen, ist ohnehin untauglich: Zwar formt er die Gleichung $x^4 \ast qx^2 + rx + s \sqcap 0$ erfolgreich in eine andere Gleichung 4. Grades um (S. 324 Z. 19–26), doch ist die neue Gleichung nicht mit der Ausgangsgleichung identisch, da er in dieser nicht lediglich x substituiert, sondern sie zudem mit $(cy+d)^4$ multipliziert hat. Die Voraussetzungen für einen Koeffizientenvergleich sind somit nicht gegeben.

$2\cancel{c}qa + 3rc^{\cancel{2}}a + 4sc^{\cancel{3}2} \sqcap 0$. Tunc in termino secundo non supererit d, adeoque ope ipsius d possumus tollere terminum penultimum nulla habita ratione secundi. Sed malim quod evanescit b.

$$x^3 \;*\; qx + r\ [\sqcap 0]$$

$$x \sqcap \frac{y+b}{cy+d} \qquad x^3 \sqcap \frac{y^3 + 3by^2 + 3b^2y + b^3}{c^3y^3 + 3c^2dy^2 + 3cd^2y + d^3}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1x^3 & [1] \frown & y^3 & + & 3by^2 & 3b^2y & b^3 \\
* & & * & & * & * & * \\
qx & [q] \frown & c^2y^3 & & bc^2y^2 & 2bcdy & bd^2 \\
 & & & & 2cdy^2 & d^2y & \\
r & [r\ \ \frown] & c^3y^3 & & 3c^2dy^2 & 3cd^2y & d^3
\end{array}$$

$$d \sqcap -\frac{+3 + 1c^2}{2c + 3c^2}\, b$$

8 f. *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{cccc}
 & c^2y^2 \;+ & 2cdy \;+ & d^2 \\
 & & y \;+ & b \\
\hline
 & +\, bc^2y^2 & 2bcdy & bd^2 \\
c^2y^3 & 2cdy^2 & d^2y &
\end{array}$$

2 terminum *(1)* ultim *(2)* penultimum *L* 3 qvod *(1)* rursus qvia *(2)* evanescit *L*

11 $d \sqcap$: Leibniz verfolgt auch für die reduzierte Gleichung 3. Grades den untauglichen Ansatz des Koeffizientenvergleichs. Dabei berücksichtigt er allerdings die Koeffizienten q und r nicht.

49. NOTAE AD RADICUM SERIES
[Frühjahr bis Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 38 Bl. 22. 1 Bl. 4°. $\frac{1}{4}$ S. quergeschrieben auf Bl. 22 r°. — Auf dem Rest der Seite um 90° gedreht VIII, 1 N. 11 sowie eine nicht von Leibniz' Hand stammende fragmentarische Notiz, welche die Aussage „72 + 5 (id ⟨est⟩ 77) ad rd ita [ut] 72 ad tang" und darunter stehend das Wort „rad" umfasst. Rückseite leer.
Cc 2, Nr. 1557

Datierungsgründe: Das auf derselben Seite des Blattes niedergeschriebene Stück VIII, 1 N. 11 wird von den Herausgebern aus inhaltlichen Gründen auf Sommer 1673 datiert. Sehr ähnliche Formeln wie in unserer Notiz finden sich in den Stücken VII, 4 N. 15_2 und 16_1. Diese datieren die Herausgeber auf Frühjahr bzw. spätes Frühjahr 1673. Bei unserer Notiz könnte es sich um eine nicht zu Ende geführte Nebenbetrachtung zu den dortigen Überlegungen handeln.

$$\frac{\gamma \qquad 2\gamma-1 \qquad 3\gamma-3 \qquad 4\gamma-6}{\gamma}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma} \qquad \frac{2\gamma-1}{\gamma} \qquad \frac{3\gamma-1-2}{\gamma} \qquad \frac{4\gamma-1-2-3}{\gamma}$$

$$\gamma \qquad \gamma \qquad \gamma \qquad \gamma$$

$$Rq\,\gamma \qquad Rq\llcorner 2\gamma-1\lrcorner \qquad Rq\llcorner 3\gamma-3\lrcorner \qquad Rq\llcorner 4\gamma-6\lrcorner$$

$$Rq\,2\gamma-1\frac{\gamma}{\gamma} =$$

$$Rq\,\gamma,\frown 2-\frac{1}{\gamma}$$

$$Rq\,1 \qquad Rq\,2-\frac{1}{\gamma} \qquad Rq\,3-\frac{3}{\gamma} \qquad Rq\,4-\frac{6}{\gamma}$$

$$\frac{2\gamma}{1}=2 \qquad \frac{3\gamma}{3}= \qquad \frac{4\gamma}{6}=\frac{5}{15} \qquad \frac{6}{21}$$

14 $\frac{2\gamma-1}{\gamma}$ *(1)* $\frac{3\gamma-3}{\gamma}$ *(2)* $\frac{3\gamma-1-2}{\gamma}$ *L*

13 $\frac{\gamma \ldots 4\gamma-6}{\gamma}$: Vgl. diese Darstellung mit der in VII, 4 N. 15_2 S. 246 Z. 4, wo im Nenner allerdings β anstelle von γ steht. 16 $Rq\,\gamma \ldots Rq\llcorner 4\gamma-6\lrcorner$: Diese Zeile ist fast identisch mit ebd., S. 255 Z. 2 sowie mit ebd., N. 16_1 S. 256 Z. 22; dort wird jedoch jeweils die Dreieckszahl 3 übersprungen.

50. TENTAMEN AD PROBLEMA SEX QUADRATORUM
[September – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 197–198. 1 Bog. 2°. 3 S. überwiegend zweispaltig beschrieben. — Auf Bl. 198 v° VII, 3 N. 2. Hierzu auch einige Hilfsrechnungen am Rand von Bl. 197 r°.
Cc 2, Nr. 530 tlw.

Datierungsgründe: Inhaltlich führt das Stück die in VII, 1 N. 42–44 angestellten Untersuchungen zum Sechs-Quadrate-Problem fort. Es ist auf Papier gleicher Art wie das mittlere dieser drei Stücke geschrieben und knüpft unmittelbar an dort erarbeitete Gleichungen an. Es ist also sehr wahrscheinlich im gleichen Zeitraum entstanden. Diese Gruppe aus drei Handschriften wurde bislang auf Juni bis August 1674 datiert. Es gibt jedoch Argumente, die für eine frühere Entstehung unseres Stückes sprechen, womit auch die Datierung der drei genannten Stücke zu revidieren wäre. So lassen etwa die noch wenig ausgebauten algebraischen Fertigkeiten, die Leibniz in unserem Stück zeigt, eine Entstehung während der frühen Phase seiner Auseinandersetzung mit dem Problem plausibel erscheinen. Auch der Symbolgebrauch spricht gegen eine Datierung auf Sommer 1674: In unserem Stück wie auch in VII, 1 N. 42 stellt Leibniz die Quadratwurzel mit *Rq* dar, was nach dem Sommer 1673 nur noch selten vorkommt. Sein Gebrauch des modernen Gleichheitszeichens = in allen vier Stücken begrenzt die mögliche Entstehungszeit ebenfalls, da Leibniz Mitte 1674 zum stilisierten Wagebalken ⊓ wechselt. Und die Notation $\mp$, die sich in VII, 1 N. 42 findet, hätte Leibniz, nachdem er im Verlauf des Jahres 1673 beginnt, eigene Doppelvorzeichen zu entwickeln, in einem Konzept kaum mehr verwendet. Das Wasserzeichen des Trägers spricht ebenfalls für eine frühere Entstehung: Es ist ansonsten bei Stücken anzutreffen, die zwischen Sommer 1672 und Anfang 1673 entstanden sein dürften; insbesondere ist es für das im Herbst 1672 verfasste *Breviarium Consilii Aeqyptiaci* (IV, 1 N. 16) belegt. Auf eine Entstehung im Herbst 1672 verweist schließlich auch der Umstand, dass das Stück VII, 3 N. 2, welches auf der vierten Seite des Bogens (Bl. 198 v°) niedergeschrieben wurde und höchstwahrscheinlich kurz nach unserem Stück entstanden ist, von den Herausgebern auf September oder Oktober 1672 datiert wird. Unser Stück dürfte also zumindest noch im Jahr 1672 verfasst worden sein.

Aequationem hanc habemus:

[*Erster Ansatz*]

$$a^4dd + 2a^3dd - add - d^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a}{9} + \frac{4}{9}$$

---

30 a^4dd: Leibniz beginnt seine Überlegungen mit der Gleichung aus VII, 1 N. 43 S. 256 Z. 11–13. Beim Aufstellen dieser Gleichung sind ihm dort allerdings mehrere Versehen unterlaufen; vgl. ebd., Z. 4 u. 11. Auch im vorliegenden Stück begeht er einige Fehler und bricht wiederholt ab, um neu anzusetzen.

$$a^4 + \cancel{2a^3} - \cancel{a} - \cancel{1} = \frac{4a^2}{d^2 9} + \frac{4a}{d^2 9} + \frac{4}{d^2 9} + 1 - 2a^3 + a$$

$$a^3 \frown a+2 \; - a - 1 = \underline{\hspace{8em}}$$

$$3a^3 \frown \cancel{1+2} - 1 - a = \frac{\langle 16\rangle}{d^2 9} + \frac{\cancel{4}}{\cancel{d^2 9}} + \frac{4}{d2\,9a}$$

$$a \frown \llcorner a^2 3 - 1 \lrcorner - 1 = \frac{20}{d2\,9} \qquad [+\frac{4}{d2\,9a}]$$

$$\underline{\hspace{8em}} - \frac{4}{d29a} = \underline{\hspace{8em}} + 1$$

$$da \frown a^2 \llcorner 3 - 1 \lrcorner - d = \frac{4}{18a} + \frac{20}{18} = \Big| \; \frac{72}{18 \frown 18a} + \frac{360\cancel{a}}{18 \frown 18\cancel{a}}$$

[*Zweiter Ansatz*]

$$a4\cancel{d2} + \cancel{2a3d2} = \frac{\frac{4a^2}{9} + \frac{4a}{9} + \frac{4}{9}}{d^2} + a\cancel{d2} + 1\cancel{d2} + 2a3\cancel{d2}$$

$$a^{\cancel{4}2} + 2a^{\cancel{3}} - \underset{\frac{1}{a}}{\cancel{ad^2}} - \underset{\frac{1}{a^2}}{\cancel{d^2}} = \frac{4\cancel{a^2}}{9d^2} + \frac{4\cancel{a}}{9d^2a} + \frac{4}{9d^2a^2}$$

1 *(1)* $a^4 + 2a^3 - a - 1 = \frac{4a^2}{d^2 9} + \frac{4a}{d^2 9} + \frac{4}{d^2 9}$ *(2)* $a^4 + \cancel{2a^3} - \cancel{a}$ *L* 4 $\frac{20}{d2\,9}$ *erg. L*

8 f. *(1)* $a4d2 + 2a3d2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a}{9} + \frac{4}{9} + ad2 + 1d2$ *(2)* $a4\cancel{d2}$ … $2a3\cancel{d2}$ | $4a3d2 - \llcorner a4d2 - 2a3d2 \lrcorner$ *gestr.* | $a^{\cancel{4}2}$ *L*

---

3 $\frac{4}{d2\,9a}$: Leibniz verwendet im Nenner Ozanams Schreibweise für Exponenten, schreibt also $d2$ an Stelle von d^2. Auch im weiteren Verlauf des Stückes findet sie sich gelegentlich, ohne dass ihre Verwendung einer strengen Linie folgt. Hier und im Folgenden werden die Exponenten wie in der Handschrift wiedergegeben. Leibniz lässt sich von dieser Notation offenbar selbst in die Irre leiten: So erhält er in Z. 5 f., nachdem er $\frac{4}{d2\,9a}$ mit d multipliziert, $\frac{4}{18a}$, und aus $\frac{20}{d2\,9}$ wird auf gleiche Weise $\frac{20}{18}$.

$$da \frown a \frown 3, -1,, -\frac{4}{18a} \quad = \quad \frac{20d}{18d} + d \quad = \quad \frac{\cancel{21d}}{\cancel{18d}}$$

[*Dritter Ansatz*]

$$a^4d^2 + a^3d^2 - ad^2 - d^2 \;=\; \frac{4a^2}{9} + \frac{4a}{9} + \frac{4}{9} - a^3d^2$$

$$d^2a^3 \frown \cancel{a+1} \qquad d2 \frown \cancel{a+1} \qquad \frac{4a}{9} \frown \cancel{a+1} + \frac{4}{9 \frown a+1} - \frac{a^3d^2}{a+1}$$

Fiet $$d^2a^3 + d^2 \;=\; \frac{4a}{9} + \frac{4}{9 \frown a+1} - \frac{a^3d^2}{a+1}$$

vel $$a^3 + 1 \;=\; \frac{4a}{9d^2} + \frac{4}{9d^2 \frown a+1} - \frac{a^3}{a+1}$$

vel $$a^3 + 1 + \frac{a^3}{a+1} \;=\; \rule{6cm}{0.4pt}$$

vel $$2 + \frac{1}{a+1} \;=\; 4a^4 + \frac{4a3}{9d2 \frown a+1}$$

vel $$2 \;=\; 4a^4 + \frac{4a^3}{9d^2 \frown a+1} - \frac{1}{a+1}$$

vel $$2a + 1 \;=\; 4a^5 + 4a^4 + \frac{4a^3}{9d^2}$$

$$2a + 1 - 4a^5 - 4a^4 \;=\; \frac{4a^3}{9d^2}$$

vel $$\frac{2a}{4a^3} + \frac{1}{4a^3} - \frac{4a^5}{4a^3} - \frac{4a^4}{4a^3} \;=\; \frac{1}{9d^2}$$

---

1 *Daneben:* $\frac{20d}{18d} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{1d}{1} \qquad 20d$

3 $-\mathrm{d}^2 = \frac{4\mathrm{a}^2}{|\,\cancel{9}3 \textit{ ändert Hrsg.}\,|} + \frac{4\mathrm{a}}{9}$ *L* 10 vel *(1)* $2\mathrm{a} + 2 = 4\mathrm{a}^5 + 4\mathrm{a}^4 + \frac{4\mathrm{a}^3}{9\mathrm{d}^2} - 1$ *(2)* $2\mathrm{a} + 1$ *L*

---

3 a^2d^2: Für den dritten Ansatz schreibt Leibniz die Ausgangsgleichung aus S. 328 Z. 30 in die hier wiedergegebene Gleichung um.

[*Vierter Ansatz*]

Reassumam.

Duae aequationes fundamentales hae sunt:

$$4a^4+8a^3-4a-1 \frown dd \;=\; ee. \quad \text{Et}$$

$$ee \;=\; \left(\frac{16}{9}\right)\frac{64a^2}{36}+\frac{64a}{18}\left(\frac{32a}{9}\right)+\frac{32}{18}\left(\frac{16}{9}\right) \quad \text{vel}$$

$$\frac{32a^2}{18}+\frac{64a}{18}+\frac{32}{18} \quad \text{vel}$$

$$ee \;=\; \frac{16a^2}{9}+\frac{32a}{9}+\frac{16}{9}. \quad \text{Ergo}$$

$$4a^4+8a^3-4a+1 \frown dd \;=\; \frac{16a^2}{9}+\frac{32a}{9}+\frac{16}{9}$$

$$\overline{\hphantom{4a^4+8a^3-4a+1}} \frown dd9 \;=\; 16a^2+32a+16.$$

$$\text{Ergo}\ \frac{dd\cancel{9}}{1} = \frac{16a^2+32a+16}{4a^4+8a^3+4a+1,, \frown 9} = \frac{4a^2+8a+4+1}{a4+2a^3+4a+1,, \frown 9} [=] \frac{4a+8+\frac{4}{a}}{a^3+2a^2+4+\frac{1}{a} \frown 9}.$$

2 f. Reassumam. *(1)* Propositae *(2)* duae *L* 5 ee $=$ | $\left(\frac{16}{9}\right)$ *erg.* | $\frac{64a^2}{36}$ $+$ *(1)* $\frac{64a}{36}$ *(2)* $\frac{64a}{18}$ | $\left(\frac{32a}{9}\right)$ *erg.* | $+\frac{32}{18}$ | $\left(\frac{16}{9}\right)$ *erg.* | vel *L*

10 $\frac{16a^2+32a+16}{4a^4+8a^3+4a+1,, \frown 9}$ *(1)* Ergo dd $=$ 4a *(2)* Hi *(3)* $=$ $\frac{4a^2+8a+4 \mid +1\ \textit{erg.} \mid}{a^4+2a^3+4a+1,, \frown 9}$ *L*

3 Duae aequationes: Für den vierten Ansatz greift Leibniz noch einmal auf die beiden Gleichungen, die in VII, 1 N. 43 zur Ausgangsgleichung führten, zurück: Die erste Gleichung hat er in ebd., S. 255 Z. 25 entwickelt, die zweite übernimmt er aus ebd., S. 256 Z. 10, wobei er den dort beim Quadrieren von $e=\frac{8}{6}a+\frac{4}{3}$ begangenen Flüchtigkeitsfehler korrigiert. Richtigerweise hätte er jedoch von $e=\frac{3}{2}ad+\frac{3}{4}d$ ausgehen müssen; vgl. ebd., Anm. zu Z. 4. 8 $+1$: Hier dreht Leibniz versehentlich ein Vorzeichen, in der übernächsten Zeile im Zähler der Brüche ein zweites. Weitere Flüchtigkeiten treten dort hinzu.

10 $\frac{4a^2+8a+4+1}{a^4+2a^3+4a+1,, \frown 9}$: Leibniz addiert im Zähler nachträglich eine 1, ergänzt den Summanden aber nicht in allen folgenden Schritten. Erst in die fehlerbehaftete Überlegung in S. 332 Z. 11–13, deren Ergebnis Leibniz nicht weiter verwendet, und dann ab S. 334 Z. 8 geht der ergänzte Term mit in die Rechnung ein.

Notandum hic est, rem esse perutilem ab una parte terminum, ab altera rationem habere. Quia ratio jam per multiplicationes et divisiones et radicum extractiones tractari, poliri, reduci potest, salva rationis identitate, termino altero intacto. Est ergo ratio materia aequationum in aequatione.

Idque hic egregio exemplo patet cum enim $\frac{4a^2+8a+4}{a^4+2a^3+4a+1}$ sint aequalia dd quadrato. Videndum est, quae quibus divisa producant quadratum, et ante omnia certum est quadratum numerum divisum per quadratum producere quadratum. Quare quanquam talis solutio non futura sit reciproca, ita ut extra eam alia esse non possit, erit tamen vera,

$$\begin{array}{lcl} \text{si} & \quad 4a^2+8a+4 \quad & \text{censeatur aequale} = ff\ \square^{\text{to}} \\ \hline \text{et} & a^4+2a^3+4a+1, \frown 9 & \text{censeatur aequale} = gg\ \square^{\text{to}}. \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Aequatio ergo est:} & 4a^2+8a+4+1 & = & ff \\ & a^2+2a\cancel{+2} & = & \frac{ff}{2}-\frac{2}{1} \\ & a \frown a+2 & = & \frac{ff-4}{2} \end{array}$$

Nota si a sumatur 1, superior quidem terminus est quadratum. Sed non inferior. Si tamen ei adjiciatur 1, est et ipse $\square^{\text{tum}}$ 9.

4,10 *Darüber der Ansatz zu einer Nebenrechnung:* $\frac{\cancel{8a}+4a^2+\overset{3}{\cancel{4}}\cancel{+}}{\cancel{4a}+a^4+2a^3+\cancel{1}} \not{f}\ 2$

4 *Am Rande:* $a \quad ^{b} \quad a+b \qquad ab \quad ba \quad \overset{aa+bb+2ab}{bb}$

10 *Probe für $a=2$ am Rand:* $\begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \underline{2} \\ 16+16+8+1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \underline{9} \\ 41 \\ \underline{9} \\ 369 \end{array}$

5 f. qvadrato *(1)* Necesse est utrumqve rationis terminum esse aeqvalem cuidam qvadrato, neqve *(2)* videndum *L* 7 numerum *erg. L* 11 +1 *erg. L*

[*Vierter Ansatz, verworfener Abschnitt*]

Invertatur ratio, et loco $dd = \dfrac{4a^2+8a+4}{a^4+2a^3+4a+1}$ dicatur $\dfrac{1}{dd} = \dfrac{a^4+2a^3+4a+1}{4a^2+8a+4}$. Addatur superiori 1, erit et ipse $\square^{\text{tum}}$, supposito quod a sit 1, et accedet toti $\dfrac{1}{dd} - \dfrac{1}{4a^2+8a+4} = \dfrac{a^4+2a^3+4a+2}{4a^2+8a+4}$. Sed ita omnia perturbabuntur.

Ergo alia ratio investiganda est, qua ex divisione numeri dati per datum fit quadratum. $\dfrac{a}{b} = cc$. Ergo $\dfrac{a}{bc} = c$. Similiter ergo ut ad nostrum casum redeamus, si

$$\frac{4a^2+8a+4}{a^4+2a^3+4a+2} = dd$$

$$\text{Ergo } \frac{4a^2+8a+4}{a^4+2a^3+4a+2 \frown d} \text{ erit } = d$$

$$\text{Ergo } \frac{4a^2+8a+4}{a^4d+2a^3d+4ad+2d} = d$$

$$\frac{4a^2+8a}{a^4d+2a^3d+4ad+2d} = d - \frac{4}{a^4d+2a^3[d]+4ad+2d}$$

Si Numerus per alium divisus producit qua datum $\dfrac{8}{2}$ ⨍ 4 tunc numerus divisor quadratum multiplicans, producit dividendum ergo $a^4+2a^3+4a+2 \frown dd = \dfrac{4a^2+8a+4}{9}$.

7,3 *Am Rande:*

$$\begin{array}{r} 14 \\ \underline{9} \\ 126 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \underline{9} \\ 144 \end{array}$$

3 toti *(1)* $\dfrac{1}{4a}+8$ *(2)* $\dfrac{1}{4a^2+8a+4}$ *(3)* $\dfrac{1}{dd}-$ *L* 4 f. perturbabuntur *(1)* Alia *nicht gestr.* *(2)* ergo alia *L* 10 $d - \dfrac{4}{a^4d+2a^3+4ad+2d}$ | $\dfrac{4a^2}{a^4d+2a^3d+4ad+2d}$ *gestr.* | Si Numerus *(1)* qvi *(2)* per … datum *(a)* est numerus 4 *(b)* est numerus qvi *(c)* $\dfrac{8}{2}$ ⨍ 4 *L*

[*Vierter Ansatz, Fortsetzung des gültigen Textes*]

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 3a & & \\
 & & & & \cancel{4a} & & \\
4a^2 + 8a & ⨍ & \cancel{4a} & + & \cancel{8a} & + & 4 & + 1 \\ \cline{3-7}
2a \quad 4a & & 2a & & a & & \\ \cline{3-7}
 & & \cancel{2a} & & 4a+\cancel{a} & & 4a+2a
\end{array}$$

Ex hac divisione patet, ut $4a^{[2]} + 8a + 4$ fit quadratum $2a$ [*bricht ab*]

$$\begin{array}{ccc}
 & 3a & \\
\cancel{4}a + & \cancel{8}a & + 4 \\
\bullet & \bullet & \bullet \\ \hline
2a & 1 & 1 \\ \hline
\cancel{2a} & \cancel{4a}+\cancel{2a} & \\
 & \cancel{4a}+\cancel{4} & \\
 & \cancel{4a}+\cancel{a} & 2 \;\; 1 \\
 & 4a &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lrcl}
\text{Ergo} & 3a+4+1 & = & 4a+3 \\
 & 3a+2 & = & (4a)\, 3a+a \\
 & 2 & = & a
\end{array}$$

Si jam a supponatur esse 2, tunc prior quidem terminus $4a^2{+}8a{+}4{+}1$ erit quadratus, sed non posterior.

$$\begin{array}{ccc}
 & & 1 \\
 & \cancel{4a} & + \cancel{4} \\
\cancel{4a^2} + & \cancel{8a} & + 5 \\ \hline
2a & 1 & 1 \\ \hline
\cancel{4a^2} & \cancel{4a+1} & \\
 & \cancel{4a}+\cancel{2} & + \cancel{1}
\end{array}$$

Ex hoc calculo sequitur, impossibile esse, ut $4a^2 + 8a + 5$ sit Numerus quadratus, qualiscunque supponatur a, quia scilicet oriretur aequatio inter 4 et $2+1$, seu $4 = 3$,

---

12 *Probe darunter:* $16 + 16 + 5$

2 $+1$ *erg. L* 8 Ergo *(1)* $3a + 4 = 4a + 3$. Seu $3a + 1 = 4a$. Ergo $3a + 1 = 3a + 1a$. Ergo $a = 1$. *(2)* $3a + 4 + 1 = 4a + 3$ *L* 12 tunc *(1)* 4 *(2)* $4a + 8a + 4 + 1$. erit *(3)* | tunc *streicht Hrsg.* | *(a)* prioris *(b)* prior qvidem terminus | $4a^4$ *ändert Hrsg.* | $+8a$ *L*

2–11 Leibniz' Versuch, die Wurzel aus $4a^2 + 8a + 4$ zu ziehen, missglückt.

quod est impossibile. Notandus est hic modus satis elegans probandi an aliquid possit exprimi calculo. Sed vereor ut sit plane sufficiens. Imo est, cum is a quo subtrahendum subtrahendo major, aliud cum minor, tunc enim mutanda potius radix.

