GOTTFRIED WILHELM
LEIBNIZ

SÄMTLICHE
SCHRIFTEN UND BRIEFE

HERAUSGEGEBEN
VON DER

BERLIN-BRANDENBURGISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN GÖTTINGEN

SIEBENTE REIHE
MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

DRITTER BAND

2003

Inhaltsverzeichnis
Copyright

GOTTFRIED WILHELM
LEIBNIZ

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

HERAUSGEGEBEN VOM

LEIBNIZ-ARCHIV
DER
NIEDERSÄCHSISCHEN LANDESBIBLIOTHEK
HANNOVER

DRITTER BAND

1672–1676

DIFFERENZEN, FOLGEN, REIHEN

2003

Inhaltsverzeichnis
Copyright

LEITER DES LEIBNIZ-ARCHIVS HERBERT BREGER

BEARBEITER DIESES BANDES
SIEGMUND PROBST · EBERHARD KNOBLOCH
NORA GÄDEKE

INHALTSVERZEICHNIS

VERZEICHNISSE

VORWORT

Der dritte Band von Leibniz' mathematischen Schriften enthält Aufzeichnungen aus den Jahren 1672 bis 1676 zu Folgen, Reihen und Differenzen. Auf dieser Grundlage werden sich die nächsten Bände der Infinitesimalrechnung in Leibniz' Pariser Zeit zuwenden.

Zum weit überwiegenden Teil hat Herr Dr. Siegmund Probst (ab 1. April 1995) als hauptamtlicher Mitarbeiter im Zusammenwirken mit Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch die Stücke des Bandes bearbeitet. Bis zum 31. März 1995 hat Frau Dr. Nora Gädeke im Zusammenwirken mit Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch die Stücke N. 1, 4, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 35, 36 und 37 bearbeitet; einige dieser Stücke wurden von Herrn Dr. Heinz-Jürgen Heß gegengelesen. Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch gebührt ein besonderer Dank, da er sich trotz seiner zahlreichen Verpflichtungen auch bei diesem Band als Bearbeiter zur Verfügung gestellt hat. Die Schlußredaktion (einschließlich Datierungen, Verzeichnissen und Einleitung) wurde von Herrn Dr. Siegmund Probst und Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch durchgeführt. Für die digitale Erfassung der Stücke ist Frau Susanne Bawah, aber auch Frau Manuela Mirasch-Müller und zu einem kleinen Teil Frau Isolde Hein zu danken.

Der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen danke ich für die finanzielle Unterstützung unserer Arbeit und dem Vorsitzenden der Leitungskommission der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Herrn Professor Dr. Jürgen Mittelstraß, für die stete Betreuung der Belange der Editionsstelle. Der Ltd. Direktor der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover, Herr Dr. Georg Ruppelt, sowie sein Amtsvorgänger Herr Dr. Wolfgang Dittrich (bis 30. Juni 2002) haben die Arbeit des Leibniz-Archivs mit Wohlwollen unterstützt. Bei der Bearbeitung konnten gelegentlich Transkriptionen von Prof. Dr. Conrad Müller (Hannover) aus den 30er und 40er Jahren des 20. Jahrhunderts verglichen werden.

Für die Beantwortung von Einzelfragen ist Frau PD Dr. Ursula Goldenbaum (Berlin), Herrn Prof. Dr. Douglas M. Jesseph (Raleigh, North Carolina), Herrn Dr. habil. Peter Por (Rouen) und Herrn Dr. Carsten Reinhardt (Regensburg) zu danken.

Wie schon bei den Bänden I, 17 und III, 5 ist der Satz des Bandes mittels des TEX-Macropakets EDMAC vom Leibniz-Archiv erstellt worden; Herrn John Lavagnino (Mas-

sachusetts) und Herrn Dominik Wujastyk (London) ist für die freundliche Überlassung der Macros zu danken. Die Zeichnungen wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris (Phillips Exeter Academy, Exeter, NH) erstellt und in PICTEX weiter bearbeitet. Der Verlag hat eine pdf-Datei zum Ausdruck erhalten. Für gute Zusammenarbeit danke ich Herrn Peter Heyl vom Akademie-Verlag.

Hannover, August 2003 Herbert Breger

EINLEITUNG

Der vorliegende Band umfaßt die Studien, Entwürfe, Aufzeichnungen des Zeitraums 1672 bis 1676 zur Differenzenrechnung, zu Folgen und Reihen, soweit diese ausschließlich oder überwiegend Gegenstand der Leibnizschen Untersuchungen waren. Die Marginalien in nur teilweise einschlägigen, von Leibniz herangezogenen zeitgenössischen Werken sowie die umfangreichen Studien zur arithmetischen Kreisquadratur, das heißt zur Berechnung der Kreisfläche mittels unendlicher konvergenter Reihen von rationalen Zahlen, werden in späteren Bänden dieser Reihe veröffentlicht.

Die Texte wurden in 73 Hauptstücken zusammengefaßt, deren Länge zwischen zwei Zeilen (N. 42) und 172 Seiten (N. 38) schwankt. Dazu gehören neben den theoretischen Studien Exzerpte und Anmerkungen zu Gr. de Saint-Vincent (N. 7), G. Gosselin (N. 41), M. Ricci und R. Fr. de Sluse (N. 65), vier mit E. W. v. Tschirnhaus angefertigte Gesprächsnotizen (N. 49_1, 55, 67, 68_1), eine von Tschirnhaus für Leibniz angefertigte Aufzeichnung (N. 49_2) und eine Gesprächsaufzeichnung mit einem nicht identifizierten jungen Franzosen (N. 70). Nur zwei Stücke (N. 3, 42) waren bisher ganz, drei Stücke (N. 35, 47, 53) teilweise im Druck zugänglich: insgesamt weniger als 18 Druckseiten.

Die chronologische Anordnung der Stücke bot zum Teil erhebliche Probleme, da nur 15 von ihnen datiert sind: N. 36, 39, 43, 44, 50, 53, 54, 55, 57_2, 58, 59, 60, 61, 62, 68. Die relativen Datierungen wurden wie im Falle der vorangegangenen beiden Bände dieser Reihe vor allem mit Hilfe von Verweisen, charakteristischen Besonderheiten des Inhalts, der Schreibweise (Notation), des Papiers (Wasserzeichen) erschlossen. Nicht näher datierbare, aber wenigstens einem bestimmten Zeitraum zuordenbare Stücke wurden an den Schluß des jeweiligen Zeitabschnittes gestellt.

Längere Studien (N. 17, 38, 43, 44) wurden von Leibniz in Abschnitten geschrieben oder aus ursprünglich selbständigen Stücken zusammengefügt (N. 53, 61); einige haben eine komplizierte Textstruktur. Besonders deutlich werden diese Merkmale am längsten Stück des Bandes (N. 38).

Quellen

Die zahlreichen Bezugnahmen auf zeitgenössische Literatur im vorliegenden Band bezeugen, in wie vielfältiger Weise Leibniz Anregungen, teilweise auf Hinweise von Huygens hin, gefunden hat, die er kritisch und schöpferisch weitergeführt hat. Noch im Jahre 1672 studiert Leibniz Pascals *Traité du triangle arithmétique* (N. 3, 4, später 28, 35), Galileis *Discorsi* (N. 6, später 18, 19), mit den Überlegungen zum Unendlichen; Saint-Vincents *Opus geometricum* (N. 4, 7, später 21, 38, 39, 60) mit den Abschnitten über Verhältnisse stand ihm in einem Exemplar der königlichen Bibliothek zur Verfügung (*LMG* III S. 72). Ebenfalls früh, spätestens Anfang 1673, wird Leibniz durch einige Aufsätze in den Philosophical Transactions mit den Quadraturen von Nicolaus Mercator (N. 6, 8, später 38, 52, 54) und James Gregory (N. 6, später 20, 38, 39, 50, 51, 60, 62, 63, 64) bekannt; kurz danach studiert er Gregorys *Exercitationes geometricae* und Mercators *Logarithmotechnia*.

Die zehn betroffenen Stücke zeigen, wie sehr sich Leibniz für Gregorys Methoden interessiert, mit denen er sich kritisch auseinandersetzt. Als direkte Quellen kommen die folgenden drei Monographien und zwei Aufsätze in Frage: *Vera circuli et hyperbolae quadratura.* Padua 1667, Nachdruck 1668; *Exercitationes geometricae.* London 1668; *Geometriae pars universalis.* Padua 1668; *Answer to the Animadversions of Mr. Hugenius upon his book De vera circuli et hyperbolae quadratura*, in *Philosophical Transactions* 3 (1668), Nr. 37; *An Extract of a Letter*, in *Philosophical Transactions* 3 (1668/69), Nr. 44. Die Lektüre der *Exercitationes geometricae* ist ab dem Frühjahr 1673 nachweisbar (Cc 2, Nr. 500, Druck in Band VII, 4). Die *Vera circuli et hyperbolae quadratura* leiht sich Leibniz am 30.XII.1673 von Huygens aus (*LSB* III, 1 S. LV). Auf die *Geometriae pars universalis* bezieht sich Leibniz Anfang März 1675 (*LSB* III, 1 N. 46_1 S. 202). Gregorys konvergente Doppelfolgen, denen gegenüber Leibniz die bis dahin nicht erfolgte Behandlung divergenter Doppelfolgen anmahnt, spielen in allen fünf Veröffentlichungen Gregorys eine Rolle. Hinzu kommen als indirekte Quellen die Besprechungen der Bücher in den *Philosophical Transactions* und im *Journal des Savans*, von denen Leibniz sicher die Rezension der *Geometriae pars universalis* in den *Philosophical Transactions* 3 (1668), Nr. 35 gelesen hat (N. 38_{12}).

Leibniz teilt die Kritik von Huygens am Vorgehen von Gregory: während Gregory die Fläche des Kreissektors mit Hilfe einer gegebenen rekursiven Formel finden wollte, habe er umgekehrt eine rekursive Formel mit Hilfe der gegebenen Kreissektorfläche finden wollen (N. 60).

Brounckers Hyperbelquadratur war Leibniz bereits 1673 bekannt (Cc 2, Nr. 552, Druck in Band VII, 4), wird hier jedoch erst im Oktober 1674 erwähnt (N. 38_9).

Die *Arithmetica infinitorum* von J. Wallis (N. 6, 8, 15, 26, 38, 39, 58) kennt er anfangs nicht aus unmittelbarer Lektüre, wie die falsche Zuschreibung in N. 8 und der Vermerk in N. 15 über seine Unkenntnis der Wallisschen Interpolationsmethode zeigen. Eine eingehendere Auseinandersetzung mit diesem Werk ist erst ab Mitte 1674 festzustellen.

In zwei frühen Stücken verweist Leibniz auf seine eigene *Dissertatio de arte combinatoria* von 1666 (N. 3, 21).

Auf Mengolis Summation der reziproken figurierten Zahlen war Leibniz im Frühjahr 1673 von Oldenburg hingewiesen worden (*LSB* III, 1 N. 13_2 S. 60). Das Studium einer einschlägigen Schrift von Mengoli (*Circolo*, 1672) ist im Frühjahr 1676 festzustellen (N. 57_2).

Aus G. Gosselins *De arte magna* exzerpiert Leibniz einen Satz über Polygonalzahlen (Druck mit den zugehörigen Marginalien in N. 41). Er entnimmt auch einigen weiteren Werken, deren inhaltlicher Schwerpunkt auf anderen Gebieten liegt, Einzelheiten zu Folgen und Reihen: O. v. Guerickes *Experimenta nova* (N. 33), H. Fabris *Synopsis geometrica* (N. 17, 18), I. G. Pardies' *Élémens de géométrie* (N. 6, 26, 38), A. de Sarasas *Solutio problematis* (N. 21), R. Fr. de Sluses Tangentenbrief (N. 38, 68) und *Mesolabum* (N. 65) sowie Wallis' *Mechanica* (N. 38).

Quellen zu Themen außerhalb von Differenzen, Folgen und Reihen sind schließlich u. a. Schriften von Archimedes (N. 8, 18, 19, 39), Chr. Huygens' *De circuli magnitudine* (N. 6) bzw. *Horologium oscillatorium* (N. 38, 39). Mehrfach erscheint Fr. van Schootens zweibändige Ausgabe der *Geometria* von Descartes mit den diversen Kommentaren und anderen angehängten Schriften (N. 16, 17, 31, 38, 39, 51), wobei sich Leibniz hier hauptsächlich mit Descartes und H. van Heuraets *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas* auseinandersetzt.

In der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover befindliche Marginalexemplare der genannten Quellen werden nachstehend mit ihrer Signatur angegeben, wobei zu berücksichtigen ist, daß einige dieser Bände Leibniz erst in späterer Zeit zur Verfügung standen.

Leibnizsche Eintragungen bereits aus der Pariser Zeit finden sich in der zweibändigen Ausgabe der *Geometria* von R. Descartes (Signatur Leibn. Marg. 178); in H. Fabri, *Synopsis geometrica* (Signatur Leibn. Marg. 7,1); G. Gosselin, *De arte magna* (Signatur Nm-A 317), J. Gregory, *Exercitationes geometricae* (Signatur Ms IV 377); Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium* (Signatur Leibn. Marg. 70); N. Mercator, *Logarithmotechnia* u. M. Ricci, *Exercitatio geometrica* (Signatur Ms IV 377); Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique* (Signatur Nm-A 605); R. Fr. de Sluse, *Mesolabum* (Signatur Nm-A 746).

Nur Marginalien aus späterer Zeit enthalten J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Signatur Leibn. Marg. 98) und *Geometriae pars universalis* (Signatur Leibn.

Marg. 98); A. de Sarasa, *Solutio problematis* (Signatur Leibn. Marg. 230); Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum* (Signatur Leibn. Marg. 230).

Terminologie

Im Rahmen seiner Folgen- und Reihenlehre verwendet Leibniz keine eindeutig festgelegte Terminologie.

(1) progressio, series

Beide Begriffe, progressio wie series, können eine Folge oder eine Reihe im modernen Sinn bezeichnen: Beide können gegebenenfalls eine Summe haben (N. 6, 27, 38, 48 u. ö.). Die umfangreichste Betrachtung zur Terminologie ist in N. 4 enthalten. Das Bildungsgesetz einer Folge heißt fundamentum progressionis. Es gibt an, wie aus einer gegebenen Größe die nächste Größe gewonnen wird und heißt daher auch connexio quantitatum. An anderen Stellen verwendet Leibniz dafür Begriffe wie aequatio elementalis bzw. fundamentalis, charactère analytique oder proprietas essentialis.

Zwar nennt Leibniz die gesamte series der Größen progressio, erwägt jedoch, mit progressio den Übergang (transitus) von einem zum nächsten Folgenglied zu bezeichnen. Dieser Übergang heißt ascensus, descensus, fluctuatio, je nachdem ob die Folge streng monoton wächst, streng monoton fällt oder alterniert. Zur Vermeidung von Mißverständnissen schlägt er statt progressio in diesem Sinn die allgemeine Bezeichnung productio vor. Denn etwas Gegebenem entspricht durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division ein productum (Ergebnis): Summe, Rest, Produkt, Quotient.

Das Folgendreieck (triangulum progressionum) ist das Aggregat aus den Folgengliedern und aller Summen- bzw. Differenzen aller Ordnungen. Leibniz verwendet meist das Differenzenschema: Die Folgenglieder sind die Basis des Dreiecks, die Folge der Differenzen derselben Ordnung ist parallel zur Folge der Glieder. Das Differenzenschema ist gleichseitig. Die zur Basis parallelen Differenzenfolgen können auch Basen genannt werden. Sie heißen homologe Folgen (progressiones homologae). Das wichtigste Beispiel für das Differenzenschema ist das harmonische Dreieck: Das triangulum harmonicum tritt namentlich in N. 30, 53, inhaltlich in N. 49, 55 auf. Der Name beruht auf der entscheidenden Rolle, die dabei die harmonische Reihe spielt.

Eine unendliche Reihe heißt aequatio infinita, wenn ihre Summe bzw. der endliche Ausdruck angegeben werden können, dem sie gleich ist:

$$a - x \sqcap \frac{y^2}{a} - \frac{y^2x}{a^2} + \frac{y^2x^2}{a^3} \text{ etc. (N. 48)}$$

(2) Konvergenz, Divergenz
Leibniz übernimmt den Ausdruck convergens (konvergent) ebenso wie den Ausdruck terminatio (Grenzwert) von James Gregory, der ihn in seiner *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Padua 1667, Definitionen) für eine Doppelfolge i_n, c_n eingeführt hatte: Die i_n bilden eine streng monoton wachsende, die c_n eine streng monoton fallende, die Differenzen $c_n - i_n$ eine Nullfolge. Dazu sagt Gregory: die Differenz wird kleiner als jede vorgegebene Größe. Die Terme i_n, c_n heißen convergentes, konvergierend, insofern sie sich immer stärker zueinander neigen und bei unendlicher Fortsetzung einander und damit dem Grenzwert gleich werden.

Im Anschluß daran definiert Leibniz: Eine Folge ist convergens, wenn die Differenz zwischen zwei (aufeinanderfolgenden) Termen kleiner als jede gegebene Größe wird (N. 64). Die Gregorysche bzw. Leibnizsche Folgenkonvergenz ist also als Spezialfall im allgemeinen Konvergenzprinzip von Cauchy enthalten: $\mid a_n - a_{n+m} \mid \ < \varepsilon$ mit $m = 1$.

Am Gregoryschen Begriff der series convergentes kritisiert Leibniz den Charakter der Doppelfolge, da in der Regel eine einzige (im oben genannten Sinne konvergente) Folge allein bereits ausreichend sei. Dem stellt Leibniz das andere Merkmal der meisten Doppelfolgen von Gregory gegenüber, die series replicatae oder substitutrices, die rekursiv definierten Folgen (N. 39, 60, 64, 68), deren Untersuchung er für weit nützlicher hält. Leibniz setzt auch diese als konvergent voraus, wenn er fordert, daß in einer series replicata für hinreichend großes n die Differenz zwischen a_n, a_{n+1} und a_{n+2} kleiner als jede gegebene Größe wird.

Konvergente Reihen im modernen Sinne heißen series summabiles (N. 38, 43 u. ö.)

In Anlehnung an Gregorys konvergente Folgen führt Leibniz den Begriff series divergentes (divergente Folgen) für eine Doppelfolge a_n, d_n ein: Die Terme a_n, d_n entfernen sich zunehmend voneinander. Die a_n vergrößern eine Größe g, die d_n vermindern g. Unter bestimmten Bedingungen führt dieser Prozeß dennoch zu etwas Endlichem. Leibnizens Divergenzbegriff ist also nur für zwei Folgen erklärt und führt — im Sinne des modernen Divergenzbegriffes — gegebenenfalls auf zwei Häufungspunkte der Doppelfolge a_n, d_n. Das durch die Diskussion zwischen Leibniz und Grandi (*LMG* IV S. 215–217) berühmt gewordene Beispiel $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \pm$ etc. tritt bis Mitte 1674 (N. 30) und 1676 in einer Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus (N. 68_2) auf.

(3) Spezielle Folgen, Reihen
Eine harmonische Reihe (progressio harmonica) ist dadurch definiert, daß für drei beliebige, aufeinander folgende Glieder a, b, c gilt: $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ bzw. $b = \frac{2ac}{a+c}$, das heißt

das mittlere Glied das harmonische Mittel der beiden anliegenden Glieder ist (N. 54). Leibnizens wichtigstes Beispiel ist die Reihe der reziproken natürlichen Zahlen: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ etc. Gelegentlich verwendet Leibniz auch andere Definitionen:

$\frac{a-b-c}{a}=\frac{c}{b}$ bzw. $\frac{a-b-c-d}{a-b}=\frac{d}{c}$ (N. 6).

Eine arithmetische Reihe heißt progressio arithmetica (konstante Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern), eine geometrische Reihe progressio geometrica (konstanter Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern). Leibniz nennt jedoch auch eine Folge arithmetisch, wenn sie in Zahlen dargestellt werden kann, geometrisch wenn eine geometrische Darstellung möglich ist (N. 39). Danach ist die Folge der Dreieckszahlen nur arithmetisch, nicht geometrisch, die Folge der Quadratzahlen arithmetisch und geometrisch.

Die Wallissche Formel für $\frac{4}{\pi}$ heißt series Wallisiana (N. 69). Sie ist finita indefinita, da sie an einer beliebigen Stelle abgebrochen werden kann.

Reihen heißen rein und rational, wenn die unbekannte Größe wurzelfrei ist (N. 43_1), z. B. $\frac{y+d}{y+g}$. Ist der Flächeninhalt einer Figur mittels einer unendlichen Reihe berechenbar, so handelt es sich um eine series quadratrix (N. 38_2, 38_6, 38_7 u. ö.). Leibnizens Kreisreihe ist die series quadratrix des Viertelkreises. Es kann verschiedene series quadratrices derselben Figur geben.

Die Summe summierbarer Reihen wird mit Hilfe von series summatrices ermittelt (N. 38_2, 38_7, 38_{16}, 65). Mit dieser Methode glaubt Leibniz, als erster eine universelle Methode zur Reihensummierung gefunden zu haben.

(4) Andere Fachausdrücke

Im Frühjahr 1673 verwendet Leibniz das Adjektiv coordinatus zur Bezeichnung einer Zuordnung (N. 18).

Im August/September 1673 tritt der kurz zuvor von Leibniz geprägte Ausdruck functio auf (N. 21), im Oktober 1674 functionem facere, eine Funktion bilden, für Größen wie die Subnormale, die von der jeweiligen Kurve abhängen (N. 38_6).

Ab Herbst 1673 (N. 23) verwendet Leibniz den Ausdruck transzendent für Figuren (figura transcendens), Kurven (curva transcendens), Probleme (problema transcendens), denen keine algebraische Gleichung bestimmten Grades zugeordnet werden kann. Dem entspricht die aequatio transcendens (N. 64).

Die von ihm 1673 für die Kreisquadratur verwendete Versiera bezeichnet Leibniz meist als figura segmentorum (N. 23, 26, 38), aber auch als cissoeis nova (N. 25), figura anonyma (N. 38) und nach einem Vorschlag von Huygens (*LSB* III, 1 N. 40 S. 171) als cyclocissoeis (N. 44).

Für die an Quadraturen bzw. Rektifikationen beteiligten Kurven verwendet Leibniz neben curva bzw. figura quadratrix oder summatrix (N. 23, 26 u. ö.) und linea tetragonistica (N. 38) auch figura homogenea (N. 23, 26 u. ö.), homologa (N. 61), sygnotos (N. 23, 31), symmetros (N. 38) und curva syntomos (N. 26, 38).

Den offenbar von Cl. Mydorge übernommenen Begriff des Parameters versucht Leibniz 1673/74 von Kegelschnitten auch auf Folgen zu übertragen (N. 28).

Themenschwerpunkte

(1) Leibniz hatte vermutlich ausgehend von seinen kombinatorischen Studien (vgl. N. 3) die Idee, mit der Umkehrung der Differenzenbildung bei Folgen auch die Summierung methodisch und allgemein durchführen zu können. In einem Gespräch mit Huygens (vgl. *LSB* III, 1 N. 2 S. 5 Z. 13 – S. 6 Z. 6) behauptete er, eine solche Summationsmethode zu besitzen, worauf dieser ihm die Aufgabe stellte, die reziproken Dreieckszahlen zu summieren. Diese Unterredung mit Huygens hat wohl im September 1672 stattgefunden (vgl. N. 36 S. 365 Z. 16 f.). Nach vergeblichen Versuchen (N. 1) gelingt ihm die Darstellung der reziproken Dreieckszahlen als Differenzenfolge der harmonischen Folge und damit auch die geforderte Summierung (N. 2). In einer weiteren Unterredung bestätigte Huygens die Übereinstimmung mit seinem eigenen Ergebnis. Das Ergebnis und die Ausdehnung auf die weiteren reziproken figurierten Zahlen gehen bis Ende 1672 in die *Accessio ad arithmeticam infinitorum* (*LSB* III, 1 N. 2) sowie in die Stellungnahme für die Royal Society vom 13.II.1673 (*LSB* III, 1 N. 4) ein. Später entwirft Leibniz wiederholt Darstellungen, in denen er die Methode der Entdeckung dieser Resultate nicht preisgibt (N. 35, 36, 53).

(2) Das wichtigste Ergebnis der Beschäftigung mit der als divergent erkannten harmonischen Reihe (N. 2, 8 –10, 12, 14, 22, 27 –30, 38_3, 38_{10}, 47, 49, 52 –55, 57, 68, 71) ist die Aufstellung des harmonischen Dreiecks, das analog zu Pascals arithmetischem Dreieck mit den iterierten Summen der natürlichen Zahlen die iterierten Differenzen der Kehrwerte der natürlichen Zahlen enthält (N. 30, 53). Leibniz diskutiert dieses Resultat auch mit Tschirnhaus (N. 49, 55).

(3) Bei der Untersuchung der Reihe der reziproken Quadratzahlen gelingt Leibniz die Summation der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ als Summe der Differenzenreihen der reziproken geraden und ungeraden Zahlen (N. 15). In der Aufzeichnung eines Gesprächs

mit einem jungen, nicht identifizierten Franzosen (N. 70) werden die Verhältnisse der Summen von Teilreihen der reziproken Quadrat- und Kubikzahlen, nämlich der Potenzen der geraden bzw. ungeraden Zahlen, und der alternierenden Reihen zur Summe der Gesamtreihen bestimmt. Wiederholt versucht sich Leibniz an der Summierung irrationaler Größen (N. 21, 38_7, 38_8, 38_9).

(4) Die Beschäftigung mit der im Herbst 1673 entdeckten Kreisreihe (N. 24 –26, 34, 38_{10}, 43_3, 46, 66) bietet Anlaß für die Untersuchung von Näherungen (N. 25, 26, 34), ab 1675 auch mittels Folgen von Ungleichungen, also Einschachtelungen (N. 46, 66). An der Auffassung, daß die alternierende Kreisreihe ohne weiteres zu einer Differenz zweier harmonischer Reihen umgeordnet werden könne und damit die gegenseitige Abhängigkeit von Kreis- und Hyperbelquadratur belege (N. 24, 25), hält Leibniz auch später noch fest.

(5) Die Methode der Reihenentwicklung durch fortgesetzte Division (N. 17, 48, 56, 58), die zuerst Mercator auf seine Hyperbelreihe und dann Leibniz auf seine Kreisreihe führte, ergänzt Leibniz ab 1674 durch die Reihenentwicklung mithilfe von Wurzelalgorithmen (N. 32, 33, 38, 62).

(6) Systematisch verwendet Leibniz ab Herbst 1674 die zur Flächenberechnung unter Kurven eingeführte Schwerpunktmethode zur Bestimmung der Summe von als Treppenfunktionen aufgefaßter Reihen (N. 38, 40, 45). Weitere Untersuchungen behandeln den Zusammenhang zwischen Reihensummation und Integrationsmethoden (N. 27, 50, 52, 71, 72).

(7) Die bei der Summierung von unendlichen Reihen sich aufdrängende Frage nach dem Zusammenhang von unendlicher Anzahl und endlicher Größe führt zu weiteren Überlegungen über die Rolle des Unendlichen (vor allem N. 6, 38_{10}, 47, 58).

(8) Außerhalb der Bandthematik liegen Textabschnitte zur Einführung transzendenter Kurven (Herbst 1673, N. 23). Ein längerer Exkurs zu Rollkurven untersucht die Trochoide des Brennpunktes der Parabel. Leibniz konstruierte damit unbewußt bereits die Kettenlinie. In diesem Zusammenhang setzt Leibniz sich kritisch mit den Ansichten von R. Descartes über die in der Geometrie zulässigen Kurven auseinander (N. 38).

Programmatische Studien

Von besonderem Interesse sind die siebzehn programmatischen Studien (N. 1, 4, 7, 17, 20, 21, 31, 32, 38_5, 38_7, 38_9, 38_{12}, 39, 42, 50, 51, 54, 58, 62, 68), unter denen die Stücke N. 4

und 39 hervorragen. In zehn von ihnen (N. 4, 7, 20, 21, 38_{11}, 39, 43, 54, 62, 68) äußert sich Leibniz ausdrücklich zu Methoden, die ihm stets am meisten am Herzen lagen. In fünf Aufzeichnungen (N. 6, 7, 8, 37, 51) formuliert er Probleme, die vorrangig zu lösen sind.

So könne das Studium der Differenzenfolgen höherer Ordnungen die scientia progressionum und damit den edelsten Teil der Arithmetik zum Gipfel führen. Man müsse eine Methode finden, zum Index n den Term a_n zu finden und umgekehrt (N. 4). Er vergleicht die Arithmetik der (verschiedenen) Unendlichen mit der Geometrie der Indivisibeln und stellt fest: die Erkenntnis des Unendlichen ist der Gipfel des menschlichen Scharfsinns. Das Fundamentaltheorem sei: In jeder monoton fallenden Folge (genauer wäre: Nullfolge) ist ein gegebener Term die Summe aller folgenden Differenzen. Davon hänge eines der schwierigsten Probleme ab, die vom Menschen erdacht werden können, durch das die Geometrie zu einer bewundernswerten Vervollkommnung geführt werde. Zweifellos könne eine unendliche Reihe rationaler Zahlen eine irrationale Summe haben. Aber die näheren Umstände seien zu erforschen (N. 6). Er „begründet“, warum die alternierende Reihe $1 - 2 + 4 - 8 \pm \ldots$ eine endliche Summe habe und warnt vor einem Mißbrauch der Indivisibeln (N. 17). Eine Methode zu finden, die Summen aller unendlichen oder endlichen Reihen zu ermitteln, sei das Bedeutendste in den von der reinen Überlegung abhängigen Wissenschaften. Es sei Aufgabe einer besonderen Kunst (ars), eine series confusa, eine chaotische Reihe, die andernfalls nur gliedweise summiert werden kann, auf eine Regel zurückzuführen. Freilich gebe es keine noch so große Unordnung, in der nicht ein Allwissender eine Harmonie beobachten kann (N. 21). Die bewundernswerte Harmonie der Dinge tritt auch in anderen Stücken auf (N. 24, 31). Er stellt einen Zusammenhang mit der doctrina divinandi seu de hypothesibus her, von der die Chiffrierkunst ein Teil sei. Er wünschte, daß diese von Wallis genau behandelt werde (N. 21, 38_4, 53_3), und äußert sich allgemein dazu, wie elegante Sätze und Beweise auf Grund einer Rechnung zu finden sind (N. 51). Die Lehre der unendlichen arithmetischen (d. h. Zahlen-) Reihen könne nur mit Hilfe der Geometrie vorangebracht werden (N. 31). Allgemein erörtert er das wechselseitige Verhältnis von Geometrie und Arithmetik (N. 39, 50, 54). Von allen Reihen seien die am nützlichsten, durch die geometrische Figuren beschrieben werden.

Niemand habe bisher die Summierung endlich oder unendlich vieler irrationaler Zahlen ermitteln können, er selbst sehe noch keine Methode dafür (N. 38_5, 38_7, 38_9). Kennzeichnend sind für ihn Sätze wie: „Lieber will ich nämlich zweimal dasselbe als einmal nichts tun“ (N. 38_{16}), „vielleicht kann diese identische Gleichung zum Beweis unseres Satzes dienen, ohne daß sein Ursprung aufgedeckt wird“ (N. 39). Immer wieder hebt er den

Nützlichkeitsgedanken hinsichtlich bestimmter Kurven oder Reihen hervor (N. 38_{12}, 39, 50, 54). Er erörtert die verschiedenen Konstruktionsmethoden für Kurven (analytische, geometrische, physikalische) und erwähnt seinen Beweis, daß es keine analytische Figur gibt, die den Kreis quadriert (N. 39). Er mahnt die Begründung allgemeiner Kalküle zu Summen, Summen von Summen, statischen Momenten an (N. 42). Oft thematisiert er allgemeine methodische Verfahren wie Aufzählungen, Tafeln, Kataloge der Einzelfälle, Induktionen (N. 4, 31, 54). Allgemein untersucht er das Auffinden unendlicher Gleichungen mit und ohne Logarithmen (N. 62).

Tschirnhaus-Stücke, Gesprächsaufzeichnungen

Seit Ende September 1675 hielt sich E. W. v. Tschirnhaus in Paris auf und hat sich Leibniz vermutlich am 1. Oktober jenes Jahres vorgestellt (*LSB* III, 1, S. LXII). Die vier gemeinsamen Aufzeichnungen N. 49_1, 55, 67, 68 beruhen auf Gesprächen und gemeinsamen Untersuchungen der beiden Gelehrten. N. 49_2 wurde von Tschirnhaus für Leibniz angefertigt. Es geht um die Erzeugungsweise und Summierung endlich vieler Terme der harmonischen Reihe, Überlegungen zu Hyperbel, Parabel, Reihenentwicklung des Ausdrucks $\frac{1}{1-x}$, allgemeine Differenzenfolgen, die Reihe für $\frac{\pi}{4}$ und die Frage, ob die Summe rationaler Terme irrational sein kann.

Zur Notation und Rechentechnik

Leibniz verwendet bei seinen Rechnungen eine vielgestaltige Symbolik, die er zwar größtenteils aus der zeitgenössischen Literatur, insbesondere der Geometria-Ausgabe, übernimmt, aber zugleich auch weiterzuentwickeln versucht. Im einzelnen wirken seine Bezeichnungen dadurch oft fließend, gelegentlich unscharf und führen manchmal sogar direkt zu Fehlern. Im Grunde ist aber Leibniz' Schreibweise von der unseren kaum verschieden, so daß seine Formeln leicht lesbar bleiben, sofern man einige Einzelheiten berücksichtigt (zu dem gesamten Abschnitt siehe auch S. 879).

Diese betreffen insbesondere

(1) Vorzeichen:
Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen verwendet Leibniz seit dem Sommer 1673 Doppelvorzeichen (signa ambigua). Ihre Bildung erfolgt überwiegend paarweise. Offenbar bevorzugt Leibniz bis Sommer 1674 die Form ∓, ⩱ (N. 26); bis Ende 1674 ǂ, ⩲

(N. 38, aber auch noch in N. 44); danach hauptsächlich ☨, ⫲ (N. 43). Vereinzelt treten zusammengesetzte Zeichen auf, die Unterscheidungen in mehr als zwei Fälle signalisieren (N. 34; vgl. dazu *De la méthode de l'universalité*, gedr. in *LFC* S. 97–143). Unbestimmt gelassene oder wiederholte Vorzeichen werden durch Punkte 2. Größe wiedergegeben. Beispiel (N. 43):

☨	$4r1\beta$	25	y^2	☨	② $1a6s1\beta$	$5y$		☨	$1a6s1\beta^2$
⫲	$2n1\beta$	..	..	•	$4r1\beta^2$	..		•	$2n6s1a1\beta$
				⫲	② $1a3p1\beta$	..		⫲	$1a3p1\beta^2$
				•	$2n1\beta^2$	..		•	$4r3p1a1\beta$

Ab und zu verwendet Leibniz größere Symbole, die auch eine Klammerfunktion besitzen (N. 19, 27).

(2) Operationen:

Bei den arithmetischen Operationen, vor allem von Brüchen, verwendet Leibniz manchmal nicht die sonst von ihm gebrauchten Zeichen $+, -, \frown, \smile$ und verzichtet darüber hinaus auch auf ein Gleichheitszeichen, sondern setzt das Ergebnis lediglich durch einen größeren Zwischenraum von den Operationen ab. Häufiger werden aber die Verbindungen von Zählern und Nennern durch Striche angezeigt, bei Addition, Subtraktion und Division dementsprechend meist durch liegende Kreuze und zusätzliche Zeichen (N. 10). Divisionen werden manchmal auch durch das Proportionszeichen ∞ gekennzeichnet (N. 8). Zeitgemäß sind die Überwärtsdivision und das Überwärtswurzelziehen mit ihren charakteristischen Streichungsschemata. Gleichheit bezeichnet Leibniz anfangs vereinzelt mit f. für facit, sonst mit =, manchmal auch senkrecht geschrieben (N. 3), ab Sommer 1674 mit dem Waagebalken ⊓; gegen Ende des Parisaufenthalts kommen zusätzlich *aequ.* bzw. *aeq.* (auch ohne Punkt) in Gebrauch, auch = tritt wieder auf. Durchgehend gebraucht Leibniz ein stilisiertes facit (⨍) vor allem bei rein numerischen Rechnungen, besonders Überwärtsdivisionen u. ä.

Potenzen stellt Leibniz mit mehreren Bezeichnungssystemen dar, die vor allem in der Frühzeit auch nebeneinander auftreten können. Beispiele (N. 6, 8, 15):

$$\frac{d^{qq}}{b2-a2} \qquad \frac{\llcorner d+e \lrcorner Q.}{9aa+bb-6ab} \qquad \frac{c^2, c^3, c^4 \quad a^q}{\text{quad } (1)}$$

Später treten neben die Exponentenschreibweise vor allem $\square$ und $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ etc.

Für die Darstellung von Wurzeln verwendet Leibniz bis Sommer 1673 (und vereinzelt noch kurz danach) *Rq*, *Rc*, *Rqq* etc. (N. 16), ab dem Frühsommer 1673 auch das Wurzelsymbol, wobei er in der Regel keinen Wurzelbalken setzt, wenn der Radikand eindeutig

bestimmt ist (N. 24). Bei Potenzen und Wurzeln werden die Operatoren den Operanden sowohl vor- wie nachgestellt.
Bekanntlich hat Leibniz ab Ende Oktober 1675 die Symbole d und $\int$ für Differentiation und Integration eingeführt. Dennoch verwendet er auch danach noch ältere Bezeichnungen wie diff., omn. und summ. teilweise auch neben der neuen Symbolik (N. 46, 57_2, 62). Vor allem bei der Differentiation von zusammengesetzten Ausdrücken schreibt Leibniz häufig auch das Operationszeichen unter und nicht vor den Klammerbalken (N. 46, 58).

(3) Klammern:
Die Klammern variieren stark nach Größe und Form. Sie werden nicht immer konsequent gesetzt. Außer den heute üblichen Zeichen verwendet Leibniz den Klammerbalken (vinculum) sowie ein- und zweiseitige Halbklammern (im Text durch , bzw. ˻ und ˼ wiedergegeben). Häufig erfolgt Klammerung durch Position, teilweise auch durch Wechsel im Schriftbild. Beispiel (N. 8):

$$Rq_{\llcorner\llcorner\llcorner}2\underline{\text{rad.}}^q - Rq_{\llcorner\llcorner}2\underline{\text{rad.}}^q \frown {\llcorner}2\underline{\text{rad.}}^q - 2\underline{\text{sin. polyg. inscr. praeced.}^q}$$

(4) Wiederholungszeichen und Indexbezeichnungen:

Bei mehrzeiligen Schemata bezeichnet Leibniz wiederholt auftretende Bestandteile der Formeln (sowohl Operatoren wie Terme) durch entsprechende Punktierung bzw. durch einfaches Freilassen. Die Punktierung gibt manchmal die Dimension des wiederholten Elements wieder. Beispiel (N. 39):

$$\begin{array}{llll}
4bx^3t+\ 3cyx^2t+ & 2dy^2xt+ & ey^3t \sqcap -4fy^4-3ex\ \ y^3- & 2dx^2y^2- \quad cx^3y \\
\qquad + 3ag \ldots + 2ahy & .. +\ aky^2. & \qquad\qquad -3al\ \ldots -2akx & .. -\ ahx^2\ . \\
 & +2a^2m\ \ .. +a^2ny\ \ . & \qquad\qquad\qquad -2a^2p & .. -a^2nx\ \ . \\
 & & & \qquad -\ \ a^3r\ \ .
\end{array}$$

Als Indexbezeichnung verwendet Leibniz vereinzelt vorangestellte Ziffern (N. 33) oder sukzessive Klammerung (N. 50), die ihrerseits wieder durch Ziffern verdeutlicht werden kann. Beispiel (N. 54):

$$\begin{array}{llllllllllll}
y \sqcap 1 & \dfrac{y}{1+y} & \mathbb{P} & y & - & y^2 & + & y^3 & - & y^4 & + & y^5 \\
y \sqcap 2 & \dfrac{(y)}{1+(y)} & \mathbb{P} & (y) & - & (y)^2 & + & (y)^3 & - & (y)^4 & + & (y)^5 \\
y \sqcap 3 & \dfrac{((y))}{1+((y))} & \mathbb{P} & ((y)) & - & ((y))^2 & + & ((y))^3 & - & ((y))^4 & + & ((y))^5 \\
\text{etc.} & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} \\
y \sqcap 100 & \dfrac{({}_{100}(y)_{100})}{1+({}_{100}(y)_{100})} & \mathbb{P} & ({}_{100}(y)_{100}) & - & ({}_{100}(y)_{100})^2 & + & ({}_{100}(y)_{100})^3 & - & ({}_{100}(y)_{100})^4 & + & ({}_{100}(y)_{100})^5
\end{array}$$

(Für die kombinierte Koeffizienten- und Indexbezeichnung durch Ziffern s. (6).)

(5) Auslassungszeichen:
Nicht auftretende bzw. wegfallende Terme werden durch den Asterisk $*$ angezeigt (N. 38_9, 38_{10}, 52), der dementsprechend auch für den Koeffizienten 0 stehen kann (N. 38_7). Gelegentlich werden auch Punkte bzw. Doppelpunkte (N. 26) und $\square$ (N. 5) für Leerstellen verwendet.

(6) Koeffizienten:
Binomialkoeffizienten: Leibniz hebt diese Koeffizienten gelegentlich als wesentliche Zahlen (numeri essentiales) durch besondere Kennzeichnung hervor. Beispiele (N. 43, 54):

$25y^2 + 2\,2g5y + 4g^2$

$2, a, c \sqcap a, b + b, c$

Manchmal stehen nicht Buchstaben, sondern Ziffern für Koeffizienten. Beispiele (N. 5, 62, 72):

num. $\square.1.4.p-$ n.$\square.2.3.p = 2.4.q.$

$1y + b, 2y + c, 3y + d,$, etc. $\sqcap$ $4y + e, 5y + f, 6y + g$ etc.

$11a + 12a^2 + 13a^3$ ...
$11 = 1 \quad 12 = 0 \quad 13 + 11 = 0$

Im ersten Beispiel stehen die Ziffern für die unbekannten Koeffizienten von p und q, $\square$ für die bekannten, hier die sukzessiven Terme der Folge der Quadratzahlen.

(7) Ungleichungen:
Zusätzlich zu den üblichen Symbolen $\sqcap$ für „größer“ und $\sqcap$ für „kleiner“ (N. 66) führt Leibniz noch Zeichen für „ein wenig größer“ ($\boxed{\sqcap}$) bzw. „ein wenig kleiner“ ($\boxed{\sqcap}$) ein (N. 54).

(8) Leibniz rechnet gelegentlich „fortlaufend“, d. h. er verwendet bei Gleichungsketten Zwischenergebnisse ohne Neuansatz weiter. Beispiel (N. 27):

$$\frac{3}{1} + \frac{9}{2} = \frac{6+9}{2} + \frac{27}{3} = \frac{18+29+54}{6} + \frac{81}{4} = \frac{72+116+216+486}{24} + \frac{243}{5} =$$
$$\frac{360+580+1080+2430+5832}{120} + \frac{729}{6} = \frac{2160+3480+6480+14580+34992+87480}{720}$$

(9) Leibniz schreibt in Anlehnung an Fr. Viète Gleichungen oft homogen. Das Verfahren dient überwiegend zur Rechenkontrolle, ohne daß es immer konsequent durchgeführt

wird. Wechsel zwischen homogener und inhomogener Schreibweise kommen öfter vor, z. B. in N. 26.

(10) Zur Überprüfung algebraischer Rechnungen setzt Leibniz oft spezielle Zahlenwerte ein, die den betreffenden Größen beigeschrieben werden. Beispiel (N. 8):

$$\begin{array}{llllll} z = & a & + & 2b, & \frown \dfrac{a\ (\frac{1}{2})}{b\ (\frac{1}{2})} ((1)) + 1\ (((2))). \\ \frac{6}{2} & (\frac{1}{2}) & & ((\frac{3}{2})) & (1) \end{array}$$

Die Neunerprobe verwendet Leibniz hauptsächlich bei rein numerischen Rechnungen (N. 26), aber nicht ausschließlich. Beispiel (N. 38_{17}):

$$\overset{\text{VI}}{78h} \sqcap \frac{\begin{array}{c} \boxed{\overset{\text{III}}{\boxed{4}\,3ega^2 4\beta}} + \boxed{\overset{\text{V}}{\boxed{2}\,4f^2a^2 4\beta}} + \boxed{2}\,\boxed{\boxed{6}}\overset{\text{IX}}{3e2f16\beta^2 a} + \boxed{2}\,\overset{\text{IX}}{9e^2 64\beta^3} \\ - \boxed{8}\,\overset{\text{II}}{2fga^3} - \boxed{4}\,\boxed{\boxed{8}}\overset{\text{III}}{3e4\beta ga^2}\ \boxed{- \boxed{4}\,\overset{\text{III}}{3e2f16\beta^2 a}} - \boxed{2}\,\boxed{\boxed{4}}\overset{\text{VIII}}{4f^2 4\beta a^2} \end{array}}{\overset{\text{VII}}{16\beta^2 a^2}}$$

(11) An verschiedenen Stellen verwendet Leibniz zur Rechenerleichterung mnemotechnische Hilfsmittel, insbesondere Zuordnungsstriche und Punkte, vgl. vor allem N. 23 Teil 2.

(12) Umformungen:
Rechenschritte zur Vereinfachung von Gleichungen und Termen werden von Leibniz mittels mehrfacher Klammerung, Streichungen oder abgerundeter Umrahmungen angezeigt. Davon zu unterscheiden ist die Hervorhebung gültiger Terme, die durch kreisförmige, ovale oder eckige Umrahmungen wiedergegeben wird. Die Reihenfolge der Rechenschritte kennzeichnet Leibniz mitunter durch Mehrfachstreichungen oder durch beigefügte Zähler. Dabei werden im Rechengang neu auftretende Terme gelegentlich mit entsprechend indizierten Sonnensymbolen versehen. Bei Mehrfachstreichungen werden aus Gründen der Lesbarkeit die betreffenden Größen nur einmal durchgestrichen und die Anzahl der Streichungen durch darüber (darunter) gesetzte Schrägstriche in entsprechender Häufigkeit angezeigt. Beispiele (N. 9, 17_3, 44):

$$\left(\frac{\left(\left(\left(\left(1\right)\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right)\right)\frac{1}{2}}{\left(\left(\left(\left(\frac{6}{2}\right)\right)\right)\right)}\right)$$

$$\frac{3\,\frac{c}{\alpha}}{\dfrac{12\,\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{\alpha^2}}}{Rq\,\dfrac{\alpha^2}{\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{\alpha}}}+1}} = \frac{3c}{Rq\;12+\alpha}$$

$$\begin{array}{ll} f^2y^2 \odot_{\scriptscriptstyle I} & +\,2afg\,..+afg\beta \\ & +\,f^2\beta\;\;..+a^2g^2 \\ & \underset{I}{\boxed{+\;\;afg\,..}} \end{array}$$

Eberhard Knobloch Siegmund Probst

ZUR TEXTGESTALTUNG

In der Textgestaltung werden die Grundsätze befolgt, die in den Vorworten zum fünften Band der Reihe I und zum sechsten Band der Reihe VI entwickelt wurden. Die vorliegende Reihe bedingt aber zusätzlich folgende Besonderheiten:

1. Jedes unbetitelte Stück erhält eine Überschrift in der Sprache des Stückes. Eigene Überschriften von Leibniz werden unmittelbar vor dem Text wiederholt.

2. Die Groß- und Kleinschreibung lateinischer Texte wird gemäß den Editionen der Klassiker normalisiert. Insbesondere werden i und j sowie u und v entsprechend vereinheitlicht. Vollständige Sätze werden mit einem Punkt abgeschlossen. Jeder Satzanfang wird groß geschrieben. Akzente fallen weg. Bei französischen Texten wird das Schriftbild beibehalten, jedoch werden Akzente dort ergänzt, wo Mißverständnisse entstehen können.

3. Die Leibnizsche mathematische Notation wird grundsätzlich beibehalten. Bei schwankender Bezeichnung von Strecken und Größen wird nach dem Mehrheitsprinzip vereinheitlicht. Aufgrund des Konzeptcharakters der meisten Stücke treten häufig Flüchtigkeiten auf. So fehlen gelegentlich Wurzelbalken, Klammern, Multiplikationszeichen, besonders oft aber Pluszeichen. In solchen Fällen wird nach sonstigem Leibnizschen Gebrauch stillschweigend ergänzt (bei stärkeren Eingriffen mit Dokumentation im Apparat). Leibniz neigt dazu, in seinen Konzepten auch einfachste numerische Rechnungen wie $11 \times 11, 18 \times 3$ schriftlich auszuführen. Solche Nebenrechnungen werden nicht abgedruckt. Rechenfehler werden grundsätzlich im Apparat angezeigt. Ausnahme: Verschreibungen im Rechengang; diese werden stillschweigend verbessert.

4. Die Leibnizsche Interpunktion wird bewahrt. Hinzugefügte Zeichen werden — abgesehen von den in Punkt 2 und 3 genannten Fällen — in eckige Klammern gesetzt. Es ist anzumerken, daß bei Leibniz ein Komma oder auch ein Semikolon oft die Funktion hat, eine längere Phrase vor der Verbindung mit dem zugehörigen Prädikat zusammenzufassen.

5. Die Leibnizschen Zeichnungen werden möglichst genau nach der Vorlage und mathematisch korrekt wiedergegeben.

Weitere Einzelheiten zur Textgestaltung siehe unter Siglen, Abkürzungen, Zeichen.

ZUR VARIANTENGESTALTUNG

Die Variantengestaltung erfolgt gemäß den Regeln der anderen Reihen. Die Variante ist durch Zeilenangabe sowie vorderen und hinteren Anschluß eindeutig mit dem Haupttext verknüpft. Einer dieser Anschlüsse kann insbesondere bei Rechentexten fehlen. Streichungen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt, Ergänzungen durch bloße Angabe des hinzugefügten Textes dargestellt. Bei Korrekturen kennzeichnen vorgesetzte Ziffern *(1)*, *(2)*, *(3)* ... und Buchstaben *(a)*, *(b)*, *(c)* ... *(aa)*, *(bb)*, *(cc)* ... die Stufen der Gedankenentwicklung. Kleinere Streichungen bzw. Ergänzungen innerhalb der einzelnen Stufen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt. Jede nachfolgende Stufe hebt die vorhergehende auf. Nachgestellte Siglen (in diesem Band meist *L*) bezeichnen den Textzeugen, welchem die Variante entnommen ist.

In den Varianten werden Wortlaut und Zeichensetzung grundsätzlich nicht berichtigt, auch nicht bei offensichtlichen Fehlern. Abbrechende Wörter werden nicht vervollständigt. In der letzten Korrekturstufe werden aus dem Text übernommene Abschnitte durch Pünktchen abgekürzt wiedergegeben.

DIFFERENZEN, FOLGEN, REIHEN 1672–1676

1. DE SUMMA NUMERORUM TRIANGULARIUM RECIPROCORUM
[September 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 10 Bl. 5. 1 Bl. 2°. 2 S., zweispaltig beschrieben.
Cc 2, Nr. 514

Datierungsgründe: Das Stück ist offenbar unmittelbar nach dem Gespräch mit Huygens verfaßt, in dem dieser Leibniz das Problem stellte, die Folge der reziproken Dreieckszahlen zu summieren. Leibniz gelangt hier noch nicht zur Lösung. Aus den Angaben in N. 36 (vgl. S. 365 Z. 16 f.) ergibt sich eine Entstehungszeit etwa im September 1672.

Hugenius summam exhibere promisit fractionum in infinitum decrescentium, quarum numerator unitas, nominatores sunt numeri triangulares.

$$\begin{array}{cccccccccl}
3 & \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} & \frac{1}{36} & \text{t e r m i n i.} \\[1ex]
2 & \frac{2}{3} & & \frac{3}{18} & & \frac{4}{60} & \frac{5}{150} & \frac{6}{315} & & \text{d i f f e r e n t i a e, quarum pro-} \\[1ex]
 & \frac{2}{\frac{1}{3}} & \left(\frac{3}{\frac{3}{6}}\right) & \frac{1}{\frac{1}{6}} & \left(\frac{4}{\frac{6}{10}}\right) & \frac{2}{\frac{3}{10}} & \frac{5}{\frac{10}{15}} & \frac{6}{\frac{15}{21}} & &
\end{array}$$

---

11 *Am Rande, in der Handschrift vertikal angeordnet:*

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\
 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

---

9 Hugenius: Zur Lösung von Huygens s. *HO XIV* S. 144–150.

inde summam habere mihi in proclivi est. Earum numeratores sunt numeri naturales, nominatores sunt facti ex duobus triangularibus sibi vicinis.

$3 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{18} \quad \frac{6}{60} \quad \frac{10}{150} \quad \frac{15}{315}$ t e r m i n i aliter enuntiati, ubi numeratores sunt ipsi termini triangulares et nominatores sunt iidem facti ex duobus triangularibus sibi vicinis seu duobus numeratoribus, fractionis huius et sequentis.

$4 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{9}{18} \quad \frac{16}{60} \quad \frac{25}{150} \quad \frac{36}{315}$ s u m m a e duorum terminorum quorumlibet sibi vicinorum. Hae non nisi numeratore differunt a differentiis, ut scilicet numerator summae, sit hoc loco quadratum numeratoris differentiae inter eosdem terminos.

$\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{60} \quad \frac{5}{150} \quad \frac{9}{315}$ d i f f e r e n t i a e inter differentias et terminos

$\frac{1}{3} \quad \frac{6}{18} \quad \frac{12}{60} \quad \frac{20}{150} \quad \frac{30}{315}$ d i f f e r e n t i a e inter differentias et summas, id est inter numeratores differentiarum, et earum quadrata, subscriptis nominatoribus tam differentiis quam summis, communibus.

1 2 6 12 20 30 42 56 seu facti ex numeratore et numero proxime minore seu unitate differente.

$$\frac{1}{1} \;\underline{\times}\; \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{21}$$

$$\frac{4}{3} \quad \frac{27}{18} \quad \frac{288}{180}$$

Facile est per analysin invenire duos terminos, quorum differentia sit fractio data primum enim quaeruntur duo nominatores terminorum, quorum multiplicatio conficiat [nominatorem] fractionis, quo facto iam restat numerator fractionis, id est inventio numeratorum terminorum, qui in crucem per nominatores multiplicati, et a se subtracti relinquant numeratorem fractionis datae. Esto enim fractio data $\frac{1}{150}$ requirendae sunt duae fractiones, quarum differentia sit $\left[\frac{1}{150}\right]$. Componitur 150 ex 10. et 15. in se ductis. Ergo nominatores terminorum supponi possunt 10. et 15. Numeratores supponantur a

4 termini *(1)* naturales *(2)* triangulares *L* 11 inter *(1)* radices *(2)* numeratores *L* 19 numeratorem *L ändert Hrsg.* 22 150 *L ändert Hrsg.*

et b. erunt termini $\frac{a}{10} - \frac{b}{15}$. qui scilicet a se invicem subtracti relinquant $\frac{1}{150}$. Quaeruntur qui sint a et b. Hoc ita investigabimus: $15a - 10b = 1$. Ergo $15a = 1 + 10b$. Ergo $a = \frac{1}{15} + \frac{10b}{15}$. Ergo b pro arbitrio assumi potest. Et esto $b = 1$. Ergo $\frac{1}{15} + \frac{10}{15} = \frac{11}{15}$. Iam stabunt termini $\frac{\frac{11}{15}}{10} \underline{\times} \frac{1}{15}$. $\frac{11}{150} - \frac{10}{150} = \left[\frac{1}{150}\right]$. Ita b si velis per inversam aequationem determinato, poterit a pro arbitrio assumi.

Sed in progressione integra terminorum in infinitum procedente, ubi scilicet reperiendi sunt termini infiniti, invento scilicet progressionis fundamento, datarum infinitarum differentiarum. Ibi vero maxima est difficultas, et fortasse maior, quam ut cognitis hactenus artibus superari possit. Primum enim resolutio nominatoris in factores, seu nominatores differentiarum, non arbitraria est; sed ita comparata, ut idem sit factor posterior nominatoris antecedentis, et prior sequentis. Deinde resolutio in numeratores adhuc difficilior est, quia iterum numerator posterior concurrens ad constituendam subtractione differentiam praecedentem, concurrit nunc ad constituendam quoque differentiam sequentem, illic ut posterior, hic ut prior, illic ut deminuens, hic ut deminuendus, sed praecedente scilicet multiplicatione per crucem ante subtractionem. Aliquando fit ut habeamus nominatores determinatos, at non numeratores, ut in hoc exemplo, cum quaeritur summa huius fractionis $\frac{1}{3}\ \frac{1}{18}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{150}\ \frac{1}{315}$ etc. Constat nobis nominatores

---

2 *Dazu am oberen Rand:* $15a - 10b = 1$. $15a = 1 + 10b$. $a = \frac{1+10b}{15}$. $10b = 15a - 1$. $b = \frac{15a}{10} - \frac{1}{10}$. Ergo $b = \frac{1+10b}{10} - \left[\frac{1}{10}\right]$. seu $\frac{1}{10} + b\left[-\frac{1}{10}\right]$.

2 *Dazu, gestrichen:* Nota: alterutrum horum, vel a, vel b. est arbitrarium.
$15a - \llcorner 10a + b \lrcorner = 1$. $5a - 10b = 1$. $a - 2b = \frac{1}{5}$. $a = \frac{1}{5} + 2b$.
b esto 1. Ergo a est $\frac{1}{5} + \frac{10}{5}$. $\quad b = \frac{15a}{10}\lrcorner - \llcorner\frac{15a - \llcorner 15a - 1\lrcorner}{10}$.

---

3 f. $\frac{11}{15}$. | Iam ... $-\frac{10}{150} = 1$ *erg L, ändert Hrsg.* |. Ita *L* 5 poterit | etiam *gestr.* | a *L* 8 vero *(1)* maior *(2)* maxima *L* 19 $\frac{1+10\mathrm{b}}{10}$ *(1)* + *(2)* -1. seu $\frac{1}{10}$ + b | + 1 *ändert Hrsg.* |. *L*

fieri ex multiplicatione numerorum triangularium 1. 3. 6. 10. 15. 21. Quaeruntur iam et numeratores harum fractionum $\frac{a}{1}\ \frac{a}{3}\ \frac{}{6}\ \frac{}{10}\ \frac{}{15}$ qui scilicet in nominatores per crucem

---

5,17 *Dazu auf der Vorderseite des Blattes, in der Handschrift vertikal angeordnet:*

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{3} & & \frac{1}{18} & \frac{1}{60} & \frac{1}{150} & \frac{1}{315} \\
 & \frac{15}{54}\Big|\frac{5}{18} & & & &
\end{array}$$

2 *Dazu in der rechten Spalte:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 21 & & & & & & & \\
 & 15 & & & & & & & \\
 & 10 & & & & & & & \\
 & 6 & & & & & & & \\
 & 3 & & & & & & & \\
a & & & & & & & & \\
 & 1 & & & 1 & + & \frac{2}{3} & \frac{5}{3}\Big|\frac{30}{18} & \\
a-1 & & \frac{2}{3} & & & & & & \frac{21}{18}\Big|\frac{7}{6} \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{[27]}{54}\Big|\left[\frac{1}{2}\right] & \frac{1}{3} & + & \frac{3}{18} & \frac{9}{18}\Big|\frac{30}{60} & \\
a-1-\frac{1}{3} & & \frac{3}{18} & & & & & & \frac{16}{60} \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{108}{1080}\Big|\frac{1}{10} & \frac{1}{6} & + & \frac{4}{60} & \frac{14}{60} & \\
a-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6} & & \frac{4}{60} & & & & & & \\
 & \frac{1}{10} & & \frac{300}{9000}\Big|\frac{1}{30} & & & & \frac{20}{150} & \\
 & & \frac{5}{150} & & & & & & \\
 & \frac{1}{15} & & & & & & &
\end{array}$$

1 multiplicatione *(1)* horum terminorum *(2)* numerorum *L* 1 21. | 28. 36. etc. *gestr.*| Quaeruntur *L*

ducti, et a se invicem subtracti relinquant 1. Si qua per analysin reperiri posset generalis huius problematis datae differentiarum progressionis [summas] reperire, solutio, quanquam aequatio talis multorum graduum futura esset, posset tamen non minus inveniri solutio, quam duarum mediarum proportionalium.

In omni progressione ubicunque differentia, (aut aliquid definitae ad differentiam rationis, ut duplum eius aut triplum) semper termino sequenti maior est, summa terminorum methodo mea haberi potest.

Inquirendae notae quibus dignosci possit an aliqua progressio sit prima sui generis, an vero differentia alterius.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{3}{3} & 1 & & & & \\
 & & \frac{2}{3} & & & \frac{2}{1} \\
\frac{5}{15} & \frac{1}{3} & & \frac{6}{15} & & \\
 & & \frac{4}{15} & & \frac{20}{105} & \frac{4}{5} \\
\frac{7}{105} & \frac{1}{15} & & \frac{22}{105} & & \\
 & & \frac{6}{105} & & & \frac{6}{35} \\
\frac{9}{945} & \frac{1}{105} & & \frac{46}{945} & & \\
 & & \frac{8}{945} & & & \frac{8}{315} \\
 & \frac{1}{945} & & & & \\
 & & & & & \text{etc.} \\
 & \text{etc.} & & & &
\end{array}$$

6,16 30 *bzw.* $\frac{5}{9}$ *L ändert Hrsg.* 2 differentias *L ändert Hrsg.*

5–7 Ähnlich N. 2 S. 12 Z. 14–16.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & & \overset{\bullet}{\frac{2}{3}} & & \frac{1}{3} & & \overset{\bullet}{\frac{4}{15}} & & \frac{1}{15} & & \overset{\bullet}{\frac{6}{105}} & & \frac{1}{105} & & \overset{\bullet}{\frac{8}{945}} & & \frac{1}{945} & \text{etc.} \\ & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{15} & & \frac{3}{15} & & \frac{1}{105} & & \frac{5}{105} & & \frac{1}{945} & & \frac{7}{945} & & \end{array}$$

Totum $\frac{2}{3}\ \frac{4}{15}\ \frac{6}{105}$ etc. $= 1$. Ergo $1 + \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{105} = 1\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{105}$. et $1 - \frac{1}{3}\ \frac{3}{15}\ \frac{5}{105}$ etc. $= \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{105}$.

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{3} & \text{divisa} & \frac{2}{1} & \frac{1}{1} \\ \frac{4}{15} & \text{per} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{105} & \frac{1}{3} & \frac{6}{35} & \frac{3}{35} \\ \text{etc.} & \text{dant} & \frac{8}{315} & \frac{4}{315} \\ & & \text{etc.} & \\ = & & = & = \\ 1 & & 3 & 1\frac{1}{2} \end{array}$$

7,9 f. alterius. | $\begin{array}{cccc} & & & a \\ & & & b \\ \frac{2}{15} & \frac{6}{15} & \frac{12}{15} & a+b \\ & & & c \\ \frac{3}{105} & \frac{9}{105} & \frac{18}{105} & a+b+c \\ & & & d \\ \frac{4}{945} & \frac{12}{945} & \frac{24}{945} & a+b+c+d \\ & & & \text{etc.} \end{array}$ *gestr.* | $\frac{3}{3}$ *L*

1 f. In der Handschrift ist die Tabelle vertikal angeordnet. Die Punkte über den Brüchen hat Leibniz zu deren Hervorhebung gesetzt.

Non sufficit ut seriem continue inveniamus, cuius differentias contineat series data, nisi eae duae series simul evanescant. Alioquin si assumam numerum primum infallibiliter maiorem tota summa, potero semper subtrahere in infinitum, nec tamen consumam.

Nota possum series componere ex datis ipsas multiplicando dividendo alias series cognitas ipsis addendo vel subtrahendo, item multiplicando seriem in seriem, quo facto prodeunt numeri infinities infiniti, nihilominus summae datae. Possum dividere seriem per terminum, sed non possum dividere terminum per seriem. Ars est in analysi datam scilicet progressionem ad classem suam producere posse; cuius scilicet ipsa d i f f e r e n t i a s p a r a l l e l a s continet.

8,2 f.

$$\left|\begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{15} & & \frac{3}{15} & & \frac{1}{105} & & \frac{5}{105} & & \frac{1}{945} & & \frac{7}{945} & \\
& 0 & & \frac{4}{15} & & \frac{2}{15} & & \frac{20}{105} & & \frac{4}{105} & & \frac{71}{945}\,\textit{(!)} & & \frac{6}{945} & & \textit{gestr.} \\
& & \frac{2}{3} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{4}{15} & + & \frac{1}{15} & + & \frac{6}{105} & + & \frac{1}{105} & & & \\
& & & 1 & & + & & & & & & & & & &
\end{array}\right|$$

Totum L

8,4 f.

$$\frac{1}{105}.\left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & - & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & - & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & - & \textit{gestr.} \\
& \frac{1}{3} & & & \frac{1}{15} & & & \frac{1}{105} &
\end{array}\right| \frac{2}{3}\ L$$

7 seriem. *(1)* Imo possum fortasse dum sciam su *(2)* Ars L

2. DIFFERENTIAE NUMERORUM HARMONICORUM ET RECIPROCORUM TRIANGULARIUM
[September/Oktober 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 197–198. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 198 v° zweispaltig. Zusatz auf der Gegenseite Bl. 197 r°. — Auf dem übrigen Bogen ein Stück zum Sechsquadrateproblem (Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 530 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie N. 1, mit dem es wörtliche Übereinstimmungen gibt (vgl. Erl. zu S. 12 Z. 14–16). Auf S. 13 berechnet Leibniz ein Differenzenschema zur Folge der harmonischen Zahlen mit der Folge der halbierten reziproken Dreieckszahlen als erster und der Folge der gedrittelten reziproken Pyramidalzahlen als zweiter Differenzenfolge. In N. 53_3 S. 712 Z. 17 – S. 713 Z. 1 berichtet Leibniz über seine Entdeckung der Summierung der reziproken Dreieckszahlen anhand eines solchen Differenzenschemas. Die Nähe zu N. 1, wo das Problem noch ungelöst war, läßt vermuten, daß Leibniz aufgrund von Überlegungen im Anschluß an N. 2 zu der Entdeckung gelangt ist. Das Stück dürfte also im Zeitraum September/Oktober 1672 entstanden sein.

		3				4	
	4		2		5		$\frac{12}{4} \Big\vert\ 3$
$\frac{4}{4}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{1}{1}$	
	$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{4}$		$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{27}{54}\Big\vert\frac{3}{6}\Big\vert\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$	
	$\frac{9}{18}\Big\vert\frac{1}{2}$		$\frac{3}{18}$		$\frac{14}{40}$		$\frac{6}{40}\Big\vert\frac{3}{20}$
$\frac{3}{18}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{10}$	
	$\frac{16}{60}\Big\vert\frac{4}{15}$		$\frac{4}{60}$				$\frac{10}{200}\Big\vert\frac{1}{20}$
$\frac{6}{60}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{20}$	
	$\frac{25}{150}\Big\vert\frac{5}{30}$		$\frac{5}{150}$				$\frac{15}{700}\Big\vert\frac{3}{140}$
$\frac{10}{150}$		$\frac{1}{15}$				$\frac{1}{35}$	
	$\frac{36}{315}\Big\vert\frac{4}{35}$		$\frac{6}{315}$				
		$\frac{1}{21}$					
		$\frac{1}{28}$					
		$\frac{1}{36}$					

$\frac{1}{6} \times \frac{4}{60}$	$\frac{60}{24}\Big\vert\frac{10}{4}\Big\vert\frac{5}{2}$		3		$\cancel{3}$	
		$\frac{1}{1}$		1	1	
$\frac{1}{3} \times \frac{3}{18}$	$\frac{18}{9}\Big\vert\,2$		2			$\frac{2}{3}$
		(1)		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{1} \times \frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$		1			$\frac{3}{18}$
		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{18}$	
			$\frac{2}{3}$			$\frac{4}{60}$
4		$\left(\frac{1}{3}\right)$		$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{60}$	
$3+2$			$\frac{1}{3}$			$\frac{5}{150}$
$\frac{4}{3}$				$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{150}$	
			$\frac{3}{18}$			$\frac{6}{315}$
			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{15}{315}$	
			$\frac{4}{60}$			

In omni progressione, quoties differentia (aut aliquid definitae ad differentiam rationis, ut duplum, triplum etc.) semper termino sequenti maior est, summa terminorum methodo mea haberi potest.

Colligantur summae continuae tum terminorum tum differentiarum, quia enim habent eosdem semper divisores, hinc ratio apparere potest.

14 aut *(1)* definita pars differentia, ut tertia *(2)* aliquid *L*

14–16 Ähnlich N. 1 S. 7 Z. 5–7.

	3		$\frac{1}{1}$			
		2		$\frac{1}{2}$		
4	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{6}$		
$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{6}{72}$	$\frac{1}{12}$
		$\frac{3}{18}$		$\frac{1}{12}$		
$\frac{81}{18}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{8}{240}$	$\frac{1}{30}$
		$\frac{4}{60}$		$\frac{1}{20}$		
	$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{10}{600}$	$\frac{1}{60}$
		$\frac{5}{150}$		$\frac{1}{30}$		
	$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{12}{1260}$	$\frac{1}{105}$
		$\frac{6}{315}$		$\frac{1}{42}$		
	$\frac{1}{21}$		$\frac{1}{7}$			
				$\frac{1}{56}$		
			$\frac{1}{8}$			
				$\frac{1}{72}$		
			$\frac{1}{9}$			
				$\frac{1}{90}$		
			$\frac{1}{10}$			
				$\frac{1}{110}$		
			$\frac{1}{11}$			

$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{2}$			1	
	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{2}{15}$		$\frac{1}{15}$			$\frac{2}{9}$
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{9}$	
	$\frac{2}{35}$		$\frac{1}{35}$			$\frac{2}{27}$
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{14}$		$\frac{3}{81}$	$\frac{1}{27}$	
	$\frac{2}{63}$		$\frac{1}{63}$			$\frac{2}{81}$
$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{18}$		$\frac{3}{243}$	$\frac{1}{81}$	
						$\frac{2}{243}$
					$\frac{1}{243}$	

1		Totum $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{2}{27}$ etc. valet 1.
	$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{3}$		Totum $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{27}$ valet 1.
	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.\quad \frac{2}{9}+\frac{1}{9}.\quad \frac{2}{27}+\frac{1}{27}.$ etc. $=1.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{9}.\ \frac{1}{27}.$ etc.
	$\frac{1}{9}$	
$\frac{2}{9}$		$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}.\quad \frac{2}{9}-\frac{1}{9}.\quad \frac{2}{27}-\frac{1}{27}.\qquad =\frac{1}{3}.\frac{1}{9}.\frac{1}{27}$ etc.
	$\frac{1}{9}$	
$\frac{1}{9}$		Ergo inter $1+\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}$ et
$\frac{2}{27}$		$1-\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}$ differentia est 1.
$\frac{1}{27}$		Ergo abiecto 1. a maiore fiet aequale minori seu
$\frac{2}{81}$		$\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}$ etc. $=1-\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}$ etc.
$\frac{1}{81}$		Hinc inveniri potest quantitas differentiarum servientium
$\frac{2}{243}$		quae additae primis dant summam.
$\frac{1}{243}$		

[*Zusatz*]

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \frac{1}{1} & & \\[1ex]
\frac{4}{3} & & & \frac{2}{3} & \\[1ex]
 & \frac{15}{18}\Big|\frac{45}{54} & \frac{2}{6}\Big|\frac{1}{3}\Big|\frac{6}{18} & & \\[1ex]
\frac{9}{18}\Big|\frac{3}{6} & & & \frac{3}{18} & \left[\frac{1}{6}\right] \\[1ex]
 & & \frac{3}{18}\Big|\frac{1}{6} & & \\[1ex]
\frac{16}{60}\Big|\frac{4}{15} & & & \frac{4}{60} & \left[\frac{1}{15}\right] \\[1ex]
 & & \frac{6}{60}\Big|\frac{1}{10} & & \\[1ex]
\frac{25}{150}\Big|\frac{5}{30} & & & \frac{5}{150} & \left[\frac{1}{30}\right] \\[1ex]
 & & \frac{10}{150}\Big|\frac{1}{15} & & \\[1ex]
\frac{36}{[315]} & & & & \\[1ex]
 & & \frac{1}{21} & &
\end{array}
$$

5–9 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{30}$ *gestr. L erg. Hrsg.* 11 315 *erg. Hrsg.*

3. DE NUMERIS COMBINATORIIS
[Frühjahr – Herbst 1672]

Überlieferung:

L Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 45–46. 1 Bog. 2°. Ca. 2 1/3 S. Mehrspaltig beschrieben. Auf Bl. 45 r° linke Spalte Cc 2, Nr. 519 A (= *LKK* Nr. 3 tlw., Druck in einem späteren Band der Reihe). Bl. 46 v° leer.

E *LKK* Nr. 3 tlw. (= Teil 1 unseres Textes), Nr. 5 (= Teil 2 unseres Textes)
Cc 2, Nr. 518

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie der zweite Entwurf der *Propositiones quaedam physicae* (*LSB* VI, 3 N. 2_2), dessen Entstehung für den Zeitraum Frühjahr – Herbst 1672 anzusetzen ist.

[*Teil 1*]

$$35\left\{\begin{array}{l}15\\ 20\left\{\begin{array}{l}10\\ 10\left\{\begin{array}{l}6\\ 4\left\{\begin{array}{l}3\\ 1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

5. 4. 3. 2. 1	5. 4. 3. 2. 1	$\frac{5 \frown 6}{2}$	30
4. 3. 2. 1	4. 3. 2. 1	$\frac{4 \frown 5}{2}$	20
3. 2. 1	3. 2. 1	$\frac{3 \frown 4}{2}$	12
2. 1	2. 1	$\frac{2 \frown 3}{2}$	6
	1	$\frac{1 \frown 2}{2}$	2

13–18 *Nebenrechnungen auf der Rückseite:*

$$\begin{array}{rrrlr} 35 & 70 & 25 & & 64\\ 20 & \underline{35} & \underline{\ 3} & & \underline{35}\\ 10 & 35 & 75 & \| \quad 125-50 & 29\\ 4 & & & & \\ \underline{1} & & & & \\ 70 & & & & \end{array}$$

$$
35\left\{\begin{array}{l}
20\left\{\begin{array}{l}
10 \\
10\left\{\begin{array}{l}
6 \\
4\left\{\begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
15\left\{\begin{array}{l}
10\left\{\begin{array}{l}
6 \\
4\left\{\begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
5\left\{\begin{array}{l}
4\left\{\begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array}\right. \\
1
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{r}
4.\ 3.\ 2.\ 1 \\
3.\ 2.\ 1 \\
2.\ 1 \\
[1] \\
3.\ 2.\ 1 \\
2.\ 1 \\
1 \\
2.\ 1 \\
[1] \\
[1]
\end{array}
$$

17,13–18 *Nebenrechnungen und Nebenbetrachtungen:*

$5 \frown 3$	$1+2+3+4+5$	[15]	$5 \frown 6$	$4 \frown 15$	60
$2 \frown 5$	$2+3+4+5$	$\underline{14}$	$4 \frown 5$	$3 \frown\ 8$	24
$3 \frown 2$		60	$3 \frown\ 4$	$2 \frown\ 3$	$\underline{6}$
$1 \frown 3$		$\underline{15}$	$2 \frown 3\quad 12$		90
$1\ \frown 1$		210	$1 \frown 2\quad 6$		
			2	$5 \frown\ 6 ⨍ 30$	
2. 12. 36. 80.				$6 \frown\ 7 ⨍ 42 - 1$	
1 6 18 40					41
					$\underline{\cancel{30}}$
					$\underline{30}$
					1230

5–14 1 *erg. Hrsg. dreimal* 16 15 *erg. Hrsg.*

com2nationes	con3nationes	con4nationes				con5nationes
4	4. 3. 2. 1	4 3 2 1				
3	3. 2. 1	3 2 1				
2	2. 1	2 1				
1	1	1				
		3 2 1			1	1
		2 1				
		1		2		
		2 1				
		1	3			
		1				
						2
						3
						4 1

[*Rechnungen ohne direkten Bezug zum Haupttext*]

$$\begin{array}{r}495\\ \underline{2}\\ 990\end{array} \qquad \begin{array}{r}4096 \;⨍\; 4\\ 990\end{array}$$

2–14 Leibniz hat die Tabelle und die zugehörigen Nebenrechnungen zunächst für den Fall n = 5 angeschrieben, die Tabelle dann aus Platzgründen auf n = 4 reduziert; die Klammerung ist vom Herausgeber an den gültigen Text angepaßt worden. Den Fall n = 5 behandelt Leibniz im Teil 2 S. 26 Z. 1–35.

[*Teil 2*]

Demonstratio huius propositionis quod in progressione arithmetica termino ultimo ducto in proxime maiorem facti dimidium sit summa.

19,1 *Zu* com2nationes: $4 \frown 5 ⨍ \left.\frac{20}{2}\right| 10$

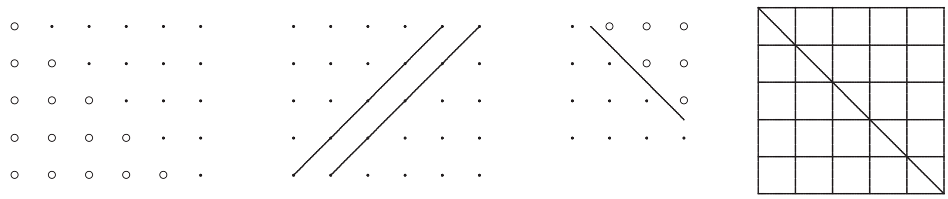
19,1 *Zu* con3nationes:

$$
\begin{array}{lrr}
4 \frown 5 \smile 2 & 20 & 10 \\
4 \frown 3 \smile 2 & 12 & 6 \\
3 \frown 2 \smile 2 & 6 & 3 \\
2 \frown 1 \smile 2 & \underline{2} & \underline{1} \\
 & 40 & 20
\end{array}
$$

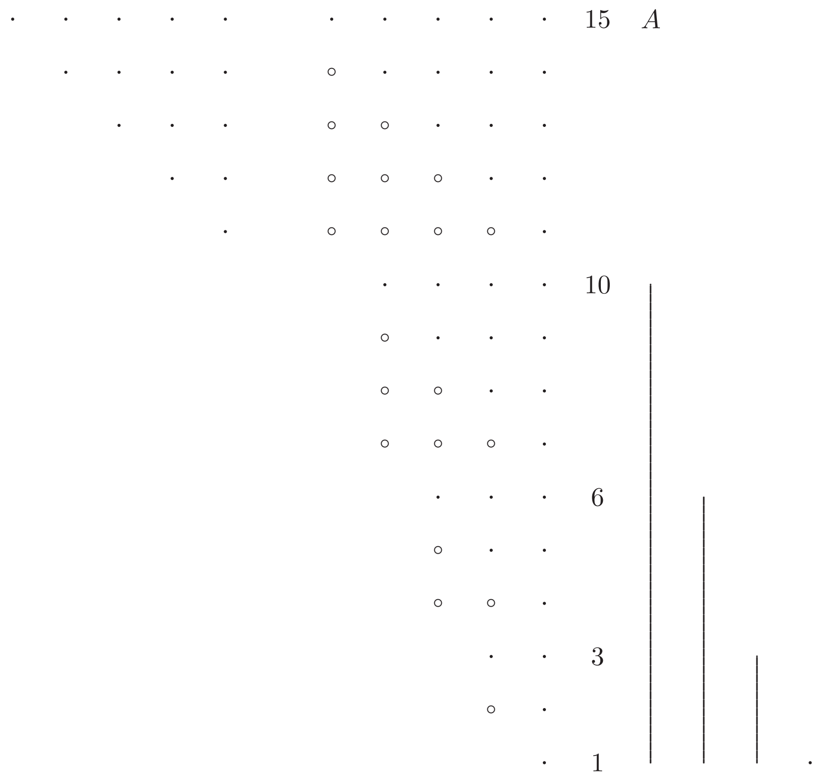
19,1 *Zu* con4nationes:

$$
\begin{array}{lllrrl}
4 \frown 5 + \ 5 \frown 6 & 5 \frown & 10(6+4) & 50 & 25 & \\
3 \frown 4 + [4 \frown 5] & 4 & 8(5+3) & 32 & 16 & \\
 & 3 & 6(4+2) & 18 & 9 & \\
 & 2 & 4(3+1) & 8 & 4 & \\
 & 1 & 2(2+0) & \underline{2} & \underline{1} & \\
 & & & 110 & 55 & -\ 20 ⨍ 35 \\
 & & & 55 & & \quad 25 \\
 & & & & 30 & \\
 & & & & & \quad 16 \\
 & & & & 14 & \\
 & & & & & \quad\ 9 \\
 & & & & 5 & \\
 & & & & & \quad\ 4 \\
 & & & & 1 &
\end{array}
$$

12 $5 \frown 6$ *L ändert Hrsg.*



Nota progressio progressionis cum ipsa differentia crescit.



Duae summae sibi vicinae progressionum arithmeticarum per unitates progredientium constituunt quadratum cuius latus est terminus progressionis maior v. g. $15+10=25$ cuius latus 5.

22 sibi vicinae *erg. L* 22 f. per ... progredientium *erg. L*

Summa progressionis secundanae numerorum, est summa progressionis primanae quadratorum dimidiata; demto dimidio $\square^{\text{ti}}$ primi.

Summa tertiana numerorum, est 2^{dana} $\square^{\text{torum}}$ similiter.

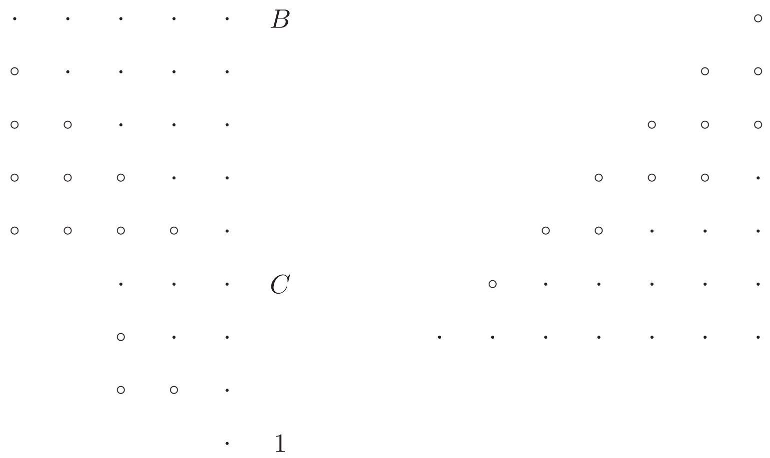
Omnis combinatio est summa progressionis arithmeticae per unitates crescentis, 5. 4. 3. 2. 1. est com2natio de 6.

Con3natio est summa summarum progressionis seu summa secundana, 5. 4. 3. 2. 1. | 4. 3. 2. 1. | 3. 2. 1 | 2. 1 | 1. est con3natio de 7.

Con4natio est summa summarum 2^{danarum} seu con3nationum.

Si quadrata omnium numerorum ab unitate usque ad numerum eo cuius con3nationes quaeris, binario minorem addas, productum dimidies, dimidio addas unitatem, et dimidium quadrati numeri maximi, habebis, summam secundanam, seu con3nationes quaesitas. V. g. 25 + 16 + 9 + 4 + 1 ⨍

9 7 5 3



1 secundanae *(1)* quadrato *(2)* numerorum *L* 1 progressionis *(1)* secund *(2)* primanae *L* 4 progressionis *(1)* geomet *(2)* arithmeticae 10 f. dimidio addas *(1)* dimidium quad *(2)* unitatem, et *(a)* quadratum *(b)* dimidium *L*

1–3 Summa ... similiter: Die Behauptungen sind nicht richtig; Leibniz kommt S. 23 Z. 3–9 zu den korrekten Ergebnissen. 9–12 Si ... quaesitas: Die Behauptung ist nicht richtig; das korrekte Ergebnis formuliert Leibniz S. 23 Z. 3–9.

Ex duobus triangulis aequilateris inter se compositis fit $\square^{\text{tum}}$. Si sint in ea qua hic summae ratione.

Nota cum duae quaelibet summae dent quadrata lateris termini maioris, restabit solum unitas si numerus summarum est impar nihil si par, sed quadrata habebunt intervalla v. g. A reduxi in duo quadrata $B.C.$ et unitatem. Quadratum de 5. + quad. de 3. + 1. idem est quod con3nationes quaesitae. De numero 5 + 2. Ergo pro con3nationibus sume numerum eo cuius con3nationes quaeruntur binario [minorem] v. g. 5. est $7-2$. Inde sume quadrata de 5.3.1. semper unum transiliendo summa horum $\square^{\text{torum}}$ dat con3nationes seu summas progressionum secundanas.

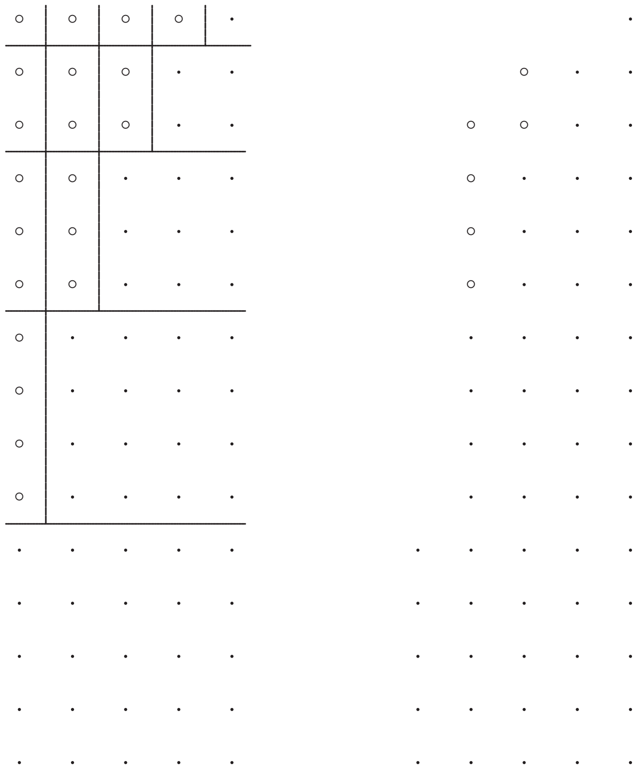
$$\left.\begin{array}{l} 4 \frown 1 \\ 3 \frown 2 \\ 2 \frown 3 \\ 1 \frown 4 \end{array}\right\} \text{est summa progressionis secundanae}$$

Invenire summam progressionis arithmeticae per binarios. Inveni summam progressionis per unitates usque ad terminum ultimum ab unitate; a producto subtrahe summam duplicatam progressionis per unitates terminorum unitate pauciorum terminis summandis[,] residuum erit summa progressionis per binarios.

Hic a summa data datur summa $\square^{\text{torum}}$, hac data summa progressionum secundanarum.

7 maiorem *L ändert Hrsg.* 22 duplicatam *erg. L*

Addere plura □[ta] v. g. 1. 4. 9. 16. id ita fiet: Adde radices omnes, 1. 2. 3. 4. productum multiplica per radicem maximam, a facto detrahe $\begin{bmatrix} 3 \frown 1 \\ 2 \frown 2 \\ 1 \frown 3 \end{bmatrix}$ summam progressionis 2[danae] minoris, sed haec computatur quaerendo summam □[torum] ab unitate.



1 *Zu* Adde radices omnes, *am Rande:* Adjoutez toutes les racines ensemble.

2 detrahe *(1)* summam omnium radicum demta maxima $\begin{matrix} 3 \frown 1 \\ 2 \frown 2 \\ 1 \frown 3 \end{matrix}$ *(2)* $\left| \begin{matrix} 4 \frown 1 \\ 3 \frown 2 \\ 2 \frown 3 \\ 1 \frown 4 \end{matrix} \right.$ *ändert Hrsg.* $\Big|$ summam *L*

Nota si progressio secundana rectangulo omnium radicum et maximae adimatur, productum erit summa $\square^{\text{torum}}$ deinceps ab unitate. Computare progressiones 2^{danas} Frenicl. apud Paschal. in *Triang.*

○, ○ ○, ○ ○ ○, ○ ○ ○ ○ · · · · ·	15		0	
		5		5
○, ○ ○, ○ ○ ○ · · · ·	10		5	
		4		4
○, ○ ○ · · ·	6		9	
		3		3
○ · ·	3		12	
		2		2
·	1		14	

Progressio secundana est summa progressionis terminorum quorum differentiae sunt numeri deinceps crescentes ab unitate seu progressio primana.

Progressio omnium $\square^{\text{torum}}$ numerorum est summa progressionis numerorum deinceps imparium a primana secundani ⟨etc.⟩

2 f. Frenicl. apud Paschal.: Leibniz verwechselt B. Frenicle mit P. Fermat, dessen Regeln zur Berechnung der figurierten Zahlen bei Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665, Nr. V *Traité des ordres numériques*, prop. 11 S. 5 [Marg.] (*PO* III S. 510) zitiert werden. In seinem Handexemplar *Niedersächs. Landesbibl.* Nm-A 605 hat Leibniz im Pascalschen Satz „Voila comment on peut varier les enonciations.“ die letzten drei Wörter unterstrichen; vgl. auch *Aus und zu Galileis Discorsi*, *LSB* VI, 3 N. 11_2 S. 167 Z. 10 f.

$\overline{5}$	15	1
4		
3		
2		
1		
$\overline{4}$	10	2
3		
2		
1		
$\overline{3}$	6	3
2		
1		
$\overline{2}$	3	4
1		
$\overline{1}$	1	5
4	10	6
3		
2		
1		
$\overline{3}$	6	7
2		
1		
$\overline{2}$	3	8
1		
$\overline{1}$	1	9
3	6	10
2		
1		
$\overline{2}$	3	11
1		
$\overline{1}$	1	12
$\overline{2}$	3	13
1		
$\overline{1}$	1	14
$\overline{[1]}$	1	15

Pro primanis quodlibet semel pro secundanis primum semel secundum bis, tertium 3.

Triangula = latera pro primanis unum pro secundanis.

Numerus triangularis pro [primanis] est = lineae primae[,] pro secundanis triangulo primo, pro tertianis scalae primae.

In com2nationibus de 5. 5. 4. 3. 2. 1. quodlibet multiplicatur per 1.

In con3nationibus de 5. 5 multiplicatur per 1. et 4 per 2. et 3 per 3. et 2 per 4. et 1 per 5.

8	1	8			5 ⌢	1	5
			6		4 ⌢	2	8
7	2	14		2	3 ⌢	3	9
			4		2 ⌢	4	8
6	3	18		2	1 ⌢	5	5
			2				
5	4	20			5		
			0			1	
4	5	20			4		
			2			1	
3	6	18			3		
			4			1	
2	7	14			2		
			6			1	
1	8	8			1		

Con3natio. Dimidia numerum et sume terminos arithmeticae progressionis binariae totidem, productum duplica.

Nota progressio arithmetica in numerum terminorum dat geometricam.

In con4nationibus de 5. 5 multiplicatur per 1.	$5 \frown 1$	$5 \frown 1$
et 4 multiplicatur per 2 + 1 [=] 3.	$4 \frown 2+1$	$4 \frown 3$
et 3 per 3 + 2 + 1 [=] 6.	$3 \frown 3+2+1$	$3 \frown 6$
et 2 per 4 + 3 + 2+ 1 [=] 10.	$2 \frown 4+3+2+1$	$2 \frown 10$
et 1 per 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =15.	$1 \frown 5+4+3+2+1$	$1 \frown 15$

		5	5	5	35	Vid.
	7)					
1		12	$8+4$	8 4	20	tab.
	6)					
4		18	$9+6+3$	9 6 3	10	meam
	2)					
3		20	$8+6+4+2$	8 6 4 2	4	in
	5)					
		15	$5+4+3+2+1$	5 4 3 2 1	1	*Comb.*
				5 12 18 20 15		

1–15 *Nebenbetrachtungen:*

$6 \frown 5 \smile 2$	$5 \frown 2 \smile 2$	5
$5 \frown 4 \smile 2$	$12 \frown 2 \smile 2$	12
$4 \frown 3 \smile 2$	$12 \frown 3 \smile 2$	18
$3 \frown 2 \smile 2$	$[20] \frown 2 \smile 2$	[20]
$2 \frown 1 \smile 2$	$6 \frown 5 \smile 2$	15

26,4 secundanis *L ändert Hrsg.* 26,29+31 duplica. | Con4natio. Sume numerum termino uno altiorem et omitte producti duplicationem *gestr.* | Nota *(1)* summas *(2)* pro progressionis *(3)* progressio *L* 26,35 1 *erg. Hrsg.* 2–4 = *erg. Hrsg. dreimal* 20 10 *L ändert Hrsg. zweimal*

26,7 In com2nationibus de 5: Leibniz wechselt hier die Beziehungsweise; statt $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ entspricht sie im folgenden $\binom{n+1}{2}$, $\binom{n+2}{3}$ etc. 26,28 f. Dimidia . . . duplica: Die Formel ist nicht richtig.

Con5nationes

$5 \frown 1$

$4 \frown 2+1, +1$

$3 \frown 3+2+1, +2+1, +1$

$2 \frown 4+3+2+1+3+2+1+2+1+1$

$1 \frown 5+4+3+2+1+4+3+2+1+3+2+1+2+1+1$

$\qquad\qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

$\quad 5 \qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

$\quad 8+4+4\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

$\quad 9+6+3+6+3+3$

$\quad 8+6+4+2+6+4+2+4+2+2$

$\quad 5+4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1$

$8 \frown 1$									8										8
7	2	1							14	7									21
6	3	2	1						18	12	6								36
5	4	3	2	1					20	15	10	5							50
4	5	4	3	2	1				20	16	12	8	4						60
3	6	5	4	3	2	1			18	15	12	9	6	3					63
2	7	6	5	4	3	2	1		14	12	10	8	6	4	2				54
1	8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5	4	3	2	1			36

14–16 *Nebenbetrachtungen:*

$8 \frown 1$

$7 \frown 2+1$

$6 \frown 3+2+1$

8–10 *Rechts daneben:* Nota in progressionibus geometricis diversis summae sunt aequales si exponentes numeris reciproci *gestr. L*

27,8 tab.: *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, S. 7 (*LSB* VI, 1 S. 174). 20 54: Richtig wäre 56; der Fehler beeinträchtigt die beiden folgenden Differenzenschemata, wobei im rechten Schema ein weiterer Flüchtigkeitsfehler hinzukommt.

		0														
	5		0													
3		5		0												
	2		5		0											
1		3		5		8										
	3		2		5		8									8
3		0		3		13									13	
	0		2		2		21							2		21
1		0		1		15							1		15	
	1		2		1		36					1		1		36
1		1		3		14					1		3		14	
	0		1		4		50			1		0		4		50
1		1		3		10			1		2		3		10	
	1		2		7		60			2		2		7		60
3		0		1		3					0		1		3	
	4		2		6		63					2		6		63
3		4		3		9							3		9	
	1		6		9		54							9		54
5		3		9		18									18	
	6		9		18		36									36
3		9		18		36										
	9		18		0											
		18		0												
	18		0													
		0														

4. DE ARTIBUS RESOLVENDI PROGRESSIONEM IRREDUCTAM
[Juli – Dezember 1672]

Die folgenden Stücke stehen in engem inneren und äußeren Zusammenhang, wobei sich ihre Reihenfolge aus den Querverweisen ergibt. Alle vier Teilstücke sind auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie die physikalischen Aufzeichnungen Cc 2, Nr. 282, 484 A, B und 486 B-D, deren Entstehung aufgrund inhaltlicher Bezüge zwischen dem Erscheinen der Juli- und der Dezembernummer des *Journal des Sçavans* von 1672 anzusetzen ist. Am Ende von N. 4_4 äußert Leibniz die Absicht, sich im Werk von Gr. de Saint-Vincent über die Verhältnisrechnung zu informieren; in der *Accessio* von Ende 1672 (vgl. *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 f.) hat er dies bereits getan. N. 4 gehört wahrscheinlich zu den Manuskripten, auf die Leibniz in seiner Stellungnahme für die Royal Society vom 13.II.1673 verweist (vgl. *LSB* III, 1 N. 4 S. 25 Z. 1 – S. 26 Z. 13 u. S. 19 Z. 17–19).

4_1. PARS PRIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 148–149. 1 Bog. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 149 v°, 148 r°. Bl. 148 v°, 149 r° leer.
Cc 2, Nr. 510 C

Cum artes invenerim progressionem irreductam resolvendi et componendi per aliam reductam, (quod est gradum struere ad magnum illud problema: dato fundamento progressionis invenire reductionem), easque in potentiis comprobaverim, paulo ante utilitas eius rei admonenda est. Pascalius cum summam invenisset potentiarum, quarum radices sunt progressiones arithmeticae, se tenere non potuit, quin triumphabundus ita concluderet: *Quantum haec notitia ad spatiorum curvilineorum dimensiones conferat, satis norunt, qui in indivisibilium doctrina tantisper* (tantillum) *versati sunt. Omnes enim omnium generum parabolae illico quadrantur et alia innumera facillime mensurantur*. Et

20 summam | tantum *gestr.* | invenisset *L* 21 arithmeticae, *(1)* gaudio abreptus exclamavit *(2)* se *L*

---

17 invenerim: N. 4_2. 19 comprobaverim: N. 4_3. 21+31,1 concluderet, subicit: Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, Nr. X *Potestatum numericarum summa*, 1665 [Marg.], S. 40 (*PO* III, S. 364).

subicit canones quosdam generales de applicatione ad spatia. Quid vero nunc dicemus, ubi quadrata et cubos omnis generis progressionum ac proinde omnis generis figurarum in unum colligere, sed et eorum terminos, et differentias cuiuscunque generis, et singulas infinitis modis reperire.

Reperire terminos, summas, differentias progressionis cuiusdam, eadem solutio absolvit. Pascalius non posset solvere problema, reperire terminos, summas, differentias progressionis constantis ex surdesolidis numerorum, quorum differentiae sunt duplum summae ex quadratis et surdesolidis deinceps ab unitate compositae. Et ex positis tamen principiis solvere hoc problema, et aliud quodcunque perfacile est.

Sunt quaedam progressiones quae non producunt in infinitum, sed terminantur, aliquando, quando incrementa sunt decrescentia, et tali mensura, ut concurrant aliquando incrementum et decrementum, et hoc fit in figuris linearum in se redeuntium, circulorum ellipsium, ovalium, et quorundam etiam spiralium. Quando vero incrementa et decrementa non sunt synodica, tunc lineae non sunt in se redeuntes, ut parabolae, hyperbolae[,] quaedam spirales, conchoeides. Potest linea fingi, quae neque in se redeat, neque tamen longius produci queat. Qualis scilicet dependeret ex applicatione ad circulum et ellipsem vel ovalem, vel aliam in se redeuntem.

Reperire progressionis terminos, summas[,] differentias, quae constet ex continue factis per multiplicationem numerorum naturalium, vel alterius cuiuslibet progressionis. Hoc esse difficile problema patet. Nec sane quicquam fingi potest universalius. Primum resolvenda est progressio, ex cuius terminorum continuis multiplicationibus producitur nova. Cum ita sint differentiae componentes inter se invicem, ut sunt termini, et data sit ratio terminorum, dabitur et ratio differentiarum, datis differentiis progressionis novae, earumque in infinitum continuandarum ratione, dantur omnes termini, differentiae[,] summae, seu integrae progressionis resolutio.

1 spatia. *(1)* Ego vero *(2)* Quid *L* 7 ex *(1)* radicibus *(2)* surdesolidis *L* 8 f. Et ... perfacile est *erg. L* 14 sunt *(1)* proportionalia, *(2)* synodica *L* 20 universalius. *(1)* Applicationem *(2)* Primum *L* 21 progressio | prima *gestr.* | , ex *L* 22 termini, *(1)* datis terminis unius resol *(2)* fiat ea ratio differentiarum *(3)* et *L*

1 nunc: N. 4_3. 6 Pascalius: Pascal beschränkt sich *a. a. O.* auf ganzzahlige Exponenten.

Quaerere, an et quando plures progressiones concurrant in unum terminum, similem, habet usum, ut sciamus quando figurae se osculentur, seu cum habent unam chordam seu rectam quae producta statim extra figuram proditura sit, communem ut duae hyperbolae se possunt osculari, hyperbolae et ellipses se possunt osculari, ita possunt duo solida se osculari, et habere non tantum unam chordam, sed et unum planum commune. Eodem modo quaeri ultra potest, quando plures, tres, quatuor, quinque figurae se osculentur, sed difficillimum est omnium problematum in hoc negotio, invenire an infinitae progressiones datae eodem tempore in terminum communem incidant, puto tamen solubile esse tale problema, modo infinitae illae progressiones habeant definitam relationem ad se invicem, seu comparationem cognitam. Et hoc est in effectu, quaerere an et ubi data progressione aliqua reperiri possit eius differentia universalis, et quaenam illa sit idque sine continuatione calculi, usque dum inveniat, qui modus solvendi non est perfectus, quia si nihil inveniamus non sumus certi an non reperturi fuerimus continuando.

Et si non dantur differentiae differentiarum primi gradus, an dentur secundi gradus, an tertii[,] an quarti aut an omnino. Puto hoc aliquando inveniri posse. Hoc qui invenerit scientiam progressionum, et nobilissimam arithmeticae partem ad apicem perduxerit.

Hoc ut inquiratur videndum an una progressio continue crescat, an vero nunc decrescat, nunc crescat. Si continue crescat, inveniri potest an aliquando an non concurrat. Inveniri enim potest quando terminum habeat, aut an unquam. Et si habet, an altera, eodem tempore, et si non omnes eodem tempore, nunquam concurrent illae infinitae.

De progressionibus ergo veris solutio est in potestate non de seriebus omnibus regularibus sed modo regredientibus modo progredientibus, quae scilicet eundem terminum habere possunt plus simplici vice.

Nota etiam quoad progressiones veras id quod dixi non sufficit. Neque enim est terminus datus. Igitur tantum videndum est, cum progressiones duae diversae, verae seu continue crescentes vel decrescentes aliquando maxime sibi fiant propinquae, videndum an in eundem terminum incidant, an non; tempore maximae propinquitatis, quae certe determinari potest. Et si incidunt, an et sequentes. Sed de seriebus in universum quae scilicet progressiones non sunt, sed sunt progressiones regressionibus mixtae. Nihil est hoc problemate difficilius. Si quis tamen inquirendi sibi patientiam sumat, is inquirere

1 an et *erg. L* 2 habent *(1)* unum diametrum, seu lineam *(2)* unam *L* 6 osculentur, *(1)* item quando se osculantur, an *(2)* sed *L* 7 invenire *(1)* infinitas progressiones eodem termino incidentes *(2)* an *L*

debet de omnibus approximationibus duarum progressionum in genere, an aliquando coincidant, an vero ea necesse sit coincidere nunquam, et si aliquando coincidant, an omnes aliarum quoque termini coincidant eodem tempore.

4_2. PARS SECUNDA

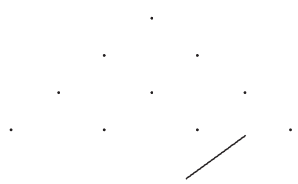
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 150–153. 2 Bog. 2°. 4 S. Textfolge Bl. 151 v°, 150 r°, 153 v°, 152 r°. Bl. 150 v°, 151 r°, 152 v°, 153 r° leer. Die Zusammengehörigkeit der Bögen ist durch eine Kustode gesichert.
Cc 2, Nr. 510 D

Nota ex terminis item calculari possunt omnia: differentiae, scilicet summae, termini sequentes. Sed differentiae et summae plurimae tam praecedentes quam sequentes, quae continentur recta differentiis componentibus parallela ex termino ultimo cognito ducta non possunt produci nisi per divisiones quoque et subtractiones, at differentiae primae omnia producunt per additionem et multiplicationem, methodo facili et universali.

Ad haec demonstranda fieri debet triangulum idque non numeris, sed literis priores numeros continentibus plenum. Ut fiat demonstratio[:]

---

11 *Daneben:*



1 debet | regulas universales *gestr.* | de *L* 10 summae *(1)* et termini praecedentes non nisi *(2)* plurimae *L* 11 ex *(1)* terminis cognitis duct *(2)* termino *L* 12 quoque *(1)* additionesque. At *(2)* et *L*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & o & & & & \\
 & & & d & & do & & & \\
 & & c & & cd & & cd & & \\
 & & & & & & do & & \\
 & b & & bc & & bc & & bc & \\
 & & & & & cd & & cd & \\
 & & & & & & & cd & \\
 & & & & & & & do & \\
a & & ab & & ab & & ab & & \\
 & & & & bc & & bc & & ab \\
 & & & & & & bc & & bc \\
 & & & & & & cd & & bc \\
 & & & & & & & & cd \\
 & & & & & & & & bc \\
 & & & & & & & & cd \\
 & & & & & & & & cd \\
 & & & & & & & & do
\end{array}
$$

Haec tabula monstrat dato uno termino omnes alios terminos, summas, differentias intra idem triangulum comprehensas invenire et omnes in infinitum, si differentiae componentes sunt finitae, aut differentiae saltem componentes, secundi aut tertii aut alicuius gradus sunt finitae, aut etsi infinitae sint, modo earum constructio[,] ratio, progressio, series, definita sit.

Deberet alia construi tabula summarum tam terminorum, quam differentiarum. Sed hoc opus non est, iungantur solum in unum conspectum, iam summata sunt in tabula, neque enim alia eorum summa fieri potest quam dispersa simul scribere.

Sed alia penitus tabula constituenda est fundamenti. Et quidem fundamenti aut progressionis ipsius aut fortasse alterius hanc componentis, qualis est series aliqua differentiarum primi aut alterius gradus. Sed quia cum hac progressione componente eodem modo procedendum est, quo cum prima ideo solum meretur nova tabula constitui non iam ex differentiis componentibus, sed ex fundamento progressionis sumta.

1–17 *Schema zunächst aus den sechs Grundelementen a, b, c, d, e, o aufgebaut, dann e jeweils in o korr. und überzählige Elemente gestr. L* 19 f. differentiae | primae *erg. u. gestr.* | componentes *erg.* | sunt *L* 22 f. sit. *(1)* Debet *(2)* Deberet *L* 29 solum *(1)* considerandum est, quando *(2)* meretur *L*

Nota termini eiusdem distantiae a primis sunt inter se proportionales, seu ut unus est ad unum sibi respondentem seu eiusdem altitudinis seu latitudinis, ita et alius. Nota progressionis triangulum est aequilaterum, basis eius esto longitudo, latus eius esto latitudo: at profunditas esto computanda differentiis secundi gradus. Et haec crescit ut solida ultra cubum imaginatione.

Termini eiusdem latitudinis et diversae longitudinis, aut eiusdem longitudinis[,] diversae latitudinis sunt proportionales, seu eandem habent rationem. Sed ut est *cd* ad [*cddo*]. ita est *bc* ad *bccd*. Imo male: eandem quidem habent comparationem, sed non eandem rationem. Magnum inter haec discrimen. Nulla hic vera ratio reperiri potest cum omnia additionibus transigantur.

Quaelibet differentia radicalis (imo in genere quilibet terminus) duos radios habet alterum perpendicularem, alterum obliquum descendentem in quem radiat. Et quilibet radius a quolibet termino intermedio eodem modo reflectitur in duos radios duobus illis directis parallelos. Numerus radiorum concurrentium, facit numerum componentium sumendorum. Sed cum radius obliquus cum priore coincidat, ideo eius ratio non habenda, sed loquendum solum cum eo quem parallele reflectit cum eo, qui ad se non inciderat. Hinc quia plures radii reflexi concurrunt in unum punctum inde additio sequentium. Cogitandum autem est, duos radios semel unitos, manere semper unitos.

Nunc de fundamento progressionis. Fundamentum progressionis idem est quod connexio quantitatum, id est modus inveniendi quantitatem data quantitate, quod fundamentum si aliquoties continuetur[,] tota quantitatum series dicitur progressio. Vo-

1 Nota. | ut est unus *streicht Hrsg.* | *(1)* terminus primi ordinis *(2)* termini *(a)* ordinum *(b)* eiusdem *L* 2 seu latitudinis *erg. L* 2 f. Nota *(1)* altitudinem vocare possum distantiam a terminis progressionis, *(a)* latitudinem *(b)* longitudinem distantiam a *(2)* progressionis *L* 8 cdde *L ändert Hrsg.* 10 f. transigantur. *(1)* Ratio commoda inquirendi in differentiam universalem, ne *(2)* Quaelibet *L* 16 f. inciderat. *(1)* Sed et idem radius ex *(2)* Hinc *L* 17 quia *(1)* in cddo *(a)* concurrunt per exemplum plura d. *(aa)* ideo *(bb)* seu plures radii, hinc iam *(b)* formantur *(2)* plures *L* 19 f. quod *(1)* comparatio quantitatum *(2)* connexio *L*

1 f. Diese Aussage ist unrichtig, was Leibniz im nächsten Absatz selbst bemerkt.

cem satis propriam ad hunc transitum exprimendum non reperio. Fortasse intererit ipsum nomen p r o g r e s s i o n i s adhibere; et progressionem definire modum quo quantitas invenitur data alia quantitate. Nam ratio non nisi progressio geometrica est. P r o g r e s s i o seu modus educendi quantitatem ex quantitate est, vel addendo vel subtrahendo, vel addendo simul et subtrahendo, et vel addendo plus quam subtrahendo, quo casu progressio est a s c e n s u s , vel subtrahendo plus quam addendo, quo casu progressio est d e s c e n s u s [,] vel neutrius excessu determinato, quo casu progressio est f l u c t u a t i o. Porro additio aut subtractio est numeri aut determinati per se, aut determinati per aliam progressionem, et huius rursus aut per se aut per aliam progressionem in infinitum. Hinc habemus p r o g r e s s i o n e m , p r i m i s e c u n d i t e r t i i e t c. g r a d u s. In qualibet progressione dantur t e r m i n i , dantur d i f f e r e n t i a e , dantur d i f f e r e n t i a e d i f f e r e n t i a r u m , seu d i f f e r e n t i a e 2 d a e , t e r t i a e etc. Dantur s u m m a e .

Porro t r i a n g u l u m p r o g r e s s i o n u m est aggregatum ex terminis omnibusque differentiis omnium graduum, terminis in linea recta, differentiis inter duos terminos collocatis. Termini sunt b a s i s t r i a n g u l i , differentiae eiusdem gradus sunt b a s i

---

1 f. *Am Rande:* Loco progressionis poterit generale nomen esse p r o d u c t i o , dato enim respondet p r o d u c t u m. Producti species sunt[:] summa residuum; f a c t u s , q u o t i e n s. P r o d u c e n t e s sunt: componentes seu p a r t e s , subtrahentes, seu e x -partes. F a c t o r e s , divisor et dividens seu t e r m i n i r a t i o n i s. Residuum simul et componens d i f f e r e n t i a est. Quod si a n t e c e d e n s est maius est e x c e s s u s si minus d e f e c t u s. Q u o t i e n s et f a c t o r est r a t i o. Ratio est aequalitatis, minoritatis, maioritatis.