Nunc ex tota fractione radicem quadratam extrahamus, si modo id possibile est: id ita tentabimus. Nota f repraesentat nominatorem nostrae fractionis ne toties scribi opus sit.

$$\frac{\frac{4a^2}{f}+\frac{8a}{f}+\frac{5}{f}}{} \qquad [\textit{bricht ab}]$$

[*Fünfter Ansatz*]

$$d3 = Rq\,\frac{4a^2+8a+5}{4a^4+2a^3+4a+1}$$

$$\begin{aligned}
&4a^4+2a^3+4a+1,\frown ff &&= 4a^2+8a+5\\
&4a^4ff+2a^3ff+4aff+ff &&= 4a^2+8a+5\\
\text{Ergo}\quad &4a^4f+2a^3f+4af+f &&= \frac{4a^2}{f}+\frac{8a}{f}+\frac{5}{f}\\
&4a^43d+2a^33d+4a3d+3d &&= \frac{4a^2}{3d}+\frac{8a}{3d}+\frac{5}{3d}\\
&12a^4d+6a^3d+12ad+\cancel{3d} &&= \frac{\frac{4}{3}a^2}{d}+\frac{\frac{8}{3}a}{d}+\frac{\frac{5}{3}}{d}-3d\\
&\frac{5}{3d}-\frac{3d}{1} &&= 12a^4d+6a^3d+12ad-\frac{4a^2}{3d}-\frac{8a}{3d}
\end{aligned}$$

5–7 tentabimus | Nota … sit *erg.* | *(1)* $\frac{4a^2}{gg}$ *(2)* $\frac{4a^2}{f.}+\frac{8a}{f}+$ *(a)* $\frac{4}{f}$ *(b)* $\frac{5}{f}$ *L*

10 *(1)* $\frac{dd}{9}$ *(2)* | $dd9=$ *nicht gestr.* | $16a^2+32a$ *(3)* $d3=Rq.\frac{4a^2+8a+5}{4a^4+|\,(a)\,8\;(b)\,2\,|\;a^3+4a+1}$ *L*

5 f: In S. 332 Z. 9 f. bezeichnet Leibniz den Nenner noch mit gg und den Zähler mit ff. In Z. 11–13 steht f wiederum für $3d$. 10 $d3$: Leibniz setzt neu an, indem er aus dem ersten und dem dritten Ausdruck der Gleichungskette in S. 331 Z. 10 die Wurzel zieht. Hierbei schreibt er im Nenner des Bruchs versehentlich $4a^4$ anstelle von a^4, was die weitere Rechnung in diesem Ansatz beeinträchtigt.

Dividantur omnia per d, fiet:

$$\frac{5}{3dd} - 3 = 12a^4 + 6a^3 + 12a - \frac{4a^2}{3dd} - \frac{8a}{3dd}$$

$$\frac{5}{3dd} + \frac{4a^2}{3dd} + \frac{8a}{3dd} = 12a^4 + 6a^3 + 12a\ [+3]$$

$$\frac{\frac{5}{3dd}}{\frac{9dd}{3dd}} = \frac{5}{9dd}$$

Et 5 est majus quam $9dd$. Ergo d est fractio.

Si [*bricht ab*]

[*Sechster Ansatz*]

$$\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \frown 3dd}{\frac{4a^2}{\cancel{3d^2}} + \frac{8a}{\cancel{3dd}}} \times \frac{5}{9dd} \qquad \frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \frown 27d^4}{20a^2 + 40a \text{ seu } 20a \frown a + 1}$$

$$\frac{12a^{\cancel{3}4} + 12\cancel{a} + 6a^{\cancel{4}3} + 6\cancel{a} + 12a^{\cancel{2}} + 12\cancel{a} \frown 27d^4}{20\cancel{a}}$$

4 f. $\frac{5}{9dd}$ *(1)* $\frac{\cancel{4a^2}}{\cancel{3dd}}-$ *(2)* hac ratio major illa *(3)* et 5 *L*

8–337,2 *(1)* $\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a}{\frac{4a^2}{3d2} + \frac{8a}{3dd}}$ *(2)* $\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \frown 3dd}{\frac{4a^2}{\cancel{3d2}} + \frac{8a}{\cancel{3dd}}} \times$ *(a)* $\frac{5}{3dd}$ $\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \frown 9d4}{20a^2, +40a \text{ seu } 20a \frown a + 1}$ $\frac{12a^{\cancel{3}4} + 12\cancel{a} + 6a^{\cancel{4}3} + 6\cancel{a} + 12a^{\cancel{2}} + 12\cancel{a} \frown 9d4}{20\cancel{a}}$ $\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a + (12 + 6 + 12)\,30 \frown \cancel{9d4}}{(((20 \smile ((9d4) = 36d))\ 720d}$ $\frac{2a^4 + a^3 + 2a^{+}5}{120d}$ Sic duc *(b)* $\frac{5}{9dd}$ $\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \frown |\,9 \textit{ ändert Hrsg.}\,|\,d4}{20a^2, +40a \text{ seu } 20a \frown a + 1}$ ... $\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a + (12 + 6 + 12)\,30 \frown \cancel{9d4}}{540 \frown 4 = 2160\ |\ (((20 \smile ((9d4) = 36d))\ 720d \textit{ nicht gestr.}\,|}$ *L*

8–337,2 $12a^4$: Leibniz greift für den sechsten Ansatz erneut die Gleichung aus Z. 3 auf, wobei ihm bereits beim Aufstellen der Ausgangsgleichung und sodann auch bei den weiteren Umformungen verschiedene, teils gravierende Fehler unterlaufen. Auch seine anschließende durchgehende Korrektur vermag den Ansatz nicht zu retten.

$$\frac{12a^4+6a^3+12a+(12+6+12)\,30 \frown [\cancel{27}]\cancel{d^4}}{540 \frown 4 = 2160d}$$

$$\frac{2a^4+a^3+2a+5}{360d} \qquad [\textit{bricht ab}]$$

[*Siebter Ansatz*]

Videatur an extrahi possit radix quadrata a divisore f.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 33a & & \\
\cancel{9a^4} & + & \cancel{18a^3} & + & \cancel{36a} & + & 9 \\
\hline
3a^2 & & 3a & & & & \\
\hline
\cancel{3a^2} \frown \cancel{3a^2} & & & & & & \\
\end{array}$$

$$\cancel{6a^2} + \cancel{3a}$$

$$6a^{\cancel{3}2} + 6a$$

Hinc sequitur, si totum sit Numerus Quadratus, necesse esse ut $6a^2+6a$ metiatur $33a+9$.

$$\begin{aligned}
\text{Seu ut } 6a \frown a+1,+1.\,1.\,1 \text{ etc.} &= 33a+9\\
\text{seu } 6a \frown a+1,+1 \text{ etc.} &= 33a+9\\
\text{erit } 6a \frown a+1 \frown 1r &= 33a+9\\
6a^2r+6ar &= 33a+9\\
33a &= 6a^2r+6ar-9\\
11a &= 2a^2r+2ar-3
\end{aligned}$$

---

2 *Hilfsrechnung:* $\begin{array}{l}\ \ \cancel{3}\\ \cancel{2}\cancel{1}\cancel{6}0 \div 360\\ \cancel{6}\cancel{6}6\end{array}$

9,13 (9d4) = 36d: Auch hier führt die Verwendung der Exponentenschreibweise Ozanams zu einem Fehler. Leibniz gibt $9d^4$ mit $9d4$ wieder und setzt diesen Term mit $36d$ gleich. 4–17 radix: Im siebten Ansatz versucht Leibniz erfolglos, die Wurzel aus dem in S. 332 Z. 10 notierten, dort noch als *gg* bezeichneten Nenner zu ziehen.

[*Achter Ansatz*]

$$24 + 6 = 15 + 15$$
$$18 + 6 = 12 + 12$$

Si ab aequalibus auferas inaequalia, residua sunt inaequalia quidem, sed indagandum est tum, habeantne aliquam rationem inter se. Hoc difficile erit determinatu, quia nec ex rationibus partium datis inveniri potest ratio totorum, si partes summari in unum non possint.

---

2 f. *Dazu Hilfsrechnungen:*

$$\begin{array}{ccc}
\left|\frac{24}{15}\right|\frac{8}{5} & \left|\frac{6}{15}\right|\frac{2}{3} & \frac{18}{24}\Big|\frac{3}{4} \\[2ex]
\begin{array}{cc} 18 & 12 \\ 6 & 12 \end{array} & \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{6}{2} & \frac{24}{30} \\[2ex]
\begin{array}{c} 18 \\ 6 \end{array} \fint 3 & \begin{array}{c} \cancel{12} \\ \cancel{12} \end{array} \fint 1 & \begin{array}{c} \cancel{1}8 \\ \cancel{1}2 \end{array} \fint \frac{6}{4}\Big|\frac{3}{2} \\[2ex]
 & & \begin{array}{c} 12 \\ 6 \end{array} \fint 2
\end{array}$$

51. NUMERUM DATUM DIVIDERE IN DUOS QUADRATOS
Mai 1675

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 IX 11 Bl. 7–8. 1 Bog. 2°. $\frac{1}{3}$ S. gestrichenen Textes auf Bl. 7 r°. — Über dem gestrichenen Text die Datierung „May 1675“ und der zum Text auf dem Rest des Bogens gehörende Titel „Frottement part. (2)“. Unterhalb des gestrichenen Textes Teil 2 von VIII, 2 N. 34_1, auf Bl. 7 v° u. 8 r° Teil 3 von VIII, 2 N. 34_1, auf Bl. 8 v° der Beginn von VIII, 2 N. 34_2.
Cc 2, Nr. 965 A teilw.

Maji 1675

$y^2 + x^2 \sqcap ab$. Sit y pariter et x talis ut fractus quoque possit esse et quidem major unitate, ergo dividendo numeratorem per suum nominatorem habebimus $\beta + \dfrac{\gamma a}{\gamma + \delta} \sqcap y$ et $\theta + \dfrac{\lambda a}{\lambda + \mu} \sqcap x$. Unde $\beta^2 + \dfrac{2\beta\gamma a}{\gamma + \delta} + \dfrac{\gamma^2 a^2}{\gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2} + \theta^2 + \dfrac{2\theta\lambda a}{\lambda + \mu} + \dfrac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} \sqcap ab$.

$ab - x^2 \sqcap y^2$. Pone $ab \sqcap c^2 + da$, fiet:
$c^2 + da - x^2 \sqcap y^2$. Extrahendo jam radicem:

12 f. $\sqcap$ ab. *(1)* $\beta^2\gamma^2 + \beta^2 2\gamma\delta + \beta^2\delta^2-$ *(2)* ab $-$ x^2 $\sqcap$ y^2 *L* 14–340,1 radicem: *(1)* y ⟨$\sqcap$⟩ c^2 *(2)* y $\sqcap$ $\dfrac{\dfrac{c^2+da \;\; = y^2}{- x^2}}{\dfrac{c}{\cancel{c^2}}}$ *(3)* sit jam *L*

4 May 1675: Die Datierung gehörte ursprünglich wohl zum vorliegenden Stück und lautete lateinisch „Maji 1675“. Leibniz hat sie nicht gemeinsam mit dem Stück gestrichen, sondern lediglich in „May 1675“ geändert, als er den französischen Titel für den später auf dem übrigen Bogen niedergeschriebenen Text ergänzte. 10 $y^2 + x^2 \sqcap ab$: Das vorliegende Stück enthält Nebenbetrachtungen zu dem zahlentheoretischen Problem, wann eine gegebene natürliche Zahl in eine Summe aus zwei Quadraten zerlegbar ist. Leibniz behandelt dieses von Ozanam an ihn herangetragene Problem in VII, 1 N. 78 u. 79 eingehender. Die Bedeutung des Problems hebt Leibniz in seinem Brief an Oldenburg vom 20. Mai 1675 hervor (vgl. III, 1 N. 51 S. 249). — Die Setzung $x^2 + y^2 = ba$, bei der Leibniz im vorliegenden Stück dreimal ansetzt, findet sich in VII, 1 N. 78 S. 539 Z. 16.

Sit jam $x^2 \sqcap z^2 + \dfrac{6zc}{5} + \dfrac{9c^2}{25}$. Unde $\begin{array}{c} \dfrac{16}{25}c^2 - \dfrac{6}{5}zc - z^2 \\ \qquad\qquad + da \\ \hline \dfrac{4}{5}c - \dfrac{6}{8}z \\ \hline \dfrac{8}{5}c \end{array}$.

Et fiet: $\begin{array}{l} \dfrac{36}{64}z^2 \sqcap ab - c^2 \\ +1 \end{array}$, quod est nihil.

$ab - x^2 \sqcap y^2$, seu $da + c^2 - x^2 \sqcap y^2$. Pone $da \sqcap ec \ddagger xe$, et $y \sqcap \dfrac{fc \ddagger fx}{a}$. Fiet $e + c \ddagger x \sqcap \dfrac{f^2c \ddagger f^2x}{a^2}$. $\quad \dfrac{aec \ddagger xea}{a} + c^2 \sqcap ab$.

$ea^2 + ca^2 \ddagger xa^2 \sqcap f^2c \ddagger f^2x$ seu $x \sqcap \dfrac{ea^2 + ca^2 - f^2c}{\ddagger a^2 \ddagger f^2} \sqcap \dfrac{-a^2b + ac^2 + aec}{\ddagger ea}$.

---

2 *Hilfsrechnung:* $\begin{array}{r} 36 \\ 64 \\ \hline 100 \end{array}$

3 Pone da $\sqcap$ *(1)* ec $\ddagger$ xe, et y $\sqcap$ fc $\ddagger$ fx *(2)* | $\dfrac{\text{ec} \ddagger \text{xe}}{\text{a}}$, *ändert Hrsg.* | et y $\sqcap$ $\dfrac{\text{fc} \ddagger \text{fx}}{\text{a}}$ fiet e + c $\ddagger$ x $\sqcap$ $\dfrac{\text{f}^2\text{c} \mid \ddagger \textit{ ändert Hrsg.} \mid \text{f}^2\text{x}}{\text{a}^2}$. *(a)* ec $\ddagger$ xe *(b)* $\dfrac{\text{aec} \ddagger \text{xea}}{\text{a}}$ *L*

5 seu x *(1)* $\sqcap$ $\dfrac{\text{a}^2\text{b} - \text{c}^2\text{a} - \text{e}}{\text{c} \ddagger \text{x}}$ $\sqcap$ *(2)* $\sqcap$ $\dfrac{\text{ea}^2 + \text{ca}^2 - \text{f}^2\text{c}}{\ddagger \text{a}^2 \mid \ddagger \textit{ ändert Hrsg.} \mid \text{f}^2}$ *L*

---

2 nihil: Aus den Setzungen ergibt sich tatsächlich $(1 + \frac{36}{64})z^2 - ab + c^2 = 0$.

52. MACHINA CONSTRUENDI AEQUATIONES PER LOGARITHMICAM [November 1676]

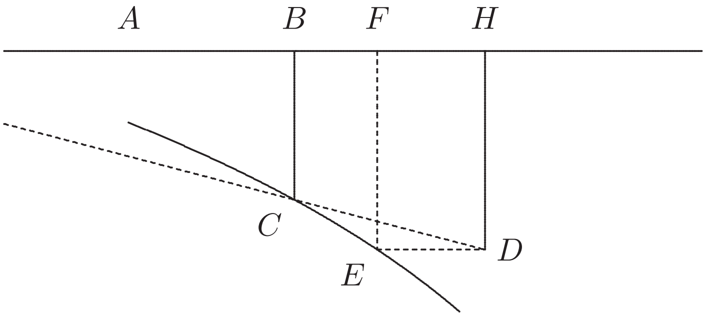
Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 V 12 Bl. 3–4. 1 Bog. 4°. $\frac{2}{3}$ Seite auf Bl. 4 v°. Auf Bl. 3 r°–4 r° VII, 5 N. 96. In einer Randnotiz auf Bl. 3 r° nennt Leibniz den Titel des vorliegenden Stücks (vgl. VII, 5 N. 96 S. 612 Z. 16–17). Geringfügiger Textverlust durch einen Wasserschaden entlang von Falzkanten, die aus einer Verringerung der Größe auf 16° durch zweimaliges Falten des Bogens resultieren.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist nach VII, 5 N. 96, das von Leibniz auf November 1676 datiert wurde, auf demselben Bogen begonnen worden. Die restlose Nutzung der Ränder von Bl. 3 r° und Bl. 4 r° für Nachträge zu VII, 5 N. 96 legt nahe, dass Bl. 4 r° nicht mehr für weitere Ergänzungen zur Verfügung stand. Die Entstehung des vorliegenden Stücks ist somit vor Abschluss der Arbeiten an VII, 5 N. 96 zu verorten und damit in unmittelbarem zeitlichen Zusammenhang zu diesem zu sehen.

Machina construendi aequationes per Logarithmicam

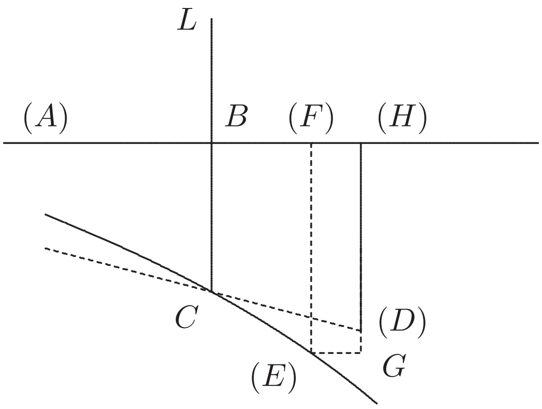
Machinam tandem generatus videor pro locis aequationis semper describendis ope curvae logarithmicae, imo potius superficies logarithmicae cylindricae. Nimirum sit aequatio $x^3 + px^2 \sqcap qy$.

14 Machina ... Logarithmicam *erg. L* 15 pro *(1)* linea aeqvationum semper describenda *(2)* loco *(3)* locis ... semper | describenda *ändert Hrsg.* | ope *L* 16 f. aeqvatio *(1)* $\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 \sqcap \mathrm{y}$ *(2)* $\mathrm{x}^3 + \mathrm{px}^2 \sqcap \mathrm{qy}$ *L*



[*Fig. 1*]

Sit $AB \sqcap x$ cuicunque, $BC \sqcap$ ejus logarithmo. CE est curva logarithmica. $HD \sqcap EF$. logarithmi triplo. AF, numero logarithmi Tripli seu Cubo seu erit $AF \sqcap x^3$. Scilicet debet semper CD sibi parallela ita progredi, ut et ⟨i⟩nitio sic esse locata ut sit DH tripla BC. Ex puncto D autem pro⟨duci⟩tur f⟨irmi⟩ter regula DE parallela ipsi AH gerens in DE perpendiculariter in⟨vic⟩em EF ita ut semper determinetur $AF \sqcap x^3$.



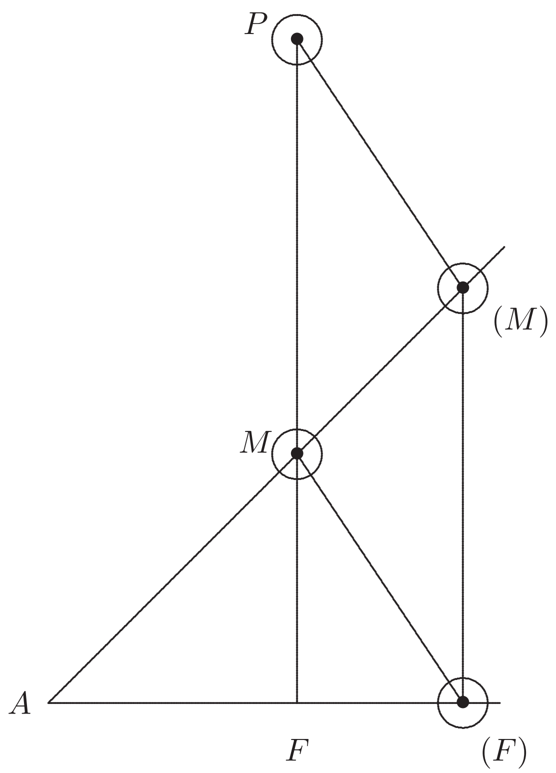
[*Fig. 2*]

3 AF $\sqcap$ x^3 *(1)* debent *(a)* scilicet Angulus *(b)* BC talis esse *(c)* esse A *(2)* scilicet *L*
5 pro⟨duci⟩tur | f⟨irmi⟩ter *erg.* | regula *(1)* ipsi *(2)* DE *L*

1 *Fig. 1*: Die Krümmungsrichtung der Kurve in Fig. 1 ist mit der Ansetzung von BC als Logarithmus von AB in Z. 2 nicht vereinbar. Aus der gegebenen Situation ergibt sich stattdessen wie in N. 16 Fig. 1 und N. 59 Fig. 4 eine Logarithmuskurve, deren Asymptote senkrecht zu $ABFH$ steht und durch A verläuft. Fig. 2 ist von derselben Problematik betroffen. Die grundsätzliche Überlegung wird hier und im Folgenden jedoch nicht von dieser Unstimmigkeit beeinträchtigt. 7 *Fig. 2*: Leibniz tilgt bei den Bezeichnungen B und C die ursprünglich wie im Text gesetzten Klammerungen und visualisiert so die in S. 343 Z. 5–9 benannten Entsprechungen mit der Situation in Fig. 1.

Sit in 2[da] figura rursus $(A)(B) \sqcap x$. et $(B)(C)$ ejus logarithmus sed $(H)(D)$ sit dupla BC, non ut ante tripla. Et $(D)G$ logarithmus ipsius p. semper constans, erit $(H)G$ vel $(F)(E)$ log. a px^2, et $A(F)$ erit px^2. Ponatur jam $(A)(F)$ ipso facto sive ipso motu addi ipsi AF quod dupliciter fieri potest vel efficiendo, ut punctum (A) incidat in punctum F figurae superioris. Dum unum alterum portat ac reportat, et ita etiam ipsi (A) mobili, alia logarithmica erit annexa, vel si volumus rectam $CD(D)$ esse unicam tantum, ut et curvam logarithmicam, $CE(E)$, efficiendum, ut $A(F)$ transferatur in F seu addatur ad AF. Video portationem non procedere, quia portaretur et BC, ob C, portatum. Ergo et curva opus esset connexione faciente ut eadem semper sit AB.

Optimum foret ambas AF, addi in BL.

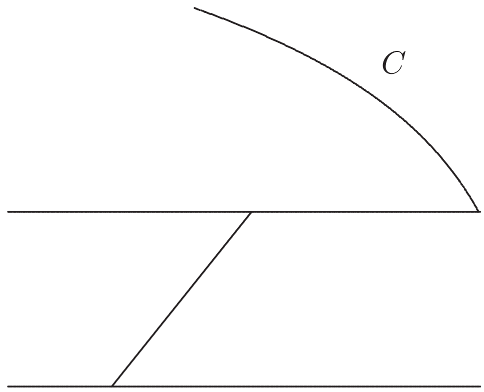


[*Fig. 3*]

4 vel *(1)* portando *(2)* efficiendo, *L* 6 volumus *(1)* | (A), (C), (B) *nicht gestr.* | esse in *(2)* rectam *L*

11 *Fig. 3*: Vgl. VII, 7 N. 67 S. 599 Fig. 1, in der ebenfalls ein bewegliches Parallelogramm (φEBD) zur Addition zweier Größen (φE und VX) eingesetzt wird.

Vel etiam ita res fiet, sit angulus MAF graduum 45. Erit $FM \sqcap AF$, et $(M)(F) \sqcap A(F)$. Addetur $(F)(M)$ ad FM, ope parallelogrammi mobilis, dum centrum M, prop⟨elli⟩tur FM, a recta AM, item (M) et (P) centra propelli possunt, ita MF semper manebit recta data (modo ⟨M, inter —to, ita ut — instituetur⟩), et PM quo⟨que⟩, unde manebit semper parallelogrammum. Eodem modo et ipsi P connectetur tertia $((F))$, ut ipsi (M) secunda et ita porro.



[*Fig. 4*]

Connecti poterunt omnes affirmativi termini inter se et omnes negativi retro computando seu incipiendo a novissimo affirmativo. Sed observandum ut ultimus terminus aequationis sit affirmativa quantitas, (semper fieri potest, quia possumus facere scilicet summum terminum negativum) et ita semper affirmata praevalebunt negatis, nec unquam cis AF versus C excurretur.

Illud habebit commodi hoc instrumentum, ut etiam irrationales simplices ipsius x valores tractari possint non sublata irrationalitate, ut $\sqrt[2]{x^3} + p\sqrt[3]{/x^5} \sqcap z$.

1 erit FM ⊓ AF, *(1)* addendo *(2)* et *(a)* MF *(b)* (M)(F) *L* 4 instituetur⟩), *(1)* | et *nicht gestr.* | ⟨proinde⟩ *(2)* et *L* 5 f. ipsi | M *ändert Hrsg.* | secunda *L* 10 sit *(1)* | aut *streicht Hrsg.* | non *(2)* affirmativa *L* 14 ut *(1)* $\sqrt[2]{\mathrm{x}^3} + \mathrm{p}\sqrt[2]{}/$ *(2)* $\sqrt[2]{\mathrm{x}^3} + \mathrm{p}\sqrt[4]{/\mathrm{x}^5} \sqcap \mathrm{z}$ *L*

2 parallelogrammi mobilis: Eine ähnliche Konstruktion zur instrumentellen Addition der Längen zweier paralleler Strecken durch bewegliche Parallelogramme nutzt Leibniz auch im Konzept eines Instruments zur Gleichungslösung in VII, 7 N. 67.

53. COMBINATORIA
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Notiz: Zettel, ca 24 × 5,5 cm. 4 Z. r°, 9 Z. v°. Textfolge v°, r°. Der Streifen bildete ursprünglich zusammen mit N. 54 ca 1 Bl. 2° und wurde (wohl von Leibniz) durch Schnitt abgetrennt. Über N. 53 und links neben N. 53 u. N. 54 auf v° Reste weiteren Textes, der abgeschnitten wurde. Oben Bibliotheksvermerke: „gefunden in Otho Venius, Theatre moral. Brux. 1672 fol.“ und „jetzt in Comm. epist. Collins 1712“ sowie „zu IV 379ª“. Die beiden Blattfragmente wurden später wieder zusammengefügt und in Leibniz’ Handexemplar des *Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota*, 1712, Ms IV 379a, eingelegt.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von Herbst 1674 bis Januar 1675 belegt. Das Gleichheitszeichen ⊓ verwendet Leibniz ab Juni 1674. Im Text von N. 54 (S. 350 Z. 2) erwähnt er die von ihm im Oktober 1674 gefundene Trochoide der Parabel.

C o m b i n a t o r i a

Theoremata artis Combinatoriae sunt Generalia de formis rerum. In illis a priori demonstrare difficile; nisi profecta doctrina de qualitate, ut est illa de quantitate, ex$^{\text{plo}}$ Joh. Christoph. Sturmii, multa cum per inductionem, tum etiam a posteriori, ope scientiae quantitatis, applicatione ad Calculum facta demonstrari possunt.

Calculus est subordinatus Combinatoriae, ut Arithmetica calculo; est enim calculus combinatio quorundam characterum in quaedam composita, ea lege facta, ut quantum uni adimitur vel additur omnibus, quantum uni super- vel subscribitur omnibus adimatur, addatur, super- vel subscribatur; aliisque paucis regulis observatis. Jam patet fingi posse combinationes mille aliis legibus praescriptis.

Quemadmodum caecus natus scientiam opticam discere potest, imo et in ea invenire

15 C o m b i n a t o r i a *erg. L* 22 vel additur *erg. L*

17 ex$^{\text{plo}}$: J. Chr. Sturm, *Universalia Euclidea*, 1661; vgl. dazu auch Leibniz’ Bezugnahme in *De arte combinatoria*, 1666, S. 23–25 (VI, 1 N. 8, S. 186 f.). 25–346,1 Quemadmodum ... instrumenta: Leibniz spielt möglicherweise auf den Fall von Ulrich Schönberger an, der als Kleinkind erblindete und bis zu seinem Tod 1649 an der Universität Königsberg lehrte und Instrumente erfand; vgl. die spätere Erwähnung in den *Nouveaux essais* (VI, 6 S. 106).

theoremata, vel instrumenta; ita nos demonstrare possumus de D e o et infinito, etsi neuter habeat ideam sui objecti.

Data formula omnes modos enumerare, quibus enuntiari potest nullo forinsecus assumto: v. g.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \sqcap a^3, +3ab \frown a + b, +b^3,, \sqcap a^2, \frown a + 3b,, +b^2, \frown 3a + b.$$

(unde forinsecus assumendo: $a^2+b^2, \frown 3a+3b,, -2a^2-2b^2$). Item $\sqcap a+b, \frown +a+b, \frown a+b$, vel $a^2 + 2ab + b^2, \frown a + b$. Assumtiones forinsecae saepe utiles ad alia accedentia, destruenda.

7 alia *(1)* prolata *(2)* accedentia *L*

54. CHARACTERISTICA ET COMBINATORIA
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Notiz: 1 Bl. ca 2°. Textfolge v°, r°. Das Blatt bildete ursprünglich zusammen mit N. 53 ca 1 Bl. 2° und wurde (wohl von Leibniz) durch Schnitt abgetrennt. Über dem Streifen N. 53 und links neben N. 53 u. N. 54 auf v° Reste weiteren Textes, der abgeschnitten wurde. Oben auf N. 53 Bibliotheksvermerke: „gefunden in Otho Venius, Theatre moral. Brux. 1672 fol.“ und „jetzt in Comm. Epist. Collins 1712“ sowie „zu IV 379ª“. Die beiden Blattfragmente wurden später wieder zusammengefügt und in Leibniz’ Handexemplar des *Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota*, 1712, Ms IV 379a, eingelegt.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: s. N. 53.

Characteristica et combinatoria

Characteristica de arte formandi characteres. Novis enim opus est characteribus, qua linearum quoque ductus exprimantur, quarum ope id praestetur, et perfectius etiam quod vocabulis, ut scilicet sine visa figura omnia intelligi possint et figura si velis ex hac sola instructione duci, et ut mutari has characterum formulas idem sit, quod mutari figuram. Adjiciendi characteres, qui exprimant actionem, scilicet locum, tempus, (unde motus;) et cogitationem. Sed locus jam figuris geometricis continetur, adjiciendum tempus ergo tantum.

Separata in characteristica est doctrina Combinatoria, seu de eodem et diverso generaliter; sive de qualitate, sive de formis, ubi de similitudine loco aequalitatis, sive de identitate, loco aequationis. Nimirum calculus nihil aliud quam combinationum operatio est; synthesis quam productio alicujus formulae secundum certam combinationis legem; Analysis origo formulae secundum eandem legem investigata per comparationem cum formulis similibus quarum nota origo est. Et hinc origo in calculo, comparandi aequationes similes, quae non nisi consequentia est artis comparandi formulas similes. Theorema nihil aliud quam calculi compendia; seu modus quo statim ab initio ex aliqua formula

13 Characteristica et combinatoria *erg. L* 14 *Darüber* Il y a une grotte dans les pirenees, de 2 heures de profondeur *gestr. L* 24 est; *(1)* Analysis *(2)* synthesis *L*

praevideri potest qualis futurus sit calculi finis, ipso licet non facto. Unde paret, quid sit omnis scientia humana, quid demonstrationes, calculi scilicet recitatio. Definitiones vero nihil aliud quam explicationes characterum quibus utimur, ut postea inter ratiocinandum valores eas substituere possimus in locum ipsarum. Doctrina de eodem et diverso in genere, manifestum est, eandem esse cum combinatoria; nam tot characteribus assumtis quot diversae res calculum ingrediuntur videmus quid ex earum combinatione nascatur. Doctrina de Harmonia est calculus quidam combinationum, seu doctrina de quantitate in ipsam doctrinam de combinationibus reflexa, est enim quaedam identitatis et diversitatis compensatio. Sunt in combinationibus quemadmodum in verbis, literae, vocabula, commata, cola; periodi: quemadmodum in calculo comprehensiones. Additiones et subtractiones in calculo Mathematico vocabula seu terminos faciunt; multiplicationes non mutant vocabula, sed in ipsis coalescunt; quod scilicet ita compendiosissime omnia exprimi posse appareret, etsi hoc non sit necessarium. Quando subtrahimus signo quod differentia id dicimus; expectare nos differentiae id ipsum quod subtrahendum est addi debeat; ut tunc destructione mutua additio illa subtractioni compensetur; cum pro divisione subscribimus id velimus; expectandum esse, dum id quod subscriptum est superscribatur, ut mutua compensatione tollatur sub- et superscriptio. Divisio et radicum extractio est operatio analytica, sed et resolutio rei in partes ex quibus composita est; doctrinam de radicibus et divisoribus hactenus Analystae tractavere, non de discerptionibus; cum tamen ejus ope quoque inquiri possit in figurarum quadraturas, destructiones aliaque magni momenti; sed haec calculo mathematico altiora longa in ipsa Combinatoria habent fontem. Imo est et cum multiplicatio et additio res contrahit, cum v. g. $\frac{y^2}{y^3+y^2+y+1}$, multiplicata per $1-y^2$, dat $\frac{y^2-y^4}{1-y^4}$. Eodem modo fit aliquando ut additio reddat rem simpliciorem, v. g.

5 combinatoria; *(1)* nihil dici *(2)* nam *L* 6 f. nascatur. *(1)* Qvoniam *(2)* doctrina de Harmonia *(a)* eadem est *(b)* qvodam *(c)* calculus *L* 8 f. diversitatis *(1)* combinatio *(2)* compensatio. *(a)* subtractiones et divisiones *(b)* sunt *L* 10 qvemadmodum in calculo *(1)* combinationes *(a)* et fractiones *(b)* et fra *(c)* signa sunt fractionum *(2)* comprehensiones *L* 11 seu terminos *erg. L* 17 radicum | attractio *ändert Hrsg.* | *(1)* | est *nicht gestr.* | analysis *(2)* est *L*

---

22 multiplicata: Das gewünschte Ergebnis wird nicht durch eine Multiplikation mit $1-y^2$, sondern durch eine Multiplikation mit dem Faktor $1+y=\frac{1-y^2}{1-y}$ erzielt.

ad $\dfrac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}$, adde $\sqrt{2ax-x^2}$, fiet summa: $\dfrac{2ax}{\sqrt{2ax-x^2}}$, quae formula priore simplicior.

Doctrina de Commatibus seu distinctionibus; etc. est combinatoriae; characteristica est quasi quaedam orthographia; formulae Etymologia quaedam; operationes quaedam syntaxis. Nimirum haec scientia est Grammatica rationis. Agendum ipsa longe rectius, quod homines vocabulis agere quotidie conantur, sed perfunctorie; et ideo multis erroribus. Vocabula saepe novis inveniendi ratiocinandique principia sunt. Cum in ingentibus rationum ductibus, quales in calculo algebraico videmus, exempli causa cum tangentes investigantur; impossibile sit imaginationem humanam per tot combinationes ire necessarii fuere characteres. Eodem modo generali inventa characteristica, non est dubitandum mira theoremata et problemata in omni doctrina inventum iri; quae nulla humana imaginatio alioquin detegere potuisset. In iis in quibus agit natura, saepe experimentis compendium ingentium calculorum fieri potest; prorsus quemadmodum calculi combinatorii ope numerorum; qui eum quodammodo sensibus subjectum reddunt. Ideo instrumentum meum Arithmeticum Empiricae combinatoriae generali et inductionibus serviet combinatoriis; eodem modo ope experimenti optici statici, detegi possunt, quae alioquin nemo invenisset a priori. Sed characteristica in has quoque scientias introducta, et arte inveniendi theoremata et problemata, non est dubium innumera detecta iri, et experimentis comprobatura; quae alioquin nemo fuisset suspicatus, quaeque nunquam alias inventa fuissent. Scientia logica est quaedam combinatoriae in seipsam reflexio; seu cujus ego magni facio inventum, cum ejus ope possint homines adigi ad fatenda quae nolunt.

Scientia inveniendi theoremata in arte combinatoria, erit a priori ex ipsis ejus visceribus, notando quibus casibus fieri per synthesin possit, pro variis legibus combinationum, ut res faciem valde mutent; et inprimis ut ex valde compositis fiant valde simplices. In omni calculo utimur comprehensionem quae multiplicationem tantum aut divisionem certae quantitatis in omnes comprehensas ducendae notant; eodem modo non est dubium alias comprehensiones intelligi posse, additionum ac subtractionum quibus intelligatur, datam omnibus addendam. Aequationes non nisi formulae sunt factae ex multiplicatione formularum in quibus semper eadem quantitas; et alia; quae alia quantitas est radix; ideo fit, ut radices semper aut sensu aut cogitatione haberi possint. Ope divisionis continui in infinitum, spatiique et motus haberi possunt, ut quae alioquin seu si distincte haberi non licet, seu pro imaginariis habendae essent, inveniantur, ut quantitates irrationales; inte-

3 orthographia; *(1)* caeterae operationes *(2)* formulae *L* 6 sunt *(1)* sed considerandum est animum *(2)* Cum *L*

grae lineae fractis formulis aequales; ablationes eorum quae non insunt; constructiones problematum Tetragonisticorum ope motus. ⟨Uti⟩ de linea mea Mesolaba, qua ratio in data ratione secetur. Sunt quaedam mira, et aegre fortasse tamen tandem per combinatoriam invenienda; v. g. lineam invenire quae se describat evolutione sui: modum invenire describendi parabolam qua na⟨vigatio⟩ utitur, in inflatione velorum; et item in aquarum jactibus. Lineam invenire quae se describat evolutione sui est unum ex problematibus plusquam difficilibus; cum in illis ne ulla quidem formula data sit, quae alioquin data est methodo functionum, seu tangentium inversarum.

Saepe fit ut res citius et facilius inveniatur vel demonstretur; per calculum Generalem; aliquando citius per domestica Geometriae principia, v. g. quod in parabola a circulo secta, summa ordinatarum in axem demissarum utrinque aequalis statim patet ex calculo, quia aequatione facta secundus terminus deest. At idem non nisi per ambages Geometrice demonstratur. Contra in plerisque simplicioribus fatendum est ea facilius inveniri Geometria quam calculo, si modo daretur ars characteristica Geometriae propria; ratio est, quia calculo separatur situs a magnitudine, unde fit ut separatim inquisitis magnitudinibus, postea et de situ sit cogitandum, unde constructiones plerumque fiunt prolixae, at in geometriae purae inquisitionibus situs a magnitudine nunquam divellitur; cujus rei illustre est exemplum quod Dn. Matthion mihi proposuit. Hinc etiam sciendum est posse Geometriam seu artem mutandi calculum analyticum in Geometricum servire ad compendia calculorum etiam in arte combinatoria generali; nam certe saepe facillime fiunt linearum ductu, quae non nisi maximis calculi ambagibus. Doctrina de formularum comparationibus vera est Analysis et omnium inventionum clavis una; altera est admiranda methodus ubi calculatis aliquot exemplis, investigatur eorum continuatio in infinitum; et hoc saepe facile est; et hac methodo infiniti calculi praeveniri possunt. Interdum vero paulo difficilius divinare originem aliquot datarum formularum; huc pertinet Gregorii inquisitio inveniendi quantitatem quae eodem modo componatur ex infinita quaedam serie. Quae cum non succedat, nisi raro licebit ipsam potius invenire per quadraturas, e. g. quadratura parabolae. Et haec est doctrina Hypothesium datis aliquot

---

2 linea mea Mesolaba: Es handelt sich um die Trochoide der Parabel, vgl. VII, 3 N. 38_{12}, S. 486. 10–13 quod ... demonstretur: Vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 92, Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 330–343, sowie Leibniz' Bemerkungen in N. 11 S. 81 Z. 10 – S. 82 Z. 5 und seine algebraische Lösung des Problems in VII, 7 N. 7 S. 43–48. 18 exemplum: Möglicherweise handelt es sich um das von Leibniz in VII, 1 N. 11 gelöste Problem, ein Dreieck aus zwei gegebenen Seiten und gegebener Fläche zu bestimmen. [**noch**] 26 inquisitio: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667.

formulis invenire regulam quandam ipsis communem; et tunc maxime perfecta est haec regula cum reciproca est, ut non tantum in quolibet seriei termino vera reperiatur, sed et contra ubi ipsa sit, termini sint, inprimis si talis est, ut ope regulae termini etiam non dati inveniri possint; quod si una observatione seu regula praestari non potest, poterit pluribus inter se junctis.

Ecce ergo duas artes analyticas, alteram per demonstrationem alteram conjecturalem. Hac Conjecturali quoque praeclara in Geometria et numeris detegi posse, patet inductionibus Frenicli; *Arithmeticae infinitorum* Wallisii aliisque infinitis exemplis. Nota Characteribus pro Geometria inventis, fiet credo ut etiam Characteres habeantur ipsius quasi-situs spatiorum imaginariorum, aut potius dimensionum transcendentium, quales solvis altiores, sed exprimentur ope curvarum homogenearum; quemadmodum parabola pyramidem repraesentat. Et videndum an non arte quadam in parabola etiam soliditas pyramidis praesentari possit. Trilineum parabolicum pyramidem repraesentat; ipsa parabola sphaeram; Triangulum repraesentat conoeidem parabolicam, etc. Quemadmodum utile plana solidis homogenea, ita utile habere curvas spatiis homogeneas; utile quoque postea eas curvarum sectiones ope trochoeidum exprimi in plano, ope meae methodi tangentium inversae; item ope differentiarum reciproca; possunt figurae semper inveniri talibus quasi satisfacientes, ut error negligi queat; et earum ope demonstrari et ratiocinari de istis licebit; et facile apparebit in quo possint istae demonstrationes applicari ad lineas veras indescriptibiles: ita hac arte inveniri poterunt calculo linearum analyticarum tangentes aliaque; supponendo eas per appropinquationem descriptas et calculando; et postea errores corrigendo; collatione cum iis, quae alioquin de figura vera esse constet.

Nota facilior est ars dechiffrandi, cum nobis ipsis licet invenire terminos quoslibet ut in scientiis juris examinandos; difficilius cum certus numerus ut cum ex datis experimentis hypothesis, ex datis aliquot literis dechiffratio quaeritur. Dechiffratio serie data plerumque in eo consistit, ut inveniamus quantitatem arithmetice cum seriebus crescentem,

6 per *(1)* analysin, alter *(2)* comparationem aliam per in *(3)* demonstrationem *L* 15 utile *(1)* habere solida lineis repr⟨–⟩ *(2)* plana *L* 23 f. ut . . . juris *erg. L* 24 difficilius *(1)* cum ⟨— —⟩ ut *(2)* cum *L*

8 inductionibus: B. Frénicle de Bessy, *Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos*, 1657; J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I S. 355–478). 16 f. ope trochoeidum . . . reciproca: vgl. die einschlägigen Studien zwischen Oktober 1674 und Januar 1675 (VII, 3 N. 38–40; VII, 5 N. 7–29).

eodem modo ex quolibet termino compositam. Gregorius rem quaerit longe difficiliorem, invenire e a n d e m quantitatem eodem modo ex quolibet seriei termino compositam. Cumque ope quadraturarum inveniri possit quod ille postulat, inveniri etiam poterit facilius quod nos postulamus ope earundem; notandum est tamen id illum postulare in seriebus quarum jam nota regula ⟨sed⟩ nobis ipsa regula quaeritur.

1 quaerit: s. o. Erl. zu S. 350 Z. 26.

55. NOTE SUR LES NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE
[Mitte 1674 – Ende 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 19 Bl. 67. Papierfragment von unregelmäßiger Gestalt, rechts Blattkante, an den übrigen Seiten Risskanten, Größe ca 8 × 3, 5 cm. 7 Z. auf Bl. 67 v°, Vorderseite leer.
Cc 2, Nr. 495

Datierungsgründe: Die Verwendung des Französischen im vorliegenden Stück lässt eine Niederschrift in der Pariser Zeit vermuten. In unserem Stück wie auch in N. 20 (das nach Mitte 1674 entstanden sein muss) nennt Leibniz nur den Titel des anonym erschienenen Werkes von Arnauld, nicht aber den Autor. Womöglich war er zum Zeitpunkt der jeweiligen Niederschrift über dessen Namen noch nicht orientiert; andernfalls hätte er ihn als besondere Information wahrscheinlich mit angeführt. Wie er am 27. Juni/7. Juli 1690 an Vincent Placcius schreibt, hat er aber noch während seines Aufenthaltes in Paris von Arnauld selbst erfahren, dass dieser der Autor des Werkes sei (VI, 2 N. 80 S. 327). Am 12. Dezember 1675 schreibt Leibniz an Arnauld und übersendet ihm seine Ausarbeitungen zu einem von diesem gestellten Problem zur Zahlentheorie (III, 1 N. 69). In diesem Zusammenhang findet ein mündlicher Austausch statt, bei welchem Leibniz möglicherweise auch von Arnaulds Autorschaft erfährt. Somit wäre Ende 1675 ein *terminus ante quem*. Wenn man nun noch unterstellt, dass N. 20 und das vorliegende Stück auf dieselbe gründliche Lektüre der *Nouveaux elemens* zurückgehen, müsste unser Stück nach der Jahresmitte 1674 entstanden sein. Zwingend ist eine solche Datierung jedoch keineswegs; eine Entstehung des Fragments nach Leibniz' Abreise aus Paris kann nicht ausgeschlossen werden. Eine zweite Auflage des Werkes von Arnauld erschien 1683. In Leibniz' Kurzzitat aus Arnaulds Werk lautet die Schreibung wie in der zweiten Auflage *voye*, nicht *voie* wie in der Erstausgabe. Dies könnte man als Hinweis darauf werten, dass Leibniz aus der zweiten Auflage zitiert. Tatsächlich ist aber bei Leibniz generell die Schreibweise *voye* zu finden. Gewichtiger erscheint der Umstand, dass Leibniz mit der *similitude* von geometrischen Objekten argumentiert. Dies deutet darauf hin, dass seine Überlegungen aus einer Zeit stammen, in der er die Grundlagen seiner *Analysis situs* bereits entwickelt hatte, was auf eine Entstehung in der frühen Hannoveraner Zeit verweist. — Über den Verbleib der anderen Teile des ursprünglichen Trägers ist bisher nichts bekannt, so dass sich auf diesem Wege keine Informationen über den Entsehungszeitraum des Stückes gewinnen lassen. **[noch]**

Nouv. El. de Geom. lib. XII artic. 28. Apres avoir dit que *les circomferences des cercles sont* comme *leur diametres* et l'avoir prouvé selon Euclide par voye des polygones, il adjoute: *c'est la seule voye*. Cependant j'en ay trouvée une autre par la definitition de la similitude.