Nota ut fractiones seu rationes, faciunt separatas velut species possunt addi subtrahi multiplicari dividi, et fractiones non simplices tantum, sed et continuatae, ita, progressiones quoque, ita ut quivis terminus, quaelibet summa, quaelibet differentia ad aliam progressionem seu constructionem vel productionem habent datam, imo eadem methodo productionum universali etiam rationes, ad aliam datae productionis fieri possunt etsi supputationis methodi speciales.

16 collocatis. *(1)* Termini et differentiae parallelae sunt *(2)* Termini *L* 19 q u o t i e n s. *(1)* seu ratio p r o d u c e n t i u m species sunt *(2)* P r o d u c e n t e s *L*

p a r a l l e l a e. Lineae basi parallelae continuo decrescunt unitate. Triangulum progressionum est aequilaterum. Basi parallelae possunt etiam dici b a s e s ; sunt enim termini alterius progressionis. Omnes enim differentiae progressionum sunt p r o g r e s s i o n e s h o m o l o g a e , ut latera in triangulo homologa appellamus. Pluribus progressionibus homologis in eodem triangulo aequilatero positis, differentiae duorum primorum, primae secundae tertiae progressionis, cadunt in l a t u s p r i u s , duorum secundorum terminorum primae 2^{dae} tertiae progressionis, cadunt in latus p r i u s h o m o l o g u m s e c u n d u m , duorum tertiorum in tertium etc. Similiter contra l a t u s p o s t e r i u s h o m o l o g u m q u e e i s e c u n d u m t e r t i u m q u e constituunt series differentiarum duorum ultimorum terminorum, aut penultimorum, aut antepenultimorum, etc. ex diversis progressionibus.

Summa terminorum unius trianguli progressionum est summa progressionis arithmeticae ab 1. usque ad numerum terminorum baseos trianguli. Nam in eodem triangulo aequilatero quodvis latus aut quaevis b a s i s p a r a l l e l a est semper minor praecedenti unitate. Nota latus aut basis parallela est tota: ut ad *a. b. c. d. o.* parallela est *ab. bc. cd. do.* at homologa utrinque una minor seu *bc. cd.* ita triangulo maiori: *a. d. abbbcccd.* homologum est: *bc. cd. bccd.* At simile tantum non etiam homologum *a. b. ab.*

Quodlibet triangulum aequilaterum, differt a s i m i l i non homologo proxime minori numero terminorum, est numero postremo latere parallelo unitate [maius]. Si triangulum est homologum differt tribus talibus numeris. Simile enim differt solum uno latere, homologum tribus.

Fundamentum iam omnium demonstrationum circa additiones subtractionesque in progressionibus hoc unum est: E x t e r m i n o a n t e c e d e n t e e t d i f f e r e n t i a i n t e r p o s i t a i m m e d i a t i s componitur t e r m i n u s s e q u e n s. Et similiter ex termino sequente immediato ademta differentia interposita immediata, relinquitur terminus procedens.

3 f. p r o g r e s s i o n e s *(1)* componentes *(2)* i n t e r i e c t a e *(3)* p a r a l l e l a e pluribus progressionibus parallelis *(4)* h o m o l o g a e *L* 6 p r i u s *erg. L* 7 latus *(1)* posterius priori homologorum *(2)* p r i u s *L* 9 f. differentiarum *(1)* ⟨plurium⟩ ultimo *(2)* duorum *L* 12 trianguli | aequilateri *gestr.* | progressionum *L* 14 b a s i s *(1)* homologa *(2)* p a r a l l e l a *L* 19 non homologo *erg. L* 20 terminorum, *(1)* qualis *(2)* quantus est numerus *(3)* est *L* 20 maior *L ändert Hrsg.* 24 f. d i f f e r e n t i a *(1)* immediata superstante *(2)* i n t e r p o s i t a *L* 26 immediato *erg. L* 26 differentia *(1)* superest *(2)* interposita *L* 27–38,1 procedens. *(1)* Et quia partes *(a)* primi sunt *(b)* partis sunt partes totius *(2)* Termini *L*

Termini omnes ordinis dati (ut tertii) omnium progressionum parallelarum, componuntur ex omnibus terminis ordinis praecedentis, (exempli causa ex secundis) seu omnes termini secundi componuntur ex omnibus primis, et omnes tertii ex omnibus secundis etc. eiusdem trianguli.

Demonstratio est facilis. Componitur enim terminus primus ordinis dati ex primo et secundo praecedentis, et secundus ordinis dati ex secundo et tertio praecedentis, et tertius ordinis [dati] ex tertio [et] quarto, et ita porro. Cum ergo terminus novus ordinis sequentis semper desideret unum veterem et unum novum ordinis praecedentis, hinc tota series, ordinis sequentis, non desiderabit nisi seriem praecedentis unitate maiorem (ut supra ostensum est), ab eadem basi incipientem et in eodem triangulo desinentem, id est omnes termini ordinis sequentis ad sui compositionem non desiderant nisi omnes praecedentis, intra idem triangulum.

Omnes termini ordinis dati, componuntur ex omnibus terminis cuiuscunque ordinis praecedentis v. g. *abbc.* $-$ *cddo* componi potest vel ex *ab* $-$ *do.* vel ex $a - o$. Cum enim componantur illi ex immediate praecedentibus, et hi rursus ex immediate praecedentibus, et compositi componantur ex componentibus componentium, etiam illi ex immediate praecedentibus componentur.

Omnes termini sequentium ordinum eiusdem trianguli, componuntur ex omnibus terminis cuiuscunque ordinis praecedentis. Si enim omnes ordinis dati per prop. praec., ergo omnes omnium ordinum.

Omnes termini totius trianguli componuntur ex terminis ordinis primi. Sunt enim omnes termini totius trianguli aut ordinis ipsius primi, ergo ex ipso, aut aliorum sequen-

---

1 *Am Rande:* Ordo terminorum.

Termini ordinis primi, secundi. Differentiae ordinis primi[,] secundi.

1 omnes *(1)* sequentes *(2)* ordinis *L* 1 f. parallelarum, | ordinis sequentis, *gestr.* | componuntur *L* 4 etc. *erg. L* 4 f. trianguli. *(1)* Omnes *(2)* Demonstratio *L* 7 praecedentis *L ändert Hrsg.* 7 et *erg. Hrsg.* 9 f. (ut supra ostensum est) *erg. L* 10 et . . . desinentem *erg. L* 13 ex *(1)* praecedentibus *(2)* praecedentium ordinum *(3)* omnibus *L* 15 illi *erg. L* 18 ex *(1)* ordine praecedente *(2)* omnibus *L* 19 per prop. praec. *erg. L* 21 termini *(1)* sequentium *(2)* totius *L*

---

10 supra: s. o. S. 37 Z. 12–15.

tium, sed termini ordinum sequentium componuntur ex terminis ordinis antecedentis dati per prop., qualis est ordo primus ratione omnium caeterorum.

Et ideo terminos ordinis primi possumus appellare: terminos componentes seu latus prius. Si contingat in aliquo triangulo progressionum utcunque continuato, differentias cuiusdam ordinis, (ut differentias primas secundas seu differentias differentiarum, item tertias etc.) esse semper inter se aequales seu dari differentiam universalem, tota progressio utcunque continuata in infinitum componetur ex terminis finitis ordinis primi a basi seu a termino primo ipsius progressionis, usque ad ipsam differentiam universalem.

Continuato enim utcunque triangulo, semper ex latere primo sequentia omnia componentur. Iam continuato utcunque triangulo, in casu nostro lateri primo, (et omnibus aliis,) nihil accedit nisi 0. cum enim repertae sint differentiae omnes aequales inter se eiusdem ordinis. Ergo omnes earum differentiae novae per continuationem ipsis superstruendae erunt 0. quae nihil addunt, quasi ergo nihil accederet, sequentia omnia ex antecedentibus seu ex latere primo, utcunque non continuato, inutilis enim est continuatio, cum non nisi 0. producat, componentur. Hoc est theorema maximi momenti.

Quilibet terminus est radiatione directa in omnibus terminis sequentibus in eadem cum ipso linea basi parallela constitutis, seu in omni progressione, terminus praecedens inest omnibus sequentibus.

Cum enim ea linea contineat seriem progressionum, sit autem in omni serie progressionum terminus sequens maior antecedenti continue. Iam omnis numerus [minor] inest

---

6 *Auf dem linken Rand:*

$$\begin{array}{rr} 6 & 8 \\ 4 & 4 \\ \hline 10 & 12 \end{array}$$

Darunter:

$$\begin{array}{cc} . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & \\ . & \end{array}$$

2 per prop. *erg. L* 4 f. differentias *(1)* eiusdem *(2)* cuiusdam *L* 6 seu ... universalem *erg. L* 17 f. seu ... sequentibus *erg. L* 20 maior *L ändert Hrsg.*

[maiori], ergo terminus datus omnibus sequentibus eiusdem lineae basi parallelae inerit. Idem sic enuntiari potest:

Quilibet terminus est radiatione reflexa, in omnibus terminis omnium linearum, quibus ii termini insunt, quibus ipse inest. Est enim pars partis, pars etiam totius. Nota hic ducantur rami plurium linearum, sive colore sive aliis modis distinctarum. Idem sic enuntiari potest, terminus datus inest in omnibus terminis, omnis progressionis; et omnis seriei differentiarum in terminos transeuntium, quibus alius numerus inest, cui inest ipse. Hinc sequitur etiam illis inesse, ad quos ipse radius reflexionis reflexus pervenit.

Nota hae propositiones verificari [possunt] etiam in illis seriebus regularibus, in quibus aliquando crescunt termini, seu quae propriae progressiones non sunt, analogia quadam, fingendus enim est additus sequenti terminus antecedens decrescens ad calculum continuandum, et ipsemet pro differentia seu termino progressionis uno gradu altioris, eiusdem seriei differentiarum componentium habendus est. Nec alia inde confusio sequetur calculi, quam ut termino eiusmodi quaerendo adhibeantur eae regulae, quae eius differentiae quaerendae adhiberentur. Posset idem transigi per numeros n i h i l o m i n o r e s ; et omnino non magis turbare nos debet imaginaria subtractio maioris a minore, quam imaginaria divisio minoris per maius.

---

2 f. *Neben dem gestrichenen Text, nicht gestrichen:* L i n e a v e r s u s b a s i n i n c l i n a t a seu series differentiarum. Genera. Series. Linea terminorum linea differentiarum, linea differentiarum et terminorum.

1 minori *L ändert Hrsg.* 2 f. potest: | Quilibet terminus est radiatione directa in omnibus *(1)* lineis *(2)* terminis in eadem cum ipso linea *(a)* basi parallela *(b)* versus basin inclinata constitutis *(aa)* . Quilibet terminus *(aaa)* componitur ex omnibus terminis praecedentibus eiusdem progressionis, addita differentia a postremo. *(bbb)* continet quemlibet terminum praecedentem eiusdem progressionis, *(bb)*, vel quilibet terminus continetur in omnibus terminis sequentibus, quorum differentia est *(aaa)* primi *(bbb)* cuiuscunque gradus, scilicet sive differentia sit sive differentiae differentia, etc. *gestr.* | Nam linea illa versus basin inclinata, continet omnes terminos magis progressos, quorum differentia est terminus datus. Iam *(aaaa)* omnes termini maiores quorum *(bbbb)* omnis differentia inest termino maiori cuius differentia aut differentiae differentia est quocunque gradu. *streicht Hrsg.* | Quilibet *L* 3 in *(1)* omnibus lineis *(2)* omnibus *L* 6 terminis *(1)* omnium progressionum, et omnium differentiarum *(2)*, omnis *L* 7 seriei *(1)* differentiarum *(2)* differentiarum *(3)* componentis *(4)* lineae *(5)* differentiarum *L* 9 Nota *(1)* haec propositio verificari potest *(2)* hae propositiones verificari | potest *ändert Hrsg.* | etiam *L* 14 ut *(1)* calculus *(2)* termino *L*

Quilibet terminus radiat in omnes terminos trianguli progressionis demtis iis, qui sunt progressione eius superiores, et serie differentiarum in terminos transeuntium, cui ipse inest, anteriores seu in terminos inter has duas lineas comprehensos. Vel quod idem est: quilibet terminus radiat per triangulum rectangulum inversum, seu basin habens erectam cuius basis in infinitum producibilis est ipsa progressio, et hypotenusa in infinitum producibilis est ipsa series differentiarum transeuntium. Poterat loco trianguli nominari sector circuli, vel quia linea interminata spatium quodcunque. Facilis est demonstratio, quilibet enim terminus in progressione non reflectit nisi in linea parallela et aequali seriei differentiarum transeuntium, et quilibet terminus seriei differentiarum transeuntium, non reflectit nisi in linea parallela et aequali lineae progressionis, hae propositiones primum demonstrandae. NB.

4_3. PARS TERTIA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 146–147. 1 Bog. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 147 v°, 146 r°. Bl. 146 v°, 147 r° leer.
Cc 2, Nr. 510 A

Progressiones addere subtrahere, multiplicare dividere, rationes assignare, tertiam, mediam, quartam proportionalem invenire, progressionem invenire quae ad datam rationem habeat datam (supposita proportionis reductione ad differentiam universalem;) id est ut omnes termini sint ad omnes terminos respondentes modo praescripto.

Si quadratum aliamve potentiam progressionis datae, aut etiam radicem progressionis datae id est progressionem cuius omnes termini ad omnes terminos alterius respondentes hoc sint modo, agendum est ut fit, cum radices eorum extrahere volumus, quae

1–3 *Am Rande:* NB. Rectius in rhombo, si ipsum triangulum relinquas. NB.

3 seu ... comprehensos *erg. L* 4 triangulum *(1)* isosceles *(2)* rectangulum *L* 5 producibilis *erg. L* 6 transeuntium *(1)* , seu series compositionis *(2)* . Poterat *L* 9 transeuntium *erg. L*
16 *(1)* Proportiones *(2)* Progressiones

dantur in factoribus, ut radicem extrahere de $5 \frown 5$. seu radicem extrahere de $2 \frown 8$. Quod an per binomia fieri possit dubito, ideo de radicibus progressionum loquendum non est.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & 6 & & & & & 3 & & & & & 9 & & \\ & 4 & & 10 & & & 2 & & 5 & & & 6 & & 15 & \\ 8 & & 12 & & 22 & 4 & & 6 & & 11 & 12 & & 18 & & 33 \end{array}$$

Nota ut ad progressionem datam datasve alia qualem poscimus constituatur, non est necesse differentias componentes datae datarumve esse primi gradus, sufficit differentias componentes quaesitae etiam assumi eiusdem gradus. Quid si vero duae pluresve sint progressiones, in unum addendae, vel in se invicem ducendae, resolutae quidem, sed differentiarum componentium diversi gradus, reducendae sunt ad unum gradum communem differentiarum, quod fieri potest non difficulter, quia differentiis componentibus primi alteriusve gradus definitis, inveniri possunt definitae differentiae 2^{di} gradus. Quemadmodum ergo in fractionum additione et subtractione ad communem [nominatorem], et in potestatum algorithmo ad communem potentiae gradum, ita, hic ad communem differentiae gradum reducendae sunt progressiones omnes. Hoc facto licebit facere progressionibus pene quicquid numeris, nec tantum progressioni addere subtrahere multiplicando dividendo applicare numerum, sed et aliam progressionem; ut progressionem

---

1 *Dazu am Rande:*

$$\begin{array}{ccccc} & & 25 & & \\ & 16 & & [41] & \\ 9 & & 25 & & [66] \end{array}$$

2 *Darunter:*

$$\begin{array}{lllll} \text{Imo fortasse} & 9 \frown 9 \text{ f. } 81. & & 3 & 9 \\ & 3 \frown 3 \text{ f. } 9. & & 3 & 3 \\ & & & \overline{9} & \overline{27} \end{array}$$

8 pluresve *erg. L* 11 quod *(1)* ita fieri potest, cum *(2)* fieri *L* 11 quia *(1)* omnes differentiae componentes secundi grad *(2)* differentiis *L* 13 f. communem | numeratorem *ändert Hrsg.* |, *(1)* ita hic ad communem differentiarum gradum, *(2)* et *L* 20 31 *L ändert Hrsg.* 21 56 *L ändert Hrsg.*

in progressionem ducere; aut etiam plures. Ita habebimus progressionum potestates, seu gradus, progressiones rectas, planas, solidas seu recto planas, plano planas, plano solidas, solido solidas, et sic in infinitum. Eodem modo licet progressiones progressionibus dividere. Notabile autem est tantum descendi posse infra rectam quantum supra rectam, ut si rectam recta aut plano [dividas] potest descensus ab ascensu distingui per s u b : v. g. si rectam dividas per rectam est subplanum, uti si multiplices est planum. Et si subplanum dividas per planum producis rectam, et ita de caeteris.

Si progressionis datae differentias componentes multiplices per se ipsas, et numeros multiplicantes itidem per se ipsos, producetur nova progressio cuius omnes termini sunt quadrata praecedentium respondentium.

Eodem modo et cubos, et quadrato-quadrata etc. datae progressionis constitues. Item facere poteris, ut si una progressio sit quasi cubus, altera quasi quadrato-quadratum, si scilicet radix cubica unius investigetur et per eam ipsa multiplicetur. Hoc amplius quomodo resolvemus hoc problema: progressionem invenire cuius omnes termini sint quadrata, vel cubi, vel quadrato-quadrata etc. deinceps ab unitate. Vel in genere progressionem invenire cuius fundamentum sit datum, seu dato fundamento invenire differentias componentes.

Hoc problema capitale est, et inter apices arithmeticae iure merito habendum. Quanquam autem plenam huius solutionem nondum repererim, tamen quorum ope in multis, ac certe plerisque problematis satisfieri possit. Ut ergo exemplo proposito insistam, invenire progressionem quadratorum aut cuborum, aut surdesolidorum, etc. Quod id agemus, cum surdesolida difficulter reduci possint in differentias componentes. Id ergo ita agemus, sumatur progressio numerorum naturalium seu deinceps ab unitate, et per problema praemissum quaeratur progressio, quae sit eius quadratum vel cubus et ea progressio dabit quaesitum. Cum autem differentiae componentes non sint nisi 1. semel quod non multiplicat ideo soli numeri multiplicantes in se ducuntur dicto modo. Eodem modo dabitur summa quadratorum, vel potentiarum omnis generis progressionis, quod est plane admirandum.

2 progressiones *(1)* lineares, pl *(2)* rectas *L* 5 divi *L ändert Hrsg.* 7 f. caeteris. *(1)* Si possum radices extrah *(2)* Si *L* 8 progressionis *(1)* terminos *(2)* datae *L* 9 f. sunt *(1)* aliorum *(2)* quadrata *L* 21 progressionem *(1)* , cuius *(2)* radicum ab unitate *(3)* quadratorum *L* 27–44,1 admirandum. *(1)* Pascalius, *(2)* Hinc *L*

5–7 s u b : Die folgenden Beispiele sind unstimmig.

Hinc non tantum summas, sed et terminos quaerere possumus, seu ipsorum quadratorum et cuborum etc. genesis detegitur, eodem modo radicum extractio ex converso; eodem modo invenitur summa radicum, dato cubo, summa cuborum dato surdesolido, non datis radicibus[,] et cubus dato surdesolido, et differentia potentiarum, vel proximarum vel remotarum. Eadem applicari possunt ad subpotentias, seu radices radicum. Eodem modo differentiae dantur potentiarum et subpotentiarum nec tantum propinquae, sed et remotae, nam differentiae sunt termini progressionis altioris, distantiae unitate minoris vel maioris, minoris sequente, maioris antecedente, et differentiae differentiarum sunt termini distantiae binario (ternario) maioris antecedente minoris sequente etc.

Et summae differentiarum sunt summae progressionis altioris, porro terminus aliquis componi potest modis innumerabilibus[,] id est non tantum ex differentiis componentibus primis, sed et ex secundis, et ex differentiis vel multiplicatis, vel in unum additis, vel aut multiplicatis, aut in unum additis, et calculus subduci potest, quot modis in eadem progressione componi possit terminus idem. Porro haec quae de quadratis et cubis et aliis potentiis aut subpotentiis dico in qualibet progressione radicum vera sunt, cum Pascalius solverit hoc problema tantum in progressione arithmetica radicum, credens se invenisse solutionem universalem.

4_4. PARS QUARTA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 144–145. 1 Bog. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 145 v°, 144 r°. Bl. 144 v°, 145 r° leer. — Auf Bl. 144 r° unten die später geschriebene Adresse von Leibniz' Hand: „Karolus Emanuel de Roucy, chez M. Arnaud".
Cc 2, Nr. 510 B

4 radicibus *(1)*. Hoc exempl *(2)* et *L* 7 differentiae | simplices *gestr.* | sunt *L* 7 f. distantiae ... antecedente *erg. L* 8 sunt *(1)* summae *(2)* termini *(a)* progressionis adhuc altioris *(b)* distantiae unitate binario *(c)* distantiae *L* 9 (ternario) *erg. L*

16 solverit: Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, Nr. X *Potestatum numericarum summa*, 1665 [Marg.] S. 34–41 (*PO* III, S. 341–367). 16 f. credens ... universalem: Für Potenzsummen *a. a. O.* S. 34 und S. 36 (*PO* III, S. 346 und S. 352). In seinem Handexemplar hat Leibniz dem Pascalschen Text auf S. 36 „in qualibet progressione" die Ergänzung „arithmetica" beigefügt. 21 Roucy ... Arnaud: Charles-Emmanuel, Marquis de Roucy de Sainte-Preuve gehörte zum Kreis um Antoine Arnauld.

Inveniendus est non tantum modus inveniendi numerum loci dati in progressione, sed et dato numero invenire locum eius, aut proxime minoris in progressione, ut fit extractione radicum. Difficile est solutu hoc problema seu hic regressus.

Terminus aliquis datus componitur ex omnibus terminis praecedentibus progressionis immediate superioris addito primo suae.

Ergo componitur etiam ex omnibus terminis etiam non immediate superioris sed toties repetitis, quot sunt termini praecedentes immediate superioris, ita tamen ut pro ultimo termino praecedente immediate superioris, sumantur omnes non immediate superioris, pro penultimo omnes demto uno, pro antepenultimo omnes demtis duobus etc. Summae cuilibet addendus terminus primus immediate superioris, semel. Summae addendus terminus primus ipsius progressionis in qua terminus quaeritur, toties, quot sunt termini progressionis immediate praecedentis.

Dato numero scire quorum cuborum aut ipse aut proxime minor differentia sit, reiciatur unitas, residuum dividatur per 6. Quotiens quaeratur in summis obliquorum trianguli arithmetici, habebis cubum cui additus numerus datus aut proxime minor facit alium cubum.

Differentia terminorum distantium, est summa terminorum progressionis immediate superioris. Possunt et sumi mediate praecedentes eadem cautione. Nam in genere progressio immediate superior homologa cautione praescripta, et pro distantiae ratione aucta, cuilibet inferiori homologae seu eiusdem trianguli aequilateri applicatae aequivalet.

Differentias differentiarum eiusdem termini seu distantiae invenire, hoc de primis non intelligitur quae datae intelliguntur, sed de sequentibus. Invenietur facile quia ita est sequens ad differentias componentes secundam et tertiam, uti est praecedens ad primam et secundam. Ideo sumantur summae trianguli arithmetici in hac distantia adhibendae, multiplicentur per differentiam primi a secundo, et altera per differentiam secundi [a] tertio, summa erit differentia quaesita. Eodem modo invenietur et differentia distantium, cognito tantum loco seriei.

1 tantum *(1)* invenire numerum loci dati, sed et invenire *(2)* modus *L* 4 terminis *(1)* differentiae *(2)* praecedentibus *L* 7 praecedentes *erg. L* 7 f. pro *(1)* primo termino immediate praecedentis *(2)* ultimo *L* 10 addendus *(1)* unus terminus *(2)* terminus primus *L* 10 semel. | Tot *streicht Hrsg.* | Summae *L* 11 f. sunt termini *(1)* unitates in p *(2)* termini *L* 14 unitas, *(1)* productum *(2)* residuum *L* 15 cui *(1)* superpositus *(2)* additus *L* 17 terminorum *(1)* propositionis *(2)* progressionis *L* 24 sumantur *(1)* termini tri *(2)* summae *L* 24 f. adhibendae, *(1)* iungantur in unum, productum dividatur erit differentia duorum terminorum *(2)* multiplicentur *L* 25 a *erg. Hrsg.*

Hinc inveniri potest methodus mirabilis extrahendi radicem cubicam. Scilicet numerus datus dividatur per 6. productus est numerus seriei, quaeratur in ea serie differentia termini praecedentis binario distantis a numero dato, is erit cubus producti. En rationem etiam mirabilem faciendi cubum. Sed ea non opus. Productum potius multiplicetur in se, bis, seu fiat cubus eius. Is subtrahatur a numero dato vel numerus datus ab ipso seu sumatur differentia, reiciatur unitas, residuum dividatur per 6. Productus quaeratur inter summas trianguli arithmetici transversas, sed hae summae sunt semper termini progressionis [arithmeticae] duplae. Huius ergo exponens est radix cubica quaesita. E. g. radix cubica de 216. dividatur per 6. f. 36. cubus de 36 est 1296. eius differentia de 216 est 1080. Habemus differentiam duorum cuborum, quaesiti et alterius, quaeritur iam distantia. Subtrahatur 1. residuum dividatur per 6. Quaeratur inter summas terminorum progressionis [arithmeticae] duplae, inde ab exponente cubi inventi retro vel ante, retro si minor est[,] ante si maior quaesito summa exponentium, et terminorum differentia

---

9 *Nebenrechnung auf der Gegenseite:*

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \\ 216 \\ \hline 1080 \end{array}$$

1 f. Scilicet *(1)* numerus datus minuatur unitate productum *(2)* numerus *L* 5 f. dato | vel ... differentia, *erg.* | *(1)* a *(a)* producto *(b)* residuo *(2)* reiciatur *L* 7 inter *(1)* numeros naturales *(2)* summas *L* 8 geometricae *L ändert Hrsg.* 10 1080 | − 1. est 1079 *gestr.* | . Habemus *L* 11 Subtrahatur 1. *(1)* productum *(2)* residuum *L* 11 terminorum *erg. L* 12 geometricae *L ändert Hrsg.* 13 et *(1)* numerus ipse *(2)* differentia cuborum *(3)* terminorum *L*

---

9 1296 ist nicht Kubus, sondern Quadrat von 36. Der Fehler vererbt sich auf S. 47 Z. 3. Auf S. 47 Z. 8 und in der zugehörigen Nebenrechnung wird dann mit dem richtigen Wert gerechnet. 10–13 In Analogie zu S. 45 Z. 13–16 entwickelt Leibniz hier ein Verfahren zur Bestimmung der Differenz zweier Wurzeln, das in dieser Verallgemeinerung nicht zulässig ist.

cuborum, summa est, est differentia radicum. Ecce mirabilem modum dato uno termino dataque eius differentia ab alio termino distantiam invenire. Sed pergamus ita in exemplo:

$$1080 - 1.\ \text{est}\ \begin{array}{c} \cancel{4}\cancel{5}5 \\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{9} \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6} \end{array} \fint 179\frac{5}{6}.$$

Video opus esse primum solvere hoc problema: data summa differentiarum invenire summam homologam superiorem seu summam differentiarum differentiarum, cognito initio quidem, sed non quantitate distantiae terminorum. Imo fortasse carere possumus neglectis tuto unitatibus quot sunt radices quod adhuc ignoramus; ante divisionem per 6 dividendis, dividatur ergo per 6.

$$\begin{array}{c} \cancel{2}\ \ \ 4 \\ \cancel{4}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{0} \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6} \end{array} \fint 7406.$$

Productum neglectis superfluis quaeratur inter summas terminorum progressionis [arithmeticae] duplae inde a termino cuius exponens est. Imo cum non nisi duobus terminis secundo et tertio opus sit, ideo multiplicantur termini non nisi per

$3+3.$	$4+6.$	$10+10.$
(6)	(10)	(20)

Quaeres ergo numeros triangulares, seu eorum tabulam deinceps ab unitate. Quaere exponentem ordinis, coincidentem cum radice cubi novi inventi hoc loco 36. Ab hoc retro

8 *Nebenrechnung auf der Gegenseite:*

$$\begin{array}{r} 1296 \\ 36 \\ \hline 7776 \\ 3888 \\ \hline 46656 \\ 216 \\ \hline 46440 \end{array}$$

7 unitatibus | detrahendis *gestr.* | quot *L* 9 f. geometricae *L ändert Hrsg.*

8 Leibniz dividiert 44440 statt 46440. 12 f. An dritter Stelle müßte es 5+10. bzw. (15) heißen.

summa numeros triangulares, donec summa fiat producto aequalis. Numerus exponentium erit distantia terminorum. Sed error fateor aliquis antecedere potest. Non ergo sufficit haec solutio. Error incidere potest, quoties triangulares extremi ambo non sunt maiores radice cubi inventi.

$\underline{1\,0\underset{.}{0}\,00\underset{.}{0}\,00\underset{.}{0}}$

Producta continuorum solvenda per potentias potius quam contra. Minimi sumatur potentia eius gradus quot sunt producti continuorum.

$$
\begin{array}{rrr}
5 & 7 & 10 \\
7 & & \\
\hline
350 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcr}
5 & & \\
5 & + & 2 \\
5 & + & 5 \\
\hline
125 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
5 & 5 & 7 \\
2 & 5 & 5 \\
\overline{10} & \overline{25} & \overline{35}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
49 \\
5 \\
\hline
245 \\
10 \\
\hline
255
\end{array}
$$

Nota procedendum penitus ut in constructione $\square^{\text{torum}}$ et aliarum potentiarum. Quae enim accedunt, binomia et residua faciunt.

Constructio cuiusque tabulae progressionum facile inventa si exponatur tabula numerorum naturalium deinceps ab unitate seu exponentium, erit differentia eius universalis 1. Quae non multiplicat, tractetur haec differentia eo modo quo fundamentum novae progressionis postulat, tractatis eodem modo si necesse est, ut in numeris figuratis seu potentiis fieri debet, habebimus terminos omnes. Ordines ergo numerici sunt progressiones fundamentales. Omnia miranda arithmeticae reducuntur in progressiones, cubi etc. non nisi progressiones.

Ut tabulam de differentiis differentiarum construxi, ita et tabula de rationibus rationum a me constructa est. Unde erunt rationes vel simplices vel compositae, et com-

2 aliquis | non tamen magni momenti *gestr.* | antecedere potest. *(1)* Imo credo nullum. Quia semper maximus terminus triangularis tantus est, *(2)* Non *L* 7 f. continuorum *(1)*, differentiae eorum continue a minimo ducantur in se invicem etc. *(2)* . 5 *L* 14 f. faciunt. *(1)* Reductio *(2)* Constructio *L* 22–49,2 Ut ... rationum. *erg. L*

22 construxi: N. 4_2 S. 34 Z. 1–17. 23 a me constructa est: *a. a. O.*, vgl. aber S. 35 Z. 6–10.

positae variorum graduum. Erunt ergo rationes primi secundi, tertii gradus, consulenda quae Gregorius a S. Vinc. habet de ratiocinationibus rationum.

2 Gregorius a S. Vinc.: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647 [Marg.], Buch II, S. 51–166 und Buch VIII, S. 866–954.

5. DE DIFFERENTIIS PROGRESSIONUM DECRESCENTIUM
[Herbst – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 205–206. 1 Bog. 2°. 3 S. Textfolge Bl. 206 r° (= Teil 1); 205 r°, 206 v° (= Teil 2). Auf Bl. 205 v° Nebenbetrachtungen zu Teil 1.
Cc 2, Nr. 511

Datierungsgründe: Leibniz kennt in N. 5 bereits die Summe der reziproken figurierten Zahlen. Wie aus den Querverweisen ersichtlich wird, ist das Stück vor N. 6 entstanden. N. 5 gehört wahrscheinlich zu den Manuskripten, auf die Leibniz in seiner Stellungnahme für die Royal Society vom 13.II.1673 verweist (vgl. *LSB* III, 1 N. 4 S. 29 Z. 11–19).

[*Teil 1*]

P r o b l e m a   m a g n u m :   I n v e n i r e   p r o g r e s s i o n e m   i n   i n f i n i t u m   d e c r e s c e n t e m ,   c u i u s   d i f f e r e n t i a s   c o n t i n e a t   p r o g r e s s i o   d a t a   i n   i n f i n i t u m   d e c r e s c e n s ,   q u a n d o   i d   f i e r i   p o t e s t .

Ad progressionem quaesitam inveniendam, sufficit unum eius terminum invenire, exempli causa primum.

11 *Darüber:* Nondum explicui differentias generatrices per subtractionem.

11 | Ad hoc ut progressio data in infinitum decrescens contineat differentias alterius in infi *gestr.* | P r o b l e m a *L*

16 Nondum explicui: Leibniz befaßt sich damit in N. 6 S. 89 Z. 15–25.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & 2 & & & & & & \frac{3}{2} & \\
 & & & \frac{1}{1} & & & & & & 1 \\
 & & 1 & & \frac{2}{3} & & & & \frac{1}{2} & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \left[\frac{27}{54}\right] & & & & \frac{1}{4} \\
 & & \frac{2}{3} & & \left[\frac{3}{18}\right] & & & \left(\frac{1}{4}\right) & \frac{2}{8} & \\
 & & & \frac{1}{6} & & \left[\frac{108}{1080}\right] & & & & \frac{1}{10} \\
\left(\frac{1}{2}\right) & \frac{3}{6} & \frac{9}{18} & & \frac{4}{60} & & & \left(\frac{3}{20}\right) & \frac{12}{80} & \\
 & & & \frac{1}{10} & & & & & & \frac{1}{20} \\
\frac{2}{5} & \left(\frac{24}{60}\right) & \frac{72}{180} & & \frac{5}{150} & & & \left(\frac{1}{10}\right) & \frac{160}{1600} &
\end{array}
$$

1–9 *Nebenrechnungen*:

$$
\begin{array}{r} 90 \\ \frac{18}{72} \end{array}
\qquad \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \qquad \frac{16-9}{24} \qquad
\begin{array}{r} 16 \\ -9 \\ \hline 7 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 180 \\ 32 \\ \hline 148 \\ \hline 840 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 240 \\ 80 \\ \hline 160 \\ \hline 1600 \end{array}
$$

4 $\frac{7}{24}$ *L ändert Hrsg.* 5 $\frac{3}{8}$ *L ändert Hrsg.* 6 $\frac{148}{840}$ *L ändert Hrsg.* 9 $\frac{2}{5}$ | $\left(\frac{12}{30}\right)$ *gestr.* | $\left(\frac{24}{60}\right)$ *L*

Triangularium summa est 1, pyramidalium $\frac{1}{2}$, triangulo-triangularium $\frac{1}{3}$, triangulo-pyramidalium $\frac{1}{4}$, etc.

At naturalium summa est 0, (quod praecedit 1,) seu infinitum, id est non possunt summari, etc.

Aliud est infinitum esse aliquid quod comparatur 0, aliud esse infinitis terminis expressum.

---

1 f. *Nebenrechnungen:* $\frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$ $\frac{5}{4} - \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$

53,2–11

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{3}{4} & (\mathit{1}) & - & \frac{1}{4} & & 0 - \frac{2}{4} & (\mathit{2}) & & L \\
\frac{5}{36} & & + & \frac{4}{36} & \frac{1}{4} & 0 - \frac{1}{36} & & & \\
\frac{7}{144} & & + & \frac{9}{144} & \frac{1}{8} & \frac{2}{144} = & & \frac{2}{144} & \\
\frac{9}{400} & & + & \frac{16}{400} & \frac{1}{16} & \frac{7}{400} & & \frac{17}{400} & \\
 & & & & & & & \frac{14}{14400} & \\
 & & & & \text{etc.} & \text{etc.} & & & \\
\| & & & \| & \| & & & & \\
1 & & = & 1 & 2 & \text{Ergo} \left(\frac{2}{4}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{36} \left(\frac{19}{36} = \frac{\quad}{144} \text{ etc.}\right) & & &
\end{array}$$

53,2 $\frac{1}{2}$ *gestr. L erg. Hrsg.* 53,4 $\frac{1}{3}$ *gestr. L erg. Hrsg* 53,6 $\frac{1}{4}$ *gestr. L erg. Hrsg.* 53,8 $\frac{1}{5}$ *gestr. L erg. Hrsg.*

---

1 Triangularium summa: Die angegebenen Werte für die Summen der reziproken figurierten Zahlen sind richtig, wenn der erste Term, also jeweils 1, nicht mitgerechnet wird. 3 At naturalium summa: Ähnlich äußert sich Leibniz in der *Accessio*, *LSB* III,1 N. 2, S. 11 f.

$$
\begin{array}{cc|cccccccc}
\frac{1}{2} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & 1 & & & & & \multicolumn{2}{c}{\text{Radices de } \frac{1}{4}, \frac{4}{36} \text{ etc.}} \\
& & & & & \frac{3}{4} & & & \left[\frac{1}{2}\right] & \\
\frac{1}{9} & \frac{4}{36} & \frac{9}{36} & \frac{1}{4} & & & & & & \\
& & & & & \frac{5}{36} & & & \frac{2}{6} & \Big| \left[\frac{1}{3}\right] \\
\frac{1}{24} & \frac{6}{144} & \frac{16}{144} & \frac{1}{9} & \frac{4}{36} & & & & & \\
& & & & & \frac{7}{144} & \frac{2}{144} & \frac{9}{144} & \frac{3}{12} & \Big| \left[\frac{1}{4}\right] \\
\frac{1}{50} & \frac{8}{400} & \frac{25}{400} & \frac{1}{16} & \frac{9}{144} & & & & & \\
& & & & & \frac{9}{400} & \frac{7}{400} & \frac{16}{400} & \frac{4}{20} & \left[\frac{1}{5}\right] \\
& \frac{10}{14400} & \frac{36}{14400} & \frac{1}{25} & \frac{16}{400} & & & & & \text{etc.} \\
& & & & & & \frac{14}{14400} & \frac{25}{14400} & & \\
& & & & & \| & & & & \\
& & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

1–12 *Links daneben*:

$$
\begin{array}{cc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{\;} \\
& \frac{1}{6} \\
& \frac{1}{18} \\
& \frac{1}{40}
\end{array}
$$

Rechts daneben:

$$
\begin{array}{cc|ccc}
\frac{4}{4} & 1 & & & 1 \\
\frac{9}{36} & \frac{14}{36} & \frac{7}{18} & \frac{7}{36} & \frac{20}{\;} \\
& \frac{24}{144} & & & \\
& \frac{34}{400} & & & \\
& 47 & & &
\end{array}
$$

---

9 Der fehlerhafte Nenner 14400 (statt 900) beruht auf der Berechnung von $36 \cdot 400$ (statt von $36 \cdot 25$) auf S. 54 Z. 5–7. Leibniz verwendet den Wert bis S. 54 Z. 3.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & \frac{1}{144} & - & 9 & = & \frac{8}{144} & - & 7 & = & \frac{1}{144} & - \; 7 \; = & \frac{6}{144} & \frac{1}{36} \\[2ex]
\frac{1}{100} & \Big| \; \frac{4}{400} & & 16 & & \frac{12}{400} & & 9 & & \frac{3}{400} & & \frac{6}{400} & \frac{1}{100} \\[2ex]
\frac{1}{1600} & \frac{9}{14400} & & & & \frac{16}{14400} & & & & \frac{5}{14400} & & \frac{6}{14400} & \frac{1}{3600}
\end{array}
$$

53,1–12 *Nebenrechnungen*:

$$
\begin{array}{rl}
16 & 25 \\
9 & \\
\hline
144 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
36 \\
400 \\
\hline
14400
\end{array}
$$

Nebenbetrachtungen auf der gegenüberliegenden Seite:

$$
\begin{array}{cc}
\frac{1}{4} & \frac{9}{36} \\[2ex]
\frac{1}{9} & \frac{16}{144} \\[2ex]
\frac{1}{16} & \frac{25}{400} \\[2ex]
\frac{1}{25} & \frac{36}{14400}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\frac{1}{36} & \\[2ex]
\frac{4}{144} & \Big| \; \frac{1}{[36]} \\[2ex]
\frac{4}{400} & \frac{1}{100} \\[2ex]
\frac{9}{14400} & \frac{1}{1600}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
1 & \\[2ex]
 & \frac{7}{8} \\[2ex]
\frac{1}{8} & \\[2ex]
 & \frac{19}{27 \frown 8} \\[2ex]
\frac{1}{27} & \\[2ex]
\frac{1}{64} & \\[2ex]
\frac{1}{125} &
\end{array}
$$

1 $\frac{6}{144}$ | $\frac{1}{24}$ *gestr.* | $\frac{1}{36}$ *L* 10 3 *L erg. Hrsg.*

---

1 Das Minuszeichen steht für die Berechnung der Absolutbeträge. Leibniz rechnet fortlaufend und wiederholt Bruchstriche und Nenner, in der zweiten Zeile auch Minus- und Gleichheitszeichen, nicht.

[*Teil 2*]

			4		4		4			
		3		7		11		15		
	2		5		12		23		38	
1		3		8		20		43		81

		1		2		
	1		2		4	
1		2		4		8

				16				
			8		24			
		4		12		36		
	2		6		18		54	
1		3		9		27		81

				81				
			27		108			
		9		36		144		
	3		12		48		192	
1		4		16		64		256

Differentiae primitivae progressionis geometricae sunt termini progressionis geometricae unitate minoris. Et ideo differentiae progressionis duplae sunt radicales, progressionis triplae sunt quadratae, progressionis quadruplae sunt cubicae, quintuplae sunt quadrato-quadratae etc.

Sed quid si progressionis ratio sit fractio, ut $\frac{3}{2}$.

54,1–3 *Rechts von* $\frac{8}{144}$: $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{36}$ $\frac{9}{100}$ *Rechts daneben:* $\frac{64}{3600} \Big| \frac{32}{1800}$

18 ut *(1)* $\frac{4}{3}$ *(2)* $\frac{3}{2}$ *L*

15–17 Vgl. N. 4_2 S. 35 Z. 1–5.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{1}{8} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{3}{8} & & \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & & \frac{9}{8} & \\
1 & & \frac{3}{2} & & \frac{9}{4} & & \frac{27}{8}
\end{array}$$

Eodem modo differentiae primitivae erunt termini progressionis eius rationis quae est data demta unitate. Et ideo eo casu sunt termini decrescentes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \frac{1}{4} & & \left[\frac{1}{8}\right] & & \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & \\
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{8}{27} & & & \\
 & & \frac{4}{9} & & \frac{4}{27} & & \\
 & \frac{2}{3} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{27} & \\
1 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{27}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \left[\frac{1}{9}\right] & & & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{2}{9} & & \frac{4}{27} & \\
1 & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{9} & & \frac{8}{27}
\end{array}$$

Hinc mirabile in progressionibus fractionum decrescentibus, progressio fractionis datae, et differentiae eius ab unitate sunt sibi mutuo generatrices.

6 decrescentes. | Et ita iterum sunt eorum differentiae primitivae, differentiarum primitivarum, termini progressionis unitate minoris, *gestr.* | L 8 $\frac{1}{4}$ *L ändert Hrsg.* 11 $\frac{1}{27}$ *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{1} \\
& \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} \\
& \frac{1}{6} & & \frac{3}{18} & \\
\frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{10} \\
& \frac{1}{12} & & \frac{4}{60} & \\
\frac{1}{4} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{20} \\
& \frac{1}{20} & & \frac{5}{150} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{35} \\
& \frac{1}{30} & & \frac{6}{315} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{21} & & \frac{1}{56} \\
& \frac{1}{42} & & & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{28} & & \\
& \frac{1}{56} & & & \\
\frac{1}{8} & & \frac{1}{36} & &
\end{array}$$

NB. In omni generali in numeros inquisitione numerus omnis considerandus ut ratio seu fractio. Potest enim esse, at integer quoque fractio est subscripta unitate.

3–8 *Nebenrechnungen:* $\frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\quad \frac{6}{6}\qquad\qquad \frac{4}{60} \times \frac{3}{2}\quad \frac{8}{180} \Big| \frac{1}{[22\frac{1}{2}]}$

18 $\frac{3}{2}$ *(1)* $\frac{4}{9}$ *(2)* $\frac{6}{6}$ *L* 18 2 *L ändert Hrsg.*

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{i}{k} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \qquad\qquad \frac{c}{d} = \frac{ak-ib}{bk}\ldots \frown \frac{p}{q} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{l}{m} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f} \qquad\qquad \frac{e}{f} = \frac{im-lk}{km} \frown \frac{p}{q} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{n}{o} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f} - \frac{g}{h} \qquad\qquad \frac{g}{h} = \frac{lo-nm}{mo} \frown \frac{p}{q} = \frac{1}{9}$$

etc.

$$\frac{akp-ibp}{bkq} = \frac{1}{1}. \text{ Ergo } akp-ibp = bkq.$$

$$\frac{imp-lkp}{kmq} = \frac{1}{4}. \text{ Ergo } 4imp-4lkp = kmq.$$

$$\frac{lop-nmp}{moq} = \frac{1}{9}. \text{ Ergo } 9lop-9nmp = moq.\ 9lo-9nm = mo\frac{q}{p}.$$

$$\text{Ergo } \frac{9lo-9mn}{mo} = \frac{q}{p}.$$

Universalius sicut, *mo* intelligatur multiplicari per 1, vel quisquis alius est datus numerator.

$$\frac{\text{num.quaes.1.}\frown\text{nom.quaes.ult.}\frown\text{numer.multipl.}-\text{num.quaes.2.}\frown\text{nom.qu.1.}\frown\text{num.mult.}}{\text{nom.quaes.1.}\frown\text{nom.quaes.ult.}\frown\text{nom.mult.}}$$

aequatur: $\dfrac{\text{numerat.dat.}}{\text{nominat.dat.}}$

num.qu.1. $\frown$ nom.qu.ult. $\frown$ num.multip. $-$ num.qu.ult. $\frown$ nom.qu.1. $\frown$ num.multipl. aequatur: nom. quaes.1. $\frown$ nom.quaes.ult. $\frown$ nom.multipl. $\frown$ $\dfrac{\text{num.dat.}}{\text{nom.dat.}}$

6–9 *Nebenrechnung*: num. $\square$.1.4.p $-$ n.$\square$.2.3.p $=$ 2.4.q.

---

16 Leibniz numeriert die Zähler und Nenner a, b, i, k usw. jeweils von $1-4$ durch, insofern ist das num. irreführend; das $\square$ steht für die Koeffizienten.

$$\text{num.q.1.}\frown\text{nom.q.ult.} - \text{num.q.ult.}\frown\text{nom.qu.1.} = \text{nom.quaes.1.}\frown\text{nom.qu.ult.}\frown \frac{\text{num.dat.}}{\text{nom.dat.}} \frown \frac{\text{nom.multipl.}}{\text{num.multipl.}}$$

$$\underline{\hspace{6cm}} \smile \underline{\hspace{5cm}} = \frac{\text{nom.multipl.}}{\text{num.multipl.}}$$

$$\frac{\text{num.qu.1.}\frown\text{nom.qu.ult.}-\text{num.qu.ult.}\frown\text{nom.qu.1.}}{\text{nom.quaes.1}\frown\text{nom.qu.ult.}} \times \frac{\text{num.dat.}}{\text{nom.dat.}} = \frac{\text{nom.multipl.}}{\text{num.multipl.}}$$

Necesse est ut ratio differentiae quaesitae ad fractionem datam, sit semper eadem.

$$\text{Ergo}\quad \frac{\frac{ak-ib}{bk}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{1}}} = \frac{\frac{im-lk}{km}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{lo-mn}{mo}}{\frac{1}{9}} \text{ etc.}\qquad \frac{ak-ib}{bk} = \frac{4im-4lk}{km} = \frac{9lo-9mn}{mo} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{seu} \quad \text{diff. (1.)} & \dfrac{\text{num. (I)} \frown \text{nom. (II)} - \text{num. (II)} \frown \text{nom. (I)}}{\text{nom. (I)} \frown \text{nom. (II)}} & = \\[2ex]
\quad\quad\;\; \text{diff. (2.)} & \dfrac{4\text{ num. (II)} \frown \text{nom. (III)} - 4\text{ num. (III)} \frown \text{nom. (II)}}{\text{nom. (II)} \frown \text{nom. (III)}} & = \\[2ex]
\quad\quad\;\; \text{diff. (3.)} & \dfrac{9\text{ num. (III)} \frown \text{nom. (IV)} - 9\text{ num. (IV)} \frown \text{nom. (III)}}{\text{nom. (III)} \frown \text{nom. (IV)}} & \text{etc.}
\end{array}$$

Diff. 4. pro 4 vel 9 fiat 16. Diff. 5. fiat 25. Diff. 6. sit 36 etc.

$$\frac{\text{num. I} \frown \text{nom. II} - \text{num. II} \frown \text{nom. I}}{\text{nom. I} \frown \cancel{\text{nom. II}}} = \frac{4\text{ num. II} \frown \text{nom. III} - 4\text{ num. III} \frown \text{nom. II}}{\cancel{\text{nom. II}} \frown \text{nom. III}}$$

$$\frac{\text{num. I} \frown \text{nom. II}}{\text{nom. I}} - \frac{\text{num. II} \frown \text{nom. I}}{\text{nom. I}} = \frac{4\text{ num. II} \frown \cancel{\text{nom. III}}}{\cancel{\text{nom. III}}} - \frac{4\text{ num. III} \frown \text{nom. II}}{\text{nom. III}}$$

$$\frac{\text{num. I} \frown \text{nom. II}}{\text{nom. I}} = 5\text{ num. II} - \frac{4\text{ num. III} \frown \text{nom. II}}{\text{nom. III}}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\text{num. I}}{\text{nom. I}} & = & \dfrac{5\text{ num. II}}{\text{nom. II}} & - & \dfrac{4\text{ num. III}}{\text{nom. III}} \\[2ex]
[(4)]\left(\dfrac{\text{II}}{\text{II}}\right) & = & [(13)]\left(\dfrac{\text{III}}{\text{III}}\right) & & (9)\left(\dfrac{\text{IV}}{\text{IV}}\right) \\[2ex]
[(9)]\left(\dfrac{\text{III}}{\text{III}}\right) & = & [(25)]\left(\dfrac{\text{IV}}{\text{IV}}\right) & & (16)\left(\dfrac{\text{V}}{\text{V}}\right) \\
 & & \text{etc.} & &
\end{array}$$

5 f. etc. *(1)* seu substituendo pro num *(2)* seu *L*

Quaerenda ergo progressio decrescens cuius terminus datus sit aequalis differentiae sequentium duorum inter se contiguorum, modo praescripto multiplicatorum. Fortasse hoc praestant plures. ♃. Vereor ne hoc praestari possit, termino dato utcunque pro lubitu assumto.

59,13 $\frac{4 \text{ num. III}}{\text{nom. III}} \mid = \frac{\text{num. III}}{\text{nom. III}} + \frac{\text{num. I} \frown \text{nom. II} - \text{num. II} \frown \text{nom. I}}{\text{num. I} \frown \text{nom. II}} + \frac{\text{num. II} \frown \text{nom. III} - \text{num. III} \frown \text{nom. II}}{\text{num. II} \frown \text{nom. III}}$. Seu $\frac{\text{num. II}}{\text{nom. III}} + \frac{\text{num. I}}{\text{nom. I}} - \frac{\text{num. II}}{\text{nom. II}}; \frac{\text{num. II}}{\text{nom. II}} - \frac{\text{num. III}}{\text{nom. III}}$ *gestr.* | *L* 59,14 (4) *erg. Hrsg.* 59,14 (10) *L ändert Hrsg.* 59,15 (9) *erg. Hrsg.* 59,15 (17) *L ändert Hrsg.* 1 decrescens *erg. L* 1 terminus *(1)* primus *(2)* datus *L* 1 f. aequalis *(1)* differentiis quorumcunque *(2)* differentiae *L*

6. DE PROGRESSIONIBUS ET DE ARITHMETICA INFINITORUM
[Herbst – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* mehrfach überarbeitetes Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 163–164, LH 35 XII 1 Bl. 129–136. 5 Bog. 2°. 20 S., zweispaltig beschrieben. Zusätze in der rechten Spalte. Die Reihenfolge der Bögen ist durch Kustoden gesichert.
Cc 2, Nr. 527

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie N. 1 und N. 2 und ist, wie die Querverweise zeigen, nach N. 5 und vor N. 8 entstanden. Die Aussage S. 72 Z. 3 f. zur Summe der geometrischen Reihen weist darauf hin, daß N. 6 vor der Lektüre der einschlägigen Abschnitte bei Gr. de Saint-Vincent, die Leibniz in N. 7 und in der *Accessio*, Ende 1672, *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 Z. 1–10, verarbeitet hat, verfaßt wurde. N. 6 gehört wahrscheinlich zu den Manuskripten, auf die Leibniz in seiner Stellungnahme für die Royal Society vom 13.II.1673 verweist (vgl. *LSB* III, 1 N. 4 S. 25 Z. 6–18). Das Stück schließt an die Überlegungen von *LSB* VII, 1 N. 3_1 an, wo die Ausgangsformel von Z. 18 erarbeitet wird. Diese Formel tritt auch in *LSB* VII, 1 N. 3_2 S. 9 Z. 6, N. 3_3 S. 13 Z. 17 u. ö. sowie N. 3_4 S. 17 Z. 12 auf. Die Stellung der Formel in N. 6 deutet darauf hin, daß das Stück nach *LSB* VII, 1 N. 3_1 und wohl auch nach N. 3_2 verfaßt ist; der etwas abgeänderte Ansatz, den N. 6 verfolgt, legt die Vermutung nahe, daß es außerdem auch nach N. 3_3 und N. 3_4 entstanden ist.

$$\overset{\cancel{(Rq)}27}{\overparen{Rq \llcorner\llcorner\llcorner \underset{200}{2^q} - Rq \llcorner\llcorner \underset{200}{2r^q} \frown \llcorner \underset{200}{2r^q} - \underset{50}{2a^q} \lrcorner}} \quad \text{dividatur per } Rqq\, \underset{3\frac{2}{3}}{2r^q}$$

$$Rq\, \frac{\cancel{Rq} \llcorner\llcorner\llcorner \underset{200}{2^q} - Rq \llcorner\llcorner \underset{200}{2r^q} \frown \llcorner \underset{200}{2r^q} - \underset{50}{2a^q} \lrcorner}{(Rqq\, \underset{4}{2r^q})\, Rq\, 2^q}$$

$$Rq \llcorner \left(\frac{\underset{200}{2^q}}{Rq\, 2^q} = \right) Rq\, 2^q - Rq\, \frac{((Rq)\llcorner\llcorner \underset{200}{2r^q}) \frown \underset{200}{2r^q} - \underset{50}{2a^q}}{((\cancel{Rq})2^q)} \quad \text{(nondum 2.)}$$

---

18 Die Ausgangsformel gilt für das dem Kreis einbeschriebene, regelmäßige n-Eck und 2n-Eck. Bis zum Ende der Überlegungen in S. 63 Z. 4 schreibt Leibniz häufiger versehentlich 2^q anstelle von $2r^q$, was er nur teilweise korrigiert. Von der Kontrollzahl im Nenner des Bruches Z. 19 abgesehen ergeben sich daraus keine Folgefehler. — Öfters wird ein Ausdruck hier in Mehrfachfunktion verwendet. Zur eindeutigen Zuordnung der Zwischentexte wurden die Rechenschritte in Z. 18 f., S. 62 Z. 1 f. und S. 63 Z. 1–3 voneinander getrennt wiedergeben.