30 *Nouv. El. de Geom.*: [A. Arnauld], *Nouveaux elemens de geometrie*, 1667, S. 258 f.

56. TABULA DIFFERENTIARUM ET SUMMARUM
[April 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V Bl. 6–7. 1 Bog. 4°. 8 Z. in drei Spalten kopfstehend im oberen Viertel von Bl. 7 r°. Im zweiten Viertel der Seite, ebenfalls kopfstehend, VIII, 2 N. 33. Untere Hälfte der Seite sowie Rückseite leer. Auf Bl. 6 r° u. v° Teile von VIII, 2 N. 32.
Cc 2, Nr. 945 D

Datierungsgründe: Das Stück VIII, 2 N. 32 zur mechanischen Reibung, das das andere Blatt des Bogens sowie einen weiteren Bogen einnimmt, ist von Leibniz selbst auf April 1675 datiert.

$xy \sqcap a^2$. Ergo $y \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. Ergo $z \sqcap \dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2}{x+\beta}$ seu $z \sqcap \dfrac{a^2x + a^2\beta - a^2x}{x^2 + x\beta}$. Ergo $z \sqcap \dfrac{a^2\beta}{x^2}$.

$z \sqcap \dfrac{a^3}{x^2}$. Unde $\dfrac{a^3}{x^2} - \dfrac{a^3}{x^2 + 2x\beta \boxed{+\beta^2}} \sqcap \omega$. Unde: $\dfrac{\boxed{a^3x^2} + 2a^3x\beta \boxed{-a^3x^2}}{x^4}$. Ergo $\omega \sqcap \dfrac{2a^3\beta}{x^3}$.

$\dfrac{a^4}{x^3} - \dfrac{a^4}{x^3 + 3x^2\beta \boxed{+3x\beta^2 + \beta^3}} \sqcap$ ȣ. $\dfrac{\boxed{a^4x^3} + 3a^4x^2\beta \boxed{-a^4x^3}}{x^6}$ seu $\dfrac{3a^4\beta}{x^4} \sqcap$ ȣ.

---

10 $xy \sqcap a^2$: Wie in VIII, 2 N. 33, das offensichtlich nach unserem Stück auf derselben Seite niedergeschrieben wurde, startet Leibniz mit einer Kegelschnittgleichung (dort lautet sie $ax = y^2$). Hier wie dort wird sodann eine Größe z bestimmt: hier über $z := y(x) - y(x+\beta)$, dort einmal ebenso (ebd., S. 285 Z. 15 f.), einmal über $z := y(x+\beta) - y(x)$ (ebd., Z. 13; vgl. auch VIII, 2 N. 31_2 S. 263 Z. 12).

10 $z \sqcap \dfrac{a^2\beta}{x^2}$: Leibniz berechnet hier das infinitesimale Element der Ordinate; z entspricht dabei dy und β entspricht dx. Die Vereinfachung zum Ergebnis $z = \dfrac{a^2\beta}{x^2}$ entspricht dem zu dieser Zeit üblichen Verfahren, ebenso der Verzicht auf ein mögliches negatives Vorzeichen, da nur Streckenlängen betrachtet werden. 11 $z \sqcap \dfrac{a^3}{x^2}$: Leibniz berechnet nun die Differenzen der Differenzen etc. Die Gleichung für z wird homogen als $z = \dfrac{a^3}{x^2}$ angesetzt, ω entspricht also dz bzw. ddy. Bei der Ansetzung der Gleichung für ȣ, also $d\omega$ bzw. $dddy$, lässt Leibniz den Faktor 2 weg, gibt ihn aber danach in der Tabelle an.

$\frac{a^2}{x}$	$\frac{a^3}{x^2}$	$\frac{2a^4}{x^3}$	$\frac{3a^5}{x^4}$	. . . .
Termini	Differentiae 1^{mae}	2^{dae}	tertiae	etc.

	Omn. a	Omn. x	Omn. x^2	Omn. x^3
a	x	$\frac{x^2}{2a}$	$\frac{x^3}{3a^2}$	$\frac{x^4}{4a^3}$
Termini	Summae 1^{mae}	2^{dae}	tertiae	
a	$\frac{a^2}{x}$	$\frac{a^3}{2x^2}$	$\frac{a^4}{3x^3}$	$\frac{a^5}{4x^4}$
	Omn. $\frac{a^2}{x^2}$	Omn. $\frac{a^3}{x^3}$	Omn. $\frac{a^4}{x^4}$	Omn. $\frac{a^5}{x^5}$

2 *darunter gestrichen:*

x	$\frac{\mathrm{x}^2}{2\mathrm{a}}$	$\frac{\mathrm{x}^3}{3\mathrm{a}^2}$	$\frac{\mathrm{x}^4}{4\mathrm{a}^2}$	*L*
Termini	Summae 1^{mae}	2^{dae}	tertiae	

57. ÜBERWÄRTSDIVISIONEN UND RECHENPROBEN
[Dezember 1675]

Überlieferung: *L* Rechnungen: LH 35 XII 1 Bl. 250. An drei Seiten zum Teil unregelmäßig beschnittenes Blatt, ca 18,5 × 16 cm, 1 S. auf Bl. 250 v°. Die Schnittkanten trennen Teile der Rechnungen ab. Am unteren Rand findet sich rechts zudem, durch eine Linie von den Rechnungen isoliert und der Schreibrichtung folgend durchgeschnitten, das unleserliche Fragment einer Bemerkung. — Auf Bl. 250 r° VII, 3 N. 53_1.
Cc 2, Nr. 1180 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück *Progressio harmonica* (VII, 3 N. 53_1) auf der Vorderseite des Blattes trägt das Datum *Decemb. 1675*.

$$\begin{array}{r}
\langle \;\; - \;\; \rangle \\
\langle \;\; - \;\;\; \rangle \\
\langle \;\;\; - \;\;\; \rangle \\
\langle \;\;\; - \;\;\; \rangle \\
\langle \;\;\;\; - \;\;\;\; \text{⨍} \; - \rangle \\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9} \\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8} \\
\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\langle\cancel{1}\cancel{1}\rangle \\
\langle\cancel{2}\cancel{3}\cancel{1}\rangle \\
\langle\cancel{2}\cancel{9}\cancel{7}\cancel{3}\rangle \\
\langle\cancel{3}\cancel{7}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{1}\rangle \\
\langle\cancel{6}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{7}\rangle \\
\cancel{1}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{1}\cancel{8} \;\; \text{⨍} \; 4926 \\
\cancel{2}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9} \\
\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8} \\
\cancel{2}\cancel{2}
\end{array}
\qquad 143$$

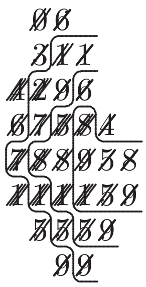
$$\begin{array}{l}
\quad\;\; 6 \\
\quad \cancel{1}\cancel{7} \\
\quad \cancel{7}\cancel{1}2 \\
\cancel{1}\cancel{6}\cancel{5}\cancel{0} \\
\cancel{4}\cancel{7}\cancel{0}\cancel{5}0 \\
\cancel{9}\cancel{9}\cancel{5}\cancel{0}\cancel{1} \;\; \text{⨍} \; 593 \\
\cancel{1}\cancel{6}\cancel{5}\cancel{9}\cancel{9}9 \\
\quad \cancel{1}\cancel{6}\cancel{5}5 \\
\quad\;\; 16
\end{array}$$

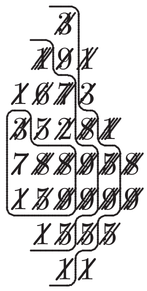
---

16 ⨍ 4926: Der obere Teil der beiden ersten Rechnungen ist abgeschnitten. Von einem dritten Ansatz sind nach Zuschneiden des Blattes lediglich die drei Ziffern 143 übrig geblieben.

$$\begin{array}{l} \quad 5 \\ \cancel{2}\cancel{3} \\ \cancel{6}\cancel{7}1 \\ \cancel{1}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{3}44 \text{ ⨍ } 49 \text{ [\textit{bricht ab}]} \\ \cancel{2}\cancel{9}\cancel{8}8 \\ \cancel{2}9 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \quad\cancel{1} \\ \quad\cancel{2}6 \\ \cancel{2}\cancel{9}\cancel{8} \\ \cancel{3}\cancel{7}\cancel{6} \\ \cancel{6}\cancel{1}\cancel{8}2 \\ \cancel{1}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{3}44 \text{ ⨍ } 496 \text{ [\textit{bricht ab}]} \\ \cancel{2}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{9}9 \\ \quad\cancel{2}\cancel{8}8 \\ \quad\;\cancel{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \quad\cancel{2} \\ \quad\cancel{3}\cancel{6} \\ \quad\cancel{2}\cancel{8} \\ \;8\cancel{0}\cancel{6} \\ \cancel{1}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{1} \\ \cancel{3}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{9} \\ \cancel{1}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{4} \text{ ⨍ } \langle 496\rangle \\ \;2\cancel{2}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{9} \\ \quad\cancel{8}\cancel{8}\cancel{9} \\ \quad\;\cancel{9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4962 \\ 159 \\ \hline 44658 \\ 24810 \\ 4962 \\ \hline 788958 \end{array}$$

 ⨍ 4962

 ⨍ 4962

1,25 ⨍ 593: 99501 ist nicht durch 1659 teilbar. — Leibniz erweitert hier die übliche Rechentechnik der Überwärtsdivision. So markiert er nun die einzelnen Schritte eines Durchgangs der Division, indem er die erste Stelle des Divisors und die von diesem betroffenen Stellen des Dividenden einmal durchstreicht, die zweite doppelt, die dritte dreifach und die vierte durchkreuzt. Nach jedem Durchgang umrahmt er die ausgeschiedenen Teile der Rechnung. — In der vorliegenden Rechnung unterläuft ihm im zweiten Durchgang ein Fehler: Er rechnet dort $75 - 9 \times 6 = 11$. Im Anschluss an den zweiten Durchgang schreibt er den Divisor noch ein drittes Mal an, bevor ihm auffällt, dass die Rechnung bereits an ihr Ende gelangt ist. 7 ⨍ 49: Leibniz rechnet im linken Ansatz irrtümlich $73 - 4 \times 8 = 31$ und bricht nach dem nächsten Schritt ab, womöglich, weil er als Divisor eigentlich wie im folgenden Ansatz 289 verwenden wollte.
7 ⨍ 496: Wahrscheinlich hat Leibniz in den Dividenden der mittleren Rechnung versehentlich an der vierten Position eine zusätzliche 4 eingefügt und bricht die Division ab, als es dies erkennt. 7 ⨍ 4962: In der Rechnung rechts überprüft Leibniz das korrekte (ihm entweder bereits bekannte oder aus S. 358 Z. 6 erhaltene) Ergebnis 496 der Division 143344 : 289, wobei er von rechts nach links rechnet.
15 ⨍ 4962: Leibniz konstruiert ein weiteres Beispiel, macht zunächst die Rückwärtsprobe und führt dann die Überwärtsdivision durch, wobei er jeweils die erweiterte Rechentechnik anwendet.

$$
\begin{array}{lll}
4 & & \cancel{1} \\
\cancel{3} & & \cancel{2}\cancel{3} \\
\cancel{1}\cancel{2}7 & \cancel{2}6 & \cancel{2}\cancel{9}\cancel{7} \\
\cancel{3}\cancel{0}\cancel{3} & \cancel{3}\cancel{4} & \cancel{3}\cancel{7}\cancel{3}5 \\
\cancel{6}\cancel{1}\cancel{7}3 & \cancel{6}\cancel{1}7 & \cancel{6}\cancel{1}\cancel{7}\cancel{3} \\
\cancel{1}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{4}4 \;⨍\; 49 \;[\textit{bricht ab}] & \cancel{1}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{3}44 \;⨍\; 49 \;[\textit{bricht ab}] & \cancel{1}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{4}4 \;⨍\; 496 \\
\cancel{2}\cancel{8}\langle\cancel{9}9\rangle & \cancel{2}\cancel{8}\langle\cancel{9}9\rangle & \cancel{2}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{9}9 \\
\langle\cancel{2}\cancel{8}\rangle & \langle\cancel{2}8\rangle & \cancel{2}\cancel{8}\cancel{8} \\
 & & \langle\cancel{2}\rangle
\end{array}
$$

1 *Weitere Rechnungen in der Ecke unten links, die letzte gestrichen:*

$$
\begin{array}{r}
79 \\
\underline{26} \\
474 \\
\underline{158} \\
2064 \\
79
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
79 \\
\underline{36} \\
474 \\
\underline{237} \\
2844
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
97 \\
\underline{16} \\
582 \\
\underline{97} \\
1552
\end{array}
$$

7 ⨍ 49: Leibniz rechnet im linken Ansatz im ersten Durchgang irrtümlich $313 - 4 \times 9 = 307$ und bricht nach dem zweiten Durchgang ab. 7 ⨍ 49: Im mittleren Ansatz rechnet Leibniz im ersten Durchgang irrtümlich $313 - 4 \times 9 = 247$ und bricht einen Schritt später ab. 3,15 2064: Korrekt wäre 2054.

58. DE APPROPINQUATIONIBUS ANALYTICIS [noch]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 14 Bl. 19. 1 Bog. 2° mit einem rechteckigen Ausschnitt von etwa [noch] cm Höhe über die volle Seitenbreite in der unteren Mitte von Bl. 19. 13 Zeilen auf Bl. 19 v° oben und 10 Zeilen auf Bl. 19 r° oben. Auf dem übrigen Bogen N. 59. —

Cc 2, Nr. 986 tlw. u. 989.

Datierungsgründe: S. N. 59.

De appropinquationibus analyticis

Praescripta jam olim fuit Methodus qua ex numeris exactam radicem non habentibus adjectione cyphrarum radix extrahitur quam proxime videndum an aliquod simile in aequationibus tentari possit: ut ex $x^3 \quad * \quad - abx + a^2c \sqcap 0$ extrahenda radix Cubica.

$\dfrac{x^2 \quad * \quad - ab}{ac} \sqcap \dfrac{-a}{x}$. Jam $x^2 - ab \sqcap x - \sqrt{ab}, \frown x + \sqrt{ab}$ fiet $\dfrac{x - \sqrt{ab}}{a} \frown \dfrac{x + \sqrt{ab}}{c} \sqcap \dfrac{-a}{x}$.

Itaque $\overline{\text{Log}, x - \sqrt{ab}} + \overline{\text{Log } x + \sqrt{ab}} - \overline{\text{Log. } a} - \overline{\text{Log } c} \sqcap + \overline{\text{Log } -a} - \overline{\text{Log } x}$. Eaque arte semper aequatio ad quandam aequationem logarithmorum, quorum numeri cogniti aut incognita simplex, quantitate aliqua cognita minuta vel aucta, reduci potest.

Et quoniam Logarithmi numerorum progressionis Arithmetici nempe $x - \sqrt{ab}.\quad x.\ x + \sqrt{ab}.$ sunt progressionis Geometricae, hinc trium istorum Logarithmorum haberi pote-

---

18 *Kennzeichnung des als falsch identifizierten* Geometricae *durch eine Streichung sowie über* progressionis Geometricae*:* error *verschrieben*

12 f. Cubica *(1)* $x^3 \quad * \quad - abx \sqcap -a^2c$ *(2)* $\frac{x^2 \; * \; -ab}{ac} \sqcap \frac{-a}{x}$. Iam *(a)* $x^2 + ab$ *(b)* $x^2 - ab \sqcap x - \sqrt{ab}, \frown$ | x+ab *ändert Hrsg.* | fiet *L* 14 itaqve *(1)* Logarithmus ab $\underline{x - \sqrt{ab}}$ + Logarithmus *(2)* Log $\sqrt{x - \sqrt{ab}}$ + Log $\sqrt{x + \sqrt{ab}}$ *(a)* + L *(b)* − Log a *(3)* $\overline{\text{Log, } x - \sqrt{ab}}$ *L* 15 f. cogniti aut *erg. L*

---

10 Methodus: vgl. VII, 3 N. 38_{15} S. 519 Z. 10–S. 520 Z. 10. 12 f. Cubica: Leibniz trennt den nachfolgenden, auf Vorder- und Rückseite desselben Bereichs des Blatts geschriebenen Abschnitt an dieser Stelle mit einer horizontalen Linie von der vorhergehenden Textpassage ab.

rit summa, quoniam trium quantitatum progressionis Arithmeticae semper haberi summa potest. Sed ea summa erit per duos, itaque tres illi Logarithmi in quibus includitur incognita, reduci hic poterunt ad duos. Quae utique tractabilior: potuissemus aliam formare analogiam $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} \sqcap \dfrac{\frac{b}{a}x+c}{x}}$. vel $\dfrac{x^3}{a^3} \sqcap \dfrac{\frac{b}{a}x+c}{a}$ id est $3\,\overline{\text{Log}\ x} - 3\,\overline{\text{Log}\ a} \sqcap \overline{\text{Log}\ \frac{b}{a}x+c} - \overline{\text{Log}\ a}$, seu $3\,\overline{\text{Log}\ x} - \overline{\text{Log}\ \frac{b}{a}x+c} \sqcap 2\,\overline{\text{Log}\ a}$.

Videndum an addi possint vel subtrahi duo Logarithmi $\overline{\text{Log}\ x}$ et $\overline{\text{Log}\ \frac{b}{a}x+c}$. Pro c pone $\dfrac{b}{a}e$, fiet: $\overline{\text{Log}\ x} + \overline{\text{Log}\ b} - \overline{\text{Log}\ a} + \overline{\text{Log}\ x+e} \sqcap 2\,\overline{\text{Log}\ a}$ seu $3\,\overline{\text{Log}\ x} + \overline{\text{Log}\ x+e} \sqcap 3\,\overline{\text{Log}\ a} - \overline{\text{Log.}\ b}$. Jam $x+c \sqcap \dfrac{1}{\dfrac{1}{x+c}}$ et $\dfrac{1}{x+c} \sqcap \dfrac{c}{x+c} \smile c.$ et $\dfrac{c}{x+c} \sqcap \dfrac{c}{x} - \dfrac{c^2}{x^2} + \dfrac{c^3}{x^3} - \dfrac{c^4}{x^4}$.

$\dfrac{x+c}{x} \sqcap 1 + \dfrac{c}{x}$.

1 trium *(1)* numero *(2)* qvantitatum *L* 2 f. incognita, *(1)* semper *(2)* reduci *L* 3 f. formare *(1)* hoc modo: *(2)* analogiam *L* 4 est *(1)* logarithmus *(2)* $3\,\overline{\text{Log x}} - 3\,\overline{\text{Log a}}$ *L* 6 vel subtrahi *erg. L* 7 f. seu ... $3\,\overline{\text{Log a}} - \overline{\text{Log b}}$. *erg. L* 8 et $\frac{1}{\text{x+c}} \sqcap$ *(1)* $1 - \frac{\text{x}}{\text{c+x}}$ *(2)* $^{\text{x}}$ *(3)* $\frac{\text{c}}{\text{x+c}} \smile$ c. *L*

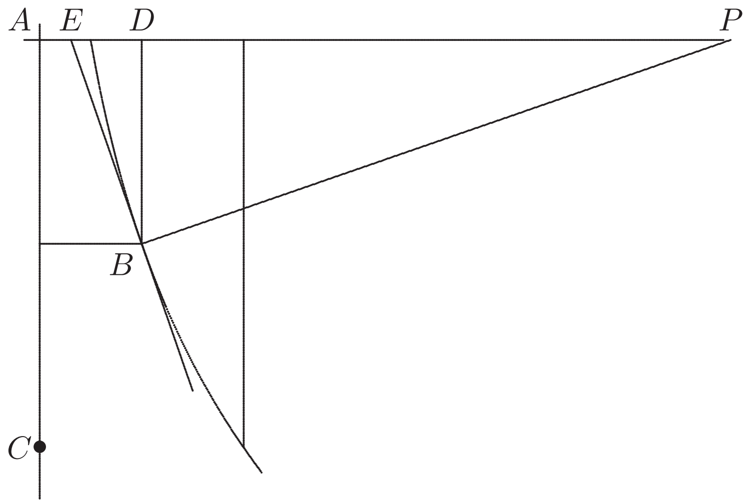
4 analogiam: Die angegebenen Gleichungen $\dfrac{x^2}{a^2} \sqcap \dfrac{\frac{b}{a}x+c}{x}$ und $\dfrac{x^3}{a^3} \sqcap \dfrac{\frac{b}{a}x+c}{a}$ weichen von der Ausgangssituation in S. 359 Z. 12 in einem Vorzeichen ab. Leibniz nutzt die zweite Gleichung ebenfalls in S. 364 Z. 3 fälschlicherweise als Umformung von $x^3 * abx + a^2c \sqcap 0$. 7 fiet: Leibniz bildet zunächst die Summe aus $\overline{\text{Log}\ x}$ und $\overline{\text{Log}\ \frac{b}{a}x+c}$. Die bis Z. 8 bei der Gleichsetzung mit $2\,\overline{\text{Log}\ a}$ nötigen Anpassungen führt er nur unvollständig durch.

59. LOGARITHMICA CURVA
[**noch**]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 14 Bl. 18–19. 1 Bog. 2° mit einem rechteckigen Ausschnitt von etwa [**noch**] cm Höhe über die volle Seitenbreite in der unteren Mitte von Bl. 19. 2 S. auf Bl. 18, 15 Zeilen auf Bl. 19 r° unten, 15 Zeilen auf Bl. 19 v° unten. Auf dem übrigen Bogen N. 58. —
Cc 2, Nr. 986 tlw., 988 u. 990.

Datierungsgründe: Die Anordnung der beiden Texte auf dem Bogen lässt darauf schließen, dass N. 59 vor N. 58 begonnen wurde. Da Leibniz in N. 59 ab S. 364 Z. 1 auf Inhalte von N. 58 zurückgreift, ist davon auszugehen, dass N. 58 vor N. 59 beendet wurde, sodass die Abfassung von N. 58 in die Zeit der Arbeiten an N. 59 fällt. Beide Stücke weisen eine inhaltliche Nähe zum Stück N. 38 auf, dessen nachträglich ergänzter Titel ähnlich zu dem von N. 59 gewählt ist. [**noch**]

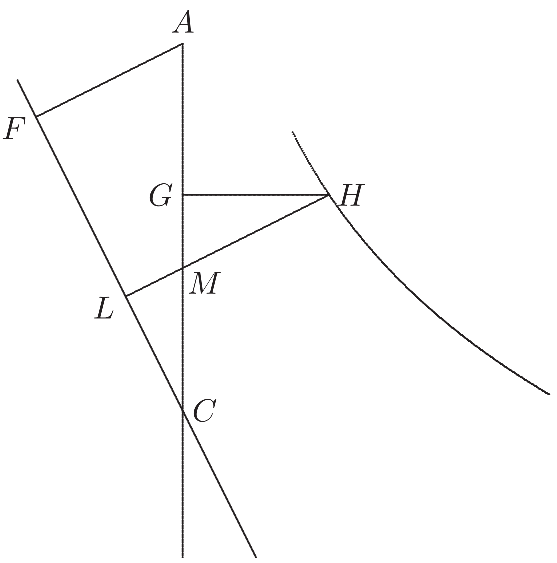
L o g a r i t h m i c a C u r v a
S o l u t i o a e q u a t i o n u m p e r l o g a r i t h m o s



[*Fig. 1*]

14–362,1 l o g a r i t h m o s *(1)* Linea Logarithmica data atqve descripta rectam invenire, qvae curvam in dato *(2)* Dato *(a)* L o g *(b)* Lineae *L*

Dato Lineae Logarithmicae puncto B aliquo, et Asymptoto, invenire rectam quae in dato puncto curvam tangat. Fiat ut ED ad DB ut est 1 ad $\dfrac{1}{AD}$ seu ut AD ad 1. Ergo $ED \sqcap \dfrac{DB \frown AD}{1}$, seu $\dfrac{t}{y} \sqcap \dfrac{x}{1}$ ponendo $ED \sqcap t$. $DB \sqcap y$. $AD \sqcap x$. Jam $tp \sqcap y^2$, seu $t \sqcap \dfrac{y^2}{p}$. Ergo hunc valorem priori inserendo fiet: $\dfrac{y^2}{yp} \sqcap \dfrac{x}{1}$ seu $\dfrac{y}{p} \sqcap \dfrac{x}{1}$. seu $p \sqcap \dfrac{1y}{x}$. Habetur autem summa Omn. p. nempe $\dfrac{y^2}{2}$. Summa ergo omnium Logarithmorum per numeros suos divisorum (: nam y est Logarithmus, x. numerus :) haberi potest. Sed et cubi et quadrato-quadratica etc. omnium p. methodo Barroviana haberi possunt. Eodem modo et aliarum figurarum ad analysin irrevocabilium habebuntur quadratrices, et vicissim harum quadratricium tangentes; seu differentiae.



[*Fig. 2*]

5 f. *Am Rand:* Subest nonnihil erroris, numerus est †x.

1 et *(1)* axe *(2)* Asymptoto *L* 2 ut *(1)* AD ad D *(2)* ED *L* 4 ergo *(1)* jungendum hu *(2)* hunc *L* 5 nempe *(1)* $\frac{1}{2, t^2}$ *(2)* $\frac{y^2}{2}$ *L*

7 methodo Barroviana: I. Barrow, *Lectiones geometricae*, 1672, S. 85–88 [Marg.]; vgl. VII, 5 N. 43 S. 304–306.

Sit AC lineae logarithmicae Asymptota sumatur alia quaelibet recta FC quae eam secet in puncto C. ita ut AF. FC sint datae. Sit $AF \sqcap f$. $FC \sqcap c$. $AG \sqcap y$. seu logarithmus, $GH \sqcap x$. seu numerus. Quaeritur relatio inter $HL \sqcap z$. et $CL \sqcap \omega$. Ante omnia $AC \sqcap \sqrt{f^2+c^2}$. $GC \sqcap \sqrt{f^2+c^2}+x$. Erit $HM \sqcap \dfrac{y\sqrt{f^2+c^2}}{c}$ $\quad \dfrac{LM}{\omega} \sqcap \dfrac{f\omega}{c}$.

$$CM \sqcap \sqrt{\omega^2+\frac{f^2\omega^2}{c^2}} \sqcap \frac{\omega}{c}\sqrt{c^2+f^2}.$$

$$GM \sqcap \frac{yc}{f}.$$

Ergo $GC \sqcap \dfrac{yc}{f}+\dfrac{\omega}{c}\sqrt{c^2+f^2} \sqcap \sqrt{f^2+c^2}+x$.

Et quia ex natura Logarithmorum vel progressionis Geometricae: $x \sqcap a^y$. fiet aequatio:

$$\frac{c}{f}y+\frac{\sqrt{c^2+f^2}}{c}\omega \sqcap \sqrt{f^2+c^2}+a^y.$$

Denique $LM+MH \sqcap z$. seu $\dfrac{\sqrt{f^2+c^2}}{c}y+\dfrac{f}{c}w \sqcap z$.

Ope igitur harum duarum ultimarum aequationum alterutra incognitarum y vel w. eliminari potest. Eliminataque w substituto ejus valore $\dfrac{c}{f}z-\dfrac{\sqrt{f^2+c^2}}{f}y$ fiet:

$$\frac{c}{f}y+\frac{\sqrt{c^2+f^2}}{f}z-\frac{f^2+c^2}{fc}y \sqcap \sqrt{f^2+c^2}+a^y.$$

Utile foret figuram invenire, in qua $x \sqcap a^{\frac{y}{a}}+b^{\frac{y}{a}+1}+c^{\frac{y}{a}+2}+d^{\frac{y}{a}+3}$ etc. quousque scilicet continuare liceat, sed talem figuram non ausim sperare.

1 AC *(1)* axis *(2)* lineae logarithmicae | Asympotos *ändert Hrsg.* | *(a)* sive *(b)* sumatur *L* 4 Erit *(1)* $\mathrm{\dfrac{HM}{x} \sqcap \dfrac{\sqrt{f^2+c^2}}{c}}$ *(2)* HM $\sqcap$ *(a)* $\mathrm{\dfrac{x\sqrt{f^2+c^2}}{c}}$ *(b)* $\mathrm{\dfrac{y\sqrt{f^2+c^2}}{c}}$ *L* 15 x $\sqcap$ *(1)* $\mathrm{a^y+b^{y+1}+c^{y+2}+d^{y+3}}$ *(2)* $\mathrm{a^{\frac{y}{a}}+b^{\frac{y}{a}+1}+c^{\frac{y}{a}+2}+d^{\frac{y}{a}+3}}$ *L*

2 f. *AG* ... numerus: Leibniz vertauscht x und y im folgenden Ansatz von GC und HM. Dadurch und durch weitere Unachtsamkeiten wird die weitere Rechnung bis Z. 14 beeinträchtig.

$x^3+abx+a^2c \sqcap 0$. vel $x^y+\dfrac{b}{a}x^{y-2}+c \sqcap z$. Quaeritur x. Quaeritur scilicet applicata lineae logarithmicae, ad cujus logarithmi triplum applicata aequetur lineae.

Aequatio $x^3 \;\; * \;\; abx+a^2c \sqcap 0$. Unde Analogia: $\dfrac{x^3}{a^3} \sqcap \dfrac{\frac{b}{a}x+c}{a}$.

Unde aequatio Logarithmica: $\underset{-}{\oplus} 3\,\overline{\mathrm{Log}\;x}\,\underset{+}{\ominus}\,\overline{\mathrm{Log}\;\tfrac{b}{a}x+c} \sqcap \underset{+}{\ominus} 2\,\overline{\mathrm{Log}\;a}$.

Videamus an ne liceat ad Logarithmos logarithmorum: $\dfrac{1}{1} \sqcap \dfrac{-2\,\overline{\mathrm{Log}\;a}+\overline{\mathrm{Log}\;\frac{b}{a}x+c}}{+3\,\overline{\mathrm{Log}\;x}}$.

Ergo $\overline{\mathrm{Log}\colon -2\,\overline{\mathrm{Log}\;a}+\overline{\mathrm{Log.}\;\tfrac{b}{a}x+c}} \sqcap \overline{\mathrm{Log}\colon 3\,\overline{\mathrm{Log}\;x}}$. Sed nihil hinc lucis.

Omnis formula ad quosdam factores reduci potest, in quibus non nisi x. simplex cum quadam cognita.

Si sit $\overline{\mathrm{Log}\;\tfrac{b}{a}x+c}$. semper potest reduci ad $\overline{\mathrm{Log}\;x+e}$ ponendo enim $\dfrac{b}{a}e \sqcap c$. sive $e \sqcap \dfrac{ac}{b}$. Fiet $\overline{\mathrm{Log}\;\tfrac{b}{a}x+c} \sqcap +\overline{\mathrm{Log}\;b}-\overline{\mathrm{Log}\;a}+\overline{\mathrm{Log}\;x+e}$.

Ex eadem Aequatione Analytica plures elici possunt Logarithmicae. Ut Aequatio proposita, etiam in hanc Analogiam resolvi potest:

$\dfrac{x^2+ab}{ac} \sqcap \dfrac{-a}{x}$. Ponendo ab esse quantitatem negativam $\sqcap -af$. fiet $x^2+ab \sqcap x^2-af$. Jam $x^2-af \sqcap x+\sqrt{af} \frown x-\sqrt{af}$. Unde fiet aquatio Logarithmica $\overline{\mathrm{Log}\;x+\sqrt{af}}+\overline{\mathrm{Log}\;\dagger\, x \ddagger \sqrt{af}}-\overline{\mathrm{Log.}\;a}-\overline{\mathrm{Log}\;c} \sqcap \overline{\mathrm{Log}\;-a}-\overline{\mathrm{Log}\;x}$. Explicando $\dagger$ per $+$ et $\ddagger$ per $-$ et transponendo aequationem habebimus:

1 vel *(1)* $\mathrm{x}^{\mathrm{y}}+$ *(2)* $\mathrm{x}^{\mathrm{y}}+$ *(a)* $\mathrm{abx}^{\mathrm{y}-2}$ *(b)* $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}^{\mathrm{y}-2}+$ *(aa)* $\mathrm{c}^{\mathrm{y}-0}$ *(bb)* c^0 *L* 1 qvaeritur x. *(1)* est illa cuius Loga *(2)* qvaeritur *L* 2 logarithmicae, *(1)* Cuius triplus *(2)* ad *L* 3 f. $\dfrac{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}+\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$ *(1)* Unde Logarithmus *(2)* Unde *L* 12 f. potest: *(1)* $\dfrac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{x}^2+\mathrm{ab}}{\mathrm{ac}} \sqcap \dfrac{-\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$. *L* 14 f. $\overline{\mathrm{Log}\;\mathrm{x}+\sqrt{\mathrm{af}}}+$ *(1)* $\overline{\mathrm{Log}\;\mathrm{x}-\sqrt{\mathrm{af}}}$ *(2)* $\overline{\mathrm{Log}\;\dagger\,\mathrm{x}\ddagger\sqrt{\mathrm{af}}}$ *L*

---

3 Analogia: $\dfrac{x^3}{a^3} \sqcap \dfrac{\frac{b}{a}x+c}{a}$ entsteht nicht aus der zuvor angegebenen Gleichung, entspricht jedoch derjenigen, die Leibniz in S. 360 Z. 4 nutzt. Im folgenden tritt ein weiterer Vorzeichenfehler auf.
16 habebimus: Die Unachtsamkeit bei der Umformung beeinträchtigt die nachfolgende Argumention bis S. 365 Z. 7 nicht.

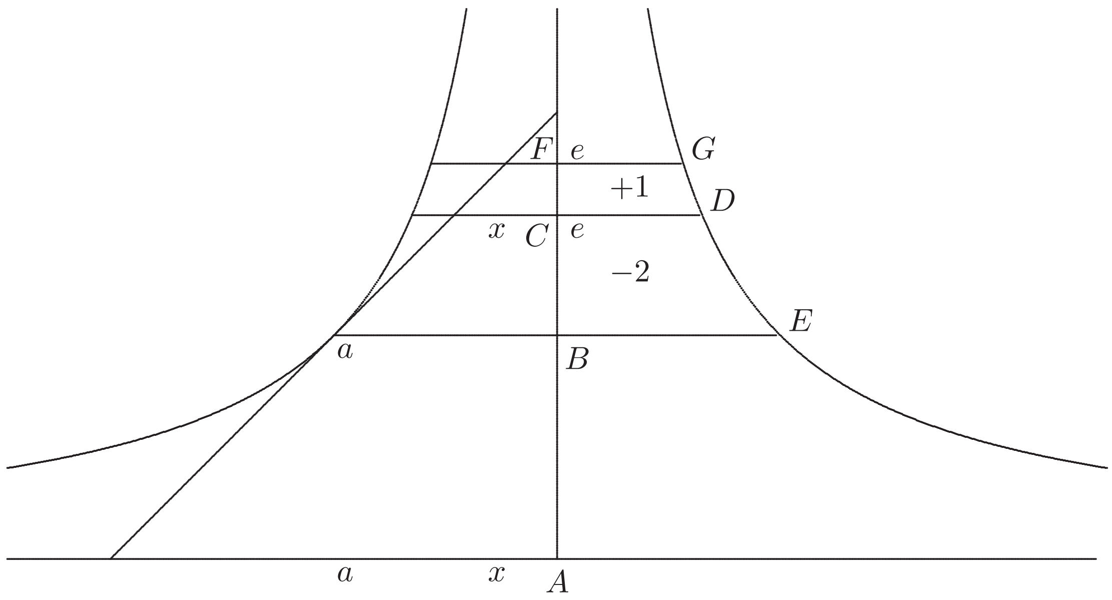
$$\begin{array}{lll} + \overline{\text{Log } x - \sqrt{af}} & \sqcap + 2 & \overline{\text{Log } a}. \\ + \overline{\text{Log } x} & \quad + & \overline{\text{Log. } c} \\ + \overline{\text{Log } x + \sqrt{af}} & & \end{array}$$

Ubi jam res oritur notabilis, nimirum hos tres numeros Logarithmo affectos, incognitam includentes esse progressionis Arithmeticae, unde sequitur Logarithmos eorum progressionis esse logarithmicae. Et hinc methodum haberi inveniendi Summam trium numerorum progressionis Logarithmicae. Sed haec nihil ad rem nostram.

Nec dum video quid magnopere ex aequationibus logarithmicis duci possit. Addenda sunt Mengoli inventa.

An forte aliquando effici potest, ut ipsae quaedam quantitates logarithmicae, fiant incognitae x quaerendae, v. g. exponentes incognitarum ordinariarum, de quo et alibi.

$\overline{\text{Log } x} + \overline{\text{Log. } x + b} \sqcap \overline{\text{Log } a} + \overline{\text{Log } c}$. id est: $x^2 + bx - ac \sqcap 0$.



[*Fig. 3*]

12 *Am Rand:* $x^2 + bx \frown x + d \sqcap x^3 + bx^2$
$+ d \,.\,. + dbx$

4 numeros *(1)* qvo incogni *(2)* Logarithmo *L* 10 logarithmicae, *(1)* pro incognit *(2)* fiant *L*

9 Mengoli: P. Mengoli, *Geometriae speciosae elementa*, 1659, S. 151–347 sind der Logarithmusrechnung gewidmet.

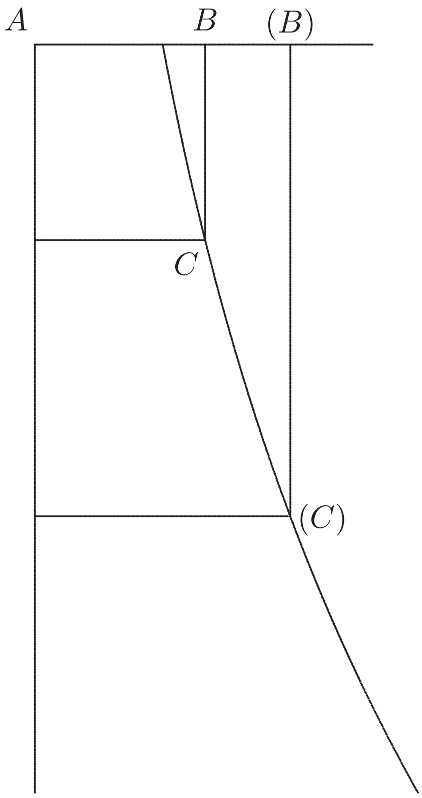
Videndum an aliquod contribuere possit Hyperbolae □tura ut aequatio est $-3\,\overline{\mathrm{Log}\; x} + \overline{\mathrm{Log}\; x+e} \sqcap$ cognitae quantitati, ad quam aequationem quaelibet aequatio Cubica reduci potest. Ergo sit Hyperbola cujus centrum A. vertex E. latera $AB \sqcap BE$. ABE ang. rect. $AC \sqcap x$. $CF \sqcap e$. cognita. Ordinatae FG, CD, BE. Debet spatium $EBCDE$ bis ablatum in spatio $DCFGD$ semel relinquere quantitatem cognitae aequalem, quaeritur punctum C.

Videndum ut formulae omnes aequationum demta incognita in compositas ex his: x. $x+b$. $x+c$. $x+d$. resolvi possint, v. g. $x \frown x+b \frown x+d \sqcap a^2e$. Fiet enim: $x^3+bx^2+dbx-a^2e \sqcap 0$. Videamus an conferri possit datae: $x^3+lx^2+amx-a^2e \sqcap 0$. Fiet
$+d$..
$b+d \sqcap l$ seu $d \sqcap l-b$ adeoque $db \sqcap lb-b^2 \sqcap am$, unde fit aequatio b^2-lb [+] $am \sqcap 0$. uno gradu inferior, ideoque solubilis et semper hoc modo quaelibet aequatio comparari potest aequationi cujus incognitae partes hoc modo productae, cujus rei ratio est, quia idem est ac si omissa a^2e, aequationem x^3+lx^2+amx, id est $x^2+lx+am$, factae ex radicibus comparares, ubi semper ejusdem gradus redit aequatio. Alia via semper efficere poteris, ut aequatio Cubica resolvatur in terminos factorum simplicium, ope solius aequationis simplicis, ut si ponas: $x^3 \sqcap -lx^2-amx+a^2e$. ubi tantum formula $-lx^2-amx+a^2e$. resolvenda in factores, quid ope aequationis rationalis seu simplicis, seu uno gradu ea formula inferioris fieri potest. Eodem modo quadrato-quadratica per quadraticas resolvetur in factores simplices, imo forte adhuc per simplicem, methodo Slusiana analogiarum. Posito jam hoc modo propositam aequationem in factores simplices resolutam, nihil aliud producetur $\overline{\mathrm{Log}\; x}$. † $\overline{\mathrm{Log}\; x+h}$. (†) $\overline{\mathrm{Log}\; x+g}$ etc. $\sqcap$ ((†)) cognitis. Et omnibus cognitis ad unam communem mensuram redactis tentando facilius inveniretur x. Sed quoniam tentare incommodum, ideo rite quadam motus adhibita effici poterit, ut semper summa omnium logarithmorum, ejusmodi, quocunque modo sumatur x haberi possit aequalis recta et apparebit, quando ea accedat ad datam; ibi vero postea invento semel puncto

6 f. punctum C. *(1)* x. x^2 *(2)* Non video qvid *(3)* Videndum *L* 8 v. g. *(1)* $x \frown x+b \frown x+c \frown x+d$ *(2)* $x \frown x+b \frown x+$| c *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *L* 11 qvaelibet *(1)* formula reduci *(2)* aeqvatio *L* 12 aeqvationi *(1)* fact *(2)* cuius *L* 13 f. radicibus *(1)* comparab *(2)* comparares, ubi semper *(a)* eadem *(b)* ejusdem *L* 16 ponas: *(1)* $\frac{x^3}{l.}$ *(2)* x^3 *L* 21 $\sqcap$ ((†)) cognitis *erg. L* 24 logarithmorum, *(1)* rectae *(2)* ejusmodi *L*

19 methodo Slusiana: vgl. R.-Fr. de Sluse, *Mesolabium*, 1659, 2. Aufl. 1668, S. 84–88. 23 motus: vgl. N. 16 und N. 24.

circiter exactissime in quadam grossiore modo descripta logarithmica, mox exactissime invenietur in subtilissime descripta, reliquum tentando, momento absolvendo. *Les affirmatives par leur chainette, meneront une regle, les negatives rameneront un point sur la regle et il semble que c'est chose assez aisée.* Resolvere omnes aequationes in Analogias simplices: AB. $A(B)$ *nombres,* BC. $(B)(C)$ *logarithmes.*



[*Fig. 4*]

Hoc etiam ex hac methodo commodum oritur, quod ita multiplicationes nullae sunt ipsius incognitae, per lineas quasdam datas, quod antea more me districtum tenuerat. Et credo semper simplicibus aequationibus subsidiariis, resolvi posse formulas in ejusmodi

1 exactissime *(1)* postea id *(2)* in *L* 1 mox *(1)* exactius *(2)* exactissime *L* 2 descripta, *(1)* abso *(2)* reliqvum *L* 3 chainette, *(1)* meneront, les *(2)* meneront *L* 4 aisée, *(1)* de resoudre t *(2)* Resolvere *L* 8 incognitae, *(1)* unde *(2)* per *L* 9 aeqvationibus *(1)* inde *(2)* subsidiariis *L*

6 Fig. 4: vgl. S. 89 Z. 12 Fig. 1.

factores simplices, quia facile in factores uno gradu inferiores resolvuntur, et hi rursus facile in tales v. g. $x^4 + bx^3 + acx^2 + a^2dx$. potest intelligi facta ex $x^3\ .x^2\ ..x.\ \smallfrown x + ..$ et x^3 etc. rursus facta ex x^2 etc. $\smallfrown x + ..$ et ita porro. $x^2 + bx\ \boxed{\text{S}}\ x \smallfrown x + d \sqcap x^2 + dx$. || $x^3 + bx^2 + acx\ \boxed{\text{S}}\ x^2 + dx \smallfrown x + e \sqcap x^3 + dx^2 + edx$. venitur ad aequationem quadraticam.

$$+e..$$

Ergo $e \sqcap \dfrac{ca}{d}$. $d \sqcap b - \dfrac{ca}{d}$. Et $x^4 + fx^3 + aex^2 + a^2fx\ \boxed{\text{S}}\ x^3 + bx^2 + acx \smallfrown x + g. \sqcap$ $x^4 + bx^3\ + acx^2 + acg[x]$ venitur ad aeq. Cubicam. $b \sqcap f - g$. $c \sqcap ae - fg + g^2 \smile a$. Ita

$$+g... + gb..$$

video non hoc semper facile obtineri posse hanc in factores inquisitionem.

$$x^2 + bx + ac \smallfrown x^2 + dx \sqcap x^4 + \begin{matrix} bx^3 \\ +d... \end{matrix} + \begin{matrix} acx^2 \\ +bd.. \end{matrix}\ \begin{matrix} \\ +acdx \end{matrix} \quad \boxed{\text{S}}\ x^4 + lx^3 + amx^2 + a^2nx$$

$b \sqcap l - d$. $\quad ac \sqcap am - dl + d^2$. $\quad amd - d^2l + d^3 \sqcap a^2n$.

Satius ergo quadrato-quadraticam resolvi in duas quadradicas quam in Cubicam et simplicem. Nam Cubica rursus ope quadraticae resolvenda in quadraticam et simplicem, ut quadratica ope simplicis resolvitur in simplicem. Videndum an non aliquid praestari possit, aequationem discernendo, ut pro $x^3 + bx^2 + acx + a^2d \sqcap 0$. ponendo: $\dfrac{b}{a}x^3 + \begin{matrix} fx^2 \\ \end{matrix} + \begin{matrix} acx \\ +ag \end{matrix} + a^2h \sqcap \dfrac{e}{a}x^3 + \begin{matrix} fx^2 \\ -b.. \end{matrix} + agx \boxed{\begin{matrix} +a^2h \\ -a^2d \end{matrix}}$. Ita spes est cubicam resolvi posse in simplicem et quadraticam per solam simplicem, et forte altiores quoque semper ad inferiores. Hoc si generaliter succederet foret pulcherrimum et summae ad logartihmos utilitatis.