$Rq\,2^q - Rq\llcorner 2r^q - 2a^q$ dividatur per $\underset{Rq\,5}{Rq\,a}$

$$Rq\,\frac{(\cancel{Rq}\llcorner\llcorner)Rq\,2^q}{(\cancel{Rq})a} - \left(\left(Rq\,\frac{\cancel{Rq}\llcorner 2r^q - 2a^q}{(\cancel{a})a^q}\right)\right)_{(Rq\,6)} = \frac{2r^q}{a^q} - 2.$$

Fiet $Rq\llcorner\llcorner\dfrac{Rq\,2r^q}{a} - Rq\llcorner\dfrac{2^q}{a^q} - 2\lrcorner$ vel $Rq\llcorner\llcorner Rq\,\dfrac{2^q}{a^q} - Rq\llcorner\dfrac{2^q}{a^q} - 2\lrcorner$.

Huius producti sumatur $\square^{\text{tum}}$, habebimus: $Rq\,\dfrac{2^q}{a^q} - Rq\llcorner\dfrac{2^q}{a^q} - 2\lrcorner$.

Quaerenda nunc ratio est eliminandi istud 2. $Rq\llcorner\dfrac{2r^q}{a} - 2$. etiam sic enuntiari potest:

$$Rq\,\frac{\cancel{Rq}\,\dfrac{2\frown\llcorner 1r-1\lrcorner}{a} - \dfrac{2a-2}{a}\left(= 2 - \dfrac{2}{a}\right)}{\cancel{Rq}\,a}.$$ Multiplicetur per $Rq\,a$ fiet[:]

$Rq\llcorner\llcorner 2\frown\llcorner 1r-1\lrcorner - \llcorner 2a-2\lrcorner = Rq\,2\frown\llcorner 1r-1\lrcorner + 2 - 2a.$

$Rq\,2r - 2 + 2 - 2a = Rq\,2r - 2a.$

Et si reliquum quoque: $Rq\,\dfrac{2^q}{a^q}$ multiplicemus per $Rq\,a$ seu $Rq\llcorner\dfrac{2^q}{a^q}\frown a^q$ fiet $Rq\,2^q$. Et habebimus: $Rq\,2^q - Rq\llcorner 2r - 2a\lrcorner$ ita omnia in circulum rediere, nihilque sive in a, sive in 2 eliminando actum est.

4 f. $-2\lrcorner$ *(1)* Sumatur rursus huius $\square^{\text{ti}}\ \square^{\text{tum}}$, habe *(2)* Et primum investigemus $\square$ de $\mathrm{Rq}\llcorner\dfrac{2^q}{a^q} - 2$. Quod ita fiet: $\dfrac{2^q}{a^q} + 4 - (\mathrm{Rq}\,\dfrac{2r^q}{a^q}\frown 4)\mathrm{Rq}\,\dfrac{8^q}{a^q}$. Habebimus $\dfrac{2r^q}{a^q} + \dfrac{2r^q}{a^q} + 4 - \mathrm{Rq}\,\dfrac{8r^q}{a^q} - \dfrac{8r^{qq}}{a^{qq}} - \dfrac{\frac{8r^q}{a^q}}{\frac{2r}{a^q}} + \mathrm{Rq}\,\dfrac{32^{qqq}}{a^{qqq}}$ *(a)* $\dfrac{6r^q}{a^q} - \dfrac{8r^q}{a^q}$ *(b)* $4 + (\mathrm{Rq}\,\dfrac{32^{qqq}}{a^{qq}} - \mathrm{Rq}\,32$ *(3)* Quaerenda *L* 5 q *erg. L* 6 | *(1)* Dividatur per Rq *(2)* Multiplicetur per Rq a *erg.* | fiet *L*

5 Leibniz vergißt in Zähler und Nenner das Quadrat und korrigiert dies später nur unvollständig. Der Fehler setzt sich bis Z. 11 fort. Von S. 63 Z. 1 an kommen weitere Fehler hinzu, die sich bis zum Ende des Rechengangs in S. 63 Z. 4 vererben.

Ergo tentemus aliam rationem: Initio $Rq\,2r^q - Rq\llcorner 2r^q - 2a^q$. Hoc dividatur iterum per $Rqq\,2^q$.

$$Rq\,\frac{(Rqq\,)Rq\,2r^q - Rq\llcorner 2r^q - 2a^q}{(Rqq\,2^q)Rq\,2^q}\lrcorner = Rq\left(\frac{Rq\,2^q}{Rq\,2^q}\right)1 - Rq\,\frac{Rq\llcorner 2r^q - 2a^q}{Rq\,2^q} =$$

$Rq\llcorner\llcorner 1 - Rq\llcorner 1 - \left(\dfrac{2a^q}{2r^q}\right)\dfrac{a^q}{1r^q}\lrcorner$. Huius $\square^{\text{tum}}$ erit: $1 - Rq\llcorner 1 - \dfrac{a^q}{1r^q}\lrcorner$.

Ratio multitudinis		Ratio magnitudinis
	laterum	
$\dfrac{b}{2b}$		$\dfrac{2a}{Rq\llcorner\llcorner 1 - Rq\llcorner 1 - \dfrac{a^q}{d^q}\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\,4d^{qq}}$

$$\frac{Rq\llcorner\llcorner 1 - Rq\llcorner 1 - \dfrac{a^q}{d^q}\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\,4d^{qq}}{2a} \quad - \quad 2.$$

Si sit progressio aliqua geometrica in infinitum continuata cuius primus terminus sit radius circuli d, et sequens terminus habeat ad praecedentem rationem:

$$\frac{Rq\llcorner\llcorner 1 - Rq\llcorner 1 - \dfrac{a^q}{[d^q]}\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\,[4]d^{qq}}{2a} - 2$$

praecedente termino semper supposito: $2a$. Summa huius progressionis demto termino primo erit differentia inter circumferentiam hexagoni circulo inscripti, seu radium sextuplicatum, et circumferentiam circuli.

---

1 f. Dividere per $Rqq\,2^q$ et productum rursus per $Rqq\,2^q$ est dividere per $Rqq\,2^q \frown Rqq\,2r^q = Rqq\,4r^{qq}$.

1 rationem: *(1)* in hac constructione $\mathrm{Rq}\,\dfrac{2\mathrm{r}^q}{\mathrm{a}^q} - \mathrm{Rq}\llcorner\dfrac{2\mathrm{r}^q}{\mathrm{a}^q} - 2\lrcorner$ *(2)* Initio $\mathrm{Rq}\,\dfrac{\mathrm{Rq}\,2^q}{\mathrm{a}} - \mathrm{Rq}\,\dfrac{2}{-}$ *(3)* Initio *L*
1 iterum *erg. L* 7 f. $-$ 2. | ita est circumf *gestr.* | Si *L* 9 geometrica ... continuata *erg. L* 10 d, *(1)* et caeteri termini sint *(2)* et *L* 11 d *L ändert Hrsg.* 11 4 *erg. Hrsg.* 12 f. demto termino primo *erg. L* 16 $\mathrm{Rqq}\,4\mathrm{r}^{qq}$ | seu $\mathrm{Rq}\,2\mathrm{r}$. Est ergo idem quod dividere omnia per $\mathrm{Rq}\,2\mathrm{r}$. NB. *gestr.* |. *L*

Ista autem quantitas finita est, etsi numerus terminorum sit infinitus, quia termini sunt continue decrescentes. Constat vero in progressionibus geometricis ab aliquo termino continue decrescentibus summam omnium terminorum in infinitum esse finitam. Et in progressionibus quidem geometricis puris constat summam omnium terminorum sequentium minorum in infinitum aequari termino maiori praecedenti, sed aliquando [in] progressionibus affectis, (liceat in re nova uti hac voce ad exemplum potestatum affectarum, nam et potestates sunt termini progressionis geometricae) non potest locum habere haec regula, ut in praesenti exemplo patet, non potest enim dici istam summam radio aequari, alioquin circumferentia aequaretur radio [sexies] sumto. Ideoque aliae inquirendae sunt rationes. Quisquis ergo invenerit methodum summandi terminos infinitos continue decrescentes datae progressionis geometricae affectae, is invenerit quadraturam quorumcunque rectilineorum, ac per consequens cuiuscunque generis curvae rectam aequalem.

Methodus autem determinandi quantitatem per duas series convergentes, quarum altera continue crescit altera continue decrescit in infinitum, sed ita ut non nisi per fini-

---

13 *Dazu in der rechten Spalte:* Si qua sit progressio terminorum infinitorum, sed ita tamen ut omnes termini sint finiti, ea progressio complicata est duarum pluriumve aliarum progressionum divergentium, aut duarum (nescio an et plurium) convergentium semper complicata est divergentium, non semper media convergentium, nisi quatenus ipsae convergentes sunt complicatae.

2 geometricis *(1)* puris sum *(2)* ab *L* 5 minorum *erg. L* 5 in *erg. Hrsg.* 6 uti *(1)* hoc termino *(2)* hac *L* 9 septies *L ändert Hrsg.* 13–65,1 convergentes, | *(1)* continue decrescentes *(2)* quarum ... consideravit, *erg.* | usum *L*

63,11–14 Richtig ist, daß die Differenz der Umfänge von Kreis und regelmäßigem Sechseck gleich dem Grenzwert der Summe der Differenzen der Umfänge aufeinanderfolgender n- bzw. 2n-Ecke ist: $\sum_{n=1}^{\infty}(2_n s_{2n} - n s_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s_{2n}}{s_n} - \frac{n}{2n}\right) 2n s_n$. Leibniz vertauscht irrtümlicherweise Zähler und Nenner im Quotienten der Seitenanzahlen und läßt den Faktor $2_n s_n$ fort. In Leibnizscher Notation müßte der n-te Reihenterm lauten: $\frac{Rq \llcorner\llcorner 1 - Rq \llcorner 1 - \frac{a^q}{d^q} \lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\, 4d^{qq}}{2a} - \frac{1}{2} \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown 2b \frown 2a$. 4 f. Et ... praecedenti: Die Aussage gilt nur für die geometrische Folge mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$.

tum spatium decurrat, quam Iac. Gregorius Scotus nuper libro edito consideravit, usum habere non potest, ubicunque termini unius seriei constructionem habent pendentem a terminis alterius seriei, ut in polygonorum inscriptorum, ac circumscriptorum continue subsectorum lateribus apparebit inquirenti ad determinandum latus polygoni circumscripti cognoscendum debere latus polygoni inscripti proxime praecedentis seu numeri laterum dimidii cognosci. Et raro admodum continget, ut series convergentes a se invicem sint independentes. Sed etsi sint independentes, non habebunt usum, nisi cognitam inter se habeant rationem. Sed nondum consideratio habita est de seriebus duabus divergentibus, quarum altera auget, altera diminuit eandem rem in infinitum; unde potest nihilo minus prodire aliquid finitum, si scilicet minus sit [decrementum] augmento vel contra, et ipsum incrementi vel decrementi incrementum sit continue decrescens.

Laterum hexagoni multitudo est 6. Magnitudo unius est 1r. Crescit m u l t i t u d o in infinitum continua progressione geometrica dupla, donec tandem numerus laterum fiat infinitus.

Decrescit magnitudo in infinitum, ea progressione, ut praecedente latere existente $2a$. sequens sit $Rq \llcorner\llcorner\llcorner 2r^q - Rq \llcorner\llcorner 2r^q \underset{4r^{qq} - 4r^q a^q}{\frown\, 2r^q - 2a^q}$. vel $Rq \llcorner\llcorner 1 - Rq \llcorner 1 - \dfrac{a^q}{1r^q} \lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\, 4r^{qq}$.

Ita ut sequens semper paulo maius sit dimidio praecedentis.

Quia igitur minus semper decrescit laterum magnitudo, quam crescit multitudo, ideo in fine necesse est productum esse maius circumferentia hexagoni.

Nam si ut crevit numerus in progressione dupla, ita decrevisset magnitudo in dimidia, productum fuisset aequale initio. Sed ut dixi quantitas sequentis semper est paulo maior dimidia praecedentis.

Fingamus, exempli causa, laterum numerum semper crescere in progressione dupla, at quantitatem sequentem esse $\dfrac{3}{4}$ si praecedens fuerit 1. Erit ergo

3 f. continue subsectorum *erg.* *L* 6 cognosci. *(1)* Et valde dubito a *(2)* Et *L* 8 rationem. *(1)* Idem intelligendum *(2)* Sed *L* 9 altera *(1)* crescit, altera *(2)* auget 10 incrementum *L* *ändert Hrsg.* 16 sequens *(1)* sit $\mathrm{Rq} \llcorner\llcorner 1 - \mathrm{Rq} \llcorner 1 - \dfrac{\mathrm{a^q}}{\mathrm{1r^q}} \lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \mathrm{Rqq}\, 4\mathrm{r^{qq}}$. *(2)* sit *L* 17 sit *(1)* duplo *(2)* dimidio *L* 18 igitur *(1)* magis *(2)* minus *L*

1 Iac. Gregorius Scotus: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668 [Marg.], S. 31 bis 36.

$$1 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{9}{16} \quad \frac{27}{64} \quad \frac{81}{[256]} \quad \text{etc.} \qquad \text{progressio magnitudinis per } \frac{3}{4} \text{ decrescens.}$$

$$6 \quad 12 \quad 24 \quad 48 \quad 96 \qquad \text{progressio dupla multitudinis crescens.}$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \qquad \text{progressio dupla magnitudinis decrescens.}$$

Hinc apparet si eadem sit proportio incrementi multitudinis quae est decrementi magnitudinis, productum quodcunque, in infinitum, ac proinde ultimum omnium productorum quoque post decursum infiniti fore aequale primo, seu omnia fore aequalia inter se nam $\frac{6}{1}$ et $\frac{12}{2}$ et $\frac{24}{4}$ et $\frac{96}{16}$ semper sunt idem.

Eodem modo etsi non sit semper eadem ratio, attamen eadem ratio quadratorum, aut aliarum potestatum vel radicum, vel eadem semper ratio duorum quorundam pluriumve propinquorum, aut certae distantiae, aut eadem ratio rationum etc. aut eadem ratio rationum □$^{\text{torum}}$ etc. Potest tamen ultimum fortasse definiri. Ut si haec sit progressio

$$\begin{array}{ccc} 6 \frown 6 & 12 \frown 12 & 24 \frown 24 \\ 36 & 144 & 576 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Et ita pergatur in infinitum, productum est in infinitum, ac proinde est ac si esset progressio continue crescentium

$$36 \qquad 72 \qquad 144$$

progressione dupla, quia divisor semper in progressione dupla deficit a debito, deberet enim esse 1. $\frac{1}{2} \frown \frac{1}{2}$. $\frac{1}{4} \frown \frac{1}{4}$. etc. et est tantum 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$ etc.

Item cum progressio magnitudinis decrescens est $\frac{3}{4}$ et multitudinis crescens est 2. Producta sunt: 6. 9. $13\frac{1}{2}$.

---

20 f. *Am oberen Seitenrand, spaltenförmig:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 6 & & 3 & & 1 & & 0 & & \\ & 3 & & 2 & & 1 & & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Davor spaltenförmig, gestrichen:

$$\begin{array}{cccccccccc} 6 & & 9 & & 11 & & 12 & & 12\frac{1}{2} & \\ & 3 & & 2 & & 1 & & \frac{1}{2} & & \text{etc.} \end{array}$$

1 192 *L ändert Hrsg.*

Regula generalis si sint duae progressiones complicatae rationes earum ducendae sunt in se invicem, et constituetur ratio terminorum compositorum ut $2 \frown \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$. item $2 \frown \frac{1}{2} = 1$.

Terminus primus a^q. ratio progressionis crescentis 2^q seu 4. decrescentis $\frac{1}{2}$. ducantur in se $4 \frown \frac{1}{2}$[:] fiet 2. est ergo progressio dupla inde ab a^q.

Eodem modo quando utraque progressio est crescens, vel decrescens.

Quid vero si ratio alicuius progressionis non sit eadem sed ratio rationis sit eadem, potest fieri, ut crescat incremento continue decrescente, si progressio rationum progressionis sit decrescens, ut

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \qquad 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & \frac{3}{4} & \frac{3}{64} & \text{etc.} & & & \end{array}$$

In hac progressione notandum terminum quemlibet produci si ducta in se invicem serie rationum eousque, multiplices primum ut $\frac{1}{2} \frown \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.\ \frown 6 \not{f} \frac{3}{4}$.

---

12 f. *Dazu auf der gegenüberliegenden Seite:*

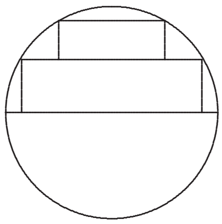
Hinc diameter aequalis est differentiis omnium chordarum et semidiameter aequalis est differentiis omnium chordarum arcus sexta circumferentiae parte minoris, et idem semidiameter aequalis est differentiis chordarum quomodocunque interpositarum inter se et diametrum quod est theorema plane admirandum.

1 complicatae *(1)* altera decrescens altera crescens ad const *(2)* rationes *L* 4 primus *erg. L* 4 crescentis *erg. L* 8 si *(1)* series rationum *(2)* progressio *L* 12 notandum *(1)* est res mirabilis, scilicet *(2)* terminum *L*

---

10 Statt $\frac{1}{32}$ müßte es $\frac{1}{256}$ heißen. 12 f. Das Vorgehen ist unzulässig. Es sollten nicht die Summen $(a_1 + a_2 \ldots)$, $(b_1 + b_2 \ldots)$ miteinander multipliziert werden, sondern jeweils nur die Glieder a_1, b_1; a_2, b_2 usw. Auf S. 79 Z. 18 – S. 80 Z. 11 wird das Problem erneut behandelt, dieses Mal wird der Fehler sofort erkannt.

[*Fortsetzung von S. 67*]



[*Fig. 1*]

Hinc sequitur quomodocunque interponantur termini continue decrescentes, eandem semper esse quantitatem differentiarum. Idque tam in serie finita quam in infinita.

Dazu oben über der linken Spalte: Ellips. sol. □quad. compl. ⟨semisegment.⟩ diam.

$\frac{6}{1} - \frac{6}{2} \qquad \frac{6}{2} - \frac{18}{8} \qquad \frac{6}{8} - \frac{96}{128} \qquad \frac{6}{128}$. Necesse est $\frac{6}{2} + \frac{18}{8} + \frac{96}{128}$ etc. in infinitum aequalia esse $\left[\frac{6}{1}\right]$. Et habemus regulam universalem in omni serie continue decrescente differentiae omnes terminorum omnium in infinitum a dato inclusive simul sumtae, aequantur termino dato.

Et contra si series aliqua sit utrinque continuata in infinitum, differentia omnium terminorum aequatur termino maximo seriei. Etsi enim maximus semper sit finitus est tamen differentia ingens inter infinita.

Progressio harmonica semper habet aliquem terminum primum, is ergo aequatur differentiis caeterorum in infinitum omnium.

Et cum in progressione harmonica semper ea sit ratio differentiarum quae est duorum extremorum, hinc potest colligi summa omnium terminorum progressionis harmonicae in infinitum.

In omni serie in infinitum decrescente, ubi aliqua reddi potest ratio differentiarum inter terminos ad ipsos terminos, inveniri potest progressionis summa.

7 $\frac{6}{1}$ *erg. Hrsg.* 7 universalem *erg. L* 7 omni *(1)* progressione *(2)* serie *L*

6 Differenzenfolge in Hs. spaltenförmig. — Statt $\frac{96}{128}$ müßte es $\frac{90}{128}$ heißen.

Infinitum ergo nihil est, nec totum habens nec partes et infinitum unum altero nec est maius nec minus nec aequale, quia nulla est infiniti magnitudo. Sed arithmetica infinitorum et geometria indivisibilium, non magis fallunt quam radices surdae et dimensiones imaginariae et numeri nihilo minores. Et ratio lineae ad punctum etc. datur enim et ratio aliqua seu veritas de impossibilibus seu falsis.

Sed quid postea de motu deque tempore dicemus? Et an non rectius dicetur non esse aequalia, sed differentiae quavis data [minores].

Imo non est cur huc eamus. Hac enim ratione ostendemus potius series illas in infinitum continuatas esse inter se differentes, et potest earum inter se computari proportio. Ut enim semper aequantur in binaria decrescente termini omnes sequentes, uni praecedenti, ita in quaternaria, aequantur $[\frac{1}{3}]$, et ut puto in ternaria, aequantur [dimidio] termini praecedentis. Sed hoc exacte investigandum.

67,13 *Über der Streichung:* error

67,13 $\frac{3}{4}$. | Hinc sequitur aliquid mirabile, scilicet omnes terminos in infinitum ut 3. $\frac{3}{4}$. etc. exacte aequare praecedentem 6. et omnes $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{64}$. etc. exacte aequare praecedentem 3. quia multiplicantes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. etc. aequant 1. et $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{16}$. etc. aequant $\frac{1}{2}$. Hinc patet non tantum in progressionibus geometricis, sed et in progressionibus omnibus decrescentibus per rationes omnes terminos sequentes in infinitum aequari praecedenti. Et ideo quod est mirabile: seriem hanc $\frac{6}{1}$. $\frac{6}{2}$. $\frac{6}{4}$. $\frac{6}{8}$. etc. aequari huic $\frac{6}{1}$. $\frac{6}{2}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{6}{128}$. etc. Cum tamen semper in infinitum termini unius sint maiores quam correspondentes alterius, ita 6. 3. $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. etc. aequantur his 6. $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{8}$. etc. pars toti cum semper aliquid transsiliatur. *gestr.* | *L* 67,15 *(1)* Hinc diameter est aequalis differentiis omnium chordarum, et hexagoni *(2)* Hinc *L* 68,10 aliqua *(1)* ab aliquo initio continuetur in infinitum differentiae omnium terminorum *(2)* sit *L* 1 partes *(1)* . Sed partes istae sunt *(2)* et *L* 2 nec aequale *erg. L* 7 minoris *L ändert Hrsg.* 11 dimidio *L ändert Hrsg.* 11 aequantur *(1)* $\frac{3}{2}$ *(2)* $\frac{1}{3}$ *(3)* | $\frac{2}{3}$ *ändert Hrsg.* | termini *L*

68,5 Zu dieser Aussage vgl. S. 91 Z. 22–24. 68,15–17 Aus der Beschränktheit der Differenzenfolge ergibt sich noch nicht notwendig die Konvergenz der Reihe. 1 f. Infinitum ... magnitudo: vgl. Leibniz' Exzerpte und Anmerkungen zu Galileis *Discorsi*, *LSB* VI, 3 N. 11 S. 168, sowie die *Accessio*, *LSB* III, 1, N. 2 S. 11.

In ratione geometrica secundaria decrescente, difficilius est venire ad summam ita in exemplo supra proposito, non difficulter demonstratur totum reliquum minus esse quam 6. sed difficulter quanto. Est enim in eo progressio reassumta. Nam omnes progressiones geometricae secundariae sunt reassumtae.

Investigari optime potest summa ista progressionum decrescentium, per similes ascendentes. Ita: $8.\ 4.\ 2.\ 1.\ \frac{1}{2}.$ etc. omnia simul 16.

Ita videbimus: $27.\ 9.\ 3.\ 1.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{9}.$ etc.

5–7 *Daneben in der rechten Spalte:* Nota si progressio non procedit per unitatem, potest medium in ea assumi ubilibet. Imo etsi procedat per unitatem fingi potest ac si per eam non procederet, et assumi ratio terminorum ad unitatem.

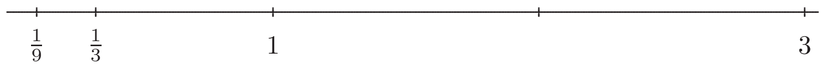
6 f. *Dazu in der rechten Spalte:*

4	9	16	6	6	
					2
2	3	4	5	4	
					1
1	1	1	4	3	
					2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	2	1	
					$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
					$\frac{7}{16}$
etc.	$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	
	etc.				

7 etc. | Omnes tertiae partes omnium tertiarum faciunt tertiam partem totius, uti omnes *(1)* quartae partes omni *(2)* dimidiae omnium dimidiarum faciunt dimidiam totius: imo res *(a)* recte *(b)* accuratius concipienda est: *gestr.* | *L*

---

1 f. in exemplo supra proposito: s. o. S. 67 Z. 11.



[*Fig. 2*]

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & 9 & - & 2 \frown 3 & \\
3 & \frown & 1 & 3 & & 3 & - & 2 & \\
 & & & & 1 & & & & \\
1 & & 2 & 2 & & 1 & - & \frac{2}{3} & \\
 & & & & 1 & & & & = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \\
\frac{1}{3} & & 3 & 1 & & \frac{1}{3} & - & \frac{2}{9} & \\
 & & & & \frac{5}{9} & & & & \\
\frac{1}{9} & & 4 & \frac{4}{9} & & \frac{1}{9} & - & \frac{2}{27} & \\
 & & & \frac{5}{27} & & & & &
\end{array}
$$

Ergo $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}$ etc. $= 3$. Nam si ista $2 + \frac{2}{3}$ etc. a $3 - 2, 1 - \frac{2}{3}$ seu a $1 + \frac{1}{3}$ non aufero, sed ei addo, addo 3. Ergo $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ etc. $= \frac{3}{2}$.

Nam si iste $2 + \frac{2}{3}$ etc. a $3 - 2, 1 - \frac{2}{3}$ seu a $1 + \frac{1}{3}$ non aufero, sed addo, addo: 3.

Propositio generalis haec est. Summa terminorum progressionis geometricae ita inibitur. Terminus datus dividatur per numerum unitate minorem ratione, quotiens erit summa terminorum sequentium.

2 $9 - 2 \frown 3$ *erg. L* 11 f. Nam ... addo 3. *erg. L* 14–16 Propositio ... sequentium. *erg. L*
15 datus *(1)* multiplicetur per rationem progressionis, productum *(2)* dividatur *L*

2 Leibniz hat den Term $9 - 2 \frown 3$ ergänzt, ohne die Sammelbetrachtungen zu ändern.

Demonstratio potest reddi universalis, si pro numeris assumantur termini, tantum alii assumantur semper unitate minores, aut unitates etc. etc.

Quantum sciam hactenus non nisi summa terminorum infinitorum progressionis geometricae duplae reperta est, haec scilicet sponte sua incidebat menti. Sed aequalitas per accidens in ea evenit, quia in ea unitas, et numerus differens unitate a ratione seu binario, coincidunt.

Nota assumsi in inveniendo tam mirabili theoremate initium a termino, qui est ipse ratio. Idem patet si altior seu maior assumatur. Prodit enim semper terminum datum aequari omnibus sequentibus vicibus unitate paucioribus quam ratio est, repetitis. Ergo si ipse dividatur per numerum ratione unitate minorem, prodit summa terminorum sequentium. Idem est etsi series progressionis non complectatur unitatem, sed ab alio numero ascendendo descendendoque inchoet, eadem enim erit ratio summae terminorum ad terminum antecedentem, quia ipse terminus, aeque ac omnes alii multiplicantur per idem, numerum scilicet a quo incipitur, cuius data est ratio ad unitatem.

Infinitae possunt duci ex theoremate nostro de arithmetica infinitorum, consequentiae. Cum omnes differentiae sequentes in serie continue decrescente aequentur termino, hinc necesse est differentias omnes inter terminum aliquem et alium datum interpositas aequari termino primo detracto ultimo.

6	
	1
5	
	1
4	
	2
2	

1 f. Demonstratio ... etc. *erg. L* 3–6 Quantum ... coincidunt. *erg. L* 7–14 Nota ... unitatem. *erg. L* 8 semper *(1)* sequens *(2)* auferendum esse semper *(3)* terminum *L* 9 aequari *(1)* duplo *(2)* omnibus *L*

3 Quantum sciam: vgl. dagegen die Ausführungen in der *Accessio*, Ende 1672, *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 Z. 1 f., wo Leibniz, wohl eine Aussage in Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, Buch II S. 51 mißverstehend, die Kenntnis der allgemeinen Summenformel bereits den antiken Mathematikern zuschreibt. 15 ex theoremate nostro: s. o. S. 68 Z. 7–9.

Necesse est differentiarum summas in infinitum esse inter se ut sunt termini a quibus incipiunt, quippe quibus sunt aequales, et proinde si termini habent certam rationem

---

1–74,2 *Dazu in der rechten Spalte:*

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
 & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{8} & & \\
 & \frac{3}{8} & & \frac{[9]}{64} & \\
\frac{1}{8} & & \frac{[17]}{64} & & \frac{31}{1024} \\
 & \frac{7}{64} & & \frac{[175]}{1024} & \\
\frac{1}{64} & & \frac{97}{1024} & & \frac{[2945]}{32768} \\
 & \frac{15}{1024} & & \frac{2655}{32768} & \\
\frac{1}{1024} & & \frac{449}{32768} & & \\
 & \frac{31}{32768} & & & \\
\frac{1}{32768} & & & &
\end{array}$$

Nota bene etsi series data sit continue decrescens, tamen aliqua ex differentiis differentiarum potest esse non decrescens. Et in genere decrescente licet serie terminorum non sequitur decrescere semper seriem differentiarum (imo ea semper crescere potest) nisi id ex constructione demonstretur.

7 6 *L ändert Hrsg.* 8 14 *L ändert Hrsg.* 9 127 *L ändert Hrsg.* 10 1409 *L ändert Hrsg.*

etiam differentias habere certam rationem, et, si termini habent certas constantes differentiarum rationes, etiam summae eas habebunt.

Quicunque termini continue aucti vel minuti inter duos pluresve terminos interponantur, eadem semper manebit differentiarum quantitas.

In omni serie continue aucta vel diminuta differentia inter quoslibet terminos extremos, est summa differentiarum inter omnes medios non sic tantum sed et aliter interpositos.

Ex his sequitur in quantitatibus[,] ut lineis[,] progressione geometrica continua decrescentibus, lineam aliquam aequari differentiis omnium sequentium minorum, et hoc amplius quod in aliis seriebus non contingit summam omnium terminorum sequentium in infinitum ita iniri posse; si scilicet sumatur alius terminus habens ad datum rationem unitate minorem ratione progressionis, seu dividatur per numerum unitate minorem ratione progressionis, is terminus erit omnium terminorum summa.

In qualibet serie continue aucta vel diminuta, seu p r o g r e s s i o n e

---

1 f. *Dazu in der rechten Spalte:*

$$\begin{array}{ccccccc}
4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\[2ex]
 & & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & \frac{1}{1024} \\[2ex]
 & & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & \text{etc.} &
\end{array}$$

5–7 *Dazu in der rechten Spalte:* Applicanda haec si commode fieri potest etiam ad alias series non continue auctas vel diminutas.

2 f. habebunt. *(1)* Ergo summae rationem differenti *(2)* Quicunque *L* 3 continue ... minuti *erg. L* 8 ut lineis *erg. L*

6		$2 \frown 4$	8
	1		
5		$2 \frown 3$	6
	1		
4		$1 \frown 2$	2
	2		
2		$1 \frown 1$	1
17			17

si ducatur differentia prima incipiendo a terminorum maiorum differentiis in 1. secunda in 2. tertia in 3. quarta in 4. etc. et terminus ultimus seriei quasi pro ultima differentia habeatur, quia scilicet cogitari debet post ipsum poni 0. ut series obsignetur: summa omnium factorum aequabitur summae terminorum.

Idem sic enuntiari potest, differentiam quamlibet duci in numerum terminorum praecedentium.

Hinc theorema novum et mirabile. Sumtis quotcunque terminis in infinitum qui differentiae sint progressionis geometricae alteriusve ubi summa omnium terminorum in infinitum, inveniri potest, invenire quid ex illis terminis, in numeros serie naturali procedentes continue crescentibus ductis efficiatur.

Et hic est quaedam determinatio progressionis complicatae, ex duabus divergentibus, altera arithmetica naturali, altera quasi geometrica fractionem (licet aliquando aliquandiu unitate maiorem) formante sumto numero unitate minore quam est ratio, eoque ducto in terminos continue decrescentes progressionis geometricae datae.

Iam per consequens computari ex datis potest, quid efficiat ista eadem series numerorum naturalium infinita continue crescens ducta in aliam seriem continue decrescentem, cuius ratio aliqua ad seriem istam propositam differentiarum progressionis geometricae iniri potest, ut $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27}$ etc. in infinitum aequat 2. Et ductum semper in numeros progressionis naturalis ab unitate erit $= \frac{3}{4}$

Finita magnitudo infinitae multitudini aequalis.

9 incipiendo ... differentiis *erg.* *L* 21 formante *(1)* cuius numerator est numerus unitate minor ratione, et nominatores *(2)* sumto *L*

Quaerebam demonstrationem directam cur scilicet in binaria subsectione omnes termini sequentes sint aequales antecedenti, nam quae iam habetur deducens ad impossibile, non praebet fundamentum extendendi longius doctrinam ad alias progressiones, inveni ergo, et quidem detexi theorema, quod videtur fundamentum esse eorum omnium quae de infinitis terminis termino finito ad quemlibet infinitorum rationem cognitam habente, scimus.

Arithmetica infinitorum hoc potissimum quod dixi quaerit, nam possunt quidem exhiberi finitae magnitudines infinitis multitudinibus pares, ut linea punctis, etc. Sed tali ratione nullae absolutae proportiones, sed tantum approximationes in geometria deteguntur.

[*Ergänzungen*]

[*In der rechten Spalte und auf der gegenüberliegenden Seite zwischen den Spalten*]

Quia non semper in potestate nostra est serie [data] per analysin invenire aliam seriem, cuius differentias contineat series data, ideo per synthesin construendae sunt quaedam notae, et primum notandum est, omnes series fractionum (unitate minorum) in quibus tam termini superiores quam inferiores; seu tam numeratores quam nominatores sunt numeri continui cuiusdam progressionis geometricae, esse vel terminos vel differentias alicuius progressionis geometricae, terminos si utrobique sint eiusdem gradus potestatis, quadrata et quadrata, cubi et cubi; differentias si diversi sint gradus, et quidem si differant potestatum gradus unitate, ut quadrata et cubi, cubi et quadrato quadrata, etc. est differentia primi gradus, si differant binario, est differentia 2^{di} gradus, seu differentia differentiae et ita porro, et ad summam eius habendam a termino dato retineatur numerator, pro nominatore sumatur terminus gradus unitate minoris ut pro

9 ratione *(1)* nihil novi detegitur in geometria *(2)* nullae *L* 13 est *(1)* termino dato *(2)* serie | dato *ändert Hrsg.* | per *L* 22 habendam *(1)* aequentur termini *(2)* , a termino *L*

1 Quaerebam: s. o. S. 69 Z. 9–12 u. S. 72 Z. 1–6. 2 quae iam habetur: Leibniz bezieht sich vermutlich auf I. G. PARDIES, *Élémens de géométrie*, 1671, livre IX article 14 S. 85 f.; vgl. dazu auch die *Accessio*, *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 Z. 11 f. 3 f. inveni, detexi: Die Differenzenmethode kennt Leibniz bereits im Herbst 1672; vgl. Nr. 1 S. 3 Z. 11 – S. 4 Z. 1 u. ö.; ausführlich behandelt er sie in N. 4_2.

$\frac{8}{81}$. fiat $\frac{8}{27}$. At ante terminos ipsius progressionis $\frac{2}{3}.\frac{4}{9}$. etc. ponendi sunt termini ubi numerator semper est potestas altior ut $\frac{4}{3}$. $\frac{[8]}{9}$. Et ecce iam rationem novam et universalem summandi omnes series progressionis geometricae eorumve differentias, modo sint continuae: scilicet in termino dato retineatur vel numerator mutato nominatore, si

---

76,18 f. *Dazu auf der gegenüberliegenden Seite, zwischen den Spalten:*

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{3}{3} & 1 & & & \qquad & \frac{5}{5} & 1 & \\
& & \frac{1}{3} & & & & & \frac{2}{5} \\
\frac{6}{9} & \frac{2}{3} & & & & \frac{15}{25} & \frac{3}{5} & \\
& & \frac{2}{9} & & & & & \frac{6}{25} \\
\frac{12}{27} & \frac{4}{9} & & \frac{2}{27} & & \frac{45}{125} & \frac{9}{25} & \\
& & \frac{4}{27} & & & & & \\
\frac{24}{81} & \frac{8}{27} & & \frac{4}{81} & & \frac{[135]}{625} & \frac{27}{125} & \\
& & \frac{8}{81} & & & & & \\
\text{etc.} & \frac{16}{81} & & & & & \frac{81}{625} &
\end{array}$$

Darüber in der rechten Spalte: Nondum inquisivimus quod dudum factum oportebat, rationem vere universalem inveniendi summas progressionis geometricae decrescentis cuiuscunque ut si ratio illa sit $\frac{2}{3}$. vel $\frac{3}{5}$.

2 $\frac{16}{9}$ *L ändert Hrsg.* 12 405 *L ändert Hrsg.*

2–78,4 Die hier formulierte Regel der Summenbildung ist falsch.

series sit differentia progressionis, vel contra, si series sit progressio ipsa, aut series altior cuius terminus est progressio. Mutatus autem vel nominator vel numerator assumatur unius gradus altior quidem numerator, inferior vero nominator, productum erit summa omnium terminorum post terminum datum. Nota: in ratione $\frac{2}{3}$ statim ascendendo ultra ipsam seriem progressionis, series altior non est finitae summae, etsi sit continue decrescens, sed si ratio ita comparata sit, ut in ea nominator et numerator longius differant, fieri potest, ut series ipsa progressione altior sit summabilis, ut si ratio sit $\frac{1}{2}$. altior electa series coincidet cum hac ipsa est enim numerator altior seu quadr. de 1. nihilominus 1. At si sit $\frac{2}{5}$ altior terminus erit $\frac{4}{5}$. sed si rursus altius habes $\frac{8}{5}$. ubi iam desinit series esse summabilis. Sin vero sit $\frac{2}{16}$. seu $\frac{1}{8}$. altior terminus erit $\frac{2}{8}\Big|\frac{1}{4}$. et adhuc altior rursus $\left[\frac{2}{4}\right]$. Ergo quoties 1. numerator altior series coincidit datae, si sit fractio $\frac{2}{9}$. altior terminus erit $\frac{4}{9}$. et porro $\frac{8}{9}$. sed non ultra. Videndum ergo quota potestas numeratoris maior nominatore toties ascendi potest.

[*Zusatz in der rechten Spalte*]

Ex his determinari potest methodus admiranda et universalis inveniendi summam cuiuslibet progressionis geometricae continue decrescentis. Nempe haec: Ut est ratio data (progressionis datae continue decrescentis) ad defectum suum ab unitate (necesse est enim ut ratio sit unitate seu ratione aequalitatis minor seu ratio minoritatis) ita fiat terminus aliquis quartus ad terminum, progressionis datae datum, productus erit summa omnium terminorum post terminum datum sequentium in infinitum. Haec regula facile demonstratur, quia differentiae ad terminos, habent eandem semper rationem; ergo ratio [differentiae] ab unitate, ad ipsam rationem est eadem cum omnium differentiarum ad terminos sequentes ratione. (Assumenda autem est ratio differentiarum ad terminos sequentes, quia habent communem nominatorem, et ideo sunt comparabiles.) Ergo et

11 $\frac{1}{4}$ *L ändert Hrsg.* 16 decrescentis *(1)* : Quaeratur quantum defi *(2)* Ut *(3)* Nempe haec: *(a)* Ut est defectus rationis (datae progressionis) ab unitate ad rationem datam, ita fiat terminus aliquis datus ad *(b)* Ut *L* 18 seu ratione aequalitatis *erg. L* 21 f. ergo *(1)* differentia *(2)* ratio | differentia *ändert Hrsg.* | ab *L*

summa differentiarum numero infinitarum et summa terminorum numero infinitorum, eandem habent rationem. Summa autem differentiarum est terminus datus. Ergo fiat alius qui ad terminum habeat rationem datam, qui sit summa terminorum. Elegans alia hinc observatio ⟨struitur⟩: summam differentiarum interdum esse maiorem interdum minorem summae terminorum interdum aequalem, aequalem cum ratio data est $\frac{1}{2}$. minorem cum est maior quam $\frac{1}{2}$. maiorem cum est minor. Sed hoc intelligendum est ut summa differentiarum possit esse maior si scilicit assumitur una ante terminum primum. Nam alioquin si omnes differentiae sint post terminum primum necessario terminorum summa differentiarum summam excedit.

[*Fortsetzung von S. 76 Z. 10*]

Si sit talis progressio: $\frac{1}{3}\ \ \frac{\frac{1}{2}}{9}\ \ \frac{\frac{1}{4}}{27}$ etc. potestne inveniri summa huius progressionis? Valde dubito.

Hoc determinari potest terminum quemlibet ad quem esse

$$\frac{2}{3}\quad \frac{1}{9}\quad \frac{\frac{1}{2}}{27}\quad \text{etc.}$$

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{\frac{1}{2}}{3}\quad \frac{\frac{1}{4}}{9}\quad \frac{\frac{1}{8}}{27} & = & \frac{1}{2\frown 3} & + & \frac{1}{4\frown 9} & + & \frac{1}{8\frown 27} & \text{etc.}\\
 & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{36} & & \frac{1}{216} & \\
\text{seu} & & \frac{1}{2}\frown\frac{1}{3} & + & \frac{1}{4}\frown\frac{1}{9} & & \text{etc.} &
\end{array}$$

Iam scimus quantitatem totius seriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ etc. et alterius $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ etc. Ducantur hae summae in se invicem, et habebimus productum duarum progressionum in se invicem

1 numero *erg. L* 11 f. progressionis? *(1)* Idem est quod $\frac{2}{3}$ *(2)* Valde *L*

18–80,4 Leibniz begeht denselben Fehler wie auf S. 67 Z. 12 f., bemerkt ihn, im Unterschied zu dort, aber sogleich.

complicatarum, quarum altera est continue decrescens, altera continue crescens, crescente semper dividente decrescentem, seu quod idem est rationem progressionis decrescentis, ad crescentem vel contra. Sed cavendum ne insit error, dato enim facto ex terminis, non semper datur factus ex summa et contra: videamus:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
3 & + & 4 & + & 6 & = & 13 & 9 & 169 & 16 & \\
3 & + & 4 & + & 6 & & 13 & 16 & 51 & \cancel{169}\ \cancel{\frown} & 3 \\
9 & + & 16 & + & 36 & & \overline{39} & 36 & \overline{118} & \cancel{51} & \\
 & & & & & & 13 & \overline{51} & & & \\
 & & & & & & \overline{169} & & & &
\end{array}$$

Error ergo hic commissus erat nisi caveremus determinari productum ex ductis in se invicem summis, non ex ductis in se invicem terminis.

Apparet tamen saltem alterum ab altero non posse abesse nisi finito intervallo. Investigemus ergo summam huius progressionis.

5–9 *Nebenbetrachtungen:*

$$\begin{array}{ccccc}
3 & + & 6 & + & 8 \\
3 & + & 6 & + & 8 \\
\hline
9 & & 36 & & 64
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
3 & + & 1 & + & 2 \\
3 & & 1 & & 2 \\
\hline
9 & & 2 & & 4 \\
81 & + & 4 & & 16
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
3 & & 3 & & 2 \\
3 & & 3 & & 2 \\
\hline
6 & + & 6 & + & 4 \\
36 & + & 36 & + & 16
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
9 & 17 \\
36 & 17 \\
64 & \overline{119} \\
\overline{109} & 17 \\
16 & \overline{289}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
81 \\
4 \\
16 \\
\overline{101} \\
15 \\
\overline{116}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
72 \\
16 \\
\overline{88}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
27 \\
16 \\
\overline{162} \\
27 \\
\overline{432}
\end{array}$$

13 huius *(1)* propositionis *(2)* progressionis *L*

---

1 f. crescens . . . dividente: Leibniz geht auf die Schreibweise von S. 79 Z. 15 zurück. 8 Statt 51 müßte es 61 heißen. Der Fehler wird in die nächsten zwei Berechnungen übernommen.

$$\frac{1}{2 \frown 3} \quad \frac{1}{4 \frown 9} \quad \frac{1}{[8] \frown 27} \quad \text{etc.} \quad \text{vel}$$
$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{36} \quad \frac{1}{216} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2} \frown \frac{1}{3} \quad - \quad \frac{1}{4} \frown \frac{2}{9} \quad = \quad \frac{1}{4} \frown \frac{1}{9}$$
$$\frac{1}{4} \frown \frac{1}{9} \quad - \quad \frac{1}{8} \frown \frac{2}{27} \quad = \quad \frac{1}{8} \frown \frac{1}{27}$$
$$\frac{1}{8} \frown \frac{1}{27} \qquad \text{etc.} \quad = \quad \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Ergo $\frac{1}{2} \frown \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \frown \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \frown \frac{2}{27}$ etc. in infinitum.

Iam duae progressiones una cognitae summae $\frac{1}{4} \frown \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \frown \frac{2}{27}$ etc. altera summae quaesitae $\frac{1}{4} \frown \frac{1}{9} + \frac{1}{8} \frown \frac{1}{27}$ etc. habent eam invicem rationem singulorum terminorum correspondentium, ut quilibet terminus cognitae sit duplus termini respondentis incognitae, ergo summa quoque altera ad alteram habet rationem duplam et proinde $\frac{1}{4} \frown \frac{1}{9} + \frac{1}{8} \frown \frac{1}{27}$ etc. $= \frac{1}{3}$. quod mirum et plane nisi demonstratio adesset, incredibile videri posset.

Nimirum in talis generis progressionibus duabus geometricis inter se complicatis semper apparet ratio terminorum ad differentias, ideo invenitur facile summa terminorum, inventa quippe summa differentiarum.

13–15 *Daneben:* NB. praecurrens. Item repetita ut trium 4 autem differentiae differentiarum.

1 16 *L ändert Hrsg.* 10 cognitae *erg. L*

3–12 Leibniz rechnet gemäß der ungültigen Beziehung $ab - cd = (a - c)(b - d)$. Der Fehler setzt sich bis Z. 12 fort.

Cognitio infiniti apex est humanae subtilitatis.

Investigemus iam et summam progressionis cuiusdam geometricae secundariae, seu cuius differentiae sunt termini progressionis geometricae decrescentis.

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32}$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{1024} \quad \frac{1}{32768}$$

Termini	Differentiae terminorum
$1 \frown 1$	
	$\frac{1}{2}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2}$	
	$\frac{3}{8}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2} \frown \frac{1}{4}$	
	$\frac{7}{64}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2} \frown \frac{1}{4} \frown \frac{1}{8}$	
	$\frac{15}{1024}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2} \frown \frac{1}{4} \frown \frac{1}{8} \frown \frac{1}{16}$	
	$\frac{31}{32768}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2} \frown \frac{1}{4} \frown \frac{1}{8} \frown \frac{1}{16} \frown \frac{1}{32}$	

Nota: Differentiae omnes huius progressionis faciunt 1. Seu quod idem est, si fractiones constituas in infinitas continue decrescentes, ex quibus nominator sit factus continue,

1 f. subtilitatis. | Si quis posset solvere hoc pr *gestr.* | Investigemus *L*

terminorum progressionis geometricae, numerator vero sit maximus terminus nominatorem constituentium unitate diminutus, summa harum fractionum infinitarum omnium est unitas, unde sequitur etiam eas fractionum summas omnes esse aequales inter se.

Quo theoremate nescio an cogitari possit mirabilius. Sed quomodo iam summas prioris progressionis inveniemus?

Constituantur duae istae progressiones, altera incognita terminorum, altera cognita differentiarum sibi parallelae: ut appareat an aliqua reperiri possit ratio inter ipsas.

Termini	Differentiae	Summae			Differentiae differentiarum
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1			
				(0)	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{2}$		
				$\boxed{1}$ $(\frac{1}{4})$	$\frac{17}{64}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{1}{8}$		
				$\boxed{2}$ $(\frac{1}{16}\,\frac{1}{32})$	$\frac{97}{1024}$
$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{16}{1024}$	$\frac{1}{64}$		
				$\boxed{3}$ $(\frac{1}{128}\,\frac{1}{256}\,\frac{1}{512})$	$\frac{449}{32768}$
$\frac{1}{32768}$	$\frac{31}{32768}$	$\frac{32}{32768}$	$\frac{1}{1024}$		
					etc.

8–18 *Neben der rechten Spalte:* Haec progressio in infinitum continuata facit $\frac{1}{2}$.

1 sit *(1)* ultimus terminus unitate *(2)* maximus *L* 6 altera *(1)* terminorum, altera differentiarum, altera cogni *(2)* incognita *L*

Aequales sunt summae progressionum, differentiae praemissae, et summa progressionis ipsius purae seu primariae, quod ex hoc schemate eleganter patet:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{2} & = & \frac{1}{2} & & & & & & \\
\frac{3}{8} & = & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & & & & \\
\frac{7}{64} & = & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{32} & + & \frac{1}{64} & & \\
\frac{15}{1024} & = & \frac{1}{128} & + & \frac{1}{256} & + & \frac{1}{512} & + & \frac{1}{1024}
\end{array}$$

Ergo et duae progressiones

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{7}{64} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

sunt aequales ac proinde ex diversis principiis demonstratur, idem eleganti nota ac velut proba, in rebus tam intricatis et ab omni sensu penitus remotis, ubi alioquin nullus inductioni locus, gratissima veritatis.

Inquirendum est, quantum valeat summa haec rationum in infinitum:

$$\frac{4}{3} \;\Big|\; \frac{8}{7} \;\Big|\; \frac{16}{15} \;\Big|\; \frac{32}{31} \;\Big|\; \frac{64}{63}$$

est progressio decrescens quidem in infinitum, sed cuius tamen productum seu summa est infinitas. Ideo impossibile est eius quantitatem exprimere, at possibile est exprimere quantitatem differentiarum quae sunt

$$\frac{4}{21} \quad \frac{8}{105} \quad \frac{16}{465} \quad \text{etc.}$$

1 progressionum, *(1)* ex positis, quod hac disposi *(2)* differentiae *L* 12 f. ac velut proba *erg. L* 13 et ... remotis *erg. L* 15 f. infinitum: *(1)* $\frac{4}{3}$ $\frac{8}{7}$ $\frac{16}{15}$ $\frac{32}{31}$ $\frac{64}{63}$ *(2)* $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{7}{8}$ 1 $\frac{15}{16}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{63}{64}$ etc. *(3)* $\frac{4}{3}$ *L* 18 eius *(1)* rationem *(2)* num *(3)* quantitatem *L*

aequantur exacte $\frac{4}{3}$ seu $1\frac{1}{3}$. Si ergo ab hac progressione subtraheres terminos alterius progressionis valentis 1 haberes progressionem valentem $\frac{1}{3}$.

Nota hae differentiae hoc loco omnes sunt fractiones quae habent numeratores terminos progressionis geometricae seu numeratores termini praecedentis eiusdem, et nominatores factos ex duobus nominatoribus terminorum. Possum et sic procedere:

$$\frac{1}{0}\;\Big|\,0\,\Big|\;\frac{2}{1}\qquad\frac{3}{2}\qquad\frac{4}{3}\qquad\frac{5}{4}\qquad\frac{6}{5}\qquad \text{etc.}\quad \text{differentiae sunt}$$

$$\frac{1}{2}\qquad\frac{1}{6}\qquad\frac{1}{12}\qquad\frac{1}{20}\qquad \text{etc.}\qquad \text{Hoc omne in infinitum facit 2.}$$

Hinc est in nostra potestate solvere hoc problema: cuilibet quantitati finitae facere seriem infinitorum terminorum aequalem, imo series infinitas. Hinc potest data qualibet serie infinita constitui series alia infinita, quae ad eam rationem habeat datam, id quidem facile. Item, ut ab ea differentiam habeat datam.

Ne tantum de s e r i e b u s infinitis loqui videamur, loquamur et de terminis, sed qui ex infinitis multiplicationibus vel divisionibus seu rationibus componuntur, ut

$$\frac{2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \frown 6 \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \text{ etc.}} \text{ in infinitum.}$$

Haec ratio valet 1. Nam abici potest primum 1. inferioris, caeteris inferioris manentibus, quo facto numerator et nominator sunt aequales, seu fit ratio aequalitatis, id est 1. Sit iam ita:

$$\frac{2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \frown 6 \text{ etc. in infinitum}}{3 \frown 4 \frown 5 \frown 6 \frown 7 \text{ etc. in infinitum}}$$

---

18 *Daneben:* Eodem modo $\frac{2 \smile 3 \smile 4 \smile 5 \text{ etc.}}{3 \smile 4 \smile 5 \smile 6 \text{ etc.}}$

4 seu ... praecedentis *erg.* *L* 11 f. datam | $\frac{2 \frown 4 \frown 8 \frown 16 \frown 32 \text{ etc.}}{1 \frown 3 \frown 7 \frown 15 \frown 31 \text{ etc.}}$ cui aequantur? Item: $\frac{2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \frown 6 \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \text{ etc.}}$ hoc aequatur 1. Sed si sic: 2 $\frown$ 3 $\frown$ *gestr.* | Ne *L* 13 multiplicationibus ... seu *erg.* *L*

---

7 Tatsächlich gilt $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots = 1$. 15–86,3 Die hier vorgenommenen Kürzungen sind nicht zulässig. Tatsächlich geht der Wert des ersten Bruches gegen ∞, der des zweiten gegen 0. Mit den auf S. 86 Z. 14 angestellten Überlegungen liefert Leibniz selbst ein implizites Gegenargument.

abiectis terminis communibus residuum manet 2. in numeratore, in [nominatore] 1. est ergo tota ratio 2. Contra si sit terminus v.g. 2. [in] nominatore, qui non est in numeratore, ita enim valor erit $\frac{1}{2}$. In genere abiciantur termini communes, licet infiniti, utrinque, si finiti restant vel in summo vel in uno, vel utrobique, determinabunt quantitatem huius progressionis complicatae. Et determinare poterunt vel per modum simplicis multiplicationis, divisionisve vel mixtae cum additione, subtractione, radicum extractione. Sed si in uno termino sit multiplicatio, in altero divisio, productum fit infinite magnum, vel infinite parvum, ut facile patet cuivis consideranti.

Sed quid si termini non coincidant: ut si sit haec complicatio duarum progressionum, quarum altera est geometrica, altera constat ex terminis unitate differentibus a terminis geometricae v.g.

$$\frac{2 \frown 4 \frown 8 \frown 16 \frown 32 \text{ etc. in infinitum}}{1 \frown 3 \frown 7 \frown 15 \frown 31 \text{ etc. in infinitum}}.$$

Hoc casu determinari nihilominus quantitas quidem potest, crescit enim ratio in infinitum, ex. causa $\frac{2 \frown 4}{1 \frown 3}$ facit $\frac{8}{3}$. at $\frac{2 \frown 4 \frown 8}{1 \frown 3 \frown 7}$ facit $\frac{64}{21}$ ⨍ $3\frac{1}{21}$. quod iam est maius priore, ideo invertenda est positio, hoc modo:

$$\frac{1 \frown 3 \frown 7 \frown 15 \frown 31 \text{ etc.}}{2 \frown 4 \frown 8 \frown 16 \frown 32 \text{ etc.}} \text{ in infinitum.}$$

Ita enim terminus continue decrescit in infinitum. Sed investigandum est, an ita decrescat, ut nihilo minus productum fiat [finitum], quod aliquando fit, ut supra exemplo ostendi-

---

8 *Daneben, ohne direkten Bezug zum Haupttext:*

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{6} - \frac{3}{6} \qquad \frac{2}{6} \times \frac{2}{4} \qquad \frac{8-12}{24} \qquad \frac{\frac{2}{8} - \frac{2}{6}}{\frac{2}{6} - \frac{2}{4}} \begin{array}{l} = 0 - \frac{1}{12} \\ = 0 - \frac{1}{6} \end{array} \qquad \frac{\frac{8}{2} - \frac{6}{2}}{\frac{6}{2} - \frac{4}{2}} \begin{array}{l} 4 - 3 = 1 \\ 3 - 2 = 1 \end{array}$$

12 *Späterer Zusatz in der rechten Spalte:* $\frac{1+1 \frown 3+1 \frown 7+1 \frown 15+1}{1 \quad \frown \quad 3 \quad \frown \quad 7 \quad \frown \quad 15}$ $\frac{2}{1} \frown \frac{4}{3} \frown \frac{8}{7} \frown \frac{16}{15}$.

1 numeratore *L ändert Hrsg.* 2 sit *(1)* plus in *(2)* terminus *(a)* in *(aa)* numer *(bb)* nominatore *(b)* v. g. 2 | in *erg. Hrsg.* | nominatore, *L* 2 f. numeratore, *(1)* et ita omnes termini nu *(2)* ita *L* 6 vel ... extractione *erg. L* 13 potest, *(1)* admiranda quadam ratione: potest enim ratio ita stare $\frac{1+1 \frown 3+1 \frown 7+1 \frown 15+1}{1 \quad \frown \quad 3 \quad \frown \quad 7 \quad \frown \quad 15}$ *(2)* crescit *L* 18 fiat *(1)* finitum *(2)* | infinitum *ändert Hrsg.* |, quod *L*

---

18 supra: s. oben S. 82 Z. 6–17 .

mus, an ita, ut evanescat in nihilum, seu minus quolibet dato; an vero potius aequetur alicui finito, quod rationibus nostris usibusque commodissimum foret, investigabimus ita:

$$\frac{\underset{1}{\cancel{1}} \frown \underset{1}{\cancel{3}} \frown \underset{1}{\cancel{7}} \frown \underset{1}{\cancel{15}}}{\frac{1+1}{1} \frown \frac{3+1}{3} \frown \frac{7+1}{7} \frown \frac{15+1}{15}} \text{ etc.} = \frac{1 \frown 1 \frown 1 \frown 1 \text{ etc.}}{2 \frown 1\frac{1}{3} \frown 1\frac{1}{7} \frown 1\frac{1}{15}\text{etc.}} \text{ vel } \frac{1}{\frac{2}{1} \frown \frac{4}{3} \frown \frac{8}{7} \frown \frac{16}{15} \text{ etc.}}.$$

Est ergo minus productum quolibet dato, scilicet unitas divisa per infinitum. Idem brevius ostendi poterat ex ipsa rationis maioritatis in rationem [minoritatis] transformatione.

Sed ut ad nostram illam progressionem geometricam secundariam, in qua aqua etiamnum haeret, redeamus.

Investiganda est ratio harum duarum progressionum.

Termini	Differentiae
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$
$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$
etc.	etc.
Summa huius quaeritur.	Summa huius inventa, est 1.

Investigemus rationes aliquot terminorum, ut lux nobis aperiatur $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{7}{64}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}}$. Addantur termini tam nominatoris quam numeratoris ad se invicem.

Erit numeratoris haec reductio $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{7}{64}$

1 vero potius *erg. L* 4–6 Idem ... transformatione. *erg. L* 5 maioritatis *L ändert Hrsg.* 18 f. Addantur ... invicem. *erg. L*

7 f. ut ... redeamus: ebd. 7 f. aqua ... haeret: CICERO, *De officiis*, 3, 33.

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{8} = \frac{8+6}{16} = \frac{14}{16}\times\frac{7}{64} = \frac{896+112}{1024} = \frac{1008}{1024}.$$

Et nominatoris haec erit reductio

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\ \ \frac{8+2}{16} = \frac{10}{16}\times\frac{1}{64} = \frac{640+16}{1024} = \frac{656}{1024}.$$

Abiciatur divisor communis 1024 et a nominatore et a numeratore, producta ratio erit: $\dfrac{1008}{656} \Big| \dfrac{504}{[328]}$. Sed ex his nullus ad problematis solutionem aditus aperitur.

Omnes fere termini seriei cuiuscunque in infinitum decrescentis videntur esse aut summae aut differentiae, aut termini (transsiliendo quoque), aut potestates radicesve, et horum rursus aut summae aut differentiae, horumve variae mixturae: terminorum progressionis alicuius geometricae (aut harmonicae).

De differentiis differentiarum hoc loco aliquid dicendum est:

$$\begin{array}{cccccccccc}
8 & & & & & 27 & & & \\
 & 4 & & & & & 18 & & \\
4 & & 2 & & & 9 & & 12 & \\
 & 2 & & 1 & & & 6 & & 8 \\
2 & & 1 & & & 3 & & 4 & \\
 & 1 & & & & & 2 & & . \\
1 & & & & & 1 & & . & \\
 & & & & & & . & & . \\
 & & & & & . & & . & \\
 & & & & & & . & & . \\
 & & & & & & & . & \\
 & & & & & & & & .
\end{array}$$

---

10 *Zur Streichung, nicht gestrichen:* NB. Manent vera quae de differentiis differentiarum dico, etsi supra ostensum sit, aliquando aliquas differentiarum series non esse continue decrescentes, etsi series terminorum sit continue decrescens. Sed hoc casu ubi series crescere incipit, ibi finiri censetur series decrescens per 0.

5 323 *L ändert Hrsg.* 6 fere *erg. L* 7 (transsiliendo quoque) *erg. L* 10 dicendum *(1)* esto *(2)* est *L*

---

24 supra: s. oben S. 72 Z. 16–18.

Regula: Summa differentiarum generantium seu primarum addita termino primo aequatur omnibus differentiis et differentiarum differentiis in infinitum.

27. 18. 12. 8. etc. = 18. 6. 2. etc. 12. 4. etc. 8. etc. Nam 27. aequatur seriei differentiarum primae, et 18. 2^{dae}, et 12. 3^{tiae}, et sic in infinitum. Similiter 18. 12. 8. etc. aequantur 12. 4. etc. 8. etc. etc.

Hinc si qua progressio ita comparata sit, ut ipsarum differentiarum generantium infinitarum iniri possit summa, ut in progressione geometrica dupla, ubi differentiae generantes coincidunt ipsis terminis progressionis geometricae duplae continue decrescentibus, utrobique enim sunt 8. 4. 2. 1. etc. Iam 8. 4. [2.] 1. etc. faciunt in universum 16. seu $8 \frown 2$. Ergo omnes differentiae differentiarum, seu series, numero infinitae quarum quaelibet continet differentias numero infinitas, ac proinde multitudo quantitatum (rationem cognitam habentium) infinities infinita, aequatur magnitudini cuidam finitae, etsi quaelibet ex multitudine illa habet rationem cognitam finitam ad magnitudinem cui aequantur omnes. Quod est admirandum.

Nota istae differentiae primae sunt generantes per subtractionem, non per additionem, atque ideo in illis inflectendam esse regulam meam quam alibi de differentiis generantibus in seriebus crescentibus tradidi. Igitur invertenda res est, et loco progressionis decrescentis consideranda est crescens, seu loco 27. 9. 3. 1. etc. dicendum est 1. 3. 9. 27. etc. ibi vero differentiae generantes erunt 1. 2. 4. 8. numeri scilicet progressionis geometricae unitate differentis, ut a me supra ni fallor demonstratum memini. Et quia praecedens ante geometricam duplam est unitas, ideo fit ut iidem maneant termini differentiarum primus secundus tertius eiusdem ordinis. Ex his etiam patet numeros progressionis geometricae unitate minoris esse differentias generantes simplices datae, at binario differentes, esse differentias generantes quadratas datae seu secundi gradus, et ternario, differentias cubicas seu tertii gradus. Sed haec obiter.

1 | Esto series decrescens progressionis geometricae, in ea manifestum est differentias differentiarum simul sumtas, aequari omnibus terminis progressionis demto primo. Videndum quid in alia progressione contingat. Ibi vero id falsum esse evincitur. Sic ergo recte constituetur *gestr.* | Regula *L*
6 ipsarum *(1)* terminorum generantium in *(2)* differentiarum *L* 9 2 *erg. Hrsg.* 10 seu $8 \frown 2$. *erg. L* 12 (rationem cognitam habentium) *erg. L* 12 aequatur *(1)* termino cuidam finito *(2)* magnitudini *L*

---

1 f. Wie die Zahlenbeispiele zeigen, bezieht sich die Regel auf Nullfolgen. Nur für diese gilt sie.
16 alibi: N. 5 Teil 2. 20 ut ... memini: Offenbar ist die rechte Tabelle von S. 88 Z. 11–22 gemeint.

Cuiuscunque rationis sit progressio, modo ratio illa sit numerus integer, sumenda est differentia eius gradus cuius est unitates, vel si progressio aliunde quam ab unitate coepit, is ipse numerus repetitus, quod est notabile.

Sed inquirendum quid eveniat, si ratio non sit numerus integer sed fractus aliquis aut ratio surda, an ibi quoque locum habeat quod de ratione unitate minore dixi, subtilissimae nec certe inutilis hoc est pervestigationis, sed ab hoc loco alienae.

Si quis data serie in infinitum decrescente summae finitae reperiat modum inveniendi aliam seriem, in infinitum decrescentem (sive summae finitae, sive summae infinitae,) cuius differentiae sint termini seriei praecedentis; is datae seriei summam reperire potest, quia seriei inventae initium erit seriei datae summa. Hoc problema etsi videatur facillimum, est tamen ex difficillimis quae ab homine fingi possunt. Hoc quisquis repererit, uno velut ictu geometriam ad perfectionem admirandam perduxerit. Pendet hoc problema ex theoremate totius huius tractationis fundamentali, quod in serie qualibet continue decrescente terminus datus est summa omnium differentiarum sequentium.

Ego initio mihi ipsi obiectionem feceram quae me diu anxium tenuit; cogitabam enim, posse contingere, ut idem aequale sit inaequalibus, quod sit absurdum, quia terminum scilicet primum, pro arbitrio eligere liceat. Sed hoc falsum esse, nec terminum primum pro arbitrio eligi posse experiundo comperi. Non enim nisi unico quodam certo termino electo continget progressionem decrescere in infinitum (nam cum numeris nihilo minoribus nullum nobis hic negotium esse potest.)

Verbi gratia esto progressio continue decrescens 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. etc. quaeritur alia progressio, cuius differentiae sint termini praecedentis. Ponamus eam incipere a 6. Erit ergo hic progressus:

4–6 NB.

2 cuius *(1)* | est numerus *streicht Hrsg.* | *(2)* est *L* 5 de *(1)* rationibus *(2)* ratione *L* 7 data ... finitae *erg. L* 18 primum *erg. L*

---

5 quod ... dixi: s. oben S. 71 Z. 14–16. 13 ex theoremate ... fundamentali: s. oben S. 68 Z. 7–9. 15 cogitabam: N. 5 S. 60 Z. 2–4.

$$\begin{array}{ccc}
6 & & \\
 & \diagdown\!\diagdown & \\
 & & 4 \\
 & \overline{+} & \\
2 & & \\
 & \diagdown\!\diagdown & \\
 & & 2 \\
 & \overline{+} & \\
0 & &
\end{array}$$

Ecce evanescit mature nec procedit in infinitum. Ita progressio 9. 3. 1. $\frac{1}{3}$. etc.

Problema illud magnum, invenire aliam progressionem cuius differentias contineat data, intelligendum est, scilicet cognita progressionis datae, ratione.

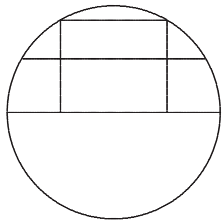
Nota verae repertae progressionis, seu veri termini primi haec est, si communis quaedam ratio seu constructio in infinitum descensura terminorum quaesitorum *A. C. E.* reperiri potest.

Caeterum ex his quae iam inventa sunt methodus reperiri potest quadrandi plurimas lineas curvas, etiam quae ne describi quidem, nisi per puncta hactenus aut vulgaribus saltem modis, possint, etsi forte describi possint motibus complicatis possibilibus si non factis, saltem intellectis seu suppositis.

Ex eo quod in regula nostra fundamentali dictum est, sequuntur innumerabilia in geometria, ut ex. grat. omnes differentias chordarum omnium infinitarum aequari diametro. Et differentias chordarum interpositarum inter diametrum et semidiametrum aequari semidiametro. Differentias diversas hinc a diametro illinc a semidiametro esse sibi complemento ad rectum. Omnes illos varios modos distribuendi semidiametrum, conficere ellipsin, si tres sint partes ellipsin solidam, si per 4 distribuatur ellipsin quadrato-quadraticam etc. Tentandum an ex his aliquid circa sectionem arcuum deduci possit.

11 est, *(1)* si *(a)* ut diff. *(b)* B + C facit *(2)* si *L* 16 possibilibus *erg.* *L*

18 regula nostra: s. Erläuterung S. 90 Z. 13. Leibniz greift im folgenden den Text und die Figur von S. 67 Z. 15 – S. 68 Z. 2 wieder auf.



[*Fig. 3*]

Si quis novum aliquod theorema fundamentale circa infinitum detexerit, is poterit longius ire,

$$\begin{array}{llllll}
A & & & B \frown b & = & A \\
& \diagdown\!\diagdown & & & & \\
& & b & & & \\
& \frown & & & & \\
B & & & C \frown c & = & B \\
& \diagdown\!\diagdown & & & & \\
& & c & & & \\
& \frown & & & & \\
C & & & D \frown d & = & C \\
& \diagdown\!\diagdown & & & & \\
& & d & & & \\
& \frown & & & & \\
D & & & \text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

Auferantur omnes multiplicantes in infinitum, fiet

$$\begin{array}{lcc}
\text{ex} & A & B \\
& B & C \\
& C & D \\
& D & E \\
& \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Ergo A $(B \frown b)$ est aequale differentiae inter $B + C + D$ etc. et $B \frown b + C \frown c + D \frown d$ etc. in infinitum.

Hinc porro sequitur differentiam istam esse aequalem differentiis terminorum simul sumtis in infinitum, et si nullus sit progressus in infinitum, addito differentiis termino ultimo, si scilicet ultimo loco ponatur 0.

Si qua series infinita (sive crescens sive decrescens, sive etiam perturbata utcunque) dividatur per rationes inter terminos interiectas productum erit, ipsa series, demto termino primo. Dividi autem intelligendum est quemlibet terminum per rationem antecedentem. Nota si ista ratio est fractio minor unitate, tunc ipsa progressio est descendens, et per consequens divisio per rationes est in reapse multiplicatio. Contra si fractio est unitate maior, est ista divisio, vera divisio, et progressio est continue crescens.

Quoniam differentiis earumque summis uti possumus ad infinita mensuranda, ideo huius loci est, nonnihil de differentiis ratiocinari. Nimirum:

Si fiant duo rectangula alterum factum ex ductu differentiae in terminum primum, alterum factum ex ductu differentiae in terminum secundum, summa rectangulorum aequatur rectangulo ex summa terminorum in differentiam ducta. Et hoc quidem per se patet.

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & & & 4 & & \\ 6 & & 8 & & 6 & & 10 \\ \multicolumn{7}{l}{6 \frown 2 + 8 \frown 2 = 6 + 8[,] \frown 2.} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 4 & & 7 \\ \multicolumn{3}{l}{8 \frown 2 - 6 \frown 2 = 2 \frown 2} \end{array}$$

2 NB. Si series sit decrescens.

12–94,11 *Dazu auf der vorangehenden Seite:* Differentia inter rectangulum ex differentia et termino uno, et rectang. ex differentia et termino altero est quadratum differentiae.

Et summa est summa ipsorum terminorum multiplicata per differentiam.

Sed quomodo inveniemus differentiam inter summam et differentiam, vel inter quadratum differentiae et summam, vel inter quadratum differentiae et summam rectangulorum, vel inter summam et differentiam horum rectangulorum, ea est terminus primus multiplicatus per differentiae duplum.

10 earumque summis *erg. L*

4–9 Richtig wäre „per rationem sequentem“ statt „antecedentem“, „crescens“ statt „decrescens“, „decrescens“ statt „crescens“.

Sed pergamus:

Differentia inter eadem rectangula, aequatur quadrato differentiae inter terminos. Hoc ita demonstratur.

$$\overset{b}{a.\ a{+}b},\ \ ab+aa-ab=aa.$$

Differentia inter eorundem rectangulorum summam, et eorundem rectangulorum differentiam aequatur rectangulo facto ex termino primo seu minore et differentia duplicata. Nam

$$ab+aa,+ab,-aa=ab+ab=a\frown 2b.$$

Et contra si quadrato differentiae addas rectangulum factum ex duplo differentiae et termino primo, habebis summam duorum rectangulorum.

Data summa rectangulorum $a\frown 2b+aa$. terminoque primo, invenire differentiam et terminum alterum, vel uno ex his tribus dato invenire tertium, hoc nescio an sit solubile: videamus.

Secetur scilicet ista summa rectangulorum data in duas partes, quarum una sit quadratum termini qui cum dato bis multiplicatus faciat alteram. Esto ergo terminus datus b. summa data c^q, quae ita secari iubetur. Ideo secta iam putetur in partes duas d^q. et c^q-d^q. ex quibus d^q. ponatur esse pars una quae est quadratum[,] ergo eius Rq. est d. multiplicata per terminum datum b. bis faciet $2b\frown d=c^q-d^q$ seu $2b=\dfrac{c^q-d^q}{d}$ seu $2b=\dfrac{c^q}{d}-\dfrac{d^q}{d}$ seu $2b=\dfrac{c^q}{d}-d$ seu $2b+d=\dfrac{c^q}{d}$ seu $d=\dfrac{c^q}{d}-2b$. Dividantur omnia per d. fiet $1=\dfrac{c^q}{dd}-\dfrac{2b}{d}.\ 1+\dfrac{2b}{d}=\dfrac{c^q}{dd}.$

Nota quadrati differentiae ratio ad ipsam summam rectangulorum differt unitate a ratione inter ipsam partem duplicatam, et differentiam.

7 seu minore *erg. L* 15 data *erg. L* 16 f. terminus datus b. *erg. L* 17–23 data *(1)* c, quae ... duas d. et c − d. ex quibus d ponatur ... Ergo eius Rq d multiplicata ... faciet $2\mathrm{b}\frown \mathrm{Rq\,d}=\mathrm{c}-\mathrm{d}$. seu $2\mathrm{b}=\dfrac{\mathrm{c}-\mathrm{d}}{\mathrm{Rq\,d}}$. seu $2\mathrm{b}=\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{Rq\,d}}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{Rq\,d}}$. seu $2\mathrm{b}=\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{Rq\,d}}-\mathrm{d}$. seu $2\mathrm{b}+\mathrm{d}=\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{Rq\,d}}$. seu $\mathrm{d}=\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{Rq\,d}}-2\mathrm{b}$. Dividantur omnia per d, fiet $1=\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}-\dfrac{2\mathrm{b}}{\mathrm{d}}.\ \dfrac{1+2\mathrm{b}}{\mathrm{d}}=\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$. Nota, si partem | quamlibet *erg.* | assumes summae rectangulorum, eius ratio ad ... ratione inter differentiam duplicatam, et *(a)* ipsam partem *(b)* ipsius partis radicem *(2)* c^{q} *L*

9 Dem Wortlaut des Textes entspricht das Produkt $b\frown 2a$. 22 f. Leibniz hat die beiden ersten Glieder der Proportion irrtümlich vertauscht.

Nota, quia differentia et terminus minor sibi mutuo sunt differentia et terminus, ideo variari potest haec enuntiatio multis modis, ut differentiae voci substituatur vox termini minoris et contra.

Videndum quousque haec transpositio permitti possit in differentiis et terminis pluribus continuatis, et in differentiis differentiarum.

Nota in omnibus differentiis decrescentibus terminus ultimus censendus est 0. Is enim est terminus ultimus etsi decrescat series in infinitum.

Hinc summa differentiarum est differentia inter terminum primum et ultimum. Ultimus autem est 0. Ergo summa differentiarum aequalis est termino primo assumto.

Si sint duae series infinitae

$$\begin{array}{lcl} B & \frown & b \\ C & \frown & \boxed{\begin{array}{l} c = B \\ d = C \end{array}} \\ D & \frown & \\ \text{etc.} & & \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} B & \smile & \boxed{\begin{array}{l} c = C \\ d = D \end{array}} \\ C & \smile & \\ D & & \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

ostensum est $B \frown b$. vel A aequari differentiae inter utramque.

Item differentiam inter

$$\begin{array}{ccc} B \smile c & \text{et} & B \\ C \smile d & & C \\ D \smile e & & D \\ \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

esse B

posito quod c. sit ratio inter B et C et d. sit ratio inter C et D etc.

et inter duas progressiones

$$\begin{array}{cc} B \frown c & B \smile c \\ C \frown d & C \smile d \\ D \frown e & D \smile e \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

differentia erit $B \frown c + B$. seu $A + B$.

1 terminus *(1)* primus *(2)* minor *L* 10 duae *(1)* progressiones *(2)* series *L* 23–28 et ... A+B. *erg. L*

15 ostensum: s. o. S. 92 Z. 23 f. 16 Item: s. o. S. 93 Z. 4–6. 28 differentia ... $A + B$.: Die Aussage ist falsch, da für die beiden Folgen der vorangehenden Tabelle unterschiedliche Definitionen von b, c, d etc. eingesetzt werden. Während für die Folge in der rechten Spalte wie bisher gilt $B : c = C$, $C : d = D$, setzt Leibniz in der linken Spalte $B \cdot c = A$, $C \cdot d = B$. Im folgenden Text bis S. 96 Z. 10 wird konsequent mit der Definition $B \frown c = A$ gerechnet.

Ergo ducatur differentia in utramque progressionem, seu in quemlibet eius terminum.

$$\begin{array}{llll} B \frown c & (\frown B \frown c) \frown A & - & B \frown (B \frown c)A \\ C \frown d & & - & C \\ D \frown e & & - & D \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

differentia inter has duas series erit $B \frown c \frown B \frown c$ seu $A \frown A$; vel A quadr. Eodem modo de caeteris.

Quod si iam A duplicetur fiet $2A$ seu $2B \frown c$. Et hoc A duplicatum ductum in seriem minorem B. C. D. etc. addito A quadrato faciet duorum istorum rectangulorum summam. Et haec reduci poterit ad aliquid finitum enuntiabile, si ipsa series sit summabilis.

Dantur etiam series continue crescentes, quae tamen habent summam finitam, sed eae sunt complicatae.

Nota investigandum esset quid sit terminus ipse maior ad minorem, aut differentiam seu si terminus assumtus sit maior et unus minorum seu differentia. Ergo loco A.

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ A & & A+B \quad \text{ita concipiemus:} \\ & B & \\ A & & A-B \end{array}$$

investigemus: summam rectangulorum: $AB + BA - BB$. erit non ut ante rectangulum ex termino dato primo et differentia [duplicatum] addito quadrato sed potius demto quadrato.

Differentia rectangulorum manet eadem quae prior quadratum differentiae, differentia differentiae rectangulorum a differentiae summae est rectangulum differentiae et termini dati duplicatum, demto quadrato differentiae [duplicato].

Porro ex his principiis etiam possunt dari duae rationes inter finitum et infinitum, unitate differentes inter se. Unde intelligi potest aliquam esse quantitatem rationis finiti

25–97,2 *Daneben in der rechten Spalte:* Exhiberi facile potest ex communibus prin-

8 in *(1)* terminum *(2)* seriem *L* 14 seu si terminus *(1)* cognitus *(2)* assumtus ... differentia *erg. L* 19 BB. *(1)* erit itidem differentiae $\square^{\text{tum}}$. Et differentia inter rectangulorum summam | erit *streicht Hrsg.* | *(2)* erit *L* 20 duplicatum *erg. Hrsg.* 24 f. differentiae | duplicato *erg. Hrsg.* |. | Sed haec supponunt differentiam esse minorem termino dato, seu eum ex duobus terminis datis pro differentia, hoc non potest manquer *gestr.* | Porro *L* 25 dari *(1)* quaedam *(2)* duae *L*

ad infinitum, quando differentia inter duas eiusmodi rationes esse potest. Demonstratio in promtu est ex dictis.

Si sumas A differentiae inter duas progressiones supra dictas, quadratum, et ponas ipsarum progressionum summas esse magnitudine infinitas, ut si sint continue crescentes purae, (non complicatae) et, ista differentia A. in quamlibet progressionem ducatur et facta rectangula (ex uno latere infinito altero finito) inter se addantur, (quo facto fiet series supra novissime posita mutando tantum signum $-$ in $+$) et ratio aliqua huius $\square^{\text{ti}}$ A seu AA ad hanc summam esse intelligatur, ita ut summa sit numerator, quadratum sit nominator (vel contra) et vero constituatur alia quoque ratio inter duplum minoris seriei: $B.C.D.$ etc. (vel $B \smile c.\ C \smile d.\ D \smile e.$ etc.) in infinitum progredientis (seu summam magnitudine infinitam habentis ex hypothesi;) et differentiam: ita ut duplum seriei illius magnitudine infinitum sit numerator, differentia quae magnitudine finita est, sit nominator (vel contra). Ratio haec unitate differet a praecedente per supra positam regulam.

---

cipiis geometriae finitum aliquod aequale spatio infinitae longitudinis continue decrescentis latitudinis, ut circulus aequalis polygono inscripto cuidam, et continuis differentiis sequentium polygonorum etc. quae si in una serie continua locarentur spatium infinitae longitudinis conficerent. Sed non nisi in uno exemplo habemus, ut totius quantitas non minus quam cuiuslibet ex partibus assumtis possit enuntiari, hoc exemplum est in progressione geometrica dupla. Et id posset accommodari ad geometriam, si assumatur non linea sed rectangulum et dimidia eius pars extensa intelligatur in longitudinem aequalem primae et dimidia dimidiae itidem etc. Necesse esset longitudinem totius fieri infinitam, et tamen spatium aequari duplo primae partis □ ▭ ▭ etc. Elegans erit cogitare de ratione haec spatia asymptota vel infinita ita construendi [ut] una quadam linea includantur. Consulenda hic quae a Barocio sunt demonstrata.

3 sumas *(1)* quadr *(2)* A^{q}. differe *(3)* quadratum, A, *(4)* A *L* 4 magnitudine *erg. L* 9 f. inter *(1)* minorem seriem ... progredientem *(2)* duplum *L* 12 magnitudine infinitum *erg. L* 24 ut *erg. Hrsg.*

---

3 supra dictas: s. o. S. 92 Z. 23 f. 7 supra novissime: s. o. die Tabelle nach S. 96 Z. 1. Mit einem Verweisungsstrich hat Leibniz diesen Zusammenhang verdeutlicht. 25 Barocio: Fr. Barozzi, *Admirandum illud geometricum problema*, 1586.

Si sumatur series terminorum in infinitum decrescentium et assumi intelligantur omnes quorumlibet duorum terminorum proximorum rationes quae proinde numero infinitae sunt, eaeque rationes in se invicem duci intelligantur: tunc si quidem series data in infinitum decrescens, sit numerorum (nihil refert purorum an surdorum), omnes rationes in se invicem ductae, aequantur termino primo, seu primam rationem proxime

---

1 *Daneben in der rechten Spalte:*

$$\begin{array}{lll} A & & \qquad A = a \frown b \frown c \frown d \text{ etc.} \\ & \backslash\backslash & \\ & & a \\ & \frown & \\ B & & \\ & \backslash\backslash & \\ & & b \\ & \frown & \\ C & & \\ & \backslash\backslash & \\ & & [c] \\ & \frown & \\ D & & \\ & \backslash\backslash & \\ & & [d] \\ & \frown & \\ E & & \end{array}$$

1 infinitum *(1)* , rationes *(2)* decrescentium *(a)* et factus ex ducta omnium rationum in se invicem *(b)* et *L* 2 omnes *(1)* eorum *(2)* quorumlibet *L* 2 proximorum *erg. L* 4 numerorum | (nihil ... surdorum) *erg.* | series *gestr.* |, omnes *L* 17 d *L ändert Hrsg.* 21 e *L ändert Hrsg.*

4–99,1 Leibniz überträgt unzulässigerweise den Satz über die Summe der Differenzen einer Nullfolge auf das Produkt ihrer Quotienten. Der Fehler vererbt sich bis S. 101 Z. 16. In dem nachgetragenen Absatz, S. 100 Z. 6–17 schwächt er die Aussage ab; sein Versuch der Richtigstellung trifft das Problem aber nicht genau. Tatsächlich würde der Satz nur gelten, wenn die Quotientenfolge gegen 1 ginge.

praecedenti. Si non sit series numerorum seu quantitatum, sed quantorum, ut linearum, tunc quia alioquin rationes terminis sunt heterogeneae, necesse est eas imbui ipso rerum genere, seu ductas intelligi, in id quod in eo genere minimum est, ut ad lineas constituendas in punctum, ad plana constituenda in lineam, ad tempus constituendum in instans, ad motum constituendum in conatum, et ita omnes istae rationes in se invicem ductae, et termino homogeneae redditae, termino aequabuntur. Vel quod idem est, si terminus aliquis assumatur et rationes omnes in ipsum ductae intelligantur, summa omnium productorum, erit duplum termini.

Ideo si sint plures series progressionis geometricae continue decrescentes, omnes incipientes ab eodem termino

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{9} & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{8} & & \frac{1}{27} & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{16} & & \frac{1}{81} & \\
 & & & & \\
 & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

et contra aliquis sibi imaginetur aliquem ab infinito incepisse multiplicare in se invicem $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{2}$ ascendendo et nunc esse in $\frac{1}{81}$ vel in $\frac{1}{16}$ et continuare, is exacte producet 1.

1 seu quantitatum, *erg. L* 8 f. termini. | Imo error est, quia post eundem terminum plures possunt constitui series in infinitum decrescentes, diversae *gestr.* | Ideo *L* 9 decrescentes, *(1)* manifestum *(2)* omnes *L* 21–100,1 producet 1. *(1)* Si | quis *gestr.* | omnia *(2)* Et *L*

Et ideo mirum est omnes harum rationum potestates infinitas numero ab una parte in se invicem ductas, concurrere aliquando in 1. Ita omnes infra $\frac{1}{3}$ in se invicem ductae faciunt $\frac{1}{3}$. Vel sic potius ut ea sit ratio maioritatis in ascensu, quae est minoritatis in descensu ut descensus est $\frac{1}{3}$ ascensus debet esse 3. Est ergo semper ratio descensus rationis ascensus inversa.

Quae hoc loco de rationum factis dixi non sunt universaliter vera, possunt enim termini inter decrescendum tantum a se invicem abesse, per saltus ut ratio fiat maxima ut

8		
	2	
4		
	$\frac{4}{3}$	
3		
	3	
1		
	$\frac{1}{\frac{1}{1000}}$	seu 1000
$\frac{1}{1000}$		

At si termini sint crescentes:

1	
	$\frac{1}{3}$
3	
	$\frac{3}{4}$
4	
	$\frac{2}{3}$
6	
9	
1000	

Ergo non nisi de serie progressionis geometricae veritatem demonstrare possim. Idem forte ubicunque ipsae rationes continue decrescunt, uti quando differentiae continue decrescunt. Imo erit sic in rationibus falsum.

2 omnes *(1)* illae potestates *(a)* inf *(b)* de $\frac{1}{3}$ *(c)* infra $\frac{1}{3}$ *(2)* infra *L* 3 $\frac{1}{3}$. *(1)* Idem esse universaliter verum ita demonstrari potest: *(2)* Vel *L* 6–20 Quae ... falsum. *erg. L*

6 dixi: s. Erl. zu S. 98 Z. 4 – S. 99 Z. 1.

$$\begin{array}{lcl}
A & & \\
 & \backslash\!\backslash & \\
 & & f \\
 & \frown & \\
B & & \\
 & \backslash\!\backslash & \\
 & & g \\
 & \frown & \\
C & & \\
 & \backslash\!\backslash & \\
 & & h \\
 & \frown & \\
D & & \\
 & \backslash\!\backslash & \\
 & & i \\
 & \frown & \\
E & &
\end{array}$$

Ostensum est A. esse aequale differentiae inter $B.C.D.E.$ etc. et $B \frown f. + C \frown g. + D \frown h. + E \frown i.$ etc. Ergo in serie progressionis geometricae differentia ista aequalis est rationibus omnibus: simul sumtis

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \frac{1}{4} & & \frac{6}{4}\Big|\frac{3}{2} & & \\
 & \frac{3}{4} & & \frac{2}{3} & & 2 & \\
6 & & 8 & & 12 & & 24 \\
 & & & & & & \\
 & & 3 & 27 & 81 & &
\end{array}$$

Infinitae series infinitorum ex traditis facile fabricari possunt ut

$$\frac{4}{\frac{1}{2}} \text{ seu } 8 = \frac{4}{\frac{1}{4}} + \frac{4}{\frac{1}{8}} + \frac{4}{\frac{1}{16}} \text{ etc.}$$

18 $\frac{3}{4}$ *(1)* $\frac{2}{4}$ *(2)* $\frac{2}{3}$ *L*

14 Ostensum est: s. oben S. 92 Z. 23 f. 18 Statt 2 müßte es $\frac{1}{2}$ heißen. Daraus und aus der Korrektur beim vorangehenden Element erklären sich die Werte der obersten Tabellenzeile, deren Elemente durch Differenzenbildung entstanden sind.

Imo error in hoc exemplo, non enim idem est aliquid dividi per partes, vel dividi per totum. Sed quia idem est totum dividi, et partes dividi invertatur ut

$$\dfrac{\frac{1}{2}}{4} \text{ seu } \frac{1}{8} = \dfrac{\frac{1}{4}}{4}\ \dfrac{\frac{1}{8}}{4}\ \dfrac{\frac{1}{16}}{4} \text{ etc. Quod eodem redit ac si diceres}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64} \text{ etc.}$$

aut si dividas $\frac{3}{4}$ per 6. fiet $\frac{3}{24}$.

$$\dfrac{\frac{3}{4}}{6} = \dfrac{\frac{3}{8}}{6}\quad \dfrac{\frac{3}{16}}{6}\quad \dfrac{\frac{3}{32}}{6} \text{ etc.}$$

$$\frac{3}{24}\Big|\frac{1}{8}\qquad \frac{3}{48}\Big|\frac{1}{16}\qquad \frac{3}{96}\Big|\frac{1}{32} \text{ etc.}$$

$$\dfrac{\frac{3}{4}}{5} = \dfrac{\frac{3}{8}}{5}\quad \dfrac{\frac{3}{16}}{5}\quad \frac{3}{32} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{40}\quad \frac{3}{80} \qquad \text{etc.}$$

Eodem modo si multiplices $\frac{1}{8}$ per $\frac{5}{4}$ fiet $\frac{5}{32} = (\frac{5}{4}\frac{1}{16})\frac{5}{64}\quad \frac{5}{128}$ etc.

Idem est etsi per numerum surdum multiplices etc.

Arithmetica infinitorum mea est pura, Wallisii figurata.

Non est dubitandum, quin aliquae series constantes licet ex numeris rationalibus, aequentur numeris surdis, quod investigandum.

Si qua offeratur series in unum addenda, haec est methodus in eius summam inquirendi generalis: ut quaerantur eius differentiae, et differentiarum differentiae, donec vel appareat aliqua ratio terminorum progressionis datae, ad terminos seriei cuiusdam continuo decrescentis differentiarum vel si hoc non appareat, quaeratur ratio progressionis differentiarum correspondentium: ut primae differentiae seriei primae, et seriei secundae, et seriei tertiae, etc. [invento] progressionis eiusmodi fundamento, continuari potest retro

21 etc. *(1)* inventa hac progressione, *(2)* | inventa *ändert Hrsg.* | progressionis *L*

13 Wallisii: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I, S. 355–478).

invenirique proinde termini alicuius progressionis, cuius differentias contineat series data, terminis autem istis inventis summa progressionis datae inventa est.

Quemadmodum autem non potest omnis aequatio affecta reduci ad puram, nec omne problema resolvi per *Elementa* seu geometriam puram; ideo nec omnis series summari potest, huius methodi ope, quia nec serie terminorum data semper in potestate nostra invenire fundamentum progressionis. Infinita tamen hac methodo resolvi posse, manifestum est, ex dictis. Videndum an nota sit insolubilitatis (per hanc methodum) quando aliquando, differentiae vel differentiae differentiarum non sunt continue decrescentes, etsi series ipsa data sit continue decrescens.

Nota cum possimus fingere pro lubitu progressiones omnis generis, possumus quoque innumera construere exempla serierum hac methodo summandarum, continuata scilicet progressione differentiarum correspondentium seu de ordine in ordinem.

$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$		$\frac{4}{8}$	$\left[\frac{5}{8}\right]$		5	$\frac{9}{64}$	$\frac{13}{64}$	
			$\frac{10}{64}$			[8]				$\frac{8}{64}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{6}{64}$		$\frac{8}{64}$	$\frac{13}{64}$		13	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{64}$	
			$\frac{82}{1024}$			16				$\frac{16}{1024}$
$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{14}{1024}$			$\frac{29}{1024}$		29		$\frac{64}{1024}$	
			$\frac{[418]}{32768}$			32				
$\frac{1}{32768}$	$\frac{31}{32768}$	$\frac{30}{32768}$			$\frac{61}{32768}$					

15–19 *Zur linken Tabelle:* Nota bene scimus quantitatem de $\frac{7}{64}.\frac{15}{1024}.$ etc. Ergo etiam de $\frac{14}{64}.\frac{30}{1024}.$ etc. et de $\frac{21}{64}.\frac{45}{1024}.$

8 vel differentiae *erg. L* 13 $\frac{4}{8}$ | $\frac{1}{8}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{5}{64}$ *ändert Hrsg.* | 5 *L* 14 $\frac{8}{64}$ *L ändert Hrsg.* 18 448 *L ändert Hrsg.*

4 *Elementa*: Gemeint sind die *Elemente* Euklids.

$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$	
	$\frac{2}{8}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		0	
	$\frac{1}{64}$	0			$\frac{1}{8}$
$\frac{7}{64}$			$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{8}$	
	$\frac{6}{64}$	$\frac{7}{64}$			$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{64}$				0	
	$\frac{1}{1024}$				$\frac{7}{64}$
$\frac{15}{1024}$				$\frac{7}{64}$	
	$\frac{14}{1024}$				$\frac{7}{64}$
$\frac{1}{1024}$				0	
	$\frac{1}{32768}$				$\frac{1}{64}$
$\frac{31}{32768}$				$\frac{1}{64}$	
	$\frac{30}{32768}$				$\frac{1}{64}$
$\frac{1}{32768}$				0	
					$\frac{15}{1024}$
				$\frac{15}{1024}$	
					$\frac{15}{1024}$
				0	
					$\frac{1}{1024}$
				$\frac{1}{1024}$	

Totum $\frac{3}{8}.\frac{7}{64}.$ etc. est $\frac{1}{2}$. $\quad \frac{2}{8}+\frac{1}{64}+\frac{6}{64}$ etc. $=\frac{3}{8}$

$$\begin{array}{llll}
a & & & a=b+c+d \\
 & b & & b=e+f \text{ etc.} \\
a-b & & e & a-b=c+d \text{ etc.} \\
 & c & & c=f \text{ etc.} \\
a-b-c & & f & a-b=b+c+d \text{ etc.} \quad - \quad e+f \text{ etc.} \\
 & d & & \\
a-b-c-d & & &
\end{array}$$

Differentia inter duas series proximas alteram differentiarum, alteram differentiarum inter differentias aequatur termino secundo seriei cuius differentiae datae sunt.

Omnes progressiones, quarum summam invenimus, si in infinitum decrescere cogitantur, earum summa etiam potest inveniri, si cogitentur, alicubi subsistere, nec in infinitum produci. Ideo summa inveniri potest omnium progressionum geometricarum, aut ex iis complicatarum, et infinitarum aliarum. Quae accessio maxima est etiam ad arithmeticam finitorum, constituendae sunt tabulae, classes, constructiones, resolutiones earum omnium progressionum, quae ex hactenus inventis solvi possunt.

Ex his inveniri possunt approximationes figurarum in geometricis, compendiosiores quam hactenus habentur, eaeque methodo quadam universali. Methodus universalis hactenus usitata est, ea quam primus attulit Archimedes, per circumscripta inscriptaque polygona, quam postea Ludolphus a Colonia, Willebrordus Snellius, Iac. Gregorius Scotus, aliique provexere. Sed hac methodo non est opus nisi solis inscriptis, imo non nisi

---

2–8 *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
a & & a+b
\end{array}$$

21 imo *(1)* solis applicatis *(2)* non *L*

---

19 Archimedes: ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*. 20 Ludolphus a Colonia: s. vor allem LUDOLPH van Ceulen, *Vanden circkel*, 1596; lat. Fassung *De circulo et adscriptis liber*, 1619. 20 Willebrordus Snellius: W. SNELL, *Cyclometricus*, 1621. 20 f. Iac. Gregorius Scotus: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668 [Marg.]; ders., *Geometriae pars universalis*, 1668 [Marg.], S. 123.
21 aliique: z. B. Chr. HUYGENS, *De circuli magnitudine inventa*, 1654 (*HO* II, S. 113-181.)

certa progressione applicatarum cum alia quadam progressione complicata inventisque aut factis aut summis. Utrumque facile approximatur vero. Nam in genere data progressione in infinitum decrescente, summam invenire possum quam proxime velim, summando tantum terminos, quousque adhuc magni sunt seu considerabiles.

Item si qua indagetur ratio terminorum ad differentiam, ut in praecedente illa difficili sane progressione termini omnes habent differentem rationem inter se, attamen habitudo sic exprimi potest, ut unus terminus semper sit 1. correspondentes sint potestates de 2. unitate diminutae.

Iam quaerenda est ratio ex rationibus partium componendi rationem totius; et quidem si rationes illae in infinitum variant saltem quam proxime.

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & + & d \\ z & + & y & + & x & + & u \end{array}$$

Si quidem nominator rationis sit simplex quamvis numerator sit compositus, ratio totius componetur ex ratione partium, ut

$$\frac{a+b+c+d}{z} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z} + \frac{c}{z} + \frac{d}{z}.$$

Et ideo vicissim si nominator sit compositus quidem sed ex se ipso, seu repetitus, sub qualibet parte, potest subscribi toti. Ideo si rationes quaeruntur duorum terminorum, quorum alter sit compositus alter simplex, cum sit in potestate facere numeratorem quem velis, simplex faciendus est nominator.

Ratio maioritatis et ratio minoritatis inter duos terminos eosdem, sunt inter se ut quadrata terminorum $\dfrac{A}{B} \infty \dfrac{B}{A} = AA \infty BB$.

$$\frac{\overset{3}{A}}{\underset{3+1}{A+B}} \infty \frac{\overset{3+1}{A+B}}{A} = \overset{9}{A}A \infty \overset{9}{A}A + \overset{1}{B}B + 2\overset{6}{A}B$$

$$\frac{\overset{3}{A}}{\underset{3-1}{A-B}} \infty \frac{\overset{3-1}{A-B}}{\underset{3}{A}} = \overset{9}{A}A \infty \overset{9}{A}A + \overset{1}{B}B - 2\overset{6}{A}B.$$

2 vero *(1)*, si tantum *(2)*. Nam *L*

Ideo ratio minoritatis est ad rationem maioritatis, ut est quadratum termini minoris, ad summam ex quadrato termini maioris et minoris, factoque duorum terminorum inter se duplicato.

Seu contra[:] Ratio maioritatis est ad rationem minoritatis, ut est termini maioris quadratum ad summam quadrati minoris et differentiae demto facto ex minore termino et differentia, duplicato.

$\dfrac{a}{b+c} =$ vid. *Transact.* ubi de *Logarithmotechnia* Mercatoris.

$$2 \left(\begin{array}{ll} 6 & \\ & 2 \\ 8 & \\ & 4 \\ 12 & \end{array} \right.$$

$\dfrac{A}{A-B-C} = \dfrac{B}{C}$. Ergo $\dfrac{1}{A-B-C} = \dfrac{BA}{C}$. Ergo $\dfrac{B}{A-B-C} = \dfrac{B^q A}{C}$. Datis duabus differentiis.

Data summa terminorum, datisque rationibus variantibus progressionis harmonicae, in certa quadam ratione, cuius tum summa iniri possit, 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. etc.

1 ratio *(1)* maiorita *(2)* minoritatis et maioritatis sunt inter se, *(3)* maioritatis est ad rationem minoritatis *(4)* minoritatis *L* 2 minoris, *(1)* rectanguloque duplicato *(2)* factoque *L* 3 f. duplicato. *(1)* Seu ut est ratio m *(2)* Seu *L* 4 minoritatis, *(1)* ut est *(a)* summa *(b)* ratio *(c)* qua *(d)* summa praedicta ad termini minoris quadratum, vel *(2)* ut *L* 5 ad *(1)* quadratum *(2)* summam *L* 5 differentiae *(1)* et qu *(2)* facti ex minore termino *(3)* demto *L* 6 f. duplicato. *(1)* Hinc sequitur quoque $\mathrm{AA} + \overset{16}{\mathrm{BB}} + 2\mathrm{AB} \propto \overset{9}{\mathrm{AA}} = \mathrm{AA} \propto \overset{9}{\mathrm{AA}} + \mathrm{BB} - 2\mathrm{AB}$ *(2)* Hinc sequitur *(3)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}$ *L* 13 f. Datis duabus differentiis. *erg. L*

7 *Transact.* ... Mercatoris: J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 38 vom 17./27. August 1668, S. 753–759. — N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668 [Marg.]. 13 Statt $\dfrac{BA}{C}$ müßte es $\dfrac{B}{AC}$ heißen. Der Fehler vererbt sich auf den nächsten Term.

$$\begin{array}{lllll}
 & A & \ldots\ldots & B & \\
\dfrac{A}{A-B-C} & & & & \dfrac{B}{C} \\
 & A-B & \ldots\ldots & C & \\
\dfrac{A-B}{A-B-C-D} & & & & \dfrac{C}{D} \\
 & A-B-C & \ldots\ldots & D & \\
\dfrac{A-B-C}{A-B-C-D-E} & & & & \dfrac{D}{E} \\
 & A-B-C-D & \ldots\ldots & E & \\
 & A-B-C-D-E & & &
\end{array}$$

Hinc theoremata: $A = B + C + D + E$ in infinitum. $A - \llcorner A - B - C - D - E \lrcorner = B+C+D+E$. Nam in genere transformari possunt omnia signa continua $-$. in $+$. abiecto termino primo, et omnia signa $+$. in $-$. adiecto alio qui sit summa omnium terminorum.

In progressione harmonica

$$\left.\begin{array}{llll}
\dfrac{A}{A-B-C} = \dfrac{B}{C} & & \dfrac{A-B-C}{A} = \dfrac{C}{B} \\
\dfrac{A-B}{A-B-C-D} = \dfrac{C}{D} & & \dfrac{A-B-C-D}{A-B} = \dfrac{D}{C}
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{Natura seu definitio progressionis harmonicae} \\ \text{Aequationes fundamentales}\end{array}$$

Aequatio iungens fundamentales in unam.

$$\frac{A}{A-B-C} + \frac{A-B-C-D}{A-B} = \frac{B+D}{C}.$$

$$(A-B, \frown A)$$

$$\frac{AA - BA \quad + A - B - C - D, \frown A - B - C}{A - B - C \frown A - B} = \frac{B+D}{C}$$

Duae praecedentes aequationes possunt inverti, ut nominatores utrobique fiant numeratores et contra. Plura hinc facile fabricabuntur theoremata; faciendo actualiter multiplicationes hic tantum designatas.

Item multiplicando utrumque per C. ubi fiet:

$$\frac{AC}{A-B-C} + \frac{A-B-C-D, \frown C}{A-B} = B + D.$$

10 continua *erg. L*

Consectar. 2: In progress. harm.

Addantur rationes termini primi ad terminum secundum recta et termini quarti ad secundum inversa producetur ratio summae ex differentia prima et tertia, ad differentiam mediam. Vel productum ex divisione termini primi per tertium addatur producto ex divisione termini quarti per secundum, summa aequatur producto ex divisione summae differentiae primae et tertiae per secundam. Vel sic multiplicetur terminus primus per secundum et tertius per quartum, summa ex duobus factis dividatur per factum ex secundo et tertio. Productum est aequale producto ex divisione differentiae 2^{dae} et tertiae per secundam.

Idem multis modis variari potest, si non tam numeratores multiplicentur, quam nominatores dividantur per C. aut si in una parte numerator multiplicetur, in altera nominator dividatur, idque rursus fieri potest, vel in terminis relictis vel in reductis.

Potuisset item uterque aequationis terminus dividi per $B + D$. non multiplicatis per C.

Datis tribus differentiis et termino uno invenire terminos quatuor et alia id genus problemata communia sunt omnibus seriebus. Quaerenda sunt problemata harmonicae propria, seu quae ex domesticis ipsius principiis solvi debeant. Quale est: continuare progressionem harmonicam seu datis tribus terminis progressionis harmonicae invenire quartum. Et quia quartus potest interdum esse multiplex, interdum vero ne dari quidem potest, id ipsum definire.

Deinde dato termino uno eiusque loco id est sitne primus an quartus et rationibus omnibus progressionis harmonicae omnia caetera invenire.

Invenire per compendium terminum loci dati progressionis harmonicae, item summam terminorum.

In omni inquisitione algebraica, datis pluribus terminis, quilibet simplex, si fieri potest, solus locandus est ad habendam eius cum caeteris aequationem, ita hoc loco $A = \dfrac{B \frown A - B - C}{C}$. Sed haec aequatio seu definitio A. est fundata solum in una parte

14 f. C. | Problema 1: *gestr.*| Datis *L* 21 Deinde *(1)* data progressione ha *(2)* dato *L* 21 termino *(1)* primo *(2)* uno *L* 21 eiusque . . . quartus *erg.* *L* 22 caetera *(1)* definire *(2)* invenire *L* 25 algebraica, *(1)* omnes *(2)* datis *L*

15–22 Vgl. N. 8 Teil 2.

definitionis, seu aequationis fundamentalis, ducatur alia si possit ex altera. Sic tum hoc loco aperitur via: ex tertia aequatione (primo consectario fundamentalium)

$$\frac{A}{A-B-C} = \frac{B+D}{C} - \frac{A-B-C-D}{A-B}.$$

vel

$$A = \frac{B+D}{C} - \frac{A-B-C-D}{A-B}, \frown A-B-C.$$

Si solus locari non potest, signum est, non sufficere pauciora data.

Differentia 2^{da} seu C. hac aequatione exprimitur:

$$C = \frac{A-B-C}{A} + \frac{A-B}{A-B-C-D},, \frown B+D.$$

Differentia prima et 3^{tia} simul

$$B+D = \frac{AC}{A-B-C} + \frac{A-B-C \frown C}{A-B}.$$

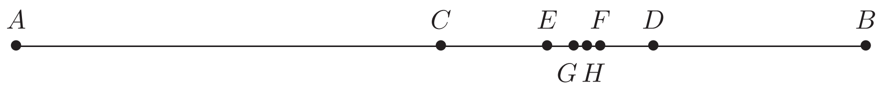
Unde facile intelligitur valor singularum totius argumenti. Hae sunt aequationes elementales.

7. TRISECTIO PER BISECTIONEM
[Herbst – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 17 Bl. 16. 1 Ausschnitt ca 21,0 x 2,2 cm. 6 Z. auf Bl. 16 v°. Bl. 16 r° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1549

Datierungsgründe: Am Ende von N. 4_4 (s. S. 49 Z. 1 f.) äußert Leibniz die Absicht, sich im Werk von Gr. de Saint-Vincent über die Verhältnisrechnung zu informieren; in der *Accessio* von Ende 1672 (vgl. *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 f.) hat er dies bereits getan. Die vorliegende Notiz bezieht sich auf einen einschlägigen Abschnitt im *Opus geometricum* und ist also vermutlich in der Zwischenzeit jedoch nach N. 6 (s. dort) entstanden. Die Überlegung am Schluß deutet auf einen Wissensstand vor Kenntnis der Methode von N. Mercator hin; mit dieser kann $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$ auf einfache Weise in eine geometrische Reihe entwickelt werden, die nur fortgesetztes Vierteln bzw. Halbieren erfordert (vgl. N. 27, S. 318 Z. 10). Leibniz erwähnt diese Methode zwar bereits kurz gegen Ende von N. 6 (vgl. S. 107 Z. 7), setzt sich damit aber erst in N. 8 Teil 3 auseinander. N. 7 dürfte also zwischen N. 6 und N. 8 entstanden sein.

Trisectio per bisectionem



[*Fig. 1*]

AB bisecetur in C. et CB in D. rursus CD in E. et ED in F. rursus EF in G. et GF in H, et ita in infinitum; terminatio huius progressionis erit punctum a recta AB abscindens tertiam partem. Hinc pulcherrima sequitur trisectio anguli vel arcus appropinquatoria per continuam bisectionem.

Videndum an ista ad quinquesectionem possint applicari, an scilicet ope solius bisectionis etiam quinquesecari possit recta.

---

17 *Daneben:* Gregorius a S. Vincentio

18 punctum *(1)* dividens *(2)* a *L*

---

24 Gregorius: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, Buch II prop. CIV S. 111 f.

8. DE DIFFERENTIIS PROGRESSIONIS HARMONICAE

[Herbst 1672 – Anfang 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 328–329 und XII 2 Bl. 165–166. Zusammenhang durch Kustode gesichert. 2 Bog. 2°. 7 S. tlw. zweispaltig beschrieben. Bl. 166 v° leer. Auf Bl. 328 r° oben befindet sich eine Bücherliste (Cc 2, Nr. 529 tlw., Druck in Reihe VIII). Cc 2, Nr. 526, 528, 529 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie N. 1, N. 2 und N. 6 und enthält Verweise auf N. 4 und N. 6 (vgl. S. 113 Z. 15).

[*Teil 1*]

			differentiae	summae		
	9		$9-6=3$	15		4
		6			10	
	3		$3-2=1$	5		2
		2			$\frac{10}{3}$	
	1		$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$		1
		$\frac{2}{3}$			$\frac{10}{9}$	
	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{2}$
		$\frac{2}{9}$			$\frac{10}{27}$	
$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}-\frac{2}{27}=\frac{1}{27}$	$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{4}$
		$\frac{2}{27}$				
$\frac{9}{125}$	$\frac{1}{27}$					$\frac{1}{8}$
etc.	etc.					etc.

$$\begin{array}{ll} 6 & \\ & 3 \\ 3 & \\ & 1 \\ 2 & \\ & 1 \\ 1 & \end{array}$$

Differentia inter circulum et polygonum inscriptum aequalis est summae differentiarum inter omnia polygona interposita. Ut differentia inter circulum et hexagonum inscriptum aequalis est differentiis inter hexagonum et dodecagonum, dodecagonum et 24^{gonum}, 24^{gonum} et 48^{gonum} et sic in infinitum. Similis regula condi potest in aliis figuris curvilineis omnibus. Sed haec summa non potest iniri nisi accedat continua multiplicatio per numeros duplos a 6.

Nota hic exemplum progressionis infinitorum terminorum continue crescentis et tamen finitae, sed istae progressiones omnes ut saepe dixi sunt complicatae.