1 simplices, *erg.* *L* 2 v. g. *(1)* $x^4 + bx^3 + cx^2 + a^2dx + a^3e$. *(2)* $x^4 + bx^3 + acx^2 + a^2dx$ *(a)* fieri *(b)* potest intelligi facta ex *(aa)* $x^3.....$ *(bb)* $x^3\ .x^2\ ..x$ *L* 3 ex *(1)* x^3 *(2)* x^2 *L* 3 porro *(1)* praeterea potest hoc modo fieri: $x \smallfrown \frac{n}{a}x + d \smallfrown \frac{r}{a}x + e \smallfrown \frac{s}{a}x + f$ etc. productumqve comparandum datae formulae *(2)* x^3 *(3)* x^2 | + *erg. Hrsg.* | bx *(a)* | + *nicht gestrichen* | ac + cd *(b)* $\boxed{\text{S}}$ *L* 4 venitur ... qvadraticam *erg.* *L* 5 ergo *(1)* c $\sqcap$ *(2)* e $\sqcap \frac{ca}{d}$. d $\sqcap$ b $- \frac{ca}{d}$. *(a)* Ergo $x^3 + bx^2 + acx \sqcap x \smallfrown x + b - c, \smallfrown x + c$ *(b)* et *L* 6 venitur ... Cubicam *erg.* *L* 6 f. c $\sqcap$ | $ae - fg - g^2 \smile a$ *ändert Hrsg.* | *(1)* qvod jam *(2)* ita | video *erg.* | non *L* 7 f. inqvisitionem. *(1)* $x^2\ \ dx + dc \smallfrown x^2\ + bx$ *(2)* | $x^2\ \ bx\ \ ac \smallfrown x^2 + dx$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *L* 10 f. et *(1)* qvad *(2)* simplicem *L* 13 ponendo: *(1)* $\frac{e}{a}x^3$ *(2)* $\frac{b}{a}x^3 +$ *L*

$\frac{b}{a}x+c$. $\frac{d}{a}x+e$. Pone $x \sqcap \frac{f}{a}y+g$.fiet: $\frac{bf}{a^2}y+\frac{b}{a}g+c$ pro $\frac{b}{a}x+c$. Et item pro $\frac{d}{a}x+e$ fiet: $\frac{df}{a^2}y+\frac{dg}{a}+e$. Sit $\dfrac{\frac{bf}{a^2}y+\frac{bg}{a}+c}{\frac{df}{a^2}y+\frac{dg}{a}+e} \sqcap \frac{h}{a}$. Debet esse $\frac{bf}{a}y \sqcap \frac{dfh}{a^2}y$. adeoque $h \sqcap \frac{ba}{d}$. Ita reducta fractione evanescet y. Jam $bg+ca \sqcap \frac{dg}{a}+e \frown \boxed{h}\ \frac{ba}{d}$. seu $\boxed{bg}+ca \sqcap \boxed{gb}+\frac{eba}{d}$. ergo patet arbitrarias f. g. evanescere, et ut ad unam mensuram incognitos continente reduci possint debere esse $c \sqcap \frac{eb}{d}$ et tunc uno per alterum diviso priore per posterius provenire $\frac{h}{a}$ seu $\frac{b}{d}$. Haec tamen utilia saepe, ut quando fieri potest eligamus ita analogias ut res procedat. Item si una sit quadratica formula cujus logarithmus quae resolubilis in alias.

1 fiet: *(1)* $\frac{\mathrm{bf}}{\mathrm{a}^2}\mathrm{x}$ *(2)* $\frac{\mathrm{bf}}{\mathrm{a}^2}\mathrm{y}$ *L* 1 item *erg. L* 3 Jam *(1)* $\frac{\mathrm{bg}}{\mathrm{c}}$ *(2)* bg + ca *L* 4 patet *(1)* ut *(2)* arbitrarias *L* 6 seu $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}$. *(1)* Aliter si facias *(a)* bf *(b)* $\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}} \sqcap$ *(c)* et $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}$ *(2)* si his habeantur *(3)* Haec *L*

60. L'INSTRUCTION DE LONGIMETRIE PAR UNE STATION

4. September 16[76]

Überlieferung: *A* Abschrift von unbekannter Hand nach einer nicht aufgefundenen Vorlage: LH 37 IV Bl. 11. 1 Bl. 1°, das auf der Rückseite quer beschrieben wurde. Das Bl. wurde zu einem Bog. 2° gefaltet und im Falz getrennt. — Anders als die Bemerkung von Leibniz vermuten lässt, dürfte die Abschrift nicht von Candor selbst angefertigt worden sein. Duktus und Orthographie des Schreibers stimmen nicht mit denen in den überlieferten Textzeugen aus Candors Korrespondenz mit Leibniz überein. Außerdem war der Kopist mit der französischen Sprache nicht gut vertraut. Leibniz hat die zahlreichen Verschreibungen größtenteils korrigiert sowie eine Auslassung ergänzt. Weitere, von Leibniz nicht korrigierte, offensichtliche Verschreibungen werden stillschweigend berichtigt.
Cc 2, Nr. 00

L'Instruction de Longimetrie par une Station du Corps et de l'oeil par le miroir Immobile

Sa construction.

Cet Instrument n'est qu'un quart de 90 dont le demidiametre est d'un pié ou de 2 pour le mieux, qui sont icy representéz par 2 pouces sur le coté IE, le quel coté doit etre tenu ou posé orizontalement: Au centre de ce quart est posé, aussy orizontalement un petit miroir marque E. Sur la circonference IK court une pinule qui s'avance autant que le centre du miroir fixe, il faut que cette pinule se trouve de tous côtéz sur le côté KE se met une petite Lame qui se hausse au dessus de K quand il en est besoin, Et quelle aye ou une pointe ou un petit bouton ou un petit trou.

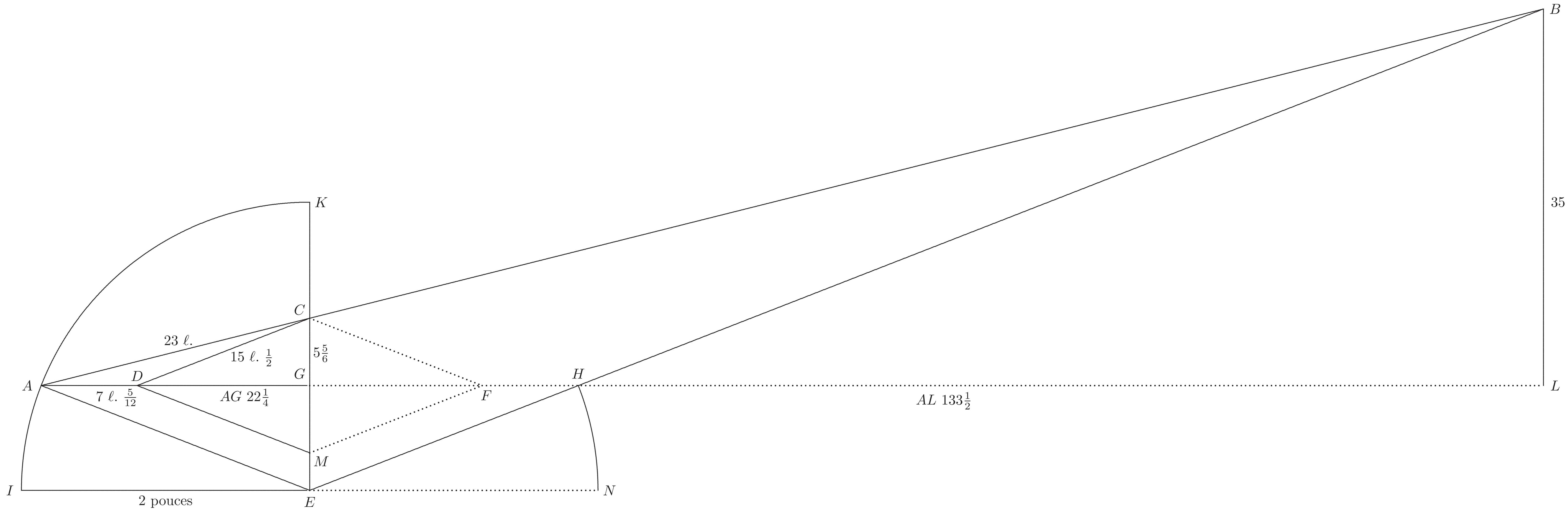
---

14 *Dazu am unteren Rand von Leibniz' Hand:* L'inventeur de cet instrument est le R. P. Charles Bourgoin religieux Augustin de la Communauté Reformée de Bourges, qui me l'a communiqué à Paris l'an 1676. le 4 septembre. C'est M. Candor, professeur des langues modernes à Wolfenbutel, qui a ecrit tout cela, et je l'ay fait copier de sa main.

25 1667 *LiA ändert Hrsg.*

---

25 Candor: G. Leremite, gen. Candor.



[*Fig. 1*]

2 *Fig. 1*: In der Figur werden die Streckenlängen in *pouce* und *ligne* angegeben (1 *pouce* = 12 *ligne*).

Son usage.

Il faut poser ce quart de sorte que le coté IE soit parallele à l'orizon, et prendre la mesure de sa distance jusques à la terre plane, Et le disposer en sorte que l'oeil A regardant par la pinule mobile sur la circonference IK puisse voir l'Image de l'extremité de la hauteur (comme B): au centre du miroir plan, ainsy que l'oeil A le voit, puis du point du milieu de la pinule il faut mener le rayon AE avec quelque crayon qui se puisse effacer, mais auparavant il faut mirer le point B par la meme pinule, et en meme lieu de la circonference, Et marquer le point par où passe le rayon sur le côté KE, comme AB quoy passe par le point C, ce qui se peut faire en remuant la petite lame qui coule; contre KE, En y mettant quelque petite pointe. Apres quoy il faut aussy mener AC avec le crayon, bien delicat, puis mener AG parallele à IE; apres quoy il faut porter la distance CG en M depuis G: puis de M mener MD parallele a AE, puis tirer DC; cela etant tout tracé avec le crayon vous avéz le petit triangle ACD proportionel à celuy qu'auroient fait les deux stations réelles l'une en A et l'autre en H, lequel auroit eté ABH; apres cela mesurez AD, et voyez combien de fois la d. AD est contenue en AG qui est la moitie de la distance de la seconde station, vous connoitrez la distance entiere, et le coté d'embas du grand triangle: mesurez aussy AC et DC et CG vous conoitrez la hauteur B et le point L: mesurez la distance de A vers la terre et l'adjoutez à L, ce sera tout fait.

Demonstration.

Tout ce qui est hors du quart de 90 ne sert que pour la demonstration. Le rayon d'Incidence, comme BE fait tousjours son rayon de reflexion faisant un angle égal au sien avec les corps opaque en reflechissant, C'est un principe qui parle pour premier, neantmoins il se peut prouver, Car si l'object, etoit K et que K fut un Luminaire et que son rayon tombait sur le miroir E, ce rayon luy seroit perpendiculaire. Il ny a point de raison pourquoy son rayon de reflexion iroit plutot d'un côté que de l'autre. Et la raison pourquoy il retourneroit vers K est que le miroir E luy est opposé perpendiculairement. C'est donc la situation ou disposition du corps reflechissant qui cause la situation du rayon reflechi; si donc il decline de cette situation de perpendiculaire, de 10 deg. par ex. il faut necessairem. que le rayon de reflexion decline d'autant: mais de quelle ligne? De la perpendiculaire; De sorte que si K (par ex.) etoit à 10 deg. plus loing de A, son rayon de

28 f. par ex. | est tant *ändert Hrsg.* | necessairem. *A*

reflexion sur le miroir E, remontant passeroit à 10 deg. pres de EK: parceque ledit miroir seroit decliné de 10 deg. du rayon d'Incidence, lequel rayon decline aussi de 10 degréz du rayon perpendiculaire KE. Car c'est un axiome que plus une chose est éloignée de l'état auquel elle fait un certain effect, plus aussy et à proportion son effect est éloigné de l'etat auquel etoit son premier effet avant cet eloignement. Cela donc étant je dis que le petit triangle ACD est proportionel au grand ABH, qui auroit eté trouvé si l'on avoit fait deux Stations réelles aux points A et H. J'entens que l'oeil eût ésté posé aux points A et H, Car par la 2 du 6. Si l'on mene une ligne parallele, à l'un des costéz du Triangle, Icelle coupera les autres costéz d'iceluy proportionelment: Or est il que CD est parallele au côté HB du triànglé ABH, donc elle coupe les cotéz AB et AH proportionellement. De plus ces deux triangles sont equiangles puis qu'ils ont les costéz proportionaux, par la 5. 6. Mais vous me demandez quel moyen il y aura de mener la ligne; CD parall. à BH, veu que le rayon d'Incidence BE est hors de l'Instrument? Je reprondray qu'apres avoir mené MD il ne faut que mener CD. Car M etant aussy eloignée de G que C, Si vous menez MF paral. à EB, puis FC; les deux lignes CF et MF avec CM feront la moitié d'un Rhombe, et pour faire l'autre il faudra mener MD et DC; ses deux moitiez sont egales et proportionelles, puis qu'etant mises l'une sur l'autre elles conviendroient selon le 8[e] axiome. Le coté DC sera parallele au côté MF qui est parall. à HB prolongée jusques en E, Donc DC sera aussy parall. à HB prolongée en E puisqu'elle est parall. à celle qui luy est parallele: Mais comme nous ne pouvons pas tirer MF parall. à EH ou à BH prolongée, nous menons MD parall. à EA qui est dans nostre Instrument, et nous ne faisons que le demy Rombe MDC, aussy n'avons nous besoin que de cela, Car si le triangle CFM estoit renversé sur sa base CM; ses deux cotéz tomboient sur MD et DC, aussy voyez vous que l'angle de reflexion AEI etant egal à celuy d'incidence NEH, et tirant de M la ligne MD parallele à EA, elle se doit terminer en un point egalement distant de G que F, Et que tirant par apres DC, elle se doit trouver parallele à MF et à EH: cela estant, comme AD sera à AH, double de AG, ainsi AC sera à AB et DC à HB, et comme au triangle DCG, DG sera a CG ainsy sera HL à LB; Car si vous portéz

26–28 Elle ... sera à CG *erg. LiA*

8 la 2 du 6.: EUKLEIDES, *Elementa*, VI, 2. 12 la 5. 6.: EUKLEIDES, *Elementa*, VI, 5. 18 le 8[e] axiome: EUKLEIDES, *Elementa*, I, Ax. 4 (in zeitgenössischen Ausgaben Ax. 8).

le triangle CDG l'angle D sur H, et DG sur HL, il sera aussy proportionel au triangle BHL, pour la meme raison;

Et comme AC à CG, ainsy AB à BL partant nous trouvons fort bien tout ce que nous est necessaire dans nostre quart de 90 deg. J'ay marqué les distances par lignes à cause que ce quart est petit. *Haec sunto paucula donec suggerantur ampliora.*

Laus Trinitati DEO uni

3 BI *A ändert Hrsg.*

61. TEIL EINER GESPRÄCHSAUFZEICHNUNG MIT TSCHIRNHAUS [Mai 1676]

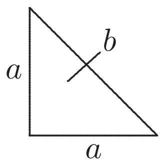
Überlieferung: *LuT* Fragment einer Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 1. Papierstreifen mit leicht geschwungener Unterkante, ca 21,2 × 6,6 cm. 1 S. auf Bl. 1 v°. — Auf der Vorderseite VII, 3 N. 59.
Cc 2, Nr. 1425 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück VII, 3 N. 59 auf der anderen Seite des Blattes trägt das Datum *24. Maii 1676*.

[*Leibniz*]

$\sqrt{2}$ $\qquad a \quad \dfrac{a}{b+c}$ —— $\qquad \sqrt{2aa^2} \qquad \sqrt{ay}\ \langle\sqcap\ x\rangle^2$

[*Tschirnhaus, um* 150° *gedreht*]

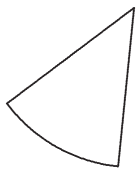


[*Fig. 1*]

$\sqrt{2aa} \qquad \sqrt[3]{2aa}$

$\sqrt{2aa}$

a



[*Fig. 2*]

[*Leibniz, um* −90° *gedreht*]

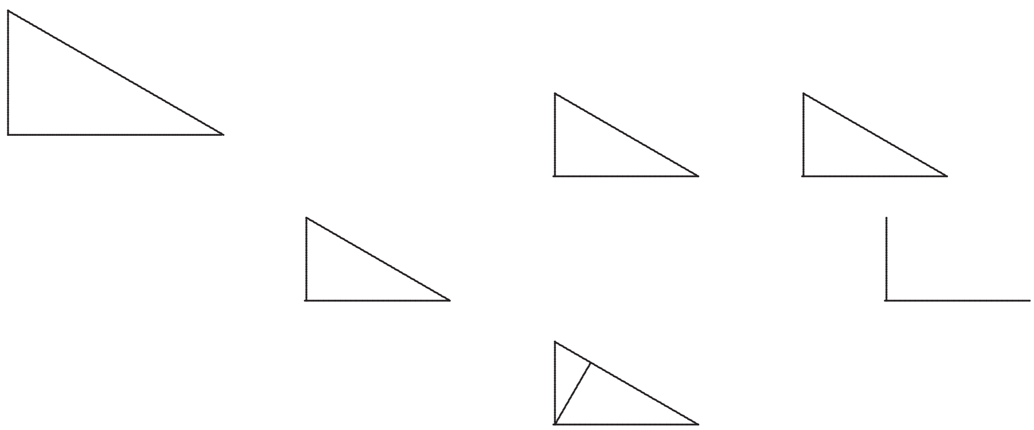
$$\frac{1}{2}$$

10 $\sqrt{ay}$: Der Schnitt, der die Unterkante des Papierstreifens hergestellt hat, verläuft durch die Gleichung. An der Unterkante befindet sich zudem ein kleiner Rest einer Zeichnung, ihr Hauptteil ist abgeschnitten. Das Fragment ist wahrscheinlich durch Zerschneiden einer umfassenderen Aufzeichnung, die Leibniz und Tschirnhaus während eines Gesprächs gemeinsam angefertigt hatten, entstanden.

62. DIVERSE FIGUREN SOWIE WURZEL AUS -3
[Frühjahr 1676]

Überlieferung: *L* Fragmente: LH 38 Bl. 172. 1 Blatt, ca 13 × 22 cm, an drei Seiten beschnitten, untere Schnittkante unregelmäßig. 1 S. auf Bl. 172 v°. Die Schnitte verlaufen zum Teil durch Text oder Figuren. — Auf der Vorderseite VIII, 1 N. 71.
Cc 2, Nr. 1188 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück *Trouver les pignons* (VIII, 1 N. 71) auf der Vorderseite wird von den Herausgebern auf Frühjahr 1676 datiert. Den entscheidenden Hinweis auf eine Entstehung in diesem Zeitraum liefern dabei die Fragmente von Rechnungen am Rande jenes Stückes. Diese ähneln stark solchen Rechnungen, die sich auf der Rückseite von LH 4 III 9 Bl. 10 befinden. Auf diesem Blatt wiederum hat Leibniz später das Stück VI, 3 N. 73 niedergeschrieben und mit dem Datum 15. April 1676 versehen. Die Rechnungen auf diesem Blatt müssen vorher entstanden sein, wahrscheinlich also auch die auf der anderen Seite unseres Trägers. — Das Wasserzeichen des Trägers stützt diese Datierung: Es ist für andere Stücke belegt, für welche die Herausgeber eine Enstehung im April 1676 annehmen.

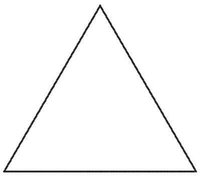


[*Fig. 1*]

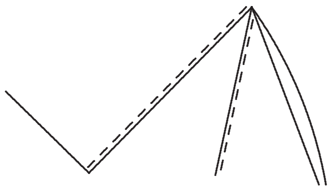
16 *Am oberen Blattrand, der Länge nach durchgeschnitten:* x $\langle x \rangle$ x

$$\begin{array}{c} -a \sqcap -1 \frown +a \\ +\sqrt{}-3 \\ +\sqrt{}-3 \\ - \frown -3 \\ + \end{array}$$

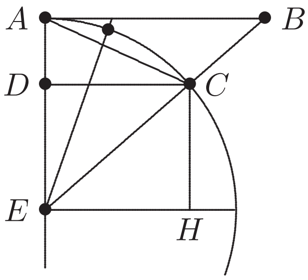
3^2



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

5 *In der Blattmitte, gestrichen:* $\boxed{\langle A\rangle ng}$

2 $\sqrt{}-3$: Der imaginäre Ausdruck $\sqrt{-3}$ ist Teil von Überlegungen, als deren Ergebnis Leibniz die Identität $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ formuliert. Diese teilt er etwa Huygens in einem wohl Mitte September 1675 abgefassten Brief mit (III, 1 N. 61 S. 278) und leitet sie in einem auf Oktober 1675 zu datierenden Stück, dessen Untertitel *De radicibus realibus, quae interventu imaginariarum exprimuntur* lautet, her (VII, 2 N. 51 S. 683). Ein Jahr darauf stellt Leibniz sie für Oldenburg und Collins erneut auf (III, 1 N. 96_1 S. 625, verfasst am 18.–29. Oktober 1676). Es kann vermutet werden, dass das vorliegende Fragment mit solchen Überlegungen zusammenhängt. 7 *Fig. 3*: Der untere Teil der Figur ist abgeschnitten. Sie und die folgende Figur gehören möglicherweise zu Überlegungen zur Dreiteilung von Winkeln; vgl. etwa VII, 1 N. 27 S. 189.

63. ÜBERLEGUNG ZU BINOMISCHEN AUSDRÜCKEN
[November 1675]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 46. 1 Blatt, ca 19,5 × 10,8 cm, rechts unregelmäßig, unten leicht geschwungen beschnitten. 1 S. auf Bl. 46 v°. Die Schnitte verlaufen zum Teil durch die Rechnungen. — Auf der Vorderseite VII, 7 N. 58.
Cc 2, Nr. 1134 tlw.

Datierungsgründe: Das auf der Vorderseite niedergeschriebene Stück *Imaginariae usus ad comparationem circuli et hyperbolae* (VII, 7 N. 58) trägt das Datum 29. November 1675.

$$\begin{array}{lllll} x^3 \sqcap & 3a^2b & +\, 3ab^2 & +\, a^3 \\ & & & +\, b^3 \\ x^2 \sqcap & a^2 & +\, 2ab & +\, b^2 \\ x \;\sqcap & a & + & b \end{array}$$

$$\frac{x^3 \sqcap}{\langle x^2\rangle} \quad \frac{\begin{array}{r}3a^2b+3ab^2+a^3\\ +b^3\end{array}}{\langle a^2+2ab\rangle+b^2} \sqcap \overline{3b+\frac{\begin{array}{r}-3ab^2+\ a^3 \ \sqcap \odot\\ -2b^3\end{array}}{a^2+2ab+b^2 \sqcap x^2}}\text{„}\frown x^2 \sqcap x^3$$

$$\underbrace{\begin{array}{r}3bx^2-3ab^2+\ a^3\\ -2b^3\end{array}}_{\langle\sqcap\odot\rangle} \sqcap x^{\langle 3\rangle}$$

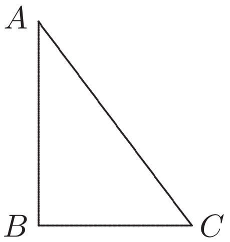
12 „$\frown x^2$: Leibniz rechnet fortlaufend. 14 $\sqcap \odot$: Der unterhalb der geschweiften Klammer liegende Teil der Betrachtung ist abgeschnitten.