[*Teil 2*]

Solvere hoc problema a me diu quaesitum inveniendi summam progressionis geometricae reassumtae, idem est quod invenire progressionem harmonicam datis eius differentiis, differentiarumque rationibus:

8 *(1)* Si *(2)* Differentia *L* 14 continue *(1)* decrescentis, et tamen in fine non evanesc *(2)* crescentis *L*

15 ut saepe dixi: vgl. N. 4_1 S. 32 Z. 24–30, N. 6 insbesondere S. 96 Z. 11 f.

$$\begin{array}{cccccl}
 & \frac{6}{2} & & & & \frac{1}{2} \\
 & & 1 & \frac{6}{6} & & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{2} & \frac{6}{3} & & & 6 & \text{etc. termini progr. harm.} \\
 & & \frac{1}{2} & \frac{6}{12} & & \\
\frac{1}{4} & \frac{6}{4} & & & 8 & \\
 & & \frac{3}{10} & \frac{6}{20} & & \\
\frac{1}{8} & \frac{6}{5} & & & 10 & \\
 & & \left[\frac{1}{5}\right] & \frac{6}{30} & & \\
\frac{1}{16} & \frac{6}{6} & & & &
\end{array}$$

1–9

$$\begin{array}{cccccccc}
 & (1) & \frac{\langle - \rangle}{4} & & & (2) & \frac{6}{2} & L \\
 & & & 1 & & & & \\
\frac{1}{2} & & 2 & & \frac{1}{2} & & \frac{6}{3} & \\
 & & & \frac{1}{2} & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{3}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{6}{4} & \\
 & & & \frac{1}{8} & & & & \\
\frac{1}{8} & & 1 & & \frac{1}{8} & & \frac{6}{5} & \\
 & & & \frac{1}{64} & & & & \\
\frac{1}{16} & & \frac{1}{\langle 2 \rangle} & & \frac{1}{16} & & \frac{6}{6} & \\
 & & & \frac{1}{1024} & & & & \\
 & & & & \frac{1}{32} & & & \\
 & & & \frac{1}{32768} & & & &
\end{array}$$

8 $\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.*

$$z - \llcorner\llcorner a \;+\; b\lrcorner \;+\; b\lrcorner \qquad = \frac{zb}{a+b} \; \begin{matrix}(z\frac{1}{2})\\ (1)\end{matrix} \; ((z\tfrac{1}{2})).$$
$$(\tfrac{1}{2})(([\tfrac{2}{2}]))(\tfrac{1}{2}) \quad (\tfrac{1}{2})\; (((\tfrac{6}{4})))$$
$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \;\frown\; a + b = zb.$$
$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \;\frown\; a + b \;\smile\; b = z.$$
$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \;\frown\; \llcorner\frac{a}{b} + 1\lrcorner = z.$$
$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \;\frown\; \frac{a}{b}\lrcorner\lrcorner\lrcorner + z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner = z.$$
$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \;\frown\; \frac{a}{b}\lrcorner\lrcorner\lrcorner + \cancel{z} = \cancel{z} + \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner.$$
$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \;\frown\; \frac{a}{b} = \cancel{z} + \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner - \cancel{z}.$$
$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \;\frown\; \frac{a}{b} = a + b + b.$$
$$z = a + 2b, \frown\; \frac{a}{b} + 1.$$
$$z = \;a\; + \;2b, \frown\; \frac{a}{b}\,\begin{matrix}(\frac{1}{2})\\ (\frac{1}{2})\end{matrix}((1)) + 1\;(((2))).$$
$$\tfrac{6}{2} \quad (\tfrac{1}{2})((\tfrac{3}{2}))(1)$$

---

11 f. *Nebenbetrachtung:*

$$\frac{1}{2}\;\left(\begin{array}{cc} \frac{6}{2} & \\ & 1 \\ 2 & \\ & \frac{1}{2} \\ \left[\frac{3}{2}\right] & \end{array}\right)\;\frac{1}{2}$$

2 2 *L ändert Hrsg.* 17 $\frac{3}{4}$ *L ändert Hrsg.*

---

10 Leibniz vergißt auf der linken Seite der Gleichung den Faktor $\frac{a}{b}$. Da er für die Kontrollrechnung $a = b = \frac{1}{2}$ wählt, bemerkt er den Fehler nicht. S. 116 Z. 10–13 wird die Rechnung — bis auf einen anderen Flüchtigkeitsfehler — richtig durchgeführt.

En ergo inventam rationem: D a t i s   d i f f e r e n t i i s   i n v e n i r e   t e r m i n o s   h a r m o n i c a e   p r o p o r t i o n i s .

Differentiae minoris duplo addatur differentia eius a maiore. Summa multiplicetur per unitatem auctam quotiente producto ex divisione differentiae inter differentias per differentiam minorem, productum erit terminus quaesitae progressionis maximus quo dato reliqui duo facile inveniuntur.

Brevius ita concipietur: Quadratum differentiae differentiarum dividatur per differentiam minorem, quotienti addatur differentia differentiarum triplicata, et differentia minor [duplicata]. Summa est terminus maior $z = \frac{aa}{b} + 3a + 2b$ proportionis harmonicae.

$z - {\llcorner\llcorner} a + b \lrcorner + b \lrcorner = \frac{zb}{a+b}$. Multiplicentur omnia per $a + b$ fiet:
$z - {\llcorner\llcorner} a + b \lrcorner + b \lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown a + b = zb$. Et $z - {\llcorner\llcorner} a + b \lrcorner + b \lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown a + b \smile b = z$.
$z - {\llcorner\llcorner} a + b \lrcorner + b \lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \frac{a}{b} + 1 = z$. $\frac{az}{b} - {\llcorner\llcorner} \frac{aa}{b} + a \lrcorner + a \lrcorner\lrcorner\lrcorner + \cancel{z} \overset{+}{\cancel{-}} {\llcorner\llcorner} a + b \lrcorner + b = z \cancel{-} z$.
$\frac{az}{b} - {\llcorner\llcorner} \frac{aa}{b} + a \lrcorner + a \lrcorner\lrcorner\lrcorner + \cancel{z} = z + {\llcorner\llcorner} a + b \lrcorner + c \lrcorner - \cancel{z}$. $\frac{z\cancel{a}}{\cancel{b}} = a + b + c + \frac{aa}{b} + a + a\, [\smile]\, \frac{a}{b}$.

10 *Daneben*: (Erraveram in aequatione ante, quod non expresseram differentiam praecedentem sequente maiorem.)

1 f. t e r m i n o s *(1)* p r o g r e s s i o n i s *(2)* h a r m o n i c a e *L* 2 f. p r o p o r t i o n i s . *(1)* Terminus minor duplicatur *(2)* Termini minoris duplo *(3)* Differentiae *L* 4 per *(1)* rationem *(2)* quotientem *(3)* unitatem *L* 8 minorem, *(1)* producto a *(2)* quotienti *L* 9 triplicata *L ändert Hrsg.* 9 f. harmonicae. | a differentia 1[ma]. b 2[da]. Ratio earum $\frac{a}{b}$. Terminus primus progressionis harmonicae quaesitus z. *(1)* Ergo tertius est $\frac{za}{b}$. Ergo secundus est $\frac{za}{b} + b$. *(2)* Ergo secundus erit $z - a$. et tertius $z - a - b$. at item tertius est $\frac{za}{b}$. Ergo $\frac{za}{b} = z - a - b$. Quaerendum est aliquid aequale ipsi z. *(a)* $\frac{za}{b} = z - a - b$. Ergo $z = \frac{zb}{a} - \frac{ab}{a} - \frac{bb}{a}$. $za = zb - ab - bb$. $za + a$ *(b)* $\frac{zb}{a} = z - a - b$. Ergo $zb = za - aa - ba$. $zb + aa + ba = za$. $aa + ba = za - zb$. Dividantur omnia per a. fiet $a + b = z - \frac{zb}{a}$. Iam $\frac{zb}{a}$ est $= z - a - b$ per priora. Ergo: $a + b = z - {\llcorner} z - a - b \lrcorner$ seu $a + b = z + a + b - z$. En aequationem nugatoriam, $aa + ba = za - zb$. *(aa)* Dividantur $aa + ba$. in duas partes *(bb)* $z - {\llcorner} a + b \lrcorner = zb$ *gestr.* | $z - {\llcorner\llcorner} a + b \lrcorner + b \lrcorner$ *L* 13 $\frown$ *L ändert Hrsg.* 14 expresseram *(1)* rationem alteram *(2)* differentiam *L*

Iam vellem invenire posse hoc problema: Data progressione differentiarum in infinitum continuabili invenire progressionem harmonicam in infinitum continuabilem vel saltem eius initium, nam hoc sufficit. Seu data progressionis differentiarum ratione, et ipso progressionis initio, seu differentia prima, invenire primum terminum progressionis harmonicae.

Seu data differentia prima, et fundamento computandi reliquas, invenire primum terminum progressionis harmonicae, cui differentiae illae sunt interiectae. Hoc problema iam solutum est in omnibus terminis progressionis geometricae simplicis, tam rectae, quam perturbatae. Sed ut in reliquis solvam, superest, ubi non differentiae ipsae sed earum rationes sunt termini alicuius progressionis geometricae.

Imo haec non procedunt, non enim quaelibet differentiarum series progressioni harmonicae interici potest. Nam duae quaelibet quantitates possunt esse differentiae progressionis harmonicae, at non tres quaelibet.

Est ergo problema ita concipiendum: Datis duabus differentiis proportionis harmonicae, invenire tertiam, et per consequens reliquas omnes, seu integram differentiarum progressionem. Differentiae duae datae sunt $a + b$ et b. Ratio earum $\frac{a+b}{b}$ eadem ratio termini primi ad tertium. Terminus primus est:

$$a + 2b \frown \frac{a}{b} + 1.$$

$$a + 2b \frown \frac{a}{b} + 1 \;\; - a + b, \text{ terminus secundus.}$$

$$a + 2b \frown \frac{a}{b} + 1 \;\; - a + b \;\; - b, \text{ terminus tertius.}$$

Quaeritur saltem differentia quarti a tertio y, ita ut terminus quartus sit

$$a + 2b \frown \frac{a}{b} + 1 \;\; - a + b \;\; - b \;\; - y.$$

7 harmonicae, *(1)* inter qu *(2)* cui *L* 9 ubi *(1)* differentiae ipsae non sunt in termi *(2)* non *L* 11 enim *(1)* cuilibet *(2)* quaelibet *L* 15 f. differentiarum *(1)* proportionem *(2)* progressionem *L*

116,13 Leibniz ändert die Bezeichnung für die Differenz zwischen zweitem und drittem Term von b in c. Da er nicht bereits die Ausgangsgleichung zu $z - (a + b + c) = \frac{zc}{a+b}$ umformt, ist das Ergebnis nicht richtig.

Ratio differentiae praecedentis ad hanc tertiam est $\frac{b}{y}$. Multiplicetur terminus quartus per istam rationem: Producetur terminus secundus. Habebimus ergo hanc aequationem:

$$a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner\llcorner\llcorner a+b\lrcorner + b\lrcorner + y\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \frac{b}{y} = a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner$$

$$a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner\llcorner\llcorner a+b\lrcorner + b\lrcorner + b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \frac{b}{y} - \frac{yb}{y} = a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner$$

$$a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner\llcorner\llcorner a+b\lrcorner + b\lrcorner + b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \frac{b}{y} - b = a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner$$

$$\frac{a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner\llcorner\llcorner a+b\lrcorner + b\lrcorner + b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown b}{y} = a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - a.$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\cancel{b} + a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - a + \cancel{b}}{a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner + b\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner}.$$

Ergo $y = \dfrac{a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner + b\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \cancel{b}\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner}{\frac{a}{(b)} + 2\cancel{b} \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \frac{a}{(b)}}$ fiet $y = \dfrac{a}{\frac{a}{b} + 2 \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner - a+2}$

seu $y = \dfrac{a}{\frac{a}{b} + 2 \frown \frac{a}{b}}$ seu $y = \dfrac{a}{\frac{aa}{bb} + \frac{2a}{b}}$ seu $y = \dfrac{1}{\frac{a}{bb} + \frac{2}{b}}$.

1 f. *Daneben:* $\frac{6}{4} - y, \frown \frac{1}{2y} = 2.$ $\frac{6}{4} - y, \frown \frac{1}{y} = 4.$ Ergo $\frac{6}{4y} - 1 = 4.$ Ergo $\frac{6}{4y} = 5.$ $\frac{6}{y} = 20.$ $y = \frac{3}{10}$.

1 Ratio *(1)* eius ad t *(2)* differentiae *L* 11 $= 20.$ | $y = \frac{20}{6}$ | $\frac{10}{3}$. *streicht Hrsg.* | y *L*

8 fiet $y = \dfrac{a}{\frac{a}{b} + 2 \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner - a+2}$: Richtig wäre $y = \dfrac{a}{\frac{a}{b} + 1 - \frac{a}{a+2b}}$. Der Fehler vererbt sich bis Z. 9, Leibniz setzt danach neu an.

$$[y{=}]\ \frac{a+2b \frown \llcorner\frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a \mid +2b\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown b}{\left[a+2b \frown \llcorner\frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner -\ a\right]\Big|}\ [=]\ b-\frac{2bb}{a+2b \frown \llcorner\frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - a} =$$

$$b-\frac{2bb}{\frac{aa}{b}+\left(\frac{2ba}{b}\right)2a+\cancel{a}+2b-\cancel{a}.}.$$

Datis duobus terminis progressionis harmonicae invenire tertium proportionalem. Dati sunto z primus. $z-a$ secundus. $z-\llcorner a+b$ tertius; quaeritur b vel quaeritur $z-\llcorner a+b\lrcorner$. Ratio differentiarum est $\frac{a}{b}$. Ratio termini primi ad tertium est $\frac{a}{b}=\frac{z}{z-\llcorner a+b\lrcorner}$ vel $\frac{b}{a}=\frac{z-\llcorner a+b\lrcorner}{z}$.

$\frac{b}{a}=\frac{z-\llcorner a\overset{-}{\cancel{+}}b\lrcorner}{z}$ seu $\frac{bz}{a}=z-\llcorner\overset{a-b}{a+b}\lrcorner$ seu $\frac{z}{a}=\frac{z}{b}-\frac{a}{b}-1$ seu $\frac{z}{a}+1=\frac{z-a}{b}$ seu $\frac{\frac{z}{a}+1}{z-a}=\frac{1}{b}$ seu $\frac{z-a}{\frac{z}{a}+1}=b=\frac{za-aa}{z+a}$ seu $\frac{z+a}{za-aa}=\frac{1}{b}$ seu $\left[\frac{z+a}{z-a, \frown a}=\frac{1}{b}\right]$.

Est ergo haec problematis solutio in progressione harmonica datis duobus terminis, invenire differentiam secundi minoris a tertio minimo seu tertium minimum. Quod ita

---

8 *Kontrollrechnung:* $\dfrac{(z)\frac{6}{2}-(a)1=\frac{4}{2}}{\frac{(z)\frac{6}{2}}{(a)1}=\frac{6}{2}+1}$ $\qquad \dfrac{3-1=2}{4}\Big|\,\dfrac{1}{2}$

1 y = *erg. Hrsg.* 1 $a+2b \frown \llcorner\frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - a \mid +2b$ *L ändert Hrsg.* 1 = *erg. Hrsg.*
3 tertium *(1)* Sunto illi termini *(2)* $a+b+b.+y$. Invenire tertium harmonice *(3)* proportionalem *L*
6 f. $\frac{z-\llcorner a+b\lrcorner}{z}$. *(1)* Dividatur *(2)* Multiplicetur uterque terminus aequationis per z fiet $\frac{bz}{a}=z-\llcorner a+b\lrcorner$. Ergo $\frac{z}{a}=\frac{z}{b}-\llcorner a+1\lrcorner$. $\frac{z}{a}+a+1=\frac{z}{b}\times\frac{z}{a}$ $\frac{za-zb}{ba}$. $\frac{a+1}{ba}=za-zb$. $\frac{a+1}{ba}=z\frown ba$. Ergo $\frac{a+1}{ba\frown ba}=z$ seu $\frac{a+1}{bbaa}=z$. *(3)* $\frac{b}{a}$ *L* 8 $\frac{z+a}{\frac{z-a}{a}}=\frac{1}{b}$ seu $\frac{z+a}{\frac{z}{a}-1}$ *L ändert Hrsg.* 9 in progressione harmonica *erg. L* 10 minoris *erg. L* 10 minimo *erg. L*

fiet: Terminus primus dividatur per differentiam primam, productus unitate auctus dividat terminum primum differentia prima minutum. Quotiens est differentia 2[da]. Sic ergo rectius concipietur problema: Dato termino primo seu maximo proportionis harmonicae, dataque differentia maxima (qua terminus primus differt a secundo) et per consequens dato termino primo et secundo; invenire differentiam secundam, termini secundi a tertio, seu terminum tertium. Vel quod idem est continuare progressionem harmonicam in infinitum.

$$z = \frac{\cancel{c}}{d}\ (1)$$
$$+$$
$$z - a = \frac{\cancel{c}}{e}\ (1)$$
$$+$$
$$\frac{z-a-b}{c} = \frac{\cancel{c}}{f}\ (1). \qquad \frac{3z+2a+b}{c} = \frac{1}{d+e+f} \text{ seu } \begin{array}{c} \frac{c}{3z} + \frac{c}{2a} + \frac{c}{b} = \\ d \ + \ e \ + f. \end{array}$$

$\dfrac{d-e}{e-f} = \dfrac{\frac{c}{3z} - \frac{c}{2a}}{\frac{c}{2a} - \frac{c}{b}}$. Pro z substituatur eius resolutio in caeteras datas $z = \dfrac{aa}{b} + 3a + 2b$.

$\dfrac{2ca - 3zc}{3z\cancel{2}\cancel{a}} \infty \dfrac{cb - 2ca}{\cancel{2}\cancel{a}b}$. Horum ratio inter se quaeritur. $\dfrac{3ca}{3z}\ -c \infty c - \dfrac{2ca}{b}$. Dividantur omnia per c, fiet $\dfrac{\cancel{3}a}{\cancel{3}z} - 1 \infty 1 - \dfrac{2a}{b}$. Iam z valet $\dfrac{aa}{b} + 3a + 2b$. Ergo $\dfrac{(\cancel{a})1}{\frac{a(\cancel{a})}{b} + 3(\cancel{a}) + 2b} \overset{-}{\underset{-}{\times}} \dfrac{1}{(a)} \infty \dfrac{1}{(a)} \overset{-}{\underset{-}{\times}} \dfrac{2(a)}{b} \quad \dfrac{b-2a}{ab}. \ \dfrac{a-}{\frac{aa}{b} + 3a + 2b \frown a}$ [*Rechnung bricht ab*]

1 fiet: *(1)* A maximo *(2)* Terminus *(a)* secundus dividatur per differenti *(b)* primus *L* 1 differentiam |primam *erg.*|, *(1)* producto addatur unitas. Summa *(2)* productus *L* 2 differentia *(1)* tertia *(2)* 2[da] *L* 12 $\frac{\cancel{c}\,(1)}{f}$. *(1)* $\frac{3z-2a-b}{c}$ *(2)* $\frac{3z+2a+b}{c}$ *L*

12–14 $\dfrac{3z+2a+b}{c}$: Leibniz verändert den Ansatz der Rechnung mehrfach. Zunächst ersetzt er die Minuszeichen im Zähler des Bruches durch Pluszeichen; auf der rechten Seite der Gleichung müßte nach dem ursprünglichen Ansatz $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}$ stehen. Die Kehrwertbildung, aus der die folgende Gleichung entsteht, ist ebenso unzulässig wie das Gleichsetzen der einzelnen Terme der linken und rechten Seite, auf dem die nächste Gleichung beruht. 15 $\dfrac{3ca}{3z}$: Richtig wäre $\dfrac{2ca}{3z}$; der Fehler pflanzt sich fort.

$z = \frac{c}{d}$. $z - a = \frac{c}{e}$. $z - a - b = \frac{c}{f}$. $f - e \infty e - d$.

$z = \frac{c}{d}$. Ergo $\frac{z}{c} = \frac{1}{d}$ ergo $\frac{c}{z} = d$. Item $z = \frac{c}{d}$. Ergo $zd = c$. $z - a = \frac{c}{e}$. Ergo $ze - ae = c$. Et $\frac{z-a}{c} = \frac{1}{e}$ seu $\frac{c}{z-a} = e$. Item $z - a - b = \frac{c}{f}$. Ergo $zf - af - bf = c$. Et $\frac{z-a-b}{c} = \frac{1}{f}$ seu $\frac{c}{z-a-b} = f$.

Ita habemus has aequationes: $c = zd$. $c = ze - ae$. $c = zf - af - bf$. $d = \frac{c}{z}$. $e = \frac{c}{z-a}$. $f = \frac{c}{z-a-b}$.

5–122,1 $\mathrm{f} = \frac{c}{z-a-b}$. | $d = e - \frac{ae}{z} = f - \frac{af}{z} - \frac{bf}{z}$. $d + \frac{ae}{z} = e$. Ergo $\frac{ae}{z} = e - d$. Ergo $\frac{a}{z} = \frac{c-d}{e}$ seu $\frac{a}{z} = \frac{e}{e} - \frac{d}{e} = 1 - \frac{d}{e}$. | Ergo $\frac{a}{z} + \frac{d}{e} = 1$. Ergo $1 - \frac{a}{z} = \frac{d}{e}$. Ergo $\frac{z-a}{z} = \frac{d}{e}$. *erg.* | Et $d + \frac{af}{z} + \frac{bf}{z} = f$. Ergo $\frac{af+bf}{z} = f - d$. Ergo $\frac{a+b}{z} = \frac{f-d}{f} = 1 - \frac{d}{f}$. Ergo $1 - \frac{a+b}{z} = df$. Ergo $\frac{z-a-b}{z} = \frac{d}{f}$. *(1)* Ergo $\frac{a}{z} + \frac{a+b}{z} - \frac{e-d}{e} + \frac{f-d}{f}$ *(2)* Ergo $\frac{z-a-b+z-a}{z} = \frac{d}{e} \times \frac{d}{f} = \frac{df+de}{ef}$. $\frac{d}{e} =$ *(a)* $\frac{\frac{c}{z}}{\frac{c}{z-a}} = \frac{c \frown z-a}{zc} = \frac{z-a}{z}$ *(b)* $\frac{\frac{c}{z}}{\frac{c}{z-a}}$ seu $\frac{c}{z} \times \frac{c}{z-a}$ $\frac{cz-ca}{cz}$. Ergo $\frac{cz-ca}{cz} = 1 - \frac{ca}{cz} = \frac{z-a}{z}$. *(aa)* $\frac{d}{e}$ — $\frac{f}{d}$ *(bb)* $\frac{cz-ca}{cz}$ *(cc)* $\frac{d}{e} = \frac{z-a}{z}$. $\frac{d}{f} = \frac{z-a-b}{z}$. $\frac{e}{f} = \frac{z-a-b}{z-a}$. *(aaa)* $\frac{e}{f} = \frac{\frac{c}{z-a}}{\frac{c}{z-a-b}}$ $\frac{c}{z-a} \times \frac{c}{z-a-b}$ $\frac{\cancel{c}z - \cancel{c}a - \cancel{c}b}{\cancel{c}z - \cancel{c}a}$ *(bbb)* $\frac{e}{d} + \frac{f}{d} = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-a-b}$. *(ccc)* Sumatur aliqua harum $\frac{dc}{e\cancel{c}} = \frac{z-a}{z} \frown zd$ seu $zd - da$ seu $\frac{1}{ec} = \frac{z-a}{1}$ seu $ec = \frac{1}{z-a}$. $\frac{dc}{e\cancel{c}} = \underset{\left(1 - \frac{a}{z}\right)}{\frac{z-a}{z}} \frown zf - af - bf$ *(aaaa)* seu $1 - \frac{a}{z}$ *(bbbb)* seu $zf - af - bf - \frac{a\cancel{z}f}{\cancel{z}} - \frac{aaf}{z} - \frac{bfa}{z}$. $\frac{dc}{ef} = \cancel{zf} - 2\cancel{af} - \cancel{bf} + \frac{aa\cancel{f} - b\cancel{f}a}{z}$. $3c = zd + ze + zf - ae - af - bf$. $c = \frac{zd}{3} + \frac{ze}{3} + \frac{zf}{3} - \frac{ae}{3} - \frac{af}{3} - \frac{bf}{3}$. $\frac{c}{f} = \frac{zd}{3f} + \frac{ze}{3f} + \frac{z}{3} - \cancel{\frac{ae}{3f}} - \frac{a}{3} - \cancel{\frac{b}{3}}$. $\frac{ae}{3f} + \frac{c}{f} + \frac{b}{3} = \frac{zd}{3f} + \frac{ze}{3f} + \frac{z}{3} - \frac{a}{3}$. $3c + \cancel{bf} = zd + ze + zf - ae - af - bf$ *gestr.* | z terminus *L*

z terminus primus. $z - a$ terminus 2^{dus}. $z - a - b$ terminus tertius. $z = \frac{c}{d}$. $z - a = \frac{c}{d + e}$. $z - a - b = \frac{c}{d + e + f}$. Ergo $\frac{c}{d} - \frac{c}{d + e} = a$. $\frac{c}{d} \times \frac{c}{d + e}$ [=] $\frac{\cancel{cd} + ce - \cancel{cd}}{dd + de}$. Ergo $a = \frac{ce}{dd + de}$. $b = \llcorner\frac{c}{d + e} \overset{-}{\underset{-}{\times}} \frac{c}{d + e + f}\lrcorner$ $\frac{\cancel{cd} + \cancel{ce} + cf - \cancel{cd} - \cancel{ce}}{(\llcorner d + e\lrcorner Q.)dd + ee + 2de + df + ef} = b$. $\frac{\cancel{c}}{dd + de} \times \frac{\cancel{c}f}{\llcorner d + e\lrcorner Q. + df + ef} = \frac{\cancel{c}}{d} \times \frac{\cancel{c}}{d + e + f}$. $\frac{d + e + f}{\cancel{d}} = \frac{\llcorner d + e\lrcorner Q. + df + ef}{\cancel{d}df}$.

$$\begin{array}{ccc} z & & \\ & & a \\ z - a & & \\ & & b \\ z - a - b & & \end{array}$$

---

1 *Rechts mit anderer Tinte:*

$$\begin{array}{lll} a - 1 & a + 1 & a^2 \cancel{\overline{+}} 2a + 1 \\ & \underline{a + 1} & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} a^4 & -2a^3 & +a^2 & \\ +4a^2 & -2a^3 & & -2a \\ +1 & & +a^2 & -2a \end{array}$$

$$a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1$$

$$a^2 - 2a + 1 \frown a - 1$$
$$a^3 - 2a^2 + a - a^2 + 2a - 1$$
$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1$$

5–9 *Gestrichen:*

$3r$

$1r$ $\qquad \frac{c}{d} = 3r$. $\frac{c}{d} - 1r = \frac{c}{d + e}$. $\frac{c}{d} = \frac{c}{d + e} + 1r$. $\frac{c}{d} - \frac{c}{d + e} = 1r$.

$2r$ $\qquad \frac{c}{d + e + f} = \frac{c}{d} - 1r - \frac{1r}{2}$. $\frac{c}{d + e} - \frac{c}{d + e + f} = \frac{1}{2}r$.

$\frac{1}{2}r$ $\qquad \dfrac{\frac{c}{d} - \frac{c}{d + e}}{\frac{c}{d + e} - \frac{c}{d + e + f}} =$ [*Rechnung bricht ab*]

$\frac{3}{2}r$

2 = *erg. Hrsg.*

Supponatur terminus communis omnibus fractionibus esse c. Ergo terminus primus $z=\frac{c}{d}$. Ergo terminus secundus $z-a=\frac{c}{d+e}$ et terminus tertius $z-a-b=\frac{c}{d+e+f}$.

Supra ostendimus dato termino primo et differentia prima seu termino secundo, invenire terminum tertium. $\frac{z-a}{z\smile a,+1}=b$. Terminus primus est z, secundus $z-a$, tertius $z-a-b$. Iam si b est $\frac{z-a}{z\smile a,+1}$, erit terminus tertius $z-a-\frac{z-a}{z\smile a,+1}$. Et $\cfrac{z-a}{z-a-\cfrac{z-a}{\frac{z}{a}}+1}$ seu $\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{z}{a}+1}}$ est ratio termini secundi ad tertium. Ratio ergo termini tertii ad secundum est $1-\cfrac{1}{\frac{z}{a}+1}$.

---

5 *Daneben:* $\frac{a}{z}\times\frac{z}{a}\quad\frac{zz}{aa}$. $\cfrac{1}{\frac{z}{a}+1}\times\cfrac{\frac{z}{a}+1}{1}\;||\,1\,|\;\cfrac{1}{\frac{zz}{aa}+1+\frac{2z}{a}}$. $\cfrac{\frac{z}{a}+1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\frac{z}{a}+1}}}=\cfrac{\frac{zz}{aa}+\frac{2z}{a}+1}{1}$

6 *Darunter:* Ratio termini secundi ad tertium. $1-\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$. $\frac{1}{1}\times\frac{4}{5}\quad\frac{5}{4}$. $\frac{3}{1}\times\frac{3}{2}\quad\frac{6}{3}$. $\frac{6}{3}\times\frac{6}{4}\quad\frac{24}{18}\,\Big|\,\frac{4}{3}$.

2 Ergo terminus *(1)* primus se *(2)* secundus *L* 2 f. $\frac{c}{d+e+f}$. | $\frac{c}{d+e}\times\frac{c}{d+e+f}$ *gestr.* | Supra ostendimus *(1)* datis duobus terminis *(2)* dato *L* 4 b. *(1)* Ergo *(2)* Terminus *L* 6 termini *(1)* tertii ad secundum *(2)* secundi *L* 7–124,1 $-\cfrac{1}{\frac{z}{a}+1}$. *(1)* seu $1-\frac{a}{z}+1$ seu $\frac{a}{z}$ est ratio termini secundi ad tertium seu ea est ratio termini secundi ad tertium, in progressione harmonica, quae est ratio termini primi ad differentiam suam a secundo *(2)* Productus *L*

---

3 Supra ostendimus: s. o. S. 120 Z. 1–5.

Productus ex divisione termini primi per differentiam a secundo, unitate auctus dividat unitatem. Productum ab unitate subtrahatur. Residuum erit ratio termini progressionis harmonicae tertii ad secundum, seu minimi ad medium. Huius theorematis ope invenitur tertia proportionalis harmonica seu continuatio progressionis.

[*Teil 3*]

Termini progressionis arithmeticae eundem terminum dividentes, producunt terminos progressionis harmonicae.

Summam inire omnium fractionum imparium deinceps ab unitate in infinitum: $\left[1\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{9}\right]$ etc.

$\frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{25}$. Differentiae sunt $\underset{4\frown 9}{\frac{5}{36}}\quad \underset{9\frown 16}{\frac{7}{144}}\quad \underset{16\frown 25}{\frac{9}{400}}\quad \frac{11}{25\frown 36}\quad \frac{13}{36\frown 49}\quad \frac{15}{49\frown 64}$ etc. in infinitum aequantur $\frac{1}{4}$. Ita inire quoque possumus in summam fractionum quarum [numerator] semper est 2, nominator est factus ex duobus quadratis proximis in se invicem ita ductis, ut idem ducatur in praecedentem et in antecedentem, et factis in se invicem rursus ductis. Ergo et dimidium eius seu si illius fractionis nominator sit 1. Ergo et utcunque multiplicari potest seu augeri nominator.

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}$ etc. sunt termini progressionis harmonicae quorum in infinitum productorum summam reperire difficile fuerit.

Observatum est iam a Wallisio et Mercatore $\frac{a}{b+c}$ esse $= a - \frac{ac}{b+c}$. Et hoc ipsum $\frac{ac}{b+c}$ per consequens rursus est $= ac - \frac{ac^2}{b+c}$.

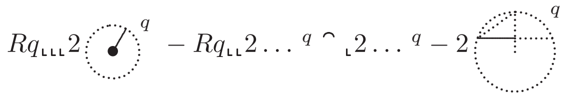
3 harmonicae *(1)* ad proxime maiorem *(2)* tertii *L* 4 invenitur *(1)* media proportionalis harmonica, si *(a)* inventus *(b)* invenietur *(2)* tertia *L* 6 progressionis arithmeticae *erg. L* 6 dividentes, *(1)* constituunt *(2)* producunt *L* 10 f. infinitum: | $1\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}$ *streicht L, ändert u. erg. Hrsg.* | etc. *L* 12 nominator *L ändert Hrsg.* 12 2, *(1)* numerator *(2)* nominator *L* 16 harmonicae *(1)*. Hinc sequitur *(2)* quorum *L* 17 f. fuerit. | Summam reperire progressionis harmonicae in infinitum non productae, summentur termini progressionis arithmeticae, qui sunt eius *(1)* numeratores, *(2)* nominatores *gestr.* | Observatum *L*

Ergo $\dfrac{a}{b+c} = a - \llcorner\llcorner\llcorner\llcorner ac - \llcorner\llcorner\llcorner ac^2 - \llcorner\llcorner ac^3 - \llcorner ac^4 \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner$ etc. sive postremo subscribendo [$b + c$ divisorem]. Nam in infinitum procedi non potest, alioquin idem esset $\dfrac{a}{b+c}$ et $\dfrac{a}{d+c}$ quia scilicet d vel b non ingreditur hanc seriem potestatum, de c per a multiplicatarum, at hinc ego propositionem demonstro admirabilem, si b sit 0 seu nihil et per consequens si numerus sit $\dfrac{a}{c}$, ipsum esse vere aequalem his $a - ac - ac^2$ etc., et per consequens rationem numeri ad numerum, his potestatibus continue subtractis, aequari ergo $\dfrac{1}{c} = 1 - c - c^2 - c^3$. Ergo idem est aliquid dividere, et continue subtrahere hoc modo per consequens idem est subtrahere aliquid quoties possibile est, et subtrahere hoc modo. Ergo $c - c^2 - c^3$ etc. est 1, et ipsum c erit: $c^2 - c^3 - c^4$ etc.

Scientia analyseos aequationumque ope scripturae universalis facile ad omnia applicari potest. Non recte proceditur minime assumendae sunt literae A B etc., sed signa alia materiae quae tractatur commoda, alioquin animus literarum explicationem quaerens confunditur, ex. gr. ratio lateris polygoni inscripti praecedentis ad sequens exponi potest sic per literas

$Rq\llcorner\llcorner\llcorner 2b^q - Rq\llcorner\llcorner 2b^q \frown \llcorner 2b^q\ -2a^q$

ubi b significat radium circuli, a sinum polygoni antecedentis inscripti. Sed quanto rectius signa quaedam naturalia ipsi radio et lateri polygoni tributa adhibemus, ut:



1 etc. *(1)* sive procedendo in infinitum *(2)* sive *L* 2 b + c divisorem *streicht L, erg. Hrsg.* 5 si *(1)* divisor sit *(2)* numerus *L* 13 inscripti *erg. L* 14 sic | melius *gestr.* | per *L* 15 $-2a^q$ *(1)* quanto rectius notas alias adhibemus: pro *(2)* ubi *L* 17 ipsi *(1)* circuli et *(2)* radio *L*

124,18 Observatum: In N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668 [Marg.] ist die Formel $\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{ca}{b^2} + \dfrac{c^2a}{b^3} + \dfrac{c^3a}{b^4}$ etc. angegeben (prop. XIII, S. 25); darüber hinaus berechnet Mercator $\dfrac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$ etc. (prop. XV, S. 29 f.), was J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, 1668, S. 753 erwähnt. Die von Leibniz angegebene Formel ist nur für den Spezialfall $b = 1$ gültig; der Fehler beeinträchtigt die Überlegungen bis Z. 9. 15 Die Formel für das dem Kreis einbeschriebene, regelmäßige n-Eck und 2n-Eck verwendet Leibniz in *LSB* VII, 1 N. 3_3, S. 13.

vel figurae loco ipsa vox

$$Rq\llcorner\llcorner\llcorner 2\underline{\text{rad.}}^q - Rq\llcorner\llcorner 2\underline{\text{rad.}}^q \frown \llcorner 2\underline{\text{rad.}}^q - 2\underline{\text{sin. polyg. inscr. praeced.}}^q$$

Hac methodo omnis aequatio statim daret theorema, nec opus esset eius transformatio. Infinita possunt esse theoremata sed problemata inprimis utilia non nisi finita, quaerenda ergo methodus ea theoremata ex infinito possibilium numero seligendi, quae ad problemata usum habere possunt. In primis autem ad problemata universalia. Ex problematis ea quaerenda sunt prae caeteris, quae sunt compendiosa, quia res eadem effici potest infinitis modis, quaerenda est ratio compendiosissima. Ut in progressionibus potest inveniri methodus repraesentandi omnia Euclidis *Elementa* una cum suis demonstrationibus in una tabula, ope scripturae universalis eiusque demonstrationum. Imo simili tabula comprehendi possunt omnia theoremata Archimedis, Apollonii, Pappi etc. Sed sufficiet id fieri pro istis veteribus, et quod ad recentiores persequenda sunt tandem theoremata quae serviunt ad problemata.

Circulus est summa differentiarum omnium inter ellipses omnes eiusdem diametri maximae, inter ipsum et ellipsin omnium minimam, seu ipsam eius diametrum interpositas. Hinc demonstrari potest debere ellipses esse inter se et ad circulos, ut parallelogramma rectangula circumscripta. Hinc aperitur nova methodus universalis geometriae infinitorum, ut proportiones figurarum possint demonstrari. Nam hoc loco cum circulus etiam sit summa differentiarum inter polygona, necesse est, polygona ellipsibus et circulo esse proportionalia ac proinde ellipses et circulos esse ut polygona circumscripta. Hac methodo ea omnia possunt demonstrari, quae hactenus per geometriam indivisibilium, et nonnulla ampliora. Non enim possunt exhiberi curvae rectis aequales per geometriam indivisibilium, at hac methodo exhiberi possunt tales infinitae.

14 f. eiusdem diametri maximae *erg. L* 15 et *(1)* lineam rect *(2)* ellipsin *L* 18 demonstrari *(1)*, quoties scilicet habent *(2)*. Nam *L* 19 et circulo *erg. L* 22 et | fortasse *gestr.* | nonnullae *L*

9 omnia Euclidis *Elementa*: Euklid, *Elemente*. 11 theoremata Archimedis, Apollonii, Pappi: Archimedes, *Opera*; Apollonius, *Conica*; Pappus, *Mathematica collectio*.

A Wallisio observatum tam in *Arithm. infinit.* quam in iudicio de *Logarithmotechnia* Mercatoris quod: $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$ etc. alternando potestates affirmatas negatasque, an ergo in genere $-,,,,-,,,-,,-,- = -+-+-$. Inquirendum quid $\frac{a}{b-c}$. Non videtur id Wallisius eo in loco satis exacte expressisse. Est in talibus alternatim affirmatis et negatis proprie complicatio duarum progressionum alterius continue crescentis additae alterius subtractae, et subtractio est maior semper, hinc continuum in effectu decrementum. Hinc calculandum quid sint: $1 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5$ etc. et ita de caeteris progressionibus complicatis, regulae quaerendae universales.

NB. Possint nova id genus theoremata condi, ubicunque in operationibus per partes factis semper denuo recte inchoandum, ut fit in extractionibus radicum ex binomiis et residuis, item in additione et subtractione rationum.

---

1 *Darüber:*

$$\begin{array}{llll} b2 - a2 & 3a - b & 3a - \ \ b & \begin{array}{cc} 16 & 20 \\ \underline{\ \ 9} & \underline{\ \ 6} \\ 144 & 120 \end{array} \\ 25 - 16 = 9 & 12 - 5 & 9aa + bb - 6ab & \\ \ 5 \quad\ 4 \quad 3 & & 144 + 25 - 120 & \\ & & \begin{array}{r} \underline{120} \\ 24 \\ +25 \end{array} & \end{array}$$

3 genere *(1)* $1,,,-\mathrm{a},,-\mathrm{a}^2,-\mathrm{a}^3 = $ *(2)* $-,,,,$ *L* 5 f. crescentis *(1)*, alterius continue *(2)* additae *L* 9 NB. *(1)* Potest construi regula generalis *(2)* Possint *L* 9 genus | problemat *gestr.* | theoremata *L*

---

1 A Wallisio observatum: vgl. Erl. zu S. 124 Z. 18. Die fortgesetzte Division $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$ etc. ist in J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, nicht enthalten. Wallis entwickelt jedoch in *Mathesis universalis*, 1657, cap. XXXIII, prop. 68, S. 303 (*WO* I, S. 175 f.) die geometrische Reihe durch fortgesetzte Division. Der Fall $\frac{a}{b-c}$ ist bei N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668 in prop. XIII, S. 25 angegeben; in J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, S. 755 findet sich der Spezialfall $\frac{b^2}{1-a}$. 13 $b2 - a2$: Außer in gemeinsam mit J. Ozanam verfaßten Texten verwendet Leibniz diese Exponentenschreibweise auch in *LSB* VII, 1 N. 42, S. 250 f.

Vide quae Mercator de differentia inter duos rationum terminos in innumeras partes aequales divisa. Et haec sunt mire foecunda. Licet enim de rationibus quoque rationum etc. compositis divisisque etc. talia comminisci. Liceret omnes pene possibiles modos summandi infinita determinare.

---

1 Vide quae Mercator: N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XVI S. 30 f. [Marg.]

9. AEQUATIO FUNDAMENTALIS PROGRESSIONIS HARMONICAE
[Herbst 1672 – Anfang 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 137. Ca. 1/2 Bog. 4°. 1 Spalte auf Bl. 137 r°. Bl. 137 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Mainzer Papier geschrieben. Es greift den Ansatz von N. 8 S. 115 Z. 1 wieder auf und dürfte kurz danach entstanden sein.

Aequatio fundamentalis ex definitione progressionis harmonicae $z - a+2b = \frac{zb}{a+b}$.

$$z - a+2b, \frown a+b = zb. \quad za+zb, - \genfrac{}{}{0pt}{}{a+2b = zb.}{a+b} \quad za+zb = zb + \genfrac{}{}{0pt}{}{a+2b.}{a+b}$$

$$za + \cancel{zb} - \cancel{zb} = \genfrac{}{}{0pt}{}{a+2b.}{a+b} \qquad za = \genfrac{}{}{0pt}{}{a+2b.}{a+b} \quad z = \frac{\genfrac{}{}{0pt}{}{a+2b}{a+\ \ b}}{a}\ . \qquad z = \frac{aa+2ba+ba+2bb}{a}.$$

$$\begin{array}{llllll} z = & a\ + & 3b & + \frac{2b^2}{a}. & & \frac{6}{2} \\ & a\ + & 3b & + \frac{2b^2}{a} & & \quad 1 \\ \multicolumn{4}{l}{\left(\begin{array}{c} ((((1)\frac{5}{2}(\frac{3}{2}(\frac{1}{2}))))) \frac{1}{2} \\ ((((\frac{6}{2})))) \end{array}\right)} & & \begin{array}{l} \frac{6}{3} \\ \quad \frac{1}{2} \\ \frac{6}{4} \end{array} \end{array}$$

---

16 f. Leibniz berechnet für $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ schrittweise z.

Datis duabus differentiis proportionis harmonicae, tres terminos invenire.

$$\begin{array}{llll} a+3b+\frac{2b^2}{a} & & & \\ & a & & \\ 3b+\frac{2b^2}{a} & & = b+3c+\frac{2c^2}{b} & \\ & b & & \\ 2b+\frac{2b^2}{a} & & = \quad 3c+\frac{2c^2}{b} & = c+3d+\frac{3d^2}{c} \\ & c & & \\ & & & \\ & d & & \end{array}$$

129,8 *Dazu, gestrichen:*

$$1 \;-\; a+2b=\frac{b}{a+b}. \quad 1=a+2b+\frac{b}{a+b}. \quad a+b=\begin{array}{c} a+2b \\ a+b \end{array} \text{[\textit{bricht ab}]}$$

1 Datis | duabus *erg.* | differentiis *(1)* progressionis *(2)* proportionis harmonicae | tres *erg.* | terminos *L*

10. DE FRACTIONIBUS SUMMANDIS
[März – 16. Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 131–132. 1 Bog. 2°. 3 S. Teil 2 ist quer auf den freigebliebenen Rest der Innenseite des Bogens geschrieben. — Auf Bl. 132 v° auf den 16. Mai 1673 datierter Quittungsentwurf von Leibniz' Hand (Cc 2, Nr. 436; Druck für Ergänzungsband zu *LSB* I, 1 vorgesehen). 8 Z.
Cc 2, Nr. 437

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. N. 10 ist vermutlich vor dem Quittungsentwurf auf Bl. 132 v° entstanden, der sich auf einen ab dem 16. Mai 1673 laufenden Mietvertrag bezieht und daher wohl kurz vor diesem Termin verfaßt ist.

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{llllll}
a & 1 & & & & \\
 & & \frac{a}{b} = \frac{1}{4} & & \frac{a}{b} & \frac{1}{2} \\
b & 4 & & & & \\
 & & \frac{b}{c} = \frac{4}{9} & & \frac{b}{c} & \frac{2}{3} \\
c & 9 & & & & \\
 & & \frac{c}{d} = \frac{9}{16} & & \frac{c}{d} & \frac{3}{4} \\
d & 16 & & & & \\
 & & \frac{d}{e} = \frac{16}{25} & & \frac{d}{e} & \frac{4}{5} \\
e & 25 & & & & \\
 & & \frac{e}{f} = \frac{25}{36} & & \frac{e}{f} & \frac{5}{6} \\
f & 36 & & & &
\end{array}$$

$$\frac{a}{b} \underline{\times} \frac{b}{c} = \frac{ac+b^2}{bc} \qquad \frac{b}{c} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{c}{d} = \frac{bd+c^2}{cd}$$

$$\frac{ac+b^2}{bc} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{bd+c^2}{cd} = \frac{ac^2d+b^2cd+b^2cd+bc^3}{bc^2d} = \frac{acd+2b^2d+bc^2}{bcd}$$

$$\frac{ac+b^2}{bc} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{c}{d} = \frac{acd+b^2d+bc^2}{bcd}$$

In tali ergo casu, cum fractiones summandae sunt, ita comparatae, ut nominator praecedentis sit numerator antecedentis, fiat fractio, cuius nominator, sit factus ex omnibus terminis demto primo, numerator compositus ex tot partibus quot sunt fractiones, et quaelibet pars ita componatur, ita ut prima constet ex omnibus terminis, demto secundo, secunda ex omnibus terminis demto tertio, et ita porro, ita pars prima numeratoris differet a nominatore, quod loco termini 2^{di}, habet primum, (quo nominator caret) pars 2^{da} ita, quod loco termini 3^{tii} habebit 2^{dum} etc.

Iam ut talia: $\dfrac{acd + b^2d + bc^2}{bcd} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d}$.

Imo sic potius: nominator habet omnes demto primo, primus numerator habet omnes demto 2^{do}, reliqui numeratores habent suum terminum bis, et carent proxime antecedente et proxime sequente.

Summam ita investigabimus: $\begin{aligned} acd + b^2d &= ac + b^2\lrcorner \frown d \\ b^2d + bc^2 &= bd + c^2\lrcorner \frown b \end{aligned}$

Hinc apparet, si b. sit media proportionalis inter a et c. vel c inter b et d. tunc ad summam ineundam, facilius perveniri posse, quia $ac = b^2$ et $bd = c^2$.

1. 2. 4. 8. 16. et sit $\dfrac{1}{2}\ \dfrac{2}{4}\ \dfrac{4}{8}\ \dfrac{8}{16}$ ibi ostendi poterit omnes terminos esse $=$.

Quid vero si termini sint arithmetice proportionales, ita stabit:

$$\frac{a \frown \llcorner a + 2x\lrcorner\lrcorner \frown \llcorner a + 3x\lrcorner\lrcorner\lrcorner \; + \; \llcorner\llcorner a + x\lrcorner \frown \llcorner a + x\lrcorner \frown \llcorner a + 3x\lrcorner\lrcorner \; + \; a + x \frown a + 2x \frown a + 2x}{a + x \frown a + 2x \frown a + 3x}$$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{e}$. sintque $a.b.c.d.e.$ progressionis arithmeticae.

3 tot *(1)* terminis *(2)* partibus *L* 4 pars | ex *streicht Hrsg.* | *(1)* omnibus terminis ita *(2)* ita componatur *L* 5 ita *(1)* terminus pri *(2)* pars *L* 8 f. $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$ *(1)* breviter summes, ita opinor agendum erit: differentia inter acd+ *(a)* $\mathrm{b}^2\mathrm{d}$ *(b)* $\mathrm{b}^2\mathrm{c}$ *(2)*. Imo *L* 15 ineundam, *(1)* tantum primum terminum multiplicari posse per numerum terminorum, et facto velut numeratori subscribi posse nominatorem factum ex omnibus terminis demto primo v. g. $\mathrm{acd} + \mathrm{b}^2\mathrm{d} + \mathrm{b}$ *(2)* facilius *L*

4 f. ita ... porro: Das hier genannte Bildungsgesetz ist vom zweiten Term an falsch; es wird Z. 9–11 korrigiert. Die folgende Aussage Z. 5–7 ist richtig.

$\frac{1}{a} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$. (NB. haec aequatio utilis observatu ad reductiones) $\frac{1}{b} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{c} \quad \frac{b+c}{bc}$. $\frac{a+b}{ab} \times \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ac}{abc} \times \frac{1}{d} = \frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}$. Et hoc schema universale est in omnium fractionum additione, in quibus numerator unitas. Cum iam termini sint progressionis arithmeticae, sunto $a = a$. $b = a + 1x$. $c = a + 2x$. $d = a + 3x$. etc.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+a+x}{a \frown \llcorner a+x \lrcorner} = \frac{2a+x}{a^2+ax}$$

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} = \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{a^2+ax+a^2+2x^2+3ax+a^2+2ax}{a^3+3a^2x+2ax^2} = \frac{3a^2+6ax+2x^2}{a^3+3a^2x+2ax^2}$$

Quod si iam $x = a$. erit $\frac{11a^2}{6a^3}$. et si $a = 1$. erit $\frac{11}{6}$.

$$\frac{11}{6} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{4} \quad \frac{44+6}{24} \quad \frac{50}{24} \,\Big|\, \frac{25}{12} \qquad \frac{25}{12} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{5} \quad \frac{125+12}{60} \quad \frac{137}{60} \qquad \frac{50}{24} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{250+24}{120} \qquad \frac{274}{120}$$

132,18 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ax \\ \underline{a + 3x} \\ a^3 + 2a^2x + 3a^2x + 6ax^2 \\ a^3 + ax^2 + 2a^2x + 3a^2x + 3x^3 + 6ax^2 = a^3 + 3x^3 + 5a^2x + 7ax^2 \end{array}$$

6 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rl} (bc) & = a + x \frown a + 2x = a^2 + 3ax + 2x^3 \\ (ac) & = a \frown (a+2x) = a^2 + 2ax \\ (abc) & = a \frown (a+x) \frown (a+2x) = a^2 + ax \frown a + 2x \\ & = a^3 + a^2x + 2a^2x + 2ax^2 \end{array}$$

8 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{lll} 3 & \cancel{2}8 & \\ \cancel{2}\cancel{7}4 \not f\ 2. & \cancel{1}\cancel{2}\cancel{0} \not f\ 3. & \\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{0} & \cancel{3}\cancel{4} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 12 & & \\ & 12 & \\ 24 & & 72 \\ & 24 & \\ 120 & & \end{array}$$

$$\frac{1}{1} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{2} \quad \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}. \qquad \frac{3}{2} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \overset{+}{\underline{\times}} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{44+6}{24} = \frac{50}{24} \overset{+}{\underline{\times}} \quad \frac{1}{5} = \frac{250+24}{120} = \frac{274}{120}$$

$$\frac{274}{120} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{6} \qquad 1644+120 \quad = \frac{\overset{32}{\cancel{1}\cancel{7}\cancel{6}4}}{\cancel{7}\cancel{2}\cancel{0}} \ \text{⨍}\ 2\,\frac{324}{720}.$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{2} = \frac{1 \frown 1 + 1 \frown 2}{1 \frown 2} \quad \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{3} = \frac{1 \frown 1 \frown 2 + 1 \frown 1 \frown 3 + 1 \frown 2 \frown 3}{1 \frown 2 \frown 3} \quad + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1 \frown 1 \frown 2 \frown 3 + 1 \frown 1 \frown 2 \frown 4 + 1 \frown 1 \frown 3 \frown 4 + 1 \frown 2 \frown 3 \frown 4}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4} \quad + \frac{1}{5}$$

$$\frac{1+2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2+3+2 \frown 3}{2 \frown 3} \quad + \frac{1}{4} = \frac{2 \frown 3 + 2 \frown 4 + 3 \frown 4 + 2 \frown 3 \frown 4}{2 \frown 3 \frown 4} \quad + \frac{1}{5} =$$

$$\frac{2 \frown 3 \frown 4 \ + \ 2 \frown \overset{30}{3} \frown 5 + \ 2 \frown \overset{40}{4} \frown 5 + \ 3 \frown \overset{60}{4} \frown 5 + \ 2 \frown 3 \overset{120}{\frown} 4 \frown 5}{2 \frown 3 \frown 4 \frown 5} \quad + \frac{1}{6} =$$

---

2 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{ll} 7 & \\ \cancel{1}\cancel{3}2 & \cancel{2} \\ \cancel{7}\cancel{2}\cancel{0} \ \text{⨍}\ 2. & \cancel{7}\cancel{2}\cancel{0} \ \text{⨍}\ 144 \\ \cancel{3}\cancel{2}\cancel{4} & \cancel{5}\cancel{5}\cancel{5} \end{array}$$

3 *(1)* $\frac{1}{a} \quad \frac{1}{2a} \quad \frac{1}{3a} \quad \frac{1}{4a} \quad \frac{1}{5a} \qquad \frac{1}{a} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{2a} \quad \frac{2a \frown 1 + a \frown 1}{2a}$ *(2)* $\frac{1}{1}$ *L*

4 $\frac{1}{3}$ = *(1)* $\frac{1 \frown 1 \frown 3 + 1 \frown 2 \frown 3}{1 \frown 2 \frown 3} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{4} = \frac{1 \frown 1 \frown 3 \frown 4 + 1 \frown 2 \frown 3 \frown 4}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4} + \frac{1}{5} = \frac{1 \frown 1 \frown 3 \frown 4 \frown 5 + 1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5}$

(2) | $\frac{1 \frown 1 + 1 \frown 2}{1 \frown 2} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{3}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{1 \frown 1 \frown 2 + 1 \frown 1 \frown 3 + 1 \frown 2 \frown 3}{1 \frown 2 \frown 3}$ *L*

$$\frac{2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4\frown 6+2\frown 3\frown 5\frown 6+2\frown 4\frown 5\frown 6+3\frown 4\frown 5\frown 6+2\frown 3\frown 4\frown 5\frown 6}{2\frown 3\frown 4\frown 5\frown 6}$$

$$720+360+240+180+144+120=120\frown 6+24\frown 5+36\frown 4+60\frown 3+120\frown 2+360\frown 1$$

$$(3)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5 \qquad (3)\ 2\frown 3\frown 5\frown 6 \qquad (3)\ 3\frown 4\frown 5\frown 6$$

$$2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4\frown 6\ +\ 2\frown 3\frown 5\frown 6+2\frown 4\frown 5\frown 6\ +\ 3\frown 4\frown 5\frown 6+2\frown 3\frown 4\frown 5\frown 6$$

Haec ut summemus opus est aequatione eorum seu reductione ad aequalitatem per mutuas compensationes.

$$2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4\frown 6=2\frown 3\frown 4\frown 5\ (2)+2\frown 3\frown 4\ldots+2\frown 3\frown 5\frown 6=$$

$$2\frown 3\frown 4\frown 5\ (3)+2\frown 3\frown 6+(2)\ 2\frown 3\frown 4\ldots+2\frown 4\frown 5\frown 6=$$

$$(4)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(3)\ 2\frown 3\frown 4+(2)\ 2\frown 3\frown 6+(1)\ 2\frown 5\frown 6\ldots+3\frown 4\frown 5\frown 6=$$

$$(5)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(4)\ 2\frown 3\frown 4+(3)\ 2\frown 3\frown 4+(2)\ 2\frown 3\frown 6\ldots+2\frown 3\frown 4\frown 5\frown 6=$$

$$(6)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(5)\ 2\frown 3\frown 4+(4)\ 2\frown 3\frown 6+(3)\ 2\frown 5\frown 6+(2)\ 4\frown 5\frown 6+(1)\ 3\frown 4\frown 5\frown 6.$$

$6\frown 120$	$5\frown 24$	$4\frown 36$	$3\frown 60$	$2\frown 120$	$1\frown 360$
720	120	144	180	240	360

$$(12)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(3)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(12)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5.$$

$$(3)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5 \quad (3)\ 2\frown 3\frown 5\frown 6 \quad (3)\ 3\frown 4\frown 5\frown 6$$

6 f. compensationes. *(1)* $2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4\frown 6=2{,}2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4+\ldots+2\frown 3\frown 5\frown 6=$ $2\frown 3$ *(2)* $2\frown 3\frown 4\frown 5$ *L*

3 f. Leibniz' kombinatorische Überlegungen zur Zusammenfassung der Summanden sind nur teilweise richtig.