64. PROPOSITIONES DE TRIANGULIS RECTANGULIS NUMERICIS
[12. – 31. Dezember 1675]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 51. 1 Blatt, ca 18,5 × 9,7 cm, an drei Seiten beschnitten. $1\frac{1}{3}$ S. 6 Z. auf Bl. 51 r°, 8 Z. auf Bl. 51 v°.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Die hier festgehaltenen Sätze entstammen teils Frénicles postum erschienenem *Traité des triangles rectangles en nombres*, teils knüpfen sie an dort formulierte Sätze an. Das Manuskript von Frenicles *Traité* bereitet Mariotte nach dessen Tod im Januar 1675 für den Druck vor, und er macht es Leibniz noch vor der Veröffentlichung zugänglich. Am 12. Dezember 1675 verwendet Leibniz Ergebnisse hieraus, als er das ihm am Tag zuvor von Arnauld angetragene Problem behandelt, eine allgemeine Regel zu formulieren, mit der sich die pythagoreischen Tripel finden lassen (III, 1 N. 69). Zwei Teile dieser Studie betitelt Leibniz mit *De triangulo rectangulo numerico*, was den Bezug auf Frénicles Werk verdeutlicht. Das wesentliche Ergebnis der Studie findet sich direkt am Anfang unserer Notiz, diese ist also nach jener entstanden. Unsere Notiz steht auch mit fünf weiteren Stücken, die allesamt auf Dezember 1675 zu datieren sind, in einem engen inhaltlichen Zusammenhang: Als Vorarbeiten zu III, 1 N. 69 sind die Stücke VII, 1 N. 81 u. 82 zu betrachten; insbesondere in N. 82 verwendet Leibniz eine Reihe an Definitionen und Sätzen aus dem *Traité*. Dem ersten der in unserer Notiz festgehaltenen vier Sätze widmet Leibniz zwei Beweisversuche (VII, 1 N. 83 u. 84). Den Ansatz zum zweiten der vier Sätze notiert Leibniz auch in einer gemeinsam mit Tschirnhaus angefertigten Gesprächsaufzeichnung (VII, 2 N. 61). Dort skizziert er zudem ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen. Unsere Notiz stammt wohl aus derselben Phase wie diese fünf Stücke und dürfte daher noch im Dezember 1675 entstanden sein.

[Prop. I]



[*Fig. 1*]

$AB \sqcap b^2 - d^2$. $BC \sqcap 2bd$. $AC \sqcap b^2 + d^2$. Latera $\triangle^{\text{li}}$ Rectanguli numerici. Area Trianguli $\triangle^{\text{li}}$ erit $b^3d - bd^3$. Ait Freniclus non posse aequari quadrato, et hanc aequationem $b^3d - bd^3 \sqcap x^2$ esse in numeris impossibilem. Sit $x \sqcap be + de$, fiet: $b^3d - bd^3 \sqcap b^2e^2 + 2bde^2 + d^2e^2$, et dividendo utrobique per $b+d$, fiet aequatio haec: $b^2d - bd^2 \sqcap e^2b + e^2d$, aequatio impossibilis et $b^2d - bd^2 \sqcap b + d$ aequatio rursus impossibilis in numeris.

---

23 $AB \ldots b^2 + d^2$: Dieses Bildungsgesetz für pythagoreische Tripel formuliert Leibniz in III, 1 N. 69, S. 324. 24 Freniclus: B. Frénicle de Bessy, *Traité des triangles rectangles en nombres*, 1676, prop. 39, S. 100–103 [Marg.]. Leibniz versucht sich in VII, 1 N. 83 u. 84 an einem Beweis des Satzes.

[Prop. II]

$$x^4 - y^4 \sqcap$$
$$x^2 - y^2 \frown x^2 + y^2$$
$$x - y \frown x + y, \frown x^2 + y^2 \ \sqcap \ \text{quadrato}$$

Impossibile est differentiam quadrato-quadratorum esse quadratum.

[Prop. III]

Impossibile est, si duo quadrati faciunt quadratum, illum quadratum junctum alterutri eorum facere rursus quadratum.

[Prop. IV]

Impossibile est trium quadratorum progressionis Arithmeticae differentiam esse quadratum.

---

7 f. *Darüber:* $16 + 9 \sqcap 25$

10 f. *Darunter:* 1. 4. 9. 16.

$$\begin{array}{r|r} & 16 \\ 30 & 64 \\ & \underline{10} \\ & 90 \end{array}$$

5 est *(1)* differentiarum *(2)* differentiam *L* 7 si *(1)* qva *(2)* duo *(a)* qvadrata *(b)* qvadrati *(aa)* faciant *(bb)* faciunt *L*

---

1 Prop. II: Der Satz entspricht der *conséquence* IV von prop. 39; ebd., S. 108 f. Aus ihm lässt sich der Fall $n = 4$ des Großen Fermatschen Satzes ableiten. Leibniz lässt hier lediglich Frénicles Angabe weg, dass das einfache Quadrat ungerade sein soll. — Vgl. auch die Gleichung $y^4 - x^4 \sqcap z^2$, die Leibniz in einer während eines Gesprächs mit Tschirnhaus entstandenen Aufzeichnung notiert (VII, 2 N. 61 S. 746 Z. 7). 6 Prop. III: Der Satz lässt sich leicht aus dem Bildungsgesetz pythagoreischer Tripel in S. 379 Z. 23 ableiten. 9 Prop. IV: Auch diese Aussage lässt sich aus prop. 39 ableiten. Sie ist äquivalent mit deren *conséquence* V; ebd., S. 109.

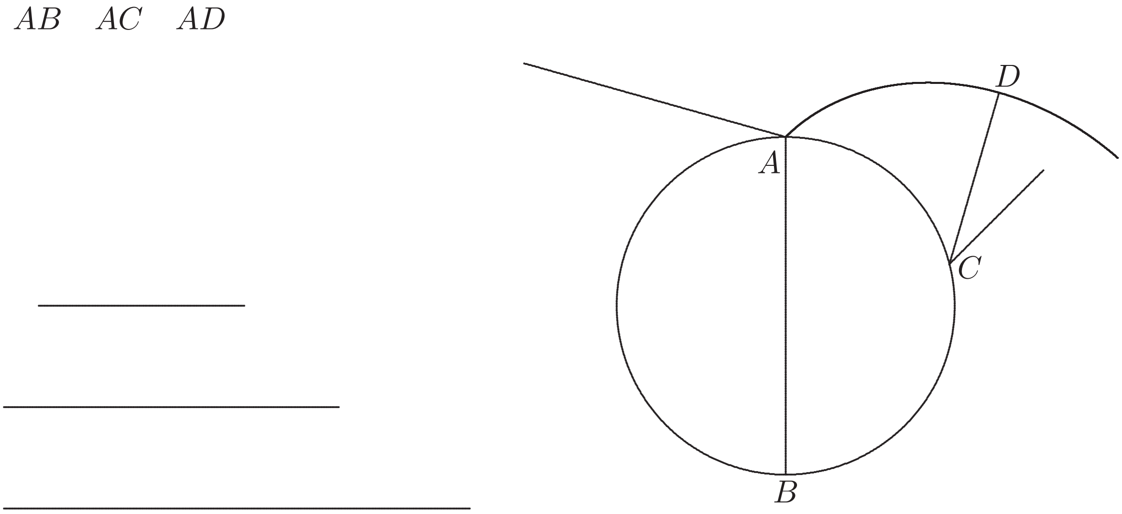
65. DIVERSES CONSIDÉRATIONS MATHÉMATIQUES, NOTAMMENT SUR LA COURBE DE BERTET ET SUR UN CANAL À SECTION TRAPÉZOÏDALE

[Um den 9. Februar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 III 9 Bl. 10. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 10 v°, großteils mit VI, 3 N. 71 überschrieben. Auf Bl. 10 r° Anfang von VI, 3 N. 71.
Cc 2, Nr. 1381

Datierungsgründe: Leibniz' Datierung des über die Notizen geschriebenen Stücks legt den 16. April 1676 als *terminus ante quem* fest. Die Verbindung zwischen der Figur der Bertetschen Kurve im vorliegenden Stück und den beiden Figuren von LH 35 VIII 30 Bl. 12 (III, 1 N. 68 und VII, 5 N. 45) belegen den 3. November 1675 als *terminus post quem*. Das Wasserzeichen stützt diese Datierung. In diesen Zeitraum fällt eine Phase der intensiven Beschäftigung mit geometrischen und harmonischen Reihen und insbesondere der Summe der reziproken natürlichen Zahlen, die kurz nach dem 8. Februar mit VII, 3 N. 55 ein vorübergehendes Ende nimmt. In den Notizen mit geometrischen Progressionen findet sich in der Umarbeitung von S. 383 Z. 1 derselbe Übergang von Einheiten auf Brüche wie in VII, 3 N. 54 vom 8. Februar 1676 auf S. 724 f. Auf den 9. Februar sind Notizen eines Gesprächs von Leibniz mit Bertet datiert (N. 70 (tlw. = III, 1 N. 76)), die eine Beschäftigung mit der Quadraturmethode von Bertet belegen. Als Beispiel erscheint eine Figur, die die *antiparabola* von Bertet als Abgrenzung des Bereichs mit stark bewegtem Wasser beim Einströmen von Wasser aus einem schmalen in einen breiten Kanal darstellt (N. 70 Fig. 5). Leibniz' Figur zum Querschnitt des Kanals im vorliegenden Stück (Fig. 4) weist Übereinstimmungen mit Bertets Figur zur Quadratur am Beispiel eines Dreiecks auf (N. 70 Fig. 2), wobei beide Figuren um 180° zueinander gedreht sind. Die Textpassage zur Bestimmung des Volumens des Kanals lässt sich somit als eine Weiterführung von Themen des Gesprächs auffassen, die auf einer eher assoziativen Reinterpretation der Figur beruht. Auf einen Bezug zum Treffen weist auch die Bertetsche Kurve am Anfang des Blatts hin (Fig. 1), die Gegenstand von Leibniz' Schreiben zur Kontaktaufnahme mit Bertet von Anfang November 1675 war (III, 1 N. 68), dessen Konzept die Grundlage für die Übertragung der Größen in die erste Figur im vorliegenden Stück geliefert hatte. Das Dreieck ohne weitere Bezüge zum Stück (Fig. 3) kann ebenfalls als nicht weiterverfolgter Rückgriff auf Inhalte der Unterredung aufgefasst werden. Die Gleichungsumformungen wurden im Anschluss an die Betrachtungen zur geometrischen Progression ergänzt. Ein Bezug zu einem anderen Stück konnte nicht festgestellt werden, sodass sich keine weitere Eingrenzung der Entstehung dieser Passage ergibt.

[*Zur Bertetschen Kurve, vollständig überschrieben*]



[*Fig. 1*]

[*Zur geometrischen Progression*]

1 2 4 8 16
2 4
2 6 18

36
2

7 f. 4 *(1)* 1 5 *(2)* 2 *L*

---

4 *Fig. 1*: Leibniz hat die Längen der horizontalen Strecken aus der Figur in III, 1 N. 68 S. 308 übernommen, wobei die obere der Länge der Senkrechten von E an die Gerade durch A und B, die mittlere dem Durchmesser des Kreises und die untere dem Abstand von E zum gedachten Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden durch A und B entspricht, der in der Handschrift mit einem Punkt markiert ist. Der Punkt D in der Figur des vorliegenden Stücks liegt nahe an der Entsprechung des Punktes E der Vorlage. Die Kurve der Vorlage und somit auch ihr erster Ansatz im Stück weisen dieselben charakteristischen Abweichungen vom eigentlichen Verlauf der Bertetschen Kurve auf. Leibniz korrigiert sie leicht. Die Größenverhältnisse der horizontalen Strecken sind somit nicht mit der Situation in einer Figur mit einer exakt ausgeführten Kurve kompatibel. Die Proportionen der drei horizontalen Strecken wurden in der Figur beibehalten, wobei die Länge der mittleren mit dem Durchmesser des Kreises übereinstimmt. Die Lage von D wurde so gewählt, dass die Richtungen der Strecken in der Figur erhalten bleiben.

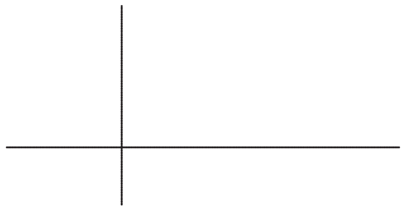
$$1 \qquad \frac{33}{100} \qquad \frac{1089}{100}$$

$$a \qquad b \qquad y$$

$$\frac{a}{b} [\sqcap] \frac{b}{y}$$

$$\frac{\cancel{yb}}{\cancel{b^2}}$$

$$\frac{y}{\cancel{b}} \sqcap \frac{bb}{a}$$



[*Fig. 2*]

$$y \sqcap \frac{b^2}{a}$$

---

1 *Dazu am Rand:*

$$\begin{array}{r} 33 \\ \underline{33} \\ 99 \\ \underline{99} \\ 1089 \end{array}$$

1 1 *(1)* 33 *(a)* 33 *(b)* 1089 *(2)* $\frac{33}{100}$ *L*

---

1 1 ... $\frac{1089}{100}$: Leibniz führt die nachträglichen Änderungen nicht konsequent aus. 7 *Fig. 2*: Die Figur bewahrt die Parallelität der gedachten Geraden durch die Endpunkte der langen Teilabschnitte zu derjenigen durch die Enden der kurzen Abschnitte der Linien in der Handschrift.

[*Zur Reihe der reziproken natürlichen Zahlen, überwiegend überschrieben*]

$$\begin{array}{ccccccccc} & +1 & & 1 & & & & & \\ 1. & & 2. & & 3. & & 4. & & 5. \\ \frac{1}{1} & \frown & \frac{1}{2} & \frown & \frac{1}{3} & \frown & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\boxed{\dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{3}} \qquad \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}} \qquad\qquad \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \qquad \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 24 & 12 & 8 & 6 \end{array}$$

$$\frac{24}{8}[\sqcap]\frac{12}{4} \qquad \frac{12}{6} \sqcap \frac{4}{2}$$

$$\frac{1,\cancel{2}}{\cancel{2}} \qquad \frac{1}{3}$$

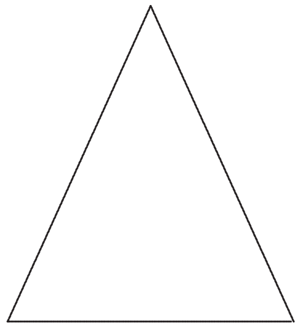
$$\frac{1}{2} \qquad \frac{4}{12}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \underline{2} \\ \underline{3} \\ 6 \\ \frac{4}{24} \end{array}$$

4–6 *Daneben:* $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \qquad \frac{3}{6}$

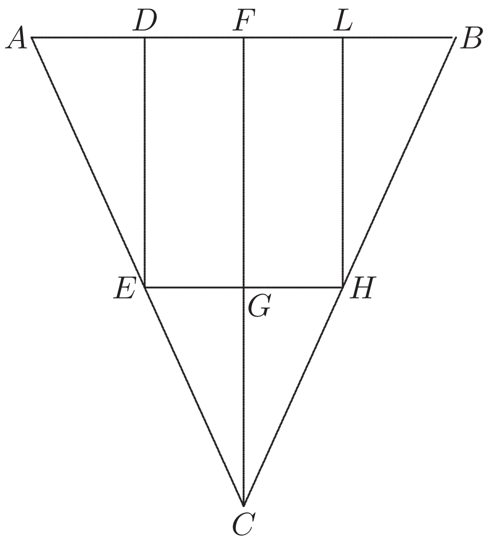
2 2. *(1)* ^{2} *(2)* ^{1} 3. *L* 5 f. $\frac{1}{4}$ *(1)* $\frac{24}{1}$ *(2)* 24 *L*

[*Dreieck ohne Bezug zum weiteren Stück, nicht überschrieben*]



[*Fig. 3*]

[*Über einen Kanal mit trapezförmigem Querschnitt, nicht überschrieben*]



[*Fig. 4*]

$AB \sqcap 40$

1500	longueur d'un canal
$b \sqcap AB \sqcap 40$	pieds largeur superieure
$g \sqcap DE \sqcap FG \sqcap 20$	profondeur
$e \sqcap EH \sqcap 25$	pieds largeur inferieure

---

7 f. *Daneben und darüber mit unklarem Bezug zum Text:* 300 Lieue

9 b ⊓ AB ⊓ *erg. L* 10 g ⊓ DE ⊓ FG ⊓ *erg. L* 11 e ⊓ EH ⊓ *erg. L*

$$\frac{AB \sqcap b}{EH \sqcap e} \sqcap \frac{FC \sqcap g+y}{GC \sqcap y}$$

$$\frac{b}{e} \sqcap \frac{g+y}{y}. \qquad yb \sqcap eg+ey. \qquad yb-ey \sqcap eg. \qquad y \sqcap \frac{eg}{b-e} \sqcap \frac{25,20}{15} \sqcap \frac{20,5}{3}$$

$$GC \sqcap y \sqcap \frac{100}{3} \qquad FC \sqcap g+\frac{eg}{b-e} \sqcap \frac{bg}{b-e} \qquad ABC \sqcap \frac{gb}{2}+\frac{egb}{2,b-e} \sqcap \frac{gb^2}{2,b-e}$$

$$\frac{e^2g}{2,b-e} \qquad \frac{gb}{\cancel{2}}$$

$$\frac{gb^2 - gbe + gbe - e^2g}{b-e} [\sqcap] \frac{gb^2-ge^2}{b-e} \sqcap \boxed{\frac{gb+ge}{2}}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \underline{25} \\ 500 \end{array}$$

---

5 *Dazu Nebenrechnungen oben und rechts auf dem Blatt:* $\frac{b^2-e^2}{b-e} \sqcap b+e$

$$\begin{array}{r} b+e \\ \underline{+b-e} \\ -eb-e^2 \\ \underline{+b^2+eb \qquad} \\ +b^2 \qquad -e^2 \end{array}$$

6–387,12 *Daneben mit unklarem Bezug zu den Berechnungen:* $40 - \cancel{15}$

385,11–386,1 inferieure *(1)* $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EH}} \sqcap \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{GC}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{AB} \sqcap \mathrm{b}}{\mathrm{EH} \sqcap \mathrm{e}}$ *L* 2 $\frac{\mathrm{eg}}{\mathrm{b-e}}$ *(1)* $\frac{25,15}{15} \sqcap \frac{50}{1}$ *(2)* $\frac{25,20}{15}$ *L*
15 *(1)* 100 *(2)* | 200 *gestr.* *L* | 40 *L*

---

4 f. $\frac{gb}{\cancel{2}}$: Der Faktor 2 fehlt auch im Folgenden zunächst im Nenner der Brüche. Leibniz ergänzt ihn schließlich wieder beim Gesamtresultat.

$$\begin{array}{r} 800 \\ \underline{5} \\ \underline{1300} \\ 650 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \underline{15000} \\ 325000 \\ \underline{65} \\ 975000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20 + \dfrac{100}{3} \\ \underline{33 + \phantom{\dfrac{1}{3}}} \\ 53 + \dfrac{1}{3} \end{array}$$

[*Gleichungsumformungen, nach S. 383 Z. 2 eingefügt, nicht überschrieben*]

$3b-1, \boxed{2}.$ $9b^2 - 6b + 1 \sqcap b^2 - 2cb + c^2.$ *eritque* $b \sqcap \dfrac{b^2+c^2}{}$

$$\begin{array}{r} 3b - 1 \\ \underline{3c - 1} \\ -\,3b + 1 \\ -\,3c\phantom{{}+1} \\ +\,3bc\phantom{{}+1+3c} \\ \hline 3bc - 3b - 3c + 1 \end{array}$$

---

10 f. *Dazu Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{0} \;⨍\; 33 \\ \cancel{3}\cancel{3} \end{array}$$

1 f. 800 *(1)* 15 *(2)* 5 *L*

---

10 f. $\dfrac{100}{3}$: Leibniz übernimmt den ganzzahligen Anteil des Bruchs in die nachfolgende Zeile.

19 $+\,3bc$: Richtig wäre hier und in der folgenden Zeile $+\,9bc$.

66. QUADRATURA CIRCULI EX HYPERBOLIS DERIVATA [noch]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 42 V Bl. 27. 1 Bog. 2°, oben auf der linken Seite von Bl. 27 r° fehlt eine halbe Seite, oben rechts ein Fünftel einer Seite. $\frac{1}{2}$ S. auf der linken Seite von Bl. 27 r°. Der Text wurde quer über Berechnungen zur Rechenmaschine geschrieben. Auf der rechten Seite weitere Berechnungen und N. **[noch]**. Auf Bl. 27 v° Figuren zu **[noch]**. **[noch]**
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: S. N. **[noch]**.

$$\langle - \rangle \; \frac{a^3}{a^2+y^{\langle 2\rangle}} \; \langle - \rangle \; \frac{2a^4y}{a^2+y^2}$$

$$\overline{a+y}, \square \frown \frac{a^3}{a^2+y^2}(=x) = \frac{a^4+a^3y}{a-y+\dfrac{2y^2}{a+y}}.$$

Ergo $a^2x+y^2x+a^3$.

$a^2+y^2-x^2=0$.

$$a^2+y^2 = \frac{a^2-y^2+2y^2}{a+y} = a-y+\frac{2y^2}{a+y}.$$

a^2+y^2.

$$\frac{a^2}{y}+y, \frown y.$$

$$\frac{a^2}{\dfrac{a^2}{y}+y, \frown y}$$

10 f. $\frac{2a^4y}{a^2+y^2}$ *(1)* $\frac{a^2}{a^2+y^2}=x$ Ergo $a^2x+y^2x+a^2$ *(2)* $\frac{a^3}{a^2+y^2}=x$ Ergo $a^2x+y^2x+a^3$ *(3)* a^2+y^2 *(4)* $\overline{a+y}, \square \frown \frac{a^3}{a^2+y^2}$ *L* 14 $a^2+y^2=$ *(1)* $a^2-y^2+2y^2$ *(2)* $\frac{a^2-y^2+2y^2}{a+x}=a-y+\frac{2y^2}{a+x}$ *(3)* $\frac{a^2-y^2+2y^2}{a+y}$ *L* 15 f. a^2+y^2. *(1)* | $a+y, y-$ *streicht Hrsg.* | *(2)* $\frac{a^2}{y}+y, \frown y$ *L*

14 $a^2+y^2=\frac{a^2-y^2+2y^2}{a+y}$: Leibniz rechnet hier fortlaufend.

$$\frac{\dfrac{a^2}{y}}{\dfrac{a^2}{y}+y} = \frac{\dfrac{a^2}{y^2}}{\dfrac{a^2}{y^2}+1} = \frac{x}{a}.\ \text{Ergo}\ \frac{\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{a^2}{y}+y} = \frac{x}{a^3}.$$

$$\frac{\dfrac{a^2}{y}}{\dfrac{a^2}{y}+y} = \frac{x}{a} = 1 - \frac{y}{\dfrac{a^2}{y}+y} = 1 - \frac{y^2}{a^2+y^2}.$$

$$\frac{\dfrac{a^2}{y}}{y+\dfrac{a^2}{y}} = \frac{a^2}{y^2} - \frac{\dfrac{a^4}{y^3}}{y+\dfrac{a}{y}} = \frac{a^2}{y^2} - \frac{a^4}{y^4+ay^3} = \frac{a^2y^4+a^3y^3-a^4y^2}{y^6+ay^5} =$$

$a^3 \quad a^4 \quad a^5 = x$

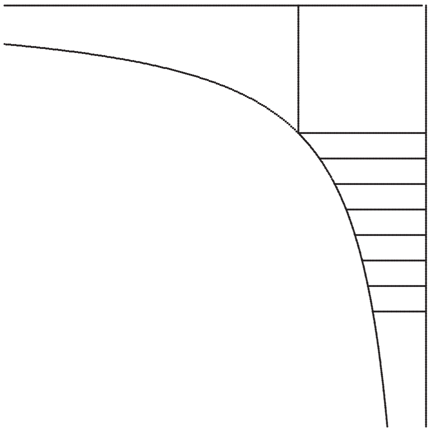
$$\frac{a^2y^2+a^3y-a^4}{y^4+ay^3} = \frac{x}{a}.$$

$$\text{Patet}\ \left\{\begin{array}{ll} +\dfrac{a^3}{y^2+ay} = \dfrac{a^3}{y+a \frown y} & \text{scil. momentum ejus est cylinder hyperbol.} \\ +\dfrac{a^4}{y^3+ay^2} & \text{cujus momentum est figurae praecedentis seu primae cylinder} \\ -\dfrac{a^5}{y^4+ay^3}, & \text{cujus momentum est figurae } 2^{\text{dae}} \text{ cylinder} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Ergo ex harum trium figura-}\\\text{rum quadratu-}\\\text{ra sequitur}\\\text{quadratura circuli.}\end{array}$$

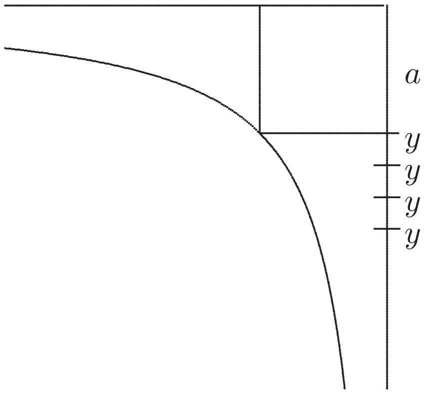
1 $= \dfrac{\dfrac{a^2}{y^2}}{\dfrac{a^2}{y^2}+1}$ *erg. L* 6 momentum | rursus *gestr.* | est *(1)* figura praecedens *(2)* figurae praecedentis | seu primae *erg.* | cylinder *L*

---

3 $\dfrac{\dfrac{a^2}{y}}{y+\dfrac{a^2}{y}} = \ldots = \dfrac{a^2}{y^2} - \dfrac{a^4}{y^4+ay^3}$: Die Auswirkungen der beiden fehlerhaften Umformungen ziehen sich bis ans Ende durch die Berechnungen.



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

$$\frac{a^3}{y^2+ay} = \frac{a^3}{y \frown \underbrace{a+y}_{p}} = \frac{a^3}{yp}.$$

$$a^3 - \cancel{xyy} - ayx = 0.$$

$$p - y$$

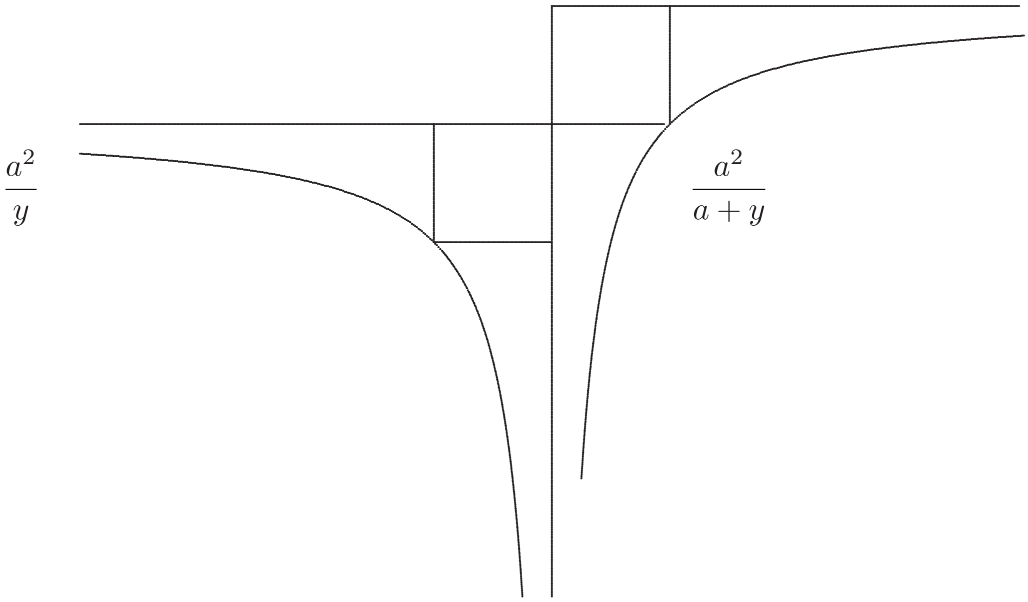
$$-pyx \cancel{+ y^2x}$$

Ergo $a^3 - pyx = 0.$

$$a + y$$

$$\frac{a^2}{a+y} \frown \frac{a^2}{y}.$$

2 f. $\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{yp}}$ *(1)* $\mathrm{a}^3 - \mathrm{xyy} - \mathrm{ayx}$ *(2)* $\mathrm{a}^3 - \mathrm{p} -$ $\mathrm{a}^3 - \cancel{\mathrm{xyy}} - \mathrm{ayx}$, $\mathrm{p} - \mathrm{y}$, $-\mathrm{pyx} \cancel{+ \mathrm{y}^2\mathrm{x}}$ *L* 4 f. 0. *(1)* fiet $\mathrm{a}^3 - \mathrm{ayx}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}+\mathrm{y}} \frown \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}$ *L*



[*Fig. 2*]

Ejusdem Hyperbolae applicatae ita ut hoc loco positae, in se invicem ducantur.

67. MARGINALIEN IN PHILIPPE DE LA HIRE, DE CYCLOIDE
[15. September 1676 – 25. April 1678]

Überlieferung: *LiH* Marginalien in Ph. DE LA HIRE, *De cycloide*, Paris, 1676: GOTHA *Forschungsbibl.* A 448–449.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Der Druck ist auf den 15. September 1676 datiert. **[noch]**

[*auf S. 1*]

Phil. de la Hire
De Cycloide.

[. . .]

8 *Oberhalb des Ornaments am oberen linken Rand:* De Coni sect. la Hire
9 *Rechts am Rand als Fortsetzung des Titels:* et Conicis sectionibus

Propositio I[a]

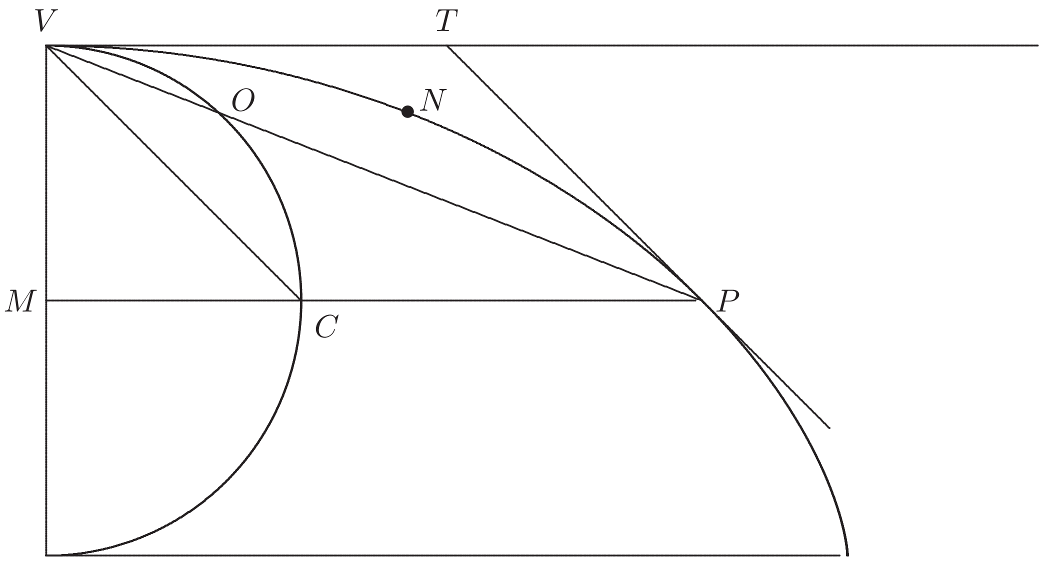
Exposita semicycloide ut supra. Ducta contingente TV in vertice V et parallela basi. Agatur recta PT contingens Cycloidem in aliquo puncto P, et PC parallela basi, et connectatur CV: Dico triangulum mixtilineum PTV esse aequale Circuli segmento correspondenti VC.

[. . .]

---

2 *Marginalie im Druck:* Fig. 1.

2–5 *Am Rand:*



Theorema meum: Retorta $VOCPNV$ dupla segmenti cycloidalis $VPNV$. Si M ponatur centrum circuli erit Triang. VMC aequ. Segmento cycloidali $VPNV$.

11 Triang *erg. L*

---

10 f. Theorema . . . $VPNV$: Leibniz übernimmt die Bezeichnungen V, C, P und T und die Konstruktionszusammenhänge aus de La Hires Fig. 1.

68. DE SECTIONE POTESTATUM PER SERIES
[Ende 1675 – Anfang 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 1 Bl. 446. 1 Zettel ca 18,2 × 3,5 cm. 1 S.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das verwendete Gleichheitszeichen ⊓ zeigt, dass die Aufzeichnung nicht vor Mitte 1674 entstanden ist. Möglicherweise besteht ein inhaltlicher Bezug zu den Untersuchungen von Potenzen mit gebrochenen oder irrationalen Exponenten von Januar (N. 36_1) und Februar 1675 (N. 36_2). Das Wasserzeichen des Papiers stimmt mit jenem von VI, 3 N. 33_4 überein, was auf eine Entstehung im Zeitraum von Ende 1675 bis Anfang 1676 hindeutet.

$x \sqcap b+c$. erit $x^{\frac{1}{2}} \sqcap \overline{b+c}^{\frac{1}{2}}$, seu $\sqrt{x} \sqcap \sqrt{b+c}$. Ponatur $\sqrt{x} \sqcap \sqrt{b}+\sqrt{c}+d\sqrt{bc}$ et quaeritur valor ipsius d. Fiet $\sqrt{b+c} \sqcap \sqrt{b}+\sqrt{c}+d\sqrt{bc}$ et $\sqrt{b+c}-\sqrt{b}-\sqrt{c} \sqcap d\sqrt{bc}$ sive $b+c-2\sqrt{b^2+bc}-2\sqrt{c^2+bc}+2\sqrt{bc}+b+c$, breviter quaerendus potius valor ipsius $d\sqrt{bc}$. Sed res eodem redibit. Ita tentabimus invenire seriem, quae sectiones potestatum minus regularium adhibeat. Ex his poterunt forte i n t e r p o l a r i s e r i e s q u a e e x p r i m u n t n u m e r o s f i g u r a t o s, q u i b u s a d s e c t i o n e s p o t e s t a t u m usus est.

14 forte *(1)* suppleri *(2)* i n t e r p o l a r i *L*

69. PROBLEMATA TANGENTIUM INVERSA
[November 1675 – Ende 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2b. Bl. 14. 1 dreieckiger Zettel max. 12 × 6,5 cm. 2 S.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das in der Nebenbetrachtung verwendete Integralsymbol führt Leibniz Ende Oktober 1675 ein. [**noch**]

P r o b l e m a t a   t a n g e n t i u m   i n v e r s a

Seriem invenire in qua terminus antecedens aequetur summae omnium sequentium. Est Geometrica dupla.

Seriem invenire, cujus area aequetur altitudini in constantem: $\begin{array}{ll} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \\ 4 & d \end{array}$

$a \sqcap 1 \frown a$. $a + b \sqcap 2a$. Ergo $b \sqcap 3a$. Ergo est ad triangulum.

Hac methodo saepe problema Tangentium inversa credo solvemus.

---

8 *Darüber Nebenbetrachtung*:

$$a \qquad \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1,2} + \frac{x^{\langle 3\rangle}}{1,2,3}$$

$$\int a \sqcap x \ + x^2$$

8 P r o b l e m a t a ... i n v e r s a *erg. L*

---

12 Ergo $b \sqcap 3a$: Die Rechnung ist unstimmig. Wenn mit a, b, c, d die Höhen bezeichnet werden, so müssen diese proportional zu den Zahlen 1, 2, 3, 4 gewählt werden, d. h. $b = 2a$, $c = 3a$, $d = 4a$. Bezeichnet man damit die Differenzen der Höhen, so müsste $a = b = c = d$ gelten. **16** $\int a \sqcap x + x^2$: Für $a = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ etc. wäre $\int a\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ etc.

$$\begin{array}{rcl} a & \mathrel{|\!\!\!\sqcap} & b+c+d+e \\ b & \mathrel{|\!\!\!\sqcap} & c+d+e \\ c & \mathrel{|\!\!\!\sqcap} & d+e \\ d & \mathrel{|\!\!\!\sqcap} & e \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} d & \sqcap & \delta + e \\ c & \sqcap & \kappa + \delta + 2e \\ b & \sqcap & \beta + \kappa + 2\delta + 4e \\ a & \sqcap & \alpha + \beta + 2\kappa + 4\delta + 8e \end{array}$$

Si non $\mathrel{|\!\!\!\sqcap}$ sed $\sqcap$ ponuntur omittemus δ. κ. β. α. Nam si

$$\begin{array}{lcl} a & \sqcap & b+c+d+e \\ b & \sqcap & c+d+e \\ c & \sqcap & d+e \\ d & \sqcap & e \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \text{fiet} \\ \\ \end{array} \begin{array}{lcl} \\ c & \sqcap & 2e \\ b & \sqcap & 4e \\ a & \sqcap & 8e \end{array}$$

70. P. BERTHET. QUADRATURA PER PROGRESSIONEM GEOMETRICAM
9. Februar 1676

Überlieferung: *LuB* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Bertet): LH 35 II 1 Bl. 315. 1 Bl., ca [noch mal noch cm] . 1 S. auf Bl. 315 r°. Bl. 315 v° leer. — Gedr.: III, 1 N. 76 Ausfertigung *A* (tlw. = Z. 7–11, S. 398 Z. 1–5 und S. 399 Z. 3 f.).
Cc 2, Nr. 00

[*Leibniz*]

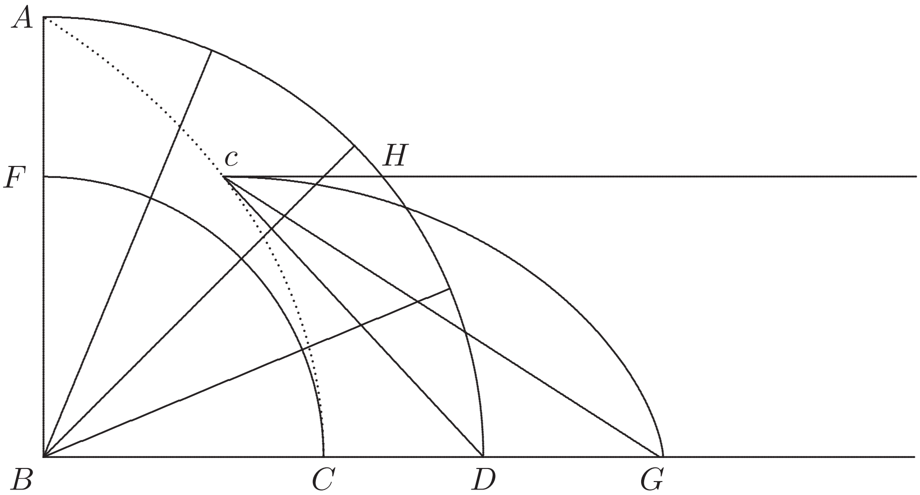
9. Feb. 1676.

P. Berthet

Quadratura per progressionem geometricam

Le P. Berthet.

[*Bertet, um* 90° *gedreht*]

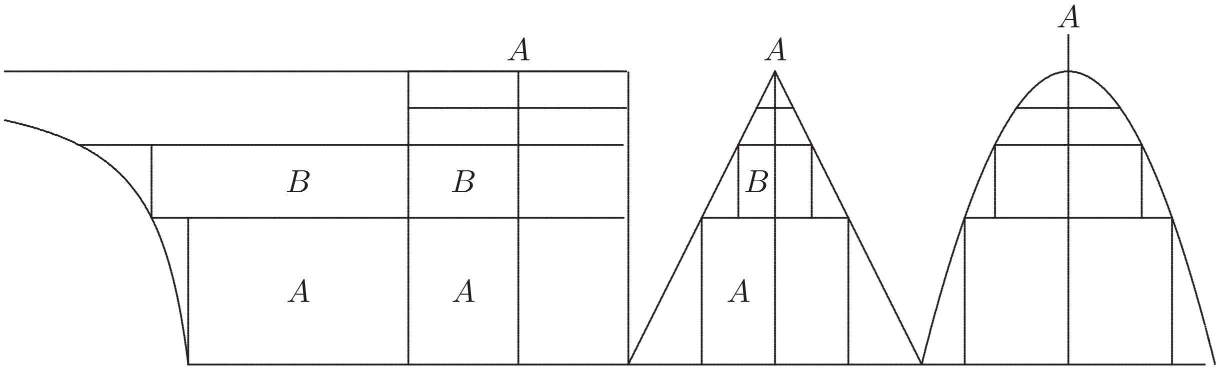


[*Fig. 1*]

8 9 Feb. 1676. *erg. L* 9 f. P. ... g e o m e t r i c a m *erg. L* 11 Le P. Berthet *erg. L*

14 Fig. 1: Die Orientierung der Figur stellt die ursprüngliche Ausrichtung des Blatts zu Beginn der Aufzeichnungen dar. Die Bezeichnung *G* ist gegenüber der Figur um −90° gedreht und stimmt in ihrer Ausrichtung mit derjenigen der nachfolgenden Figuren bis S. 399 Z. 4 überein. Die Abfolge der Drehungen des Blatts und die Spuren des Erläuterns in Fig. 2 belegen die Entstehung des Stücks in einer Gesprächssituation. — Bertet setzt die nachträgliche Verlängerung von *cH* nach rechts nicht in *H*, sondern im Schnittpunkt der äußeren Kreislinie mit der Zykloide an.

[*In der Hauptrichtung des Texts*]

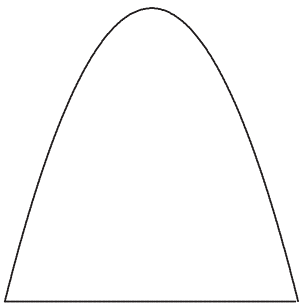


[*Fig. 2*]

[*Leibniz*]

Quadraturae secto axe in partes Geometrice proportionales.

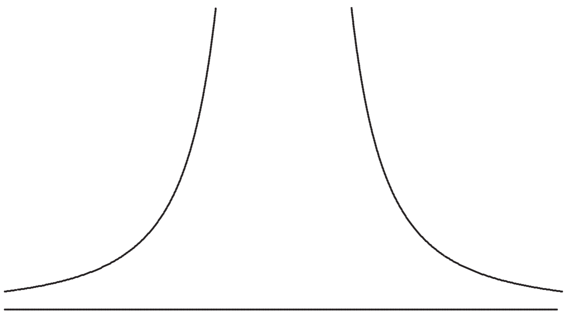
[*Bertet*]



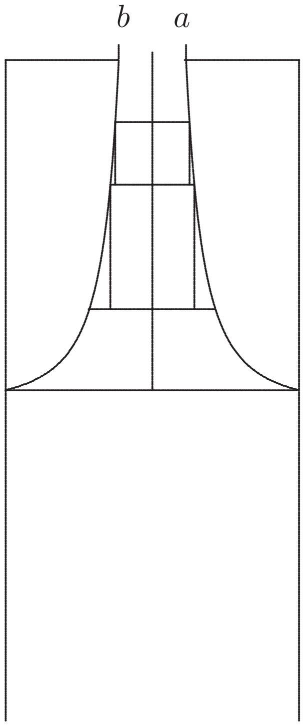
[*Fig. 3*]

5 secto *(1)* linea *(2)* axe *L*

3 Fig. 2: In den einbeschriebenen Rechtecken finden sich jeweils etwa mittig bis zu zehn Punkte, wie sie als Spuren beim Hindeuten auf Einzelheiten mit der Feder entstehen.



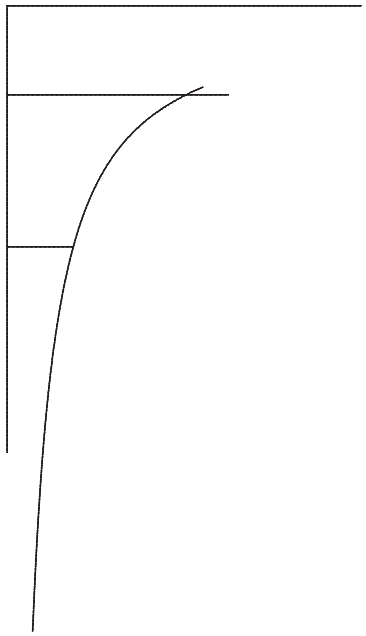
[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

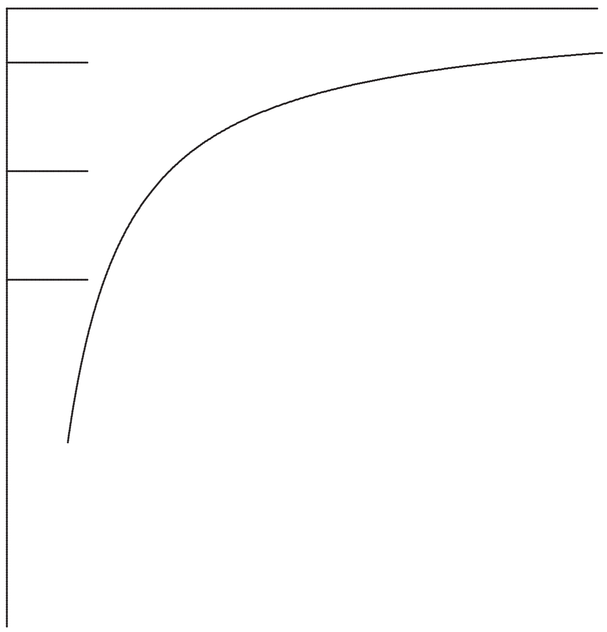
2 Fig. 4: Bei der Kurve handelt es sich wohl um eine Bertetsche Antiparabel, bei der in der Handschrift die beiden Äste von $\frac{1}{x^2}$ nicht symmetrisch ausgeführt wurden. Zudem fällt der Abstand zwischen beiden Ästen zu klein aus. Leibniz erwähnt die Bezeichnung der Kurve und ihre Eigenschaften kurze Zeit vorher in VII, 5 N. 64. Im selben Stück verweist er auf das bevorstehende Treffen mit Bertet, bei dem die vorliegende Gesprächsaufzeichnung entstand. 4 Fig. 5: Die Beschriftung ist gegenüber der Figur um 180° gedreht. Sie stimmt in ihrer Ausrichtung mit derjenigen der nachfolgenden Figur überein. — Vgl. VII, 5 N. 64 Fig. 1.

[*Um* 180° *gedreht*]



[*Fig. 6*]

[*In der Hauptrichtung des Texts*]



[*Fig. 7*]