[*Zusätze zu S. 134 Z. 3 – S. 135 Z. 15*]

720			.		.		.		.		.	$\frac{1}{1}$	120		.		.		.		.		.				
	.	360			.		.		.		.			60			.		.		.		.				
360			.	240			.		.		.	$\frac{1}{2}$	60		.	40			.		.		.	24			
	.	120			.	180			.		.			20			.	30			.		.		4		
240			.	60			.	144			.	$\frac{1}{3}$	40		.	10			.	24			.	12		8	
	.	60			.	36			.	120				10			.	6			.	20			12		6
180			.	24			.	24			.	$\frac{1}{4}$	30		.	4			.	4			.	8		2	
	.	36			.	12			.		.			6			.	2			.		.		2		
144			.	12			.		.		.	$\frac{1}{5}$	24		.	2			.		.		.	6			
	.	24			.		.		.		.			4			.		.		.		.				
120			.		.		.		.		.	$\frac{1}{6}$	20		.		.		.		.		.				

diversis assumtis seriebus harmonicis, ut maximus ad maximum, ita et reliqui ad respondentes, ut et differentiae.

720	600	576	540	480	360
360	240	216	180	120	
240	120	96	60		
180	60	36			
144	24				
120	0				
1764					

12 *Unter der mittleren Tabelle:* manet

2–12 *Mittlere Tabelle gestr. u. wieder gültig gemacht L*

$$
\begin{array}{rcccccc}
720 & & 5040 & & & & \\
7 & & & 2520 & & & \\
\overline{5040} & & 2520 & & 1680 & & \\
 & & & 840 & & 1040 & \\
 & & 1680 & & 620 & & \\
 & & & 420 & & 552 & \\
 & & 1260 & & 168 & & \\
 & & & 252 & & 84 & \\
 & & 1008 & & 84 & & \\
 & & & 168 & & & \\
 & & 840 & & 148 & & \\
 & & & 120 & & & \\
 & & 720 & & & &
\end{array}
$$

[*Teil 2*]

$$
\begin{array}{llllll}
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{4+2} & & \\[2ex]
\frac{1}{3} \times \frac{4}{4} & \frac{4}{12} + \frac{3}{12} & & \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \quad \frac{4}{12} & \frac{1}{4} - \frac{3}{3} \quad \frac{3}{12} & \\[1ex]
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} & \frac{4}{12} - \frac{3}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} - \frac{4}{4} \quad \frac{4}{12} & \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} & \\[1ex]
 & & & & \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} & \\[2ex]
\frac{1}{4} \mathbin{\underline{\times}} \frac{2}{3} & \frac{3+8}{12} & \frac{11}{12} & \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{12} & &
\end{array}
$$

$$
60 \quad \frac{1}{60} \quad \frac{15}{60} \quad \frac{60}{60} \qquad \frac{40}{60} \quad \frac{15}{60} \quad \frac{10}{60} \,\Big|\, \frac{1}{6} - \frac{10}{10} \quad \frac{10}{60}
$$

$$
\frac{80}{10} \quad \frac{10}{80} \,\Big|\, \frac{1}{8}
$$

$$\begin{array}{llllllll}
\text{fl} & \text{thl} & & & \text{fln} & 243 & & \cancel{3}1 \\
 & 60 & & & & \underline{\;51} & & \cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{3} \; ⨍ \; 3098\frac{1}{4} \\
1 \;—\; & \underline{\;\;4} & \text{thl } 3 \text{ sols} & — & 12\frac{3}{4} & 243 & & \cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4} \\
 & 240 & \frac{243}{1} & \overline{—} & \frac{51}{4} & \underline{1215} & & \\
 & & & & & \frac{12393}{4} & & 3 \quad \text{thl} \quad \text{sols} \\
 & & & & & & & \cancel{3}\cancel{0}\cancel{9}8 \; ⨍ \; 51 \,.\, 38\frac{1}{4} \\
 & & & & & & & \cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{fl} & \text{thl} & \text{fln} & & & 4 \\
\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \overline{—} \; \frac{10}{1} & \frac{10}{2} \; \frac{3}{4} \; \frac{40}{6} & \frac{10}{2} \times \frac{3}{4} & \cancel{4}\cancel{0} \; ⨍ \; 6\frac{4}{6} \Big| \overset{2}{} \frac{2}{3} \\
 & & & & & \cancel{0}
\end{array}$$

---

9 *Nebenrechnung:* $\frac{16}{24} \Big| \overset{8}{} \frac{2}{3}$

13 *Näherungsrechnung für* $\frac{40}{50} \cdot \frac{2}{3}$ *zur Lesart, nicht gestrichen:* $\frac{13}{25}$

9 $\frac{3}{4}$ *(1)* $\frac{40}{50}$ *(2)* $\frac{40}{6}$ *L*

1–10 Bei den vorliegenden Währungs- und Münzrechnungen handelt es sich wohl um Übungen. Leibniz verwendet im ersten Beispiel die Umrechnungskurse 1 Gulden = 4 Taler, 1 Taler = 60 Sous, 1 Gulden = 243 Sous, im zweiten Beispiel 3 Gulden = 2 Taler. In der Vorlage ist in Z. 4 die 240 durch die 243 überschrieben; aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die beiden Zahlen getrennt wiedergegeben.

11. TABULAE SERIERUM FRACTIONUM
[März – 24. Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 10 Bl. 4. 1 Bl. 2°. 2 S., teilweise zweispaltig.
Cc 2, Nr. 279

Datierungsgründe: Leibniz bezeichnet die in Teil 2 berechnete Summe $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}=1$ im Brief an H. Oldenburg vom 24.V.1673 als kürzlich gefundenes Ergebnis (vgl. *LSB* III, 1 N. 20 S. 93 Z. 16–24). N. 11 dürfte also nicht vor der Rückkehr aus England Anfang März 1673 enstanden sein.

[*Teil 1*]

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	0	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{80}$	$\frac{1}{40}$
$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{240}$	
$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{11}{672}$	
$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{36}{1792}$	

etc.

[*Teil 2, in anderer Tinte*]

$$
\begin{array}{ccc|cc}
\frac{1}{1} & & & & \\
& \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{2} & \\
\frac{1}{4} & & & & \frac{8}{144} \\
& \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{1}{9} & \\
\frac{1}{9} & & & & \\
& \frac{7}{144} & \frac{6}{144} & \frac{1}{24} & \\
\frac{1}{16} & & & & \\
& \frac{9}{400} & \frac{8}{400} & \frac{1}{50} & \\
\frac{1}{25} & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{5}{4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
A & B & C & D & E & & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \text{etc.} & \\
\hline
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \text{etc.} & \\
1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & \frac{1}{125} & \text{etc.} & = 1 \\
1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{256} & \frac{1}{625} & \text{etc.} & \\
1 & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}
$$

11 $\frac{2}{1} \ldots \frac{5}{4}$ *erg. L* 13–16 *Nach den Spalten* B *bis* D *schreibt Leibniz zunächst die Folge der Differenzen, streicht sie aber wieder.*

Summa horum omnium est: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc.

Ergo omnia ista infinities infinita demto: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc. $=1$.

Iam $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ etc. $=$ eidem infinities infinito. Ergo ista series $=1$.

NB. Sed ista series est [dimidiata reciprocorum] numerorum triangularium quos alibi inveni $=$ [2].

	F	G	H	I	K	etc.
L	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	
M	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	
N	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{180}$	
O	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1080}$	
	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	

Hae sunt summae tabulae praecedentis.

Ex seriebus A. B. C. D. E. fient series: F. G. [H.] I. K. multiplicando illarum terminos per summas seriei semper in illis praecedentis, ut tota C per $\frac{3}{2}$ dat G. Series M fit ex L demtis a se invicem fractionibus harmonicis. N ex M demtis quadraticis. O ex N demtis cubicis. Eadem series M est [triangularium reciprocorum dimidiatorum]. Et series N coincidit differentiis quadratorum abiecta unitate ex eorum numeratoribus, duplicatisque nominatoribus NB. NB.

2 Ergo | residua *gestr.* | omnia | ista *erg.* | infinities *L* 4 duplicata *L ändert Hrsg.* 5 $\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.* 13 H. *erg. Hrsg.* 15 demtis *(1)* quadratis fractionibus. N ex M demtis cubis etc. *(2)* a *L* 16 f. est *(1)* duplum *(2)* | pyramidalium duplicatorum *ändert Hrsg.* |. Et *L* 17 N *(1)* fit ex differentiis *(2)* coincidit *L*

---

4 f. alibi inveni: vgl. die *Accessio*, *LSB* III, 1 N. 2 S. 6 Z. 4 f.; in den frühesten Stücken des vorliegenden Bandes, vgl. N. 2, N. 5, hat Leibniz die Summe der halbierten reziproken Dreieckszahlen berechnet.

[*Nebenbetrachtungen zu S. 140 Z. 11 – S. 141 Z. 18*]

$$\frac{1}{3}\text{—}\frac{3}{2}\ \ \frac{3}{6}\,\Big|\,\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{9}\text{—}\frac{3}{2}\ \ \frac{3}{18}\,\Big|\,\frac{1}{6}\qquad \frac{4}{3}\text{—}\frac{1}{16}\ \ \frac{4}{48}\,\Big|\,\frac{1}{12}\qquad \frac{1}{25}\text{—}\frac{5}{4}\ \ \frac{5}{100}\,\Big|\,\frac{1}{20}\qquad \frac{1}{3}\text{—}\frac{4}{3}\,\Big|\,\frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{6}\qquad \frac{1}{12}\qquad \frac{1}{20}\ \lrcorner\lrcorner\ \frown\ \frac{2}{1}$$

$$4\qquad 6\qquad 8$$

$$2\qquad 2$$

$$\frac{2}{8}\qquad \frac{3}{54}\qquad \frac{4}{192}\qquad \frac{5}{[960]}\qquad \frac{1}{4}\qquad \frac{1}{18}\qquad \frac{1}{48}\qquad \frac{1}{[192]}\ \lrcorner\ \frown\ \frac{3}{2}$$

$$46\qquad 138\qquad [768]\qquad 14\qquad 30\qquad [144]$$

$$[92]\qquad [630]$$

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}.\qquad \frac{1}{18}\times\frac{1}{10}\ \ \frac{10}{18}\,\Big|\,\frac{5}{6}.\qquad \frac{1}{48}\times\frac{1}{20}\ \ \frac{20}{48}\,\Big|\,\frac{5}{12}.\qquad \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\ \ \frac{2}{6}\,\Big|\,\frac{1}{3}.\qquad \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \ \frac{3}{4}.$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & \frac{3}{2} & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{1} & \\
 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & \frac{2}{3} \\
\frac{1}{4} & & & & \frac{1}{3} & \\
 & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & & & \frac{2}{9} \\
\frac{1}{8} & & & & \frac{1}{9} & \\
 & \frac{1}{16} & \frac{3}{54} & & & \\
\frac{1}{16} & & & & \frac{1}{27} & \\
 & & \frac{27}{27 \frown 54} & & &
\end{array}$$

6 380 *L ändert Hrsg.* 6 76 *L ändert Hrsg.* 7 188 *L ändert Hrsg.* 7 28 *L ändert Hrsg.* 8 82 *L ändert Hrsg.* 8 50 *L ändert Hrsg.*

2 Leibniz verwendet hier die Striche zur Kennzeichnung des Produktes zweier Brüche.

[*Teil 3*]

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	1	
$\frac{1}{4}$					
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$					
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{25}{64}$
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{2}{1024}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{401}{1024}$
	$\frac{1}{32}$				
	$\frac{1}{64}$				
	$\frac{1}{128}$				
	$\frac{1}{256}$				
	$\frac{1}{512}$				
	$\frac{1}{1024}$				

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & & \\
\frac{3}{2} & & 2 & \\
 & \frac{1}{1} & & \\
\frac{\frac{1}{2}}{1} & & \frac{2}{3} & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{4}{9} \\
\frac{\frac{1}{2}}{3} & & \frac{2}{9} & \\
 & \frac{1}{9} & & \frac{4}{27} \\
\frac{\frac{1}{2}}{9} & & \frac{2}{27} & \\
 & \frac{1}{27} & & \frac{4}{81} \\
\frac{\frac{1}{2}}{27} & & \frac{2}{81} & \\
 & \frac{1}{81} & &
\end{array}
$$

1					
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	1		
$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{3}$				$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{6}$		
$\frac{1}{4}$				$\frac{4}{60}$	$\frac{1}{15}$
	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{10}$		
$\frac{1}{5}$				$\frac{5}{150}$	$\frac{1}{30}$
	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{15}$		
$\frac{1}{6}$					
			$\frac{1}{21}$		

---

3 *Nebenbemerkung zu* $\frac{2}{3}$: Divisé par $\frac{3}{2}$ dat $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \quad \frac{4}{9}$.

5 *Nebenbemerkung zu* $\frac{3}{18}$: $\frac{3}{18} \times \frac{3}{2} \quad \frac{6}{54} \Big| \frac{1}{9}$.

3–9 *Die beiden letzten Spalten erg. L* 13 *(1)* Multiplié par $\frac{3}{2}$ dat $\frac{1}{1}$ *(2)* Divisé ... dat | $\frac{1}{1}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{2}{3}$ *L*

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 3 & & & \\
2 & & 2 & & \\
 & 1 & & & \\
1 & & \frac{2}{3} & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{27}{54} \; \Big| & \frac{3}{6} \Big| \frac{1}{2} \\
\frac{2}{3} & & \frac{3}{18} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{108}{1080} \; \Big| & \frac{1}{10} \\
\frac{3}{6} & & \frac{4}{60} & & \\
 & \frac{1}{10} & & \frac{300}{9000} \; \Big| & \frac{1}{30} \\
\frac{24}{60} \Big| \frac{4}{10} & & \frac{5}{150} & & \\
 & \frac{1}{15} & & &
\end{array}
$$

1–11 *Nebenrechnungen:*

$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{18} \quad \dfrac{36-9}{} = \dfrac{27}{54}. \qquad \dfrac{3}{18} \times \dfrac{4}{60} \quad \dfrac{180-72}{1080} \quad \dfrac{108}{1080}. \qquad \dfrac{4}{60} \times \dfrac{5}{150} \quad \dfrac{600 \;\; 300}{9000} \quad \dfrac{300}{9000}.$

$$
\begin{array}{ccc}
2 & & \\
 & 1 & \\
1 & & \frac{2}{3} \\
 & \frac{1}{3} & \\
\frac{2}{3} & & \frac{3}{18} \\
 & \frac{3}{18} & \\
\frac{3}{6} & & \frac{4}{60} \\
 & \frac{6}{60} & \\
\frac{4}{10} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
2 & & & \\
1 & 1 & & \\
\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \\
\frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{18} & \frac{1}{2} \\
\frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{60} & \frac{1}{10} \\
 & & & \frac{1}{30}
\end{array}
$$

Summa hic est ratio differentiae ad terminum. $\frac{3}{18}$ per $\times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \mid \frac{1}{2}$.

1–11 *Nebenrechnungen zur Tabelle rechts:*

$\frac{3}{18} \times \frac{1}{3} \quad \frac{9}{18} \qquad \frac{4}{60} \times \frac{1}{6} \quad \frac{24}{60} \mid \frac{2}{5}$.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{18} \times \frac{1}{2} \qquad \frac{4}{60} \times \frac{2}{5}$.

$\frac{3}{18} \times \frac{1}{2} \qquad \frac{4}{60} \times \frac{2}{5} \quad \frac{20}{120} \mid \frac{1}{6}$.

$\frac{2}{3} \times \frac{27}{54} \quad \frac{108}{81} \mid \frac{4}{3}$.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \quad \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \quad \frac{3}{8} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4}. \qquad \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \quad \frac{4}{3} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \quad \frac{4}{6} \mid \frac{2}{3}$.

$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4}$

$$\begin{array}{cc|ccc}
\frac{1}{2} & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & & \\
\frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & \\
 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \frac{3}{8} \\
\frac{1}{2} & & & \frac{1}{8} & \\
 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & \frac{7}{64} \\
\frac{1}{2} & & & \frac{1}{64} & \\
 & \frac{1}{16} & \frac{7}{64} & & \frac{15}{1024} \\
 & & & \frac{1}{1024} &
\end{array}$$

$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \quad \frac{6}{8} \,\Big|\, \frac{3}{4}. \qquad \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} \quad \frac{12}{24}. \qquad \frac{7}{64} \times \frac{1}{8} \quad \frac{56}{64} \,\Big|\, \frac{7}{8}.$

12. DE SUMMIS SERIERUM FRACTIONUM
[März - Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 10 Bl. 2–3. 1 Bog. 2°. 2 S. u. 3 Z. (Überschrift) auf Bl. 2 r°. Bl. 3 v° leer.
Cc 2, Nr. 278

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. Das in N. 11 abgeleitete Ergebnis, $\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}=1$ wird auf S. 153 Z. 17–20 als bekannt eingeführt.

De summis serierum fractionum, quarum numeratores unitas nominatores sunt numeri figurati.

Data aliqua serie fractionum, invenire aliam seriem ad cuius differentias series data aliquam habeat rationem constantem, si id possibile est, aut ostendere impossibilitatem.

Ut series 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{15}$. etc. est duplum $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{30}$. etc. differentiarum seriei 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. etc.

$\frac{A}{B}\ \frac{C}{D}\ \frac{E}{F}$ etc. = quaesitum: $\frac{Z}{Y}\ \frac{X}{W}\ \frac{U}{T}\ \frac{S}{R}$ et ratio dividens aut multiplicans quaecunque ea sit: p. Ergo iam

---

9 *Nach* f i g u r a t i: Hic primum cepi invenire.

11 constantem *(1)* . *(2)* , si *L* 13 f. etc. | Invenienda ergo est talis datae seriei enuntiatio, ut numeratores sint differentiae, nominatores vero facti, continue terminorum seriei datae, vel statim, vel si certo quodam modo dividantur aut multiplicentur. *gestr.* | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ *L*

$$\begin{array}{ccc} \frac{Z}{Y}\,\overline{\underline{\times}}\,\frac{X}{W} & & \frac{U}{T}[\boxed{\times}]\frac{S}{R} \\ | & | & | \\ \frac{ZW-XY}{YW} & \frac{XT-UW}{WT} & \frac{UR-ST}{TR} \\ \| & \| & \| \\ \frac{A}{B}\,p & \frac{C}{D}\,p & \frac{E}{F}\,p \end{array}$$

Sed certo sciendum est, seu demonstrandum posse hoc in infinitum continuari. Si quis huc usque analysin produxerit, ut ista invenire queat, eum plurimum praestitisse arbitror.

$$\begin{array}{cccccccc} & & A & B & C & & D & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & & \text{etc.} & \\ \frac{1}{3} & \# & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & & \text{etc.} & \\ \frac{1}{4} & & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} & & \text{etc.} & \left.\right\} = \frac{1}{3} \quad \left.\right\} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} & \frac{1}{70} & \# & \text{etc.} & \\ \frac{1}{6} & & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & & \text{etc.} & \end{array}$$

Nam $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc. $=$ seriebus infinitis A. B. C. D. etc. a quibus si abiciantur: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc. restabit $\frac{1}{2}$ $=$ omni residuo infinities infinito incluso. (ita $\frac{1}{3}$ $=$ interiori incluso, et ita de caeteris).

1 $\overline{\underline{\times}}$ *erg. Hrsg.*

11–14 Die richtigen Summen lauten $\frac{3}{2}$ bzw. $\frac{5}{6}$; vgl. dazu die *Accessio*, *LSB* III, 1 N. 2 S. 10, wo Leibniz den gleichen Fehler macht.

Ergo cum in istis infinities infinitis omnes termini bis occurrant, demta media linea notata sic # $\sim\sim$. $\sim\sim$ # huic $\frac{1}{4}$ = terminis omnibus repetitis antea nunc semel tantum sumtis, lineae terminis dimidiatis.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & D & & E & & F & & & & & A & & B & & C & & \\
L & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \text{etc.} & & G & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \text{etc.} \\
M & \frac{1}{9} & DD & \frac{1}{16} & EE & \frac{1}{25} & FF & \text{etc.} & = & H & \frac{1}{6} & AA & \frac{1}{10} & BB & \frac{1}{15} & CC & \text{etc.} \\
N & \frac{1}{27} & & \frac{1}{64} & & \frac{1}{125} & & \text{etc.} & & I & \frac{1}{10} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{35} & & \text{etc.} \\
O & \frac{1}{81} & & \frac{1}{256} & & \frac{1}{625} & & \text{etc.} & & K & \frac{1}{15} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{70} & & \text{etc.} \\
 & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}
$$

et $A = D$. $B = E$. $C = F$. etc. Item $G = M$. Ergo totum $M + N + O$ etc. = toti $H + I + K$ etc. H $+ \frac{1}{3}$ = A = D. et $I + \frac{1}{4} = B = E$. et $K + \frac{1}{5} = C = F$. Patet etiam: $AA = DD = H : \frac{1}{6}$. et $BB = EE = I : \frac{1}{12}$. et $CC = FF = K : \frac{1}{20}$. Abiciantur hinc H, illinc DD. residua erunt aequalia utrobique. Ergo $AA - \frac{1}{6} + BB - \frac{1}{10} + CC - \frac{1}{5} = EE + FF$. Pono $DD = \frac{1}{6}$.

Videamus an M possit supponi $= H = \frac{1}{6}$. Imo hoc impossibile. Nam si $\frac{1}{9}$ subtrahas ab $\frac{1}{6}$ restat $\frac{1}{18}$. a quo non potes subtrahere $\frac{1}{16}$.

6 DD, EE, FF, AA, BB, CC *jeweils erg., gestr. und wieder gültig gemacht L* 11 F. | Utrobique abiecta intelligantur huic G. illinc L *gestr.* | Patet *L* 12 $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$ *erg. L* 13 Ergo | I + K = *gestr.* | = AA $- \frac{1}{6}$ *L*

1 f. media linea notata: In der Handschrift ist die Linie zwischen den Zeichen # in der vorhergehenden Tabelle durch diagonal gesetztes $\sim\sim$ markiert, was hier aus drucktechnischen Gründen unterbleibt. 4–9 Leibniz versucht eine formale Gleichsetzung der beiden Schemata, deren Behauptung er im folgenden Rechengang (bis Z. 16) zu beweisen sucht. Neben dem unrichtigen Ansatz enthält der Rechengang mehrere Detailfehler.

$\boxed{\frac{2}{\cdot}}$	$\boxed{\frac{3}{4}}$	$\boxed{\frac{4}{9}}$	$\boxed{\frac{5}{16}}$	$\boxed{\frac{6}{25}}$	
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	
$\boxed{1}$	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$\boxed{\frac{1}{9}}$	$\boxed{\frac{1}{16}}$	$\boxed{\frac{1}{25}}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{180}$	
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1080}$	
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	
A	*B*	*C*	*D*	*E*	

$\}$ $= 1$. si duplices primam seriem transversam $\frac{2}{4}.\frac{2}{18}$. etc. Si primam seriem descendentem: $\frac{2}{4}.\frac{1}{8}$. etc. omittas omnia aequabuntur: $\frac{1}{4}$.

6–13 $\}$ $= 1. \dots \frac{1}{4}$ *erg. L*

---

7 $\}$ $= 1$. si duplices: vgl. S. 153 Z. 14–16.

Summa A est	Summa B est	Summa C est	Summa D est	Summa E
$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{25}$
aufer ab his				
1	$\frac{1}{2} \Big\vert \frac{2}{4}$	$\frac{1}{3} \Big\vert \frac{3}{9}$	$\frac{1}{4} \Big\vert \frac{4}{16}$	$\frac{1}{5} \Big\vert \frac{5}{25}$
restabunt				
$1 =$	$\frac{1}{4} =$	$\frac{1}{9} =$	$\frac{1}{16} =$	$\frac{1}{25} =$
$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.$ etc.	$\frac{1}{6}.\frac{1}{18}.\frac{1}{54}.$ etc.	$\frac{1}{12}.\frac{1}{48}.\frac{1}{192}.$ etc.	$\frac{1}{20}.\frac{1}{100}.\frac{1}{500}.$ etc.	$\frac{1}{30}.\frac{1}{180}.\frac{1}{1080}.$ etc.

Ergo hoc loco differentia $\frac{1}{4}$ inter duo prima $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ seriei praecedentis $\frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{8}$ est summa sequentis: $\frac{1}{6}.\ \frac{1}{18}.\ \frac{1}{54}$ etc. Eodem modo in caeteris.

Ergo: $1 = \frac{1}{4}.\frac{2}{4}.\frac{1}{8}.$ etc. Et $\frac{1}{4} = \frac{1}{9}.\frac{2}{18}.\frac{1}{54}.$ etc. Et $\frac{1}{9} = \frac{1}{16}.\frac{2}{48}.\frac{1}{192}.$ et $\frac{1}{16} = \frac{1}{25}.\frac{2}{100}.\frac{1}{500}.$

Ergo omnia ista infinities infinita $= 1.\frac{1}{4}.\frac{1}{9}.\frac{1}{16}.$ etc. Ergo omnia ista residua infinities infinita demtis scilicet $\frac{1}{4}.\frac{1}{9}.\frac{1}{16}.$ etc. $= 1$. Ergo ista:

$$\left.\begin{array}{cccccc} \frac{2}{4} & \frac{2}{18} & \frac{2}{48} & \frac{2}{100} & \frac{2}{180} & \text{etc.} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{54} & \frac{1}{192} & \frac{1}{500} & \frac{1}{1080} & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right\} = 1.$$

$$\begin{array}{c} \text{Iam} \\ \times \\ \frac{1}{4}.\frac{1}{18}.\frac{1}{48}.\ \text{etc.} \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{25} \quad \text{etc.} \\ \left\{\begin{array}{ccccc} \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & \frac{1}{125} & \text{etc.} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{256} & \frac{1}{625} & \text{etc.} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right. \end{array} \Bigg\} = \text{etiam } 1 = \frac{1}{2}.\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\text{etc.}$$

abiecto: $\frac{1}{4}.\frac{1}{18}.\frac{1}{48}$ etc. semel ut redeat $\frac{1}{4}.\frac{1}{18}.$ etc. pro $\frac{2}{4}.\frac{2}{18}.$ etc. abicietur simul totum signatum $\times$.

13. DE SERIEBUS TRANSVERSALIBUS
[März – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 140–143. 2 Bog. 2°. 3 1/2 S. auf Bl. 140 r°, v° (Teil 1) und Bl. 141 v°, 142 r° (Teil 2). Bl. 141 r°, 142 v°, 143 r°, v° leer.
Cc 2, Nr. 513 A, B

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt.

[*Teil 1*]

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{4} \qquad \frac{4+1}{4} \quad = \quad \frac{5}{4} \quad = \quad \left(1\frac{1}{4}\right) \qquad 4 \text{ ad } 1$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4}\times\frac{1}{9} \qquad \frac{45+4}{36} \quad = \quad \frac{49}{36} \quad = \quad \left(1\frac{13}{36}\right) \qquad 45 \text{ ad } 4$$

$$\frac{1}{9}$$

$$\frac{49}{36}\times\frac{1}{16} \qquad \frac{784+36}{576} \quad = \quad \frac{820}{576} \qquad 784 \text{ ad } 36$$

$$\frac{1}{16}$$

$$\frac{820}{576}\times\frac{1}{25} \qquad \frac{20400+576}{14400} \quad = \quad \frac{20976}{14400} \qquad 20400 \text{ ad } 576$$

$$\frac{1}{25}$$

---

15 $820 \times 25 = 20500$, nicht 20400 (s. die zugehörige Nebenrechnung auf der nächsten Seite). Die dortige Überwärtsdivision 20400 : 576 ist zusätzlich fehlerhaft. Der falsche Wert vererbt sich bis auf S. 156 Z. 4.

$$\frac{5}{4} \ \underline{\times}\ \frac{49}{36} \quad = \quad \frac{45}{36}\ \ \frac{49}{36}$$

$$\frac{49}{36} \ \underline{\times}\ \frac{820}{576} \quad = \quad \frac{784 \quad 820}{576}$$

$$\frac{820}{576} \ \underline{\times}\ \frac{20976}{14400} \quad = \quad \frac{20400 \quad 20976}{144000}$$

154,8–16 *Nebenrechnungen:*

		2	49	36
	2	$\cancel{6}4$	16	16
	$\cancel{3}$	$\cancel{3}\cancel{1}\cancel{7}$	$\overline{294}$	$\overline{214}$
1	$\cancel{1}\cancel{6}8$	$\cancel{5}\cancel{3}\cancel{2}$	49	36
$\cancel{4}\cancel{5}$ ⨍ 11	$\cancel{7}\cancel{8}\cancel{4}$ ⨍ 21	$\cancel{2}\cancel{0}\cancel{4}\cancel{0}0$ ⨍ 345	$\overline{784}$	$\overline{576}$
$\cancel{4}\cancel{4}$	$\cancel{3}\cancel{6}\cancel{6}$	$\cancel{5}\cancel{7}\cancel{6}\cancel{6}$	36	25
	$\cancel{3}$	$\cancel{5}\cancel{7}$	$\overline{820}$	$\overline{2880}$
			25	1152
			$\overline{400}$	$\overline{14400}$
			164	
			$\overline{20400}$	
			576	
			$\overline{20976}$	

In Fortführung von Spalte 1–3: $\frac{4}{1}$ ⨍ 4 $\quad \frac{\cancel{4}\cancel{5}}{\cancel{4}\cancel{4}}$ ⨍ $11\frac{1}{4}$ add. $\frac{3}{4}$ habes 12. $\quad 21\frac{28}{36}$ adde $\frac{8}{36}$ fiet 22. $\quad 345\frac{240}{576}$ adde $\frac{336}{576}$ habes 346.

	42				224	926		
78		36		800	1150	224	
<u>706</u>	<u>784</u>	<u>820</u>	19600	1950	800	576	
	576		17650	19600	20400	20976	

1–5 *Nebenrechnungen:*

45		
16	$\cancel{3}\cancel{2}\cancel{2}$	$\cancel{3}2$
$\overline{256}$	$\cancel{7}\cancel{0}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{0}$ ⨍ 17650	$\cancel{7}\cancel{8}400$ ⨍ 19600
45	$\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}$	$\cancel{4}\cancel{4}$
$\overline{706}$		

				$\cancel{1}8$
19600	20400	20976	800	$\cancel{9}\cancel{1}\cancel{6}$
<u>17650</u>	<u>19600</u>	<u>20400</u>	<u>576</u>	$\cancel{4}\cancel{2}\cancel{2}$ ⨍ 22
1950	800	800	224	$\cancel{4}$

1–5 Die beiden Differenzenschemata sind wegen der falschen Ausgangswerte 706 (statt 720), 17650 (statt 18000), 20400 (statt 20500) fehlerhaft, s. die zugehörige Nebenrechnung.

	$\frac{4}{1}$				
		3			
A	$\frac{1}{1}$				
		$\frac{3}{4}$ F			
B	$\frac{1}{4}$		$\frac{88}{144}$ G		
		$\frac{5}{36}$		. H	
C	$\frac{1}{9}$		$\frac{[468]}{5184}$		. I
		$\frac{7}{144}$		.	
D	$\frac{1}{16}$		$\frac{1504}{57600}$		
		$\frac{9}{400}$			
E	$\frac{1}{25}$				

1–11 *Nebenrechnungen zur Tabelle:*

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{36} \quad \frac{\begin{array}{r}108\\ \underline{20}\\ 88\end{array}}{144} \qquad \frac{5}{36} \times \frac{7}{144} \quad \frac{720-252}{5184}\ [468] \qquad \frac{7}{144} \times \frac{9}{400} \quad \frac{2800-1296}{57600}$$

$$\begin{array}{r}144\\ 9\\ \hline 1296\end{array} \qquad \begin{array}{r}144\\ 400\\ \hline 57600\end{array} \qquad \begin{array}{r}1440\\ 144\\ \hline 1296\end{array} \qquad \begin{array}{r}2800\\ 1296\\ \hline 1504\end{array}$$

7 478 *L ändert Hrsg.* 15 478 *L ändert Hrsg.*

Columna prima descendens, seu terminorum, aequatur omnibus differentiis differentiarum licet infinities infinitis, demta columna prima differentiarum transversali, addita ipsamet columna prima, excepto termino primo. Ergo terminus primus aequalis est toti tabulae, infinities infinitae, exceptis duabus columnis primis descendente et transversali.

Columna 1^{ma} transversalis aequatur eodem modo differentiis aliis omnibus, addita se ipsa, excepto termino primo. Hinc idem corollarium, ut ante.

Hinc facile summa habetur, cuiuslibet columnae transversalis, demta prima. Ut enim $A.$ 1 est summa omnium inclusorum inter $ABCDE.$ et $AFGHI.$ ita $B.$ $\frac{1}{4}$ est summa omnium inter $BCDE.$ et columnam transversalem 2^{dam}. Iam differentia inter priorem summam et posteriorem, est columna 2^{da} transversalis differentiarum, (seu ademto termino inchoante). Ergo aequatur $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Hinc patet differentias primas esse summas columnarum transversalium. Sed idem clarius patet, breviusque, quia ademta quasi columna prima descendente, patet 2^{dam} transversalem continere differentias primae. Ergo summa 2^{dae} aequatur primo termino primae.

Eodem modo etiam primam columnam transversalem differentiarum summabis, si altius possis progressionem repetere. At inquies, in arbitrio est quod velis altius assumere, v.g. $\frac{2}{1}$. vel $\frac{3}{1}$. nil enim refert quae sit progressio quod ergo columna prima transversalis $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{3}$. etc. potest simul aequalis esse $\frac{2}{1}$. et $\frac{3}{1}$. Respondetur, non est arbitrarium, nam nisi terminus debitus assumatur, nova columna transversalis, quae nunc prima fit, non aeque descendit in infinitum, ac prior, quae antea prima erat, cum opus sit illo in infinitum descensu.

1 | Series A.B.C.D.E. = caeteris omnibus. *gestr.* | Columna *L* 2 transversali *(1)* . Columna prima transversalis *(2)* , addita *L* 7–21 Hinc . . . descensu *erg. L* 21 descensu. |Hinc sequitur et columnam aliquam transversalem (demto termino primo) aequalem esse ei, quod inter ipsam, et columnam descendentem, includitur *gestr.*| *L*

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{1}{a} & & & & \\
 & \frac{b-a}{ab} & & & \\
\frac{1}{b} & & b^2c-2abc+ab^2 & & \\
 & \frac{c-b}{bc} & & \begin{array}{c} b^2c-2abc+ab^2 \\ -c^2d+2bcd-bc^2 \end{array} & \\
\frac{1}{c} & & c^2d-2bcd+bc^2 & & \begin{array}{c} b^2c-2abc+ab^2-\llcorner 2c^2d+4bcd \\ -2b^2\lrcorner+d^2e-2cde+cd^2 \end{array} \\
 & \frac{d-c}{cd} & & \begin{array}{c} c^2d-2bcd+bc^2 \\ -d^2e+2cde-cd^2 \end{array} & \\
\frac{1}{d} & & d^2e-2cde+cd^2 & & \\
 & \frac{e-d}{de} & & & \\
\frac{1}{e} & & & &
\end{array}
$$

Sed cum ista sint universalia omni progressioni fractionum, ideo aequatio ad eas determinanda, quarum denominatores sunt quadrati continue.

1–9 *Nebenrechnungen:*
$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ $\quad \frac{b-a}{ab}$ $\quad \frac{b-a}{ab} \times \frac{c-b}{cb}$ $\quad b^2c-abc, -abc+ab^2$
$c-b$ [*Rechnung bricht ab*]

1–9 *Neben der Tabelle:* Secunda quaevis differentia duplicat.

10 omni *(1)* fractioni *(2)* progressioni *L*

1–9 Die vierte Spalte ist nur richtig, wenn man zu den eingetragenen Zählern jeweils die verschiedenen Nenner hinzudenkt. Die fünfte ist wegen der Nichtbeachtung dieser Voraussetzung falsch.

Ita:

$$(a) \qquad \frac{1}{a^2}.$$

$$[(a)-(b)]$$

$$\frac{\cancel{a^2}+2a+1\cancel{-a^2}}{a^2+2a+1(a^4+2a^3+a^2)}$$

$$(b) \qquad \frac{1}{a^2+2a+1}.$$

$$(c) \qquad \frac{1}{a^2+4a+4}.$$

$$(d) \qquad \frac{1}{a^2+6a+9}.$$

$$(e) \qquad \frac{1}{a^2+8a+16}.$$

$$\frac{1}{1+10+25}.$$

2–9 *Nebenrechnung zur Tabelle:*

$$\begin{array}{r} 1+2+1 \\ \underline{1+4+4} \\ 4+8+4 \\ 4+8+4 \\ 1+2+1 \\ \hline \end{array}$$

[*bricht ab*]

3 (b) − (a) *L ändert Hrsg.*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & & & & & & & \\
 & \frac{1}{1} & & & & & \frac{1}{1} & & \\
\frac{3}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & & \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{4}{12} & \left(\frac{1}{3}\right) & & \frac{1}{2} & — & \frac{3}{2} \\
\frac{5}{6} & & \frac{1}{6} & & & & & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{6}{72} & \left(\frac{1}{12}\right) & & \frac{1}{3} & — & \frac{11}{6} \\
\frac{7}{12} & & \frac{1}{12} & & & & & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{8}{240} & \left(\frac{1}{30}\right) & & \frac{1}{4} & — & \frac{45}{20} \\
\frac{9}{20} & & \frac{1}{20} & & & & & & \\
 & \frac{1}{5} & & & & & \frac{1}{5} & — & \frac{245}{100}
\end{array}
$$

4–10 *Nebenrechnungen zur rechten Tabelle:* $\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$ $\quad \frac{10}{5} \times \frac{1}{4}$ $\quad \frac{45}{20} \times \frac{1}{5}$

6 $\frac{1}{3}$ — *(1)* $\frac{10}{5}$ *(2)* $\frac{11}{6}$ *L*

6–10 Leibniz hat die Terme der Spalte ganz rechts nach Durchführung von zwei falschen Nebenrechnungen nur unvollständig verbessert. Die letzten zwei Summen müßten $\frac{50}{24}$ bzw. $\frac{274}{120}$ lauten.

[*Teil 2*]

$$
\begin{array}{rcccccc}
x. & & & & & & \\
 & A & & & & & \\
x-A. & & F & & & & \\
 & B & & L & & & \\
x-A-B. & & G & & O & & \\
 & C & & M & & Q & \\
x-A-B-C. & & H & & P & & \text{etc.} \\
 & D & & N & & \text{etc.} & \\
x-A-B-C-D. & & I & & \text{etc.} & & \\
 & E & & \text{etc.} & & & \\
 & & \text{etc.} & & & & \\
 & F & & & & & \\
 & \text{etc.} & & & & &
\end{array}
$$

$\cancel{x} - A - B + 2B + F = \cancel{x}$. $\cancel{x} = \cancel{x} - A + B.\ G.\ M.\ P.$ etc.
$2A.\ \cancel{B}.\ C.\ D.\ E.$ etc. $= x - \cancel{A}.\ + \cancel{B}.\ G.\ M.\ P.$ etc.
$2A.\ C.\ D.\ E.$ etc. $- G.\ M.\ P. = x.$ Ergo $2A.\ C.\ D.\ E.$ etc. $- F. = x.$

Definitiones: series data continue decrescens in infinitum: series descendens terminorum: $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ etc.

Series directa descendens $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ etc. et ei parallela quaevis.

Fundamentum constructionis. Terminus quilibet duobus immediatis in eadem serie directa positis immediate dexterior, eorum differentia est.

Termini sunt qui sunt in serie data $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ differentiae absolute loquendo, sunt reliqui omnes.

Series transversalis est in quam quantitates ex diversis seriebus descendentibus immediate se attingentibus, assumtae, in eandem rectam in tabula cadentes, coniunguntur. Estque aut descendens aut ascendens.

18 infinitum: *(1)* columna *(2)* series |*(a)* recta *(b)* directa *gestr.*| descendens *L* 19 f. etc. *(1)* Columna *(2)* Series *(a)* recta *(b)* directa *L* 20 f. quaevis. *(1)* Terminus quivis sinisterior inter duos interpositus est differentia ut F inter A et B. *(2)* Terminus quivis *(3)* Fundamentum *L* 22 eadem *(1)* columna descendente *(2)* serie *L* 23 differentiae *(1)* . Ergo sunt reliqui omnes *(2)* absolute *L*

S e r i e s   t r a n s v e r s a l i s   d e s c e n d e n s est cum ex omnibus seriebus descendentibus, iidem ordine termini coniunguntur, ut omnes primi (secundi), tam ex prima serie, quam ex secunda et tertia, etc.

S e r i e s   t r a n s v e r s a l i s   a s c e n d e n s est, cum determinato certo numero serierum descendentium, sumitur primus ultimae, et secundus penultimae, et tertius antepenultimae etc. Hinc sequitur seriem omnem transversalem [ascendentem] esse finitam. Cum caeterae omnes possint esse [infinitae], et series terminorum, item differentiarum primarum, etiam esse debeat.

D i f f e r e n t i a e   p r i m a e sunt quantitates secundae seriei descendentis. Differentiae s e c u n d a e sunt seriei tertiae et ita porro.

In tabula proposita si sumantur duae quantitates immediatae AF in eadem linea transversali descendente, sitque alia quantitas B quae sit in eadem serie transversali ascendente cum una F, in eadem serie directa, cum altera A, ista est differentia illarum. $A - F = B$. Quia per fundamentum constructionis $A - B = F$.

C o r o l l a r. Hinc si ista B iungatur illarum posteriori: F fiet priori A. Nam $B + F = A$. Hinc sequitur etiam series transversales esse continue decrescentes, etsi non semper in infinitum.

Series directa posterior, item transversalis descendens posterior, continet differentias immediate praecedentis. In tabula proposita quaelibet quantitas aequalis est integrae seriei directae infinitae proxime dexteriori, incipiendo eam a quantitate, quae sit in eadem linea transversali descendente, cum data, posita, ut $A = F.\ G.\ H.\ I.$ etc. $G = M.\ N.$ etc.

Hinc innumera duci possunt corollaria, ut: $A = L.\ M.\ N.$ etc. $+\ G.\ H.\ I.$ etc. vel $A = G.\ H.\ I.$ etc. $+\ M.\ N.$ etc. $+\ O.\ P.$ etc. (vel loco $O.\ P.$ dicendo $+\ P$ etc. $+\ Q.$ etc.)

11–14 *Darüber und am Rande:* Omnes transversales descendentes possunt mutato tantum scribendi modo haberi pro directis, et vicissim, quando scilicet decrescunt in infinitum.

6 ascendentem *erg. Hrsg.* 7 finitae *L ändert Hrsg.* 9 quantitates *(1)* primae columnae *(2)* secundae *L* 11–22 In tabula ... = M. N. etc *erg. L* 20 seriei *(1)* descendenti proximae *(2)* directae *L*

In eadem tabula quaelibet quantitas aequalis est integrae seriei transversali descendenti proxime inferiori, incipiendo eam a quantitate quae sit in eadem linea directa, cum data, posita.

Hinc similia plane ut ex praecedenti corollaria duci possunt. Possumus enim cogitare transversales descendentes, transformari in directas, et contra.

Series quaelibet directa (transversalis descendens) aequatur tabulae integrae sequenti, utcunque continuatae in infinitum, seu quantitatibus infinities infinitis constanti; si modo a tabula auferri intelligatur series transversalis (directa) descendens in quam incidit terminus maximus seriei datae relicto tamen seu non ablato ipso termino maximo. Quia enim $A = B.\ G.\ M.\ P.$ etc. et $B = C.\ H.\ N.$ etc. et $C = D.\ I.$ etc. et $D = E.$ etc. Ergo $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ etc.. = toti tabulae demtis [$A.\ F.\ L.\ 0.$] etc. (Eodem modo, quia $A = F.\ G.\ H.\ I.$ etc. et $F = L.\ M.\ N.$ etc. et $L = O.\ P.$ etc. et $O = Q.$ etc. Ergo $A.\ F.\ L.\ O.\ Q.$ = toti tabulae demtis: [$A.\ B.\ C.\ D.$] etc. Ergo quantitas quaelibet in tabula aequatur quantitatibus infinities infinitis inter seriem directam et transversalem descendentem, in ipsa quantitate data concurrentes, comprehensis. Quia enim $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ etc. $= B.\ G.\ M.\ P.$ etc. $+\ C.\ H.\ N.$ etc. $+\ D.\ I.$ etc. $+\ E.$ etc. ergo auferendo quod utribusque commune est: $B.\ C.\ D.\ E.$ etc. fiet $A = G.\ M.\ P.$ etc. $+\ H.\ N.$ etc. $+\ I.$ etc. etc. ita et $B = H.\ N.$ etc. $I.$ etc. etc.

Series transversalis ascendens data est aequalis seriei transversali ascendenti, proxime antecedenti, aut si nulla antecedit, termino primo, modo termini datae seriei, intermedii, si qui sunt duplicati, intelligantur, ita $B.\ F. = A.$ et $C.\ 2G.\ L. = B.\ F.$ et

---

6–8 *Am Rande:* Series directa et transversalis descendens possunt dici crura, illa r e c t u m , haec i n c l i n a t u m . Series transversa ascendens potest dici b a s i s .

Späterer Zusatz weiter oben: In serie harmonica ab initio suo sumta duo crura extrema aequantur.

9 relicto ... maximo *erg. L* 11 B. C. D. E. *L ändert Hrsg.* 13 F. L. O. Q. *L ändert Hrsg.* 18 f. etc. | Ergo quaelibet columna directa *gestr.* | Series *L*

---

9 relicto ... maximo: Im Gegensatz zu Leibniz’ Behauptung muß auch der höchste Term abgezogen werden.

$D.\ 2H.\ 2M.\ O. = C.\ G.\ L.$ Hinc praeclara corollaria ducuntur: Ut: $D.\ 4H.\ 4M.\ O. = B.\ F. = A.$ ita $E.\ 4I.\ 4N.\ 4P.\ Q. = C.\ G.\ L.$ et: $E.\ 8I.\ 8N.\ 8P.\ Q. = B.\ F. = A.$

Regula ergo generalis surget eiusmodi[:] Series transversalis ascendens posterior, aequatur cuilibet priori, si termini seriei posterioris intermedii toties duplicentur, quoties seriem posteriorem aliae series, terminos intermedios habentes, praecedunt, quae non sunt ante priorem. Hinc primus tabulae, aut quantitas seriem directam et transversalem descendentem, connectens (quae semper pro capite assumi potest) aequatur seriei transversali ascendenti seriebus connexis inclusae, terminis intermediis toties duplicatis, quot sunt aliae series transv. ascendentes seu bases.

Hinc basis quaelibet aequatur contento crurum in infinitum licet quantum fieri potest productorum (ipsis scilicet cruribus non computatis) si mediae eius quantitates toties duplicentur, quot sunt bases ante propositam, seu inter apicem et propositam.

Ita $D.\ 4H.\ 4M.\ O. = G.\ M.\ P.$ etc. H. N. etc. I. etc. e t c.

Si duae sint series in tabula data, altera directa, altera transversa descendens, habeantque terminum secundum communem, eae duae series sunt inter se aequales, ut $G.\ H.\ I.$ etc. $= C.\ H.\ N.$ etc. Utrumque enim $= B.$ per iam demonstrata. Ergo $=^{\text{lia}}$ inter se. Ergo et residua aequalia sunt, demto termino communi H.

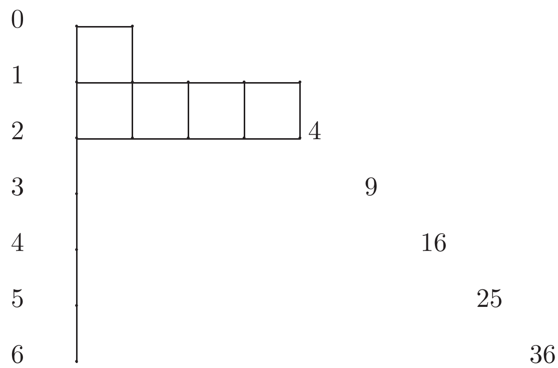
8 inclusae, | terminis ... duplicatis *erg. L* | toties duplicatis *streicht Hrsg.* | quot *L* 10 f. crurum | in infinitum licet *erg., gestr. u. wieder gültig gemacht* | quantum ... productorum *erg* | (ipsis *L* 14 | Assignata quadam quantitate series directa proxime dexterior, cuius terminus *gestr.* | Si *L*

1–13 Die richtigen Beziehungen zwischen den nicht aufeinanderfolgenden Transversalreihen lauten $D.\ 3H.\ 3M.\ O = B.\ F = A$, $E.\ 3J.\ 4N.\ 3P.\ Q = C.\ G.\ L$, $E.\ 4J.\ 6N.\ 4P.\ Q = B.\ F = A$, $D.\ 3H.\ 3M.\ O = G.\ M.\ P$. Die allgemeine Regel auf Z. 3–12 ist deshalb falsch. Wird der 1. Term mittels der n-ten Transversalreihe ausgedrückt, sind dort die n-ten Binominalkoeffizienten zu nehmen.

14. DE PROGRESSIONIS HARMONICAE DIFFERENTIIS
[März – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 138–139, 1 Bog. 2°. 3 S. Bl. 139 r° leer. Textfolge: 139 v°, 138 r°, 138 v°.
Cc 2, Nr. 512

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt.



[*Fig. 1*]

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

1	1	1		
			2	
5	4	3		0
			2	
14	9	5		0
			2	
30	16	7		0
			2	
55	25	9		0
			2	
91	36	11		

					0		0		0		0				
		1		2		2		2		2		2			
	1		1		3		5		7		9		11		
	0			1		4		9		16		25		36	
0			0		1		5		14		30		55		91

Nota cum hoc loco reducantur differentiae 2^di^ gradus ad ascendentes 0.1. ad simplex 1. Hinc ex multiplicatione ipsius 1. per □^ta^ forte numerorum figuratorum, invenietur summa quadratorum. Sed hac methodo novum quidem theorema fortasse discemus, sed nihil lucrabimur. Imo fortasse res facilior. Nam $\underbrace{0.\ 1.\ 2}$ componuntur ex 0. 1. et ex his: 0. 1. 2. componuntur 0. 0. 1. 5. 14. Ergo pro 1. suppone $\underbrace{0+1}$. pro 2. suppone $\underbrace{0+2}$. Ergo ut habeamus 1. 5. 14. etc.

	0	0	1	2	0	0	0
	1	.	)	)	.	.	.
	1	1			.	.	.
1	1	2	1	0	.	.	.
5	1	3	3	1	.	.	.
14	1	4	6	4	1	.	.
30	1	5	10	10	5	1	.
55	1	6	15	20	15	6	1

13–20 *Daneben, in Spaltenform:* 36 25 16 9 4 1

13–20 *Daneben:*

. ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 8
. . . . ○ ○ ○ ○ ○ 5
. . . . 0

12 etc. | *(1)* 1. fiet ex $0+2 \frown 0. + 1$ *(2)* 1. fiet ex $1 \frown 0 + 2 \frown 0 + 1 \frown 1(1 \frown 0 + 1 \frown 1)$ 5. fiet ex $1 \frown 0 + 3 \frown 0 + 3 \frown 1(1 \frown 0 + 1 \frown 1) + 1 \frown 2(1 \frown 0 + 2 \frown 1 + 0)$ *gestr.* | *L*

1–10 Die Summe der Quadrate ergibt sich aus der Tabelle, wenn man die von Leibniz in *LSB* III, 1 N. 4 (13. Februar 1673), S. 26 entwickelte Berechnungsmethode anwendet.

$\frac{1}{1}$	2	6	12	20
$\frac{1}{2}$	1	3	6	10
$\frac{1}{3}$		2	4	[$\frac{20}{3}$]
$\frac{1}{4}$			3	
$\frac{1}{5}$				4
$\frac{1}{6}$				

1	$\frac{2}{2}$	$\frac{6}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$		
$\frac{1}{6}$		

169,1–10 *Neben der Tabelle:*

. .	. . . . . .	. . . .
.	. . . ○ ○ ○	. . . . ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
	. . ○ ○ ○ ○	. . . . ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
		. . . . . . ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

3 12 *L ändert Hrsg.*

			25		154					
		6		31		185				
	2		8		39		224			
$\frac{1}{1}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{11}{6}$		$\frac{50}{24}$		$\frac{274}{120}$		$\frac{1764}{720}$
1	...	2(0)	...	6	...	24	...	120	...	720
$\frac{1}{2}$	...	1(1)	...	3	...	12	...	60	...	360
$\frac{1}{3}$	...	$\frac{2}{3}$	...	2	...	8	...	40	...	240
$\frac{1}{4}$	...	$\frac{2}{4}$	...	$\frac{6}{4}$	...	6	...	30	...	180
$\frac{1}{5}$	...	$\frac{2}{5}$	...	$\frac{6}{5}$	...	$\frac{24}{5}$	...	24	...	144
$\frac{1}{6}$	...	$\frac{2}{6}$	...	$\frac{6}{6}$	...	$\frac{24}{6}$	...	$\frac{120}{6}$	...	120

				24				
			30		6			
		40		10		4		
	60		20		10		6	
120		60		40		30		24

1–4 *Obere Tabellenhälfte erg. L* 5 720 | |1 *gestr.*| $\frown$ 2 $\frown$ 3 $\frown$ 4 $\frown$ 5 $\frown$ 6 *gestr.* | *L* 5–10 *Neben der letzten Spalte ganz rechts (um 90° gedreht) von L gestr. Tabelle*:

				36			
			48		12		
		60		24		12	
360	120		60		36		24

6 360 | |2 *gestr.*| $\frown$ 3 $\frown$ 4 $\frown$ 5 $\frown$ 6 *gestr.* | *L* 7 240 | |1 *gestr.*| $\frown$ 2 $\frown$ 4 $\frown$ 5 $\frown$ 6 *gestr.*| *L*

1–15 Leibniz hat beide Tabellen ineinander geschrieben, die zweite auf der Basis der harmonischen Folge 120, 60, 40 ... in der 5. Spalte der ersten. Aus drucktechnischen Gründen werden sie hier getrennt wiedergegeben, die zweite Tabelle um 90° gedreht.

Regula memorabilis. In omni progressione harmonica integra seu ab initio sumta si a summo inchoes differentiae generatrices coincidunt numeris ipsius progressionis datae. Et si ab imo differentiarum generatricium series ita comparata est, ut prima ultimae, et penultima peneprimae aequetur, idque fit et in omnibus differentiarum generatricium seriebus ad illam parallelis, 24. 6. 4. 6. 24. 30. 10. 10. 30. Hoc ergo et in fractionibus verum est.

				NB.			NB.	
1	2	6	24	120	720			
	1 (1)	3 (3)	12 (12)	60 (60)	360 (360)	240	(60)	36
		2 (4)	8 (16)	40 (80)	240 (480)	120 (120)	40 (80)	16 (20)
			6 (18)	30 (90)	180 (540)	60 (180)	30 (90)	6 (30)
				24 (96)	144 (576)	30 (210)	(96)	
					120 (600)			

Hinc differentia inter duo extrema supplementa, ut 60. 96. et duos extremos terminos maximo non computato, seu minimum et penemaximum, 24. 60. esse aequales hoc loco 36.

Idem per consequens procedit in infinitum in supplementis supplementorum ut non sit opus inquirere in differentias differentiarum supplementorum.

Similis contra regula condi potest de supplementis differentiarum. Summae. Differentiae. Supplementa. Rationes.

---

7 NB. Differentiae supplementorum congruunt differentiis terminorum dictis ut

60	80	90	96	demta maxima.
20	10	6		

1 integra ... sumta *erg. L* 7–13 *Tabelle erg. L*

1	720	5040		
$\frac{1}{2}$	360	2520 (2520)	1820	
$\frac{1}{3}$	240	[1680 (3360)	980 (840)	840]
$\frac{1}{4}$	180	1260 (3780)	560 (1260)	420 [420]
$\frac{1}{5}$	144	1008 (4032)	308 (1512)	168 [672]
$\frac{1}{6}$	120	840 (4200)	140 (1680)	
$\frac{1}{7}$		720[(4320)]		
$\frac{1}{8}$				

3 1880 (3160) 1180 (640) 1040 *L ändert Hrsg.* 4 620 *L ändert Hrsg.* 5 872 *L ändert Hrsg.* 7 (4340) *L ändert Hrsg.* 8 $\frac{1}{8}$ | *Folgende Tabelle, gestr.* | *L*

5040						
	2520					
2520		1880				
	640		.			
1880		20		.		
	620		.		.	
1260		368		.		.
	252		.		.	
1008		84		.		
	168		36			
840		48				
	120					
720						

1	1		$\frac{3}{2}$		$\frac{11}{6}$		$\frac{50}{24}$		$\frac{274}{120}$	$\left(\frac{1764}{720}\right)$
		1								
2	$\frac{2}{2}$		$\frac{3}{2}$							$\frac{5}{2}$
		3		2						
3	$\frac{6}{6}$		$\frac{9}{6}$		$\frac{11}{6}$					$\frac{26}{6}$
		12		8		6				
4	$\frac{24}{24}$		$\frac{36}{24}$		$\frac{44}{24}$		$\frac{50}{24}$			$\frac{154}{24}$
		60		40		30		24		
5	$\frac{120}{120}$		$\frac{180}{120}$		$\frac{220}{120}$		$\frac{250}{120}$		$\frac{274}{120}$	$\frac{1044}{120}$

$$\begin{array}{ccccc} & A-B & & B-C & \\ A & & B & & C \end{array} \qquad \frac{A-B}{B-C}=\frac{A}{C}$$

Ergo $AC-BC=BA-CA$. Ergo $2AC-BC=BA$. Ergo $2AC=BA+BC$.

Ergo $\frac{2AC}{B}=A+C$. Ergo $\frac{2AC+B^2}{B}=A+B+C$. $\frac{2BD+C^2}{C}=B+C+D$.

$$\frac{2AC+B^2}{B}+\frac{2BD+C^2}{C}=A+2B+2C+D.$$

Ergo: $\frac{2AC}{B}+\frac{2BD}{C}=A+B+C+D$. Iam $\frac{2CE+\cancel{D^2}}{D}=C\cancel{+D}+E$.

Ergo[:] $\frac{2AC}{B}+\frac{2BD}{C}+\frac{2CE}{D}=A+B+2C+D+E$.

$$\frac{2AC^2D+2B^2D^2+2CEBC}{BCD}=A+B+2C+D+E.$$

1–9 *Zur letzten Spalte, auf der Gegenseite:*

0.	1.		5.		26.		154.
		4.		21.		128.	

$\frac{F}{G}\quad \frac{F}{G+H}\quad \frac{F}{G+2H}\quad \frac{F}{G+3H}$. Differentiae: $\frac{\cancel{FG}+FH-\cancel{FG}}{G^2+GH}$ et $\frac{2FH}{G^2+3GH+2H^2}$.

Eorum ratio[:] $\frac{G^2+3GH+2H^2}{2G^2+GH} = \frac{FG+2FH}{FG}$.

Ergo $\cancel{G^3F}+3G^2HF+\cancel{2H^2FG} = \cancel{2}FG^3+4FHG^2+FG^2H+\cancel{2FH^2G}$.

$$\frac{F}{G}\times\frac{F}{G+H}\quad \frac{F}{G+2H}\quad \frac{F}{G+3H}.$$

$$\frac{2\cancel{F}G+\cancel{F}H}{G^2+GH}\times\frac{\cancel{F}\,1}{G+2H}\qquad \frac{2G^2+5GH+2H^2}{G^3+2G^2H+G^2H+2GH^2}$$ [*Rechnung bricht ab*]

$$\frac{1}{G}\quad \frac{1}{G+H}\quad \frac{1}{G+2H}\quad \frac{1}{G+3H}\quad \frac{1}{G+4H}.$$

$$\frac{1}{G}\overset{+}{\underset{-}{\times}}\frac{1}{G+H}=\frac{2G+H}{G^2+GH}\overset{+}{\underset{-}{\times}}\frac{1}{G+2H}=\frac{3G^2+6GH+2H^2}{G^3+3G^2H+2GH^2}\overset{+}{\underset{-}{\times}}\frac{1}{G+4H}$$

$$\|$$

$$\frac{3G^3+\overset{10}{\cancel{6}}G^2H+\overset{26}{\cancel{2}}H^2G+8H^3}{G^4+\underset{7}{\cancel{3}}G^3H+2G^2H^2+8GH^3}$$

$$\|$$

---

1 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{lll} G+ & H & \\ G+ & 2H & \\ \hline G^2 & 3GH & 2H^2 \end{array}$$

3 *Darunter:* Error calculi

1 Differentiae: *erg. L* 2 Eorum ratio *erg. L* 6 *Unter* $\frac{1}{\mathrm{G}}$ *spaltenförmig* $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}$ *gestr. L*

1–3 Differentiae: Im Zähler der zweiten Differenz müßte der Faktor 2 gestrichen werden; dieses Versehen und ein weiterer Koeffizientenfehler in der folgenden Zeile führen in Z. 3 zu einem Widerspruch, den Leibniz erkennt und mit „Error calculi“ markiert. 4–174,3 In Z. 5 setzt Leibniz $F = 1$, bricht dann die unvollständige Rechnung ab und führt sie in Z. 6 f. neu durch. In Z. 9 vernachlässigt er einige Terme und rechnet konsequent weiter.

$$\frac{3G^2 + 10GH + 26H^2 + 8\dfrac{H^3}{G}}{G^3 + 7G^2H + 2GH^2 + 8H^3}$$
$$\|$$
$$\frac{3\dfrac{G^2}{H} + 10G + 26H + 8\dfrac{H^2}{G}}{\dfrac{G^3}{H} + 7G^2 + 2GH + 8H^2}$$

15. DE SUMMA QUADRATORUM IN FRACTIONIBUS
[März – Mai 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 208–209. 1 Bog. 2°. 4 S., teilweise zweispaltig. — Teil 2 und mehrere Zusätze mit anderer Feder und Tinte geschrieben. Cc 2, Nr. 280

Datierungsgründe: Im vorliegenden Stück kennt Leibniz die Summe der reziproken Triangularzahlen bereits und berechnet die Summe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$; diese Reihe erscheint am Beginn von N. 16 zusammen mit den Reihen der reziproken Quadrat- und Triangularzahlen, was ohne Kenntnis der Summe kaum erklärlich erscheint. N. 15 dürfte also kurz vor dem etwa April – Mai 1673 verfaßten N. 16 entstanden sein.

[*Teil 1*]

progress. naturalium	differentiae	dupl. diff.
$\frac{1}{1}$		
	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$		
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$		
	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{5}$		
	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{6}$		
	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{7}$		

Quae duplae differentiarum fractionum ex unitatibus per numeros naturales divisis, coincidunt cum progressione fractionum ex unitatibus per numeros triangulares divisis.

$$
\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
 & \frac{2}{3} & 1 & \\
\frac{1}{3} & & & \\
 & \frac{3}{18} & \frac{9}{36} & \Big| \ \frac{1}{4} \\
\frac{1}{6} & & & \\
 & \frac{4}{60} & \frac{12}{120} & \Big| \ \frac{1}{10} \\
\frac{1}{10} & & & \\
 & \frac{5}{150} & \frac{15}{300} & \Big| \ \frac{1}{20} \\
\frac{1}{15} & & & \\
 & \frac{6}{315} & \frac{18}{630} & \Big| \ \frac{1}{35} \\
\frac{1}{21} & & & \\
\text{progress.} & \text{differentiae} & &
\end{array}
$$

Si differentiae progressionis fractionum triangularis, dividantur per primam productum erit progressio fractionum pyramidalium.

Differentia ista invertatur, habebimus summam, ut $\frac{2}{1}$ est summa progressionum fractionum triangularium. $\frac{3}{2}$ est summa pyramidalium. Potest et regula sic enuntiari.

Si summam datae seriei fractionum numeratores unitates, sed nominatores, seriem ordinum numericorum habentium, quaeris, sume primum numerum (post unitatem) ordinis numerici proxime antecedentis, et hunc divide per suam differentiam ab unitate,

16 f. pyramidalium. *(1)* Hinc summa *(2)* Differentia *L* 19 sed *erg.* *L* 20 unitatem) *(1)* fractionis seriei numeric *(2)* ordinis *L*

21 hunc: Nicht der Term nach der unitas, sondern diese selbst ist durch die Differenz zu dividieren.

productum erit summa progressionis fractionum datae. Hi ergo numeri $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5}$ etc. sunt summae serierum fractionum ordinum numericorum.

		1			1
$\frac{1}{1}$	......	1	$\frac{2}{1}$	......	2
2	....	2	3	....	3
$\frac{1}{2}$	......	1	$\frac{3}{3}$	......	3
3	....	3	6	....	6
$\frac{1}{3}$	......	1	$\frac{4}{6}$	......	4
4	....	4	10	....	10
$\frac{1}{4}$	......	1	$\frac{5}{10}$	......	5
5	....	5	15	....	15
$\frac{1}{5}$	......	1			
6	....	6			

Quaerenda est ratio summam ineundi quadratorum et cuborum etc. in fractionibus.

1								
	$\frac{3}{4}$	2		$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{4}$			4			7		
	$\frac{5}{36}$	6		$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{9}$		8	
$\frac{1}{9}$			6			15		3
	$\frac{7}{144}$	12		$\frac{6}{144}$	$\frac{1}{24}$		11	
$\frac{1}{16}$			8			26		3
	$\frac{9}{400}$	20		$\frac{8}{400}$	$\frac{1}{50}$		14	
$\frac{1}{25}$			10			40		3
	$\frac{11}{900}$	30		$\frac{10}{900}$	$\frac{1}{90}$		17	
$\frac{1}{36}$			12			57		
	$\frac{13}{1764}$	42		$\frac{12}{1764}$	$\frac{1}{147}$			
$\frac{1}{49}$								

3 *Unter* 2, *später geschrieben:* $\frac{7}{36}$.

5 *Unter* 6, *später geschrieben:* $\frac{38}{144}$.

$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$	1				
			5			$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$		7		
			12		3	$\frac{12}{108}$
$\frac{1}{144}$	$\frac{8}{144}$	$\frac{1}{18}$		10		
			22		3	$\frac{22}{720}$
$\frac{1}{400}$	$\frac{10}{400}$	$\frac{1}{40}$		13		
			35		3	$\frac{35}{3000}$
	$\frac{12}{900}$	$\frac{1}{75}$		16		
			51			
	$\frac{14}{1764}$	$\frac{1}{126}$				

1–7 *Zur ersten Spalte in anderer Tinte, in der oberen Hälfte der Seite:*

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{[36]}$
$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{2}{144}$
$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	0	$\frac{3}{400}$
$\frac{1}{900}$	$\frac{1}{225}$	$\frac{1}{180}$		

1–7 *Erste Spalte erg. L* 14 18 *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & & \\[6pt]
\frac{1}{4} & \frown & \frac{3}{1} & = & \frac{3}{4} & & & \frac{1}{4} & \frown & \frac{5}{4} & = & \frac{5}{16} \\[6pt]
\frac{1}{9} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{36} & & & \frac{1}{9} & & \frac{7}{9} & & \frac{7}{81} \\[6pt]
\frac{1}{16} & & \frac{7}{9} & & \frac{7}{144} & & & \frac{1}{16} & & \frac{9}{16} & & \frac{9}{256} \\[6pt]
\frac{1}{25} & & \frac{9}{16} & & \frac{9}{400} & & & \frac{1}{25} & & \frac{11}{25} & & \frac{11}{625}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & & & & \frac{1}{2} & & \\
& \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & & & \frac{2}{8} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{3} & & & & \frac{1}{4} & & \\
& \frac{2}{15} & \frac{1}{16} & & & \frac{2}{24} & \frac{1}{25} \\
\frac{1}{5} & & & & \frac{1}{6} & & \\
& \frac{2}{35} & \frac{1}{36} & & & \frac{2}{48} & \frac{1}{49} \\
\frac{1}{7} & & & & \frac{1}{8} & & \\
& \frac{2}{63} & \frac{1}{64} & & & \frac{2}{80} & \frac{1}{81} \\
\frac{1}{9} & & & & \frac{1}{10} & &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{12} & \smile 12 & \frac{1}{1} \\[6pt]
\frac{1}{8} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{72} & & \frac{1}{6} \\[6pt]
\frac{1}{15} & & \frac{1}{16} & & \frac{1}{240} & & \frac{1}{20} \\[6pt]
\frac{1}{24} & & \frac{1}{25} & & \frac{1}{600} & & \frac{1}{50} \\[6pt]
\frac{1}{35} & & \frac{1}{36} & & \frac{1}{1260} & & \frac{1}{105} \\[6pt]
\frac{1}{48} & & \frac{1}{49} & & \frac{1}{2352} & & \frac{1}{196} \\[6pt]
\| & & & & & & \\[6pt]
\frac{3}{4} & & & & & &
\end{array}
$$

1–8 *Späterer Zusatz:*

$$
\begin{array}{cccccc}
6 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \Big| \; \frac{1}{4\frac{1}{2}} \\[4pt]
 & 10 & & & & \\[4pt]
16 & & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \Big| \; \frac{2}{32} \\[4pt]
 & 14 & & & & \\[4pt]
30 & & \frac{1}{15} & \frac{1}{25} & \frac{2}{75} & \Big| \; \frac{1}{37\frac{1}{2}} \\[4pt]
 & 18 & & & & \\[4pt]
48 & & \frac{1}{24} & \frac{1}{36} & \frac{1}{72} & \Big| \; \frac{2}{144}
\end{array}
$$

Dazu auf der oberen Blatthälfte, gestrichen:

$$\frac{2}{9} \times \frac{1}{16} \quad \frac{32}{9} \qquad \frac{1}{32} \times \frac{1}{75} \quad \frac{75}{32} \qquad \frac{32}{9} \times \frac{75}{32} \quad \frac{1024}{675}$$

1–6 $\smile$ 12 *und letzte Spalte erg. L*

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{3}{4} & & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
\| & & & & & \| & & \| & \| \\
\frac{1}{3} & & & \frac{1}{3} & \diagdown & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{12} & & & \\
 & \frac{5}{24} & & \frac{1}{4} & & & = & \frac{5}{24} & \\
 & & & & \times & \frac{4}{32} & & & \\
\frac{1}{8} & & & \frac{1}{8} & & & \Bigg) & = & \frac{5}{36} \\
 & & & & \diagdown & \frac{1}{72} & & & \\
 & \frac{7}{120} & & \frac{1}{9} & & & = & \frac{7}{120} & \\
 & & & & \times & \frac{6}{135} & & & \\
\frac{1}{15} & & & \frac{1}{15} & & & \Bigg) & = & \frac{7}{144} \\
 & & & & \diagdown & \frac{1}{240} & & & \\
 & \frac{9}{360} & & \frac{1}{16} & & & = & \frac{9}{360} & \\
 & & & & \times & \frac{8}{384} & & & \\
\frac{1}{24} & & & \frac{1}{24} & & & \Bigg) & = & \frac{9}{400} \\
 & & & & \diagdown & \frac{1}{600} & & & \\
 & \frac{11}{840} & & \frac{1}{25} & & & & & \\
\frac{1}{35} & & & & & & & &
\end{array}
$$

1–18 Im zweiten Schema stehen $\diagdown$, $\times$ für die Operatoren $-$, $+$.

$$\frac{3}{4} \; - \; , \frac{1}{12} \;\; \frac{1}{72} \;\; \frac{1}{240} \text{ etc.} = \frac{1}{4} \;\; \frac{1}{9} \;\; \frac{1}{16} \text{ etc.}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{4}{32} \;\; \frac{6}{135} \;\; \frac{8}{384} \text{ etc.} = \frac{1}{4} \;\; \frac{1}{9} \;\; \frac{1}{16} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{3} + \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{1}{12} \;\; \frac{1}{72} \;\; \frac{1}{240} = \cancel{\frac{3}{4}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{4}{32} \;\; \frac{6}{135} \;\; \frac{8}{384}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \;\; \frac{1}{72} \;\; \frac{1}{240}, \;\Big|\; \frac{4}{32} \;\; \frac{6}{135} \;\; \frac{8}{384}$$

$$0 \; - \; \frac{1}{12} \;\; \frac{1}{72} \;\; \frac{1}{240} \;\; = \;\; \frac{4}{32} \;\; \frac{6}{135} \;\; \frac{8}{384} \;\; - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \;\; \frac{1}{9} \;\; \frac{1}{16} \text{ etc.} + \frac{1}{12} \;\; \frac{1}{72} \;\; \frac{1}{240} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{NB.} & \frac{1}{12} & \frac{1}{72} & \frac{1}{240} & \\ & \frac{2}{12} & \frac{7}{72} & \frac{14}{240} & \text{etc.} = \frac{3}{4} \\ & \frac{1}{6} & & & \end{array}$$

[*Teil 2*]

Wallis procedit nescio qua methodo inductionis, in sua *Arithmetica infinitorum.*

$$\begin{array}{llllll} & \frac{5}{4} & \frac{49}{36} & \frac{[820]}{576} & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{49} \end{array}$$

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{4} \quad \frac{4}{4} \;\; \frac{1}{4} \;\Big|\; \frac{5}{4} \qquad \frac{5}{4} \times \frac{1}{9} \qquad \frac{45}{36} \;\; \frac{4}{36} \;\Big|\; \frac{49}{36} \qquad \frac{49}{36} \times \frac{1}{16} \;\; \frac{784 + [36]}{36 \frown 16} \;\Big|\; \frac{[820]}{576}$$

7–9 NB. ... $\frac{1}{6}$ *erg. L* 12 785 *L ändert Hrsg.* 14–184,1 $\frac{1}{16}$ $\Big|\frac{784+1}{36 \frown 16}\Big|\frac{785}{576}$. *ändert Hrsg.* | *(1)* Summa prima est $\frac{\text{quadr.}(1) \frown \text{quadr.}(2) + 1}{\text{quadr.}(2) \frown \text{quadr.}(3)}$. Summa secunda est $\frac{\text{quadr.}(1) \frown \text{quadr.}(2) + 1.,, \frown \text{quadr.}(3),, +1.,, \frown \text{quadr.}(4),,, +1.}{\text{quadr.}(2) \frown \text{quadr.}(3) \frown \text{quadr.}(4) \frown}$. hoc sic continuans habebis summam 3tiam *(2)* Summa *L*

11 *Arithmetica infinitorum.*: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I, S. 355–478).

Summa prima $\quad \frac{1}{1} \underline{\times} \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \qquad \frac{1 \frown \text{quad}(1) + 1 \frown \text{quad}(2)}{\text{quad}(1) \frown \text{quad}(2)} \qquad \frac{5}{4}$

Summa 2^{da} $\quad \frac{5}{4} \underline{\times} \frac{1}{9} \qquad \frac{45+4}{36} = \frac{49}{36}$

$$\left.\frac{\text{quad}(1) + \text{quad}(2),, \frown \text{quad}(3),, +\text{quad}(1) \frown \text{quad}(2),,, \frown \text{quad}(4),,, +\text{quad}(1)\text{quad}(2)\text{quad}(3)}{\text{quad}(1) \frown \text{quad}(2) \frown \text{quad}(3) \frown \text{quad}(4)}\right|$$

$$\frac{,,,, \frown \text{quad}(5),,,, +\text{quad}(1) \frown (2) \frown (3) \frown (4)}{\frown \text{quad}(5)}$$

$$\frac{\text{quad}(1) \frown (3) \frown (4) \frown (5) \text{ etc.} + \text{quad}(2) \frown (3) \frown (4) \frown (5) \text{ etc. quad}(1) \frown (2),, \frown (4) \frown (5) \text{ etc.} +}{\text{quad } 1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \text{ etc.}}$$

$$\frac{\text{quad}(1) \frown (2) \frown (3),, \frown (5) \text{ etc.}}{} \text{ etc.}$$

seu: $\frac{2 \frown 3 \frown 4 \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \text{ etc.}} + \frac{1 \frown 3 \frown 4 \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \text{ etc.}} + \frac{1 \frown 2 \frown 4 \frown 5}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5}$ etc. $=$ $\frac{1}{(1)} \ \frac{1}{(2)} \ \frac{1}{(3)} \ \frac{1}{(4)}$ etc.

seu: $\left.\frac{1 \frown 3 \frown 4 \frown \ \text{etc. infinities} - 1.[+1] + 2. + 3. + 4. + 5. \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \text{ etc.}}\right| =$ infinitum$\frac{-1.[+1.] + 2. + 3.}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4}$ etc.

Noto autem numero incluso, numerum non unitatum, sed terminorum seu numeratorum. Et idem est quandocunque numeratores sunt semper unitates, quicunque sint fractionum nominatores.

9 f. $+1$ *erg. Hrsg. zweimal*

---

9 f. Leibniz klammert gewissermaßen aus allen unendlich vielen Summanden das Produkt 1.3.4. etc. aus. Im ersten Summanden tritt dieser Summand zweimal, also einmal zuviel auf, im zweiten genau einmal, im dritten zweimal statt dreimal (d. h. einmal zu wenig), im n-ten ($n \geq 3$) zweimal statt n-mal, d. h. $(n-2)$-mal zu wenig, auf.

[*Teil 3*]

1				$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{3}$			
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$		$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{4}$			12	$\frac{1}{5}$			$\frac{1}{6}$			12
	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$			$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{20}$		$\frac{3}{54}$	$\frac{1}{18}$	
$\frac{1}{7}$			21	$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{9}$			18
	$\frac{3}{70}$	$\frac{1}{35}$			$\frac{3}{88}$	$\frac{1}{44}$		$\frac{3}{108}$	$\frac{1}{36}$	
$\frac{1}{10}$				$\frac{1}{11}$			$\frac{1}{12}$			24
	$\frac{3}{130}$	$\frac{1}{65}$			$\frac{3}{154}$	$\frac{1}{77}$		$\frac{3}{180}$	$\frac{1}{60}$	
$\frac{1}{13}$				$\frac{1}{14}$			$\frac{1}{15}$			

2–10 *Daneben am Rande:*

2	
	$\frac{3}{4}$
$\frac{5}{4}$	
	$\frac{3}{9}$
$\frac{33}{36}$	
	$\frac{3}{16}$
$\frac{105}{144}$	
	$\frac{3}{25}$

$$
\begin{array}{cccc}
 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \\
6 & & & 3 \\
 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \\
8 & & & 4 \\
 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \\
10 & & & 5 \\
 & \frac{1}{28} & \frac{1}{14} & \\
12 & & & 6 \\
 & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \\
14 & & & 7 \\
 & \frac{1}{54} & \frac{1}{27} & \\
 & & & 8 \\
 & \frac{1}{70} & \frac{1}{35} & \\
 & & & 9 \\
 & \frac{1}{88} & \frac{1}{44} & \\
 & & & 10 \\
 & \frac{1}{108} & \frac{1}{54} & \\
 & \frac{1}{130} & \frac{1}{65} & \\
 & \frac{1}{154} & \frac{1}{77} & \\
 & \frac{1}{180} & \frac{1}{90} & \\
 & \text{etc.} & & \\
 & \| & & \\
 & \multicolumn{3}{l}{\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3} = \dfrac{11}{18}}
\end{array}
$$

		1	$=$	$\frac{1}{4}$					
1									
	$\frac{3}{4}$	$0 - \frac{2}{4}$		$\frac{1}{9}$					
$\frac{1}{4}$									
	$\frac{5}{36}$	$0 - \frac{1}{36}$		$\frac{1}{16}$					
$\frac{1}{9}$									
	$\frac{7}{144}$	$\frac{2}{144}$		$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{144}$				
$\frac{1}{16}$									
	$\frac{9}{400}$	$\frac{7}{400}$		$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{400}$				
$\frac{1}{25}$									
	$\frac{11}{900}$	$\frac{14}{900}$		etc.	$\frac{14}{900}$				
$\frac{1}{36}$									
	$\frac{13}{36 \frown 49}$	$\frac{23}{36 \frown 49}$			$\frac{10}{\ldots}$				
	$\frac{15}{49 \frown 64}$	$\frac{34}{\ldots}$			$\frac{19}{\ldots}$	$-\ 15$	$=$	4	
									9
	$\frac{17}{64 \frown 81}$	$\frac{47}{\ldots}$			$\frac{30}{\ldots}$	$-\ 17$	$=$	13	
									11
	$\frac{19}{81 \frown 100}$	$\frac{62}{\ldots}$			$\frac{43}{\ldots}$	$-\ 19$	$=$	24	

3–18 *Dazu am Rande:*

9		16		25		36		49		64		81		100
7		9		11		13		15		17		19		21
2		7		14		23		34		47		62		79
	5		7		9		11		13		15		17	

$$
\begin{array}{ccc}
1 & & \\
 & \frac{3}{4} & \\
\frac{1}{4} & & \frac{22}{36} \\
 & \frac{5}{36} & \\
\frac{1}{9} & & \frac{972}{5184} \\
 & \frac{7}{144} & \\
\frac{1}{16} & & \text{etc.} \\
 & \frac{9}{400} & \\
\frac{1}{25} & & \text{etc.} \\
 & \frac{11}{900} & \\
\frac{1}{36} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
1 & = & \frac{1}{4}\ \frac{5}{36}\ \text{etc.} \\[2ex]
\frac{1}{4} & = & \frac{1}{9}\ \frac{7}{144}\ \text{etc.} \\[2ex]
\frac{1}{9} & = & \frac{1}{16}\ \frac{9}{400}\ \text{etc.} \\[2ex]
\frac{1}{16} & = & \frac{1}{25}\ \frac{11}{900}\ \text{etc.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
1 & & \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\[2ex]
\frac{1}{9} & \frac{49}{36} & \frac{49}{36} \\[2ex]
\frac{1}{16} & \frac{205}{144} & \frac{820}{576} \\[2ex]
\frac{1}{25} & \ldots & \frac{21076}{14400} \\[2ex]
\frac{1}{36} & \ldots &
\end{array}
$$

1–11 *Nebenrechnungen:*

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{5}{36} \times \frac{7}{144} & \underline{720+252} & \frac{972}{5184} & \\[2ex]
\frac{5}{4} \times \frac{1}{9} & 49 & 16 & 16 \\
 & \underline{4} & \underline{50} & \underline{36} \\
\frac{49}{36} \times \frac{1}{16} & 196 & 800 & 96 \\
 & \underline{9} & \underline{16} & \underline{48} \\
 & 205 & 784 & 576 \\
 & & \underline{36} & \\
\frac{820}{576} \times \frac{1}{25} & 20500 & 820 & \\
 & \underline{576} & & \\
 & \underline{21076} & & \\
 & 14400 & &
\end{array}
$$

1		.					
	1		$\frac{1}{1}$				
1		.		$\frac{1}{2}$			
	2		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$		
2		.		$\frac{3}{8}$		.	
	4		$\frac{1}{8}$		$\frac{17}{64}$		.
8		.		$\frac{7}{64}$		$\frac{175}{1024}$	
	8		$\frac{1}{64}$		$\frac{97}{1024}$		
64		.		$\frac{15}{1024}$			
	16		$\frac{1}{1024}$				
1024		.					

1–11 *Neben der 1. Tabelle:*

1		*gestr.*	1	*L*
	$\frac{7}{8}$			
$\frac{1}{8}$				
	$\frac{19}{216}$			
$\frac{1}{27}$				
	$\frac{37}{27 \frown 64}$			
$\frac{1}{64}$				

$\frac{1}{1}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{17}{64}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{1024}$	$\frac{175}{1024}$	$\frac{174}{1024}$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$
$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	$\Vert$	
$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{54}$	$\frac{6}{160}$	$\frac{10}{375}$	

1–5 *Nebenbetrachtungen zur linken Tabelle:*

$$\begin{array}{ll}
 & \frac{1}{2} \\
\frac{3}{8} & \frac{4}{8}\ [!] \,\Big|\, \frac{1}{2} \\
\frac{24}{64} \,\Big|\, \frac{6}{8}\ [!] \,\Big|\, \frac{3}{4} & \frac{25}{64}
\end{array}$$

4 $\frac{1}{8}$: Richtig wäre $\frac{1}{4}$. Der Fehler wirkt sich auf den letzten Term der Nebenbetrachtungen aus, die zusätzlich Unstimmigkeiten aufweisen.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} & \\[1ex]
\| & \| & \| & \| & \| & \\[1ex]
\frac{3}{4} & \frac{6}{27} & \frac{10}{96} & \frac{15}{250} & & \\[1ex]
| & | & | & | & & \\[1ex]
\frac{1}{12} & \frac{3}{54} & \frac{6}{160} & \frac{10}{375} & & \\
\| & \| & \| & & & \\
\frac{8}{12}\Big|\frac{2}{3} & \frac{9}{54}\Big|\frac{1}{6} & \frac{[64]}{960} & \text{etc.} & =1 &
\end{array}$$

Nota differentiae inter numeros quadratos et triangulares sunt numeri triangulares.

$$\begin{array}{cccc}
3-4 & 6-9 & 10-16 & \text{etc.} \\
1 & 3 & 6 &
\end{array}$$

idque utcunque sumas:

6–8 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} 3 \\ \cancel{9}60 \;⨍\; 6 \\ \cancel{1}60 \end{array} \qquad \frac{1}{10} \underline{\times} \frac{1}{16} \qquad \frac{10}{96} \quad \frac{100}{960} \quad \frac{6}{160} \quad \frac{36}{960}$$

8 *Darüber, später geschrieben:*

$$\frac{32}{280}\Big|\frac{16}{140}\Big|\frac{8}{70}\Big|\frac{4}{35}\Big|$$

8 $\frac{136}{960}$ *L ändert Hrsg.*

1	3	6	10
4	9	16	25
3	6	10	15

[*Zusatz in anderer Feder und Tinte:*]

$$\frac{1 \sqcap \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}{3 \frown 4} \qquad \frac{3 \sqcap \frac{2 \frown \cancel{3}}{\cancel{2}}}{6 \frown 9} \qquad \frac{6 \sqcap \frac{3 \frown \cancel{4}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{4} \frown 5}{\cancel{2}} \frown 16}$$

$$\frac{\cancel{2} \frown 3}{\cancel{2}} \qquad \frac{\cancel{3} \frown 4}{\cancel{2}}$$

unde fiet : $\dfrac{1}{3 \frown 4} \qquad \dfrac{2}{4 \frown 9} \qquad \dfrac{3}{5 \frown 16}$

Momentum eius de 3.4.5. est $\dfrac{1}{4}\ \ \dfrac{2}{9}\ \ \dfrac{3}{16}$, cui si addas $\dfrac{1}{4}\ \ \dfrac{1}{9}\ \ \dfrac{1}{16}$, fiet: $\dfrac{1}{2}\ \ \dfrac{1}{3}\ \ \dfrac{1}{4}$.

16. METHODUS TANGENTIUM INVERSA
[April – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 227–228. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 627

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. Das Stück ist nach einer Betrachtung zur Zykloide (Cc 2, Nr. 609, vgl. die Erl. zu S. 195 Z. 5–7) entstanden, diese wiederum ist wohl kurz nach dem Erscheinen von Huygens' *Horologium oscillatorium* („achevé d'imprimer" 1. April 1673) verfaßt. Auf S. 196 Z. 28 ist die in *LSB* VII, 1 N. 36 S. 227 Z. 17 – S. 228 Z. 5 sowie in N. 17_3 S. 222 Z. 2 und in N. 18 S. 238 Z. 3–8 verwendete Schreibweise inf.−1 etc. punktuell ergänzt, so daß vermutlich N. 16 früher anzusetzen ist. N. 17 (s. dort) schließt inhaltlich an N. 16 an.

Methodus tang. inversa in specie de figura cuius evolutione describitur parabola, deque eius ordinatarum summa est paraboloeides

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{24}$
etc.		

Altitudo x. applicata y. In parabola $xa = y^2$. y. $Rq\,2, y$. $Rq\,3, y$. Et area $\frac{2xy}{3}$. In parabola cubica $xa = y^3$[,] area $= \frac{3xy}{4}$. y. $Rc\,2, y$. $Rc\,3, y$. In paraboloeide $x^3 = y^2a$. $2x^3 = 2y^2a$. sunt ergo quadrata applicatarum, ut cubi a vertice abscissarum. x.[=]$Rc\,y^2a$. Ergo si multiplicetur a vertice abscissa simpliciter v. g. $2x$. erit eius cubus $8x^3$. qui est ad cubum x. sim-

13 *Darunter:* Tunc eram adhuc novus.

14 *(1)* $xa = y^2$. $x^3 = y^2a$ *(2)* Altitudo *L* 15 Et *(1)* summa *(2)* area *L* 18 si *(1)* duplicetur *(2)* multiplicetur *L*

11 figura: vgl. H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I, S. 517–520.

plicis, ut 8. Ergo y^2a. multiplicetur per 8. Ergo $Rq\,8, y^2a$. erit cubus applicatae et applicata erit: $Rc\,y^2a \frown Rqc\,8$. Hinc elegans consideratio.

2	4	8
3	6	12
4	8	16
9	18	36

In parabola altitudinibus multiplicatis, seu crescentibus arithmetice, crescunt applicatae, ut radices quadratae numerorum naturalium, $y \mid Rq\,2, y. \mid Rq\,3, y. \mid$ etc. In triangulo ut radices quadratae numerorum quadratorum, y. $Rq\,4, y$. $Rq\,9, y$. etc. In paraboloeide dicta, ut radices quadratae numerorum cubicorum, y, $Rq\,8, y$. $Rq\,27, y$. etc.

Unde apparet applicatas trianguli esse medias proportionales inter applicatas paraboloeidis Heuratianae, et parabolae.

---

1 f. *Nebenrechnungen:*
$Rq\,2 = Rqq\,4 = Rqc$ [*bricht ab*]
$Rq\,2 \frown Rq\,2 = 2. \frown Rq\,2 = Rq\,8. \frown Rq\,2 = Rq\,128$ [*!*]
$2 = \square.\ Rq\,2 \quad Rq\,8 = cub \llcorner Rq\,2. \quad Rq\,2. = Rqc\,8.$

6 *Nebenbetrachtung:* $\dfrac{a \frown Rq\,b}{a \smile Rq\,a} = \dfrac{a \frown b}{}$ [*bricht ab*]

			1.	2.	3.
	div.	per	$Rq\,1.$	$Rq\,2.$	$Rq\,3.$
prod.	mult.	per	1	2	3
				aeq.	
			1	2	3
	mult.	per	$Rq\,1.$	$Rq\,2.$	$Rq\,3.$

1 f. erit *(1)* applicata. *(2)* cubus *L* 4 parabola *(1)* verticibus simpli *(2)* altitudinibus *L* 11–195,1 parabolae. | Unde sequitur triangulum esse mediam proportionalem, inter evolventem parabolicam *(1)* et parabolam *(2)* seu paraboloeidem Heuratianam, et parabolam si paraboloeis, triangulum et parabola sint eiusdem altitudinis et basis. Ergo si parabola sit $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{6}$ *gestr.* | et triangulum $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{6}$ *gestr.* | erit paraboloeis $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$, quare rectangulum circumscriptum erit ad paraboloeidem ut 8 ad 3. *gestr.* | Quadratum *L*

---

1 f. erit cubus applicatae: Die Aussage und ihre unmittelbare Folgerung sind nicht richtig, sie beeinträchtigen die weiteren Überlegungen S. 195 Z. 8 f.

Quadratum applicatae trianguli est aequale, rectangulo sub applicata parabolae, et paraboloeidis Heuratianae, ideo et summa quadratorum, pyramis scilicet, ex quadratis triangulo impositis conflata, est aequalis summae rectangulorum, seu solido cuidam cunei forma, quod hinc paraboloeide illinc parabola clauditur.

Triangulum rectangulum sub rectis aequalibus evolutae et per evolutionem descriptae aequatur figurae evolutionis. Quare si detur recta aequalis curvae evolutae et quadratura figurae evolutionis, dabitur recta aequalis curvae per evolutionem descriptae.

$y.$	$Rq\,2, y.$	$Rq\,3, y.$	$y.$	$Rqc\,8 \frown Rc\,y^3.$	$Rqc\,27 \frown Rc\,y^3.$
$y.$	$Rqc\,8 \frown Rc\,y^2 a.$	$Rqc\,27 \frown Rcy^2 a$	$y.$	$Rqc\,8 \frown Rc\,y^2 a.$	$Rqc\,27 \frown Rc\,y^2 a.$

194,23–27 *Zur gestrichenen Variante:*
Randbemerkung, nicht gestrichen: E r r o r
Nebenrechnungen, nicht gestrichen:

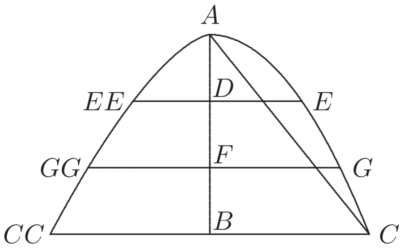
$$\begin{array}{cccccccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} - \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{2} & \;\;\;\;\frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{array}$$

20 f. *Nebenrechnung zur Variante:* $\begin{array}{r} 81 \\ \underline{9} \\ 729 \end{array}$ *Zur Variante, gestrichen:* Nihil est.

1 aequale, *(1)* quad *(2)* rectangulo *L* 2 quadratorum, *(1)* prismae scilicet *(2)* pyramidis *(3)* pyramis *L* 2 f. quadratis *(1)* rectangulo *(2)* triangulo *L* 5 rectangulum *(1)* ex evolvente *(2)* sub *L* 6 aequalis *(1)* figurae *(2)* curvae *L* 8 f. Rqc 27 $\frown$ Rc y^3. *(1)* y. Rq 4, y. Rq 9, y. y. Rqc 64 $\frown$ Rqc y^3. Rqc 729 $\frown$ Rc y^3. *(2)* y. *L* 9–196,1 Rqc 27 $\frown$ Rc y^2a. | Hinc applicata paraboloeidis Heuratianae est ad applicatam respondentem parabolae circumscriptae, ut a ad y. Ergo paraboloeis ad parabolam eodem modo erit.

Ut iam ex hac progressione rationem aggregatorum ex applicatis, seu figurarum inveniamus, ita procedendum est: Applicatae parabolae ita procedunt. Si ex *(1)* data *(2)* assignata quadam altitudine x, applicata sit y, *(a)* erit *(b)* sequitur ex altitudine 2x, applicatam fore Rqc 8, $\frown$ Rc y^3; et ex altitudine 3x, applicatam fore Rqc 27, $\frown$ Rc y^3 etc. Applicatae *(aa)* parabolae ita procedunt *(bb)* paraboloeidis ita procedunt: Si ex assignata quadam altitudine x. (eadem quae ante) applicata sit z. ex altitudine 2x. applicatam fore Rqc 8, $\frown$ Rc z^2a. Ex altitudine 3x. fore Rqc 27, $\frown$ Rc z^2a. Futurae sunt ergo applicatae parabolae ad applicatas paraboloeidis, distantiis a vertice proportionalibus ut Rc *gestr.* | Esto *L*

5–7 Leibniz setzt eine fehlerhafte Regel aus seinen Betrachtungen über die Zykloide (Cc 2, Nr. 609) voraus; die Folgerung bleibt daher unbegründet.



[*Fig. 1*]

Esto figura ABC semiparabola. Abscissa a vertice $AD = x$. Applicata $DE = y$.
Duplicata abscissa ut fiat $AF = 2x$. Quadratum applicatae $DE = y^2$. duplicetur[,] $2y^2$, producti radix quadrata $Rq\,2 \frown y$ erit $= FG$. applicatae quaesitae. Applicatae ergo aequalium axis portionum crescent ut radices quadratae numerorum naturalium deinceps ab unitate. $Rq\,1$. $Rq\,2$. $Rq\,3$. $Rq\,4$.

Esto figura AB_CC paraboloeis Heuratiana, abscissa a vertice $AD = x$. Applicata $D\_EE = z$. Duplum abscissae $AF = 2x$. Cubus ipsius $AD = x^3$. Cubus ipsius AF est $8x^3$. Quadratum applicatae D_EE est z^2. Ergo quadratum applicatae F_GG erit $8z^2$. Ergo applicata F_GG erit $Rq\,8 \frown z$. Applicatae ergo aequalium axis portionum in paraboloeide Heuratianae erunt ut radices quadratae numerorum cubicorum deinceps ab unitate. $Rq\,1 \mid Rq\,8 \mid Rq\,27$.

Nunc quemadmodum reperta a geometris ratio est, ope arithmeticae infinitorum, quadrandi parabolam, seu colligendi harum applicatarum summam, ita tentandum est, an colligi quoque summa paraboloeidis possit, quod ita tentabimus. Applicatae parabolae ita crescunt, ut dictum est:

$$\begin{array}{lcccc} & Rq\,1. & Rq\,2. & Rq\,3. & Rq\,4. \\ \text{seu} & 1 \smile Rq\,1. & 2 \smile Rq\,2. & 3 \smile Rq\,3. & 4 \smile Rq\,4. \end{array}$$

Applicatae paraboloeidis ita crescunt:

$$\begin{array}{lcccc} & Rq\,1. & Rq\,8. & Rq\,27. & Rq\,64. \\ \text{seu} & Rq\,1, \frown 1. & Rq\,2, \frown 2. & Rq\,3, \frown 3. & Rq\,4, \frown 4. \end{array}$$

Si utrobique multiplicentur per radices numerorum naturalium fient [ex] applicatis parabolae:

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 2 & 3 & 4 & & \text{et applicatae parabolae erunt} \\ \dfrac{1}{Rq\,1} & \dfrac{2}{Rq\,2} & \dfrac{3}{Rq\,3} & \dfrac{4}{Rq\,4} & = & \dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 1}\cdot \quad \dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 2}\cdot \quad \dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 3}\cdot \quad \text{etc.} \end{array}$$

1 semiparabola. *(1)* Altitudo *(2)* Abscissa *L* 15 f. Rq 27. *(1)* Restat figura, quae *(2)* Nunc *L*
25 fient *(1)* ap *(2)* explic *(3)* |ex *erg. Hrsg.*| applicatis *L* 28 $\dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 1}$ ... etc. *erg. L*

28 $\dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 1}$ ... etc.: vgl. S. 199 Z. 1–8 u. N. 18 S. 237 Z. 1 – S. 238 Z. 8.

Ex applicatis paraboloeidis:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 9 & 16 \\ \dfrac{1}{Rq\,1} & \dfrac{4}{Rq\,2} & \dfrac{9}{Rq\,3} & \dfrac{16}{Rq\,4}. \end{array} \quad \text{et applicatae paraboloeidis erunt}$$

Unde apparet theorema memorabile, nimirum ut est applicata trianguli ad respondentem parallelam axi parabolae in trilineo parabolico assumtam, ita esse applicatam parabolae ad applicatam paraboloeidos respondentem.

Applicatae nostrarum paraboloeidum sunt minores cis, maiores trans applicatam communem; quam applicatae parabolarum. Hoc generale.

Applicata paraboloeidis, ad applicatam respondentem, est in composita ratione, ex ratione duarum primarum applicatarum, et numero quo quota sit applicata data, inde a prima, axe aequaliter secto, exprimitur.

Unde apparet, cum aliquando fiant aequales, necesse esse, ut duarum primarum applicatarum ratio sit quae finiti ad infinitum, seu qualis anguli contactus ad rectilineum seu ut est radix quadrati numeri infiniti ad numerum infinitum. Hoc generale.

---

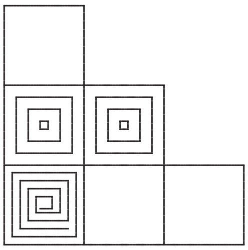
3 *Nebenbetrachtung:*

	$\dfrac{4}{Rq\,1}$	$\dfrac{16}{Rq\,2}$	$\dfrac{36}{Rq\,3}$	$\dfrac{64}{Rq\,4}$	
	4	$Rq\,32$	$Rq\,72$	$Rq\,128$	$\cancel{2}$
$Rq\,2)$		$Rq\,64$	$Rq\,144$	$Rq\,256$	$\cancel{144}$ ⨍ 48
	4	8	12	16	$\cancel{33}$
2)	2	4	6	8	
2)	1	2	3	4	

4 f. ad *(1)* applicatam *(a)* tri *(b)* trilinei parabolici, basi *(2)* respondentem *L* 7 nostrarum *erg. L* 10 f. inde a prima, *(1)* diametro *(2)* axe aequaliter secto, *erg. L* 14 est *(1)* ratio *(2)* radix *L* 18 Rq 2) | Rq 8 *gestr.* | Rq 64 *L*

---

16 Die Division in der ersten Zeile des Schemas ergibt nicht die zweite. Die Multiplikation der Terme der zweiten Zeile mit $\sqrt{2}$ hat Leibniz für den ersten Term gestrichen.



[*Fig. 2*]

$1 \frown 1 \qquad 2 \frown 4 \qquad 3 \frown 9$

Rq 1.	*Rq* 2.	*Rq* 3.	*Rq* 4.
1	4	9	16

Rc 1.	*Rc* 2.	*Rc* 3.	*Rc* 4.
Rc 1.	*Rc* 8.	*Rc* 27.	*Rc* 64.
1	*Rc* 4.	*Rc* 9.	*Rc* 16.

1–6 *Nebenrechnungen und Nebenbetrachtungen:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & \frac{5}{8} & 8 ⨍ 1\,\frac{3}{5} & \frac{14}{27} & 27 ⨍ 1\,\frac{13}{14} & & 36 \\ 4 & 8 & & 5 & & 14 & & \underline{36} \\ 9 & \underline{27} & & & & & & 216 \\ 16 & 36 & & & & & & \underline{108\ } \\ & & & & & & & 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{6}\,0 \\ \ \ \cancel{3}\,\cancel{3}\,\cancel{3} \end{array} ⨍\ 420$$

$$\begin{array}{cccc} Rq\,8 & Rq\,8 = Rq\ Rq\,8 & Rq\ \ 8 & Rq\,8 = Rqq\,64 \\ & \qquad\quad Rq\,8 & \underline{Rq\ \ 8} & \\ & & [Rq\,64] & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Rqq\,Rq\,64 & Rq\,64 & Rq\ \ 64 & 1 & Rq\,4 = Rc\,8 \\ Rq\ \ 8 & \underline{Rq\ \ \ 8} & \underline{Rq\ \ 8} & \cancel{5}12 & Rc\llcorner Rq\,512. = Rq\,8. \\ & [Rq\,]512 & Rq\,512 & \underline{\cdot\ \ \cdot} & Rc\,Rq\,4 \\ & & & \underline{2\ \ 2} & \\ & & & [\cancel{4}]\ 4 & \end{array}$$

17 Rq 64 *gestr. L erg. Hrsg.* 20 Rq *erg. Hrsg.* 22 $\cancel{2}$ *L ändert Hrsg.*

1	$\frac{1}{2}a$	Diam. circuli cycloeidem generantis a.
2	$\frac{1}{2}a$	Linea semicycloeidalis $2a \frown 2a \smile \frac{1}{4} = a^2$.
3	$\frac{1}{2}a$	
4	$\frac{1}{2}a$	Cautio maximi momenti nec a quoquam animadversa in
5	$\frac{1}{2}a$	aestimandis curvis per tangentes, falsum est curvam ex
6	$\frac{1}{2}a$	infinitis tangentibus seu rectis compositam semper intelligi
etc.		posse. Ut cycloeis linea intelligenda est composita ex infinitis
basis $\frown \llcorner\frac{1}{4}$ alt.		arcubus. Ideo non procedit regula de figura evolutionis producta

ex dimidia linea evoluta, ducta in dimidiam evolventem, quod procederat, si evoluta ex tangentibus rectilineis constaret. Applicandum hoc ad helicen circularis evolutam.

Caeterum si liceret fingere tangentes infinitas semper possem statim quadrare circulum, nam figura evolutionis, cum evolvitur cycloeis circulo aequalis est duplicato. Eodem modo curva parabolica consideranda, aliaeque. NB. Ideo calculus per polygona aeque obnoxius erroribus, ⟨id⟩eo ⟨cal⟩culus per indivisibilia.

1–8 *Nebenbetrachtungen:*

$\frac{a}{2} \frown 1 \quad \frac{a}{2} \frown 2 \quad \frac{a}{2} \frown 3 \quad \frac{a}{2} \frown 4$

$a \frown a = a^2$, auferatur dimidium[,] $+\frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = {}^{3}$ [*bricht ab*]

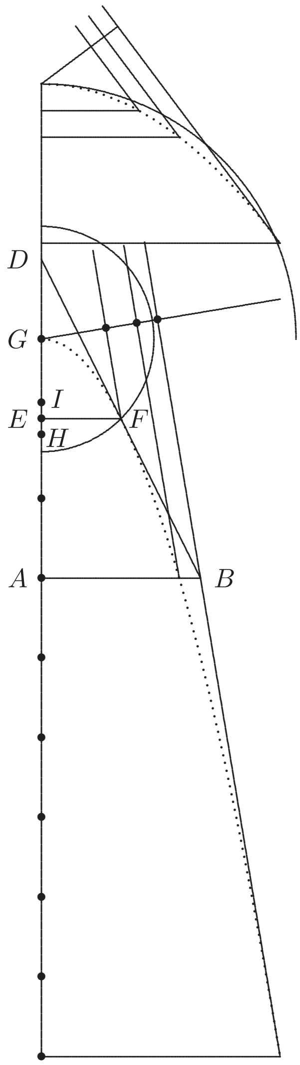
$\frac{a}{4} \frown 2 \quad \frac{a}{4} \frown 3 \quad \frac{a}{4} \frown 4$

5–7 *Am Rande:* Error

5 est *(1)* figuram *(2)* curvam *L* 6 seu rectis *erg. L* 7 linea *erg. L* 9 ex *(1)* figura triangulo *(2)* figura *(3)* dimidia *L* 9 ducta *(1)* in quartam pa *(2)* in *L*

---

8 regula: vgl. die Erl. zu S. 195 Z. 5–7.



[*Fig. 3*]
[*tlw. Blindzeichnung*]

Operae pretium est investigare figuras, in quibus intervalla tangentium a vertice, habent rationem quandam certam et constantem, summationis capacem.

Ante omnia certum est tangentes eiusdem curvae ad easdem partes non posse esse parabolas.

Tangens est recta cuius unum tantum punctum cum figura commune est, eo in loco ubi attingit.

Hinc tangens ibi non nisi circumferentiam attingit.

Tangens attingit unam tantum figurae applicatam.

Omnis applicata ad axem vel basin et tangentem, est maior applicata ad curvam, demta una.

Ex puncto dato ducere tangentem ad curvam datam.

Nota: Tangens est minima earum quae ex axe vel basi productis ad punctum datum duci possunt, ita ut intra figuram non cadant.

Ducatur recta AB ex axi ad punctum datum B basi parallela seu axi perpendicularis, tangens ponatur reperta et esse DB et applicata contactus esse EF. Erit $AB = a$. $GA = b$. $EF = x$. Ergo $EA = x\alpha$. [$GE =$] $b - x\alpha$. $GD = x\beta$. $DB = x\gamma$. Sumtis EH quantumvis parvis, seu recta AI quantumvis maiore et recta AH quantumvis minore quam EA, investigatisque applicatis, ex E et H tum ad curvam, tum ad rectam DB necesse est, si DB est tangens applicatas ad rectam ultra vel cis E esse maiores applicatis ad curvam.

Contra si data sit applicata EF quaerendum est punctum D seu recta ED ut scilicet omnes trianguli DEF applicatae sunt maiores applicatis figurae respondentibus.

29 *Fig. 3*: Leibniz verwendet in der Figur und anfangs auch im Text Kleinbuchstaben für die Punktbezeichnung und geht dann zu Großbuchstaben über; die Wiedergabe ist nach diesem Gebrauch vereinheitlicht.

1	1	1	1	1
Rq 2	2	4	8	16
Rq 3	3	9	27	
Rq 4	4	16	64	
	10	30	100	

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64

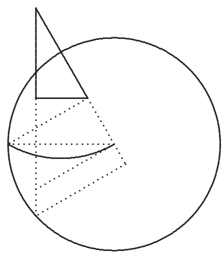
Theorema notabile, summa numerorum naturalium deinceps ab unitate, est radix summae numerorum cubicorum totidem deinceps ab unitate sumtorum.

Ideo etiam trilineum parabolicum cubicum $\frac{1}{4}$ quae est summa cuborum, est quadratum trianguli $\frac{1}{2}$ quod est summa numerorum naturalium.

$$1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad = \quad 10. \qquad\qquad \frac{1}{1}\quad \frac{2}{2}\quad \frac{3}{3}\quad \frac{4}{4}\quad = \quad 4$$

$$1\quad 4\quad 9\quad 16\quad = \quad 30 \qquad\qquad \frac{1}{1}\quad \frac{4}{2}\quad \frac{9}{3}\quad \frac{16}{4}\quad = \quad 10$$

[*Figur ohne Textbezug*]



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

200,4 f. ad ... partes *erg. L* 200,8 ibi *erg. L* 200,10 vel basin *erg L* 200,19 GA *L ändert Hrsg.* 200,22 applicatis, *(1)* tum ad axem, tum *(2)* ex *L* 200,22 ad *(1)* figuram, *(2)* curvam *L* 200,24 ad *(1)* figur *(2)* rectam *L*

17. DE PROGRESSIONIBUS INTERVALLORUM TANGENTIUM A VERTICE

[April – Mai 1673]

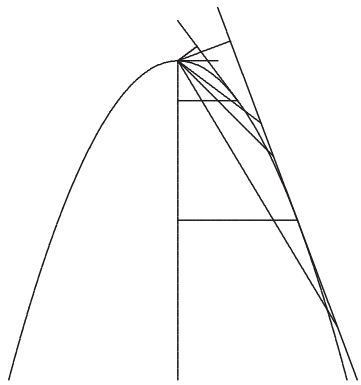
Die folgenden drei Stücke stehen in engem inhaltlichen Zusammenhang. Sie greifen die Problemstellung von N. 16 S. 200 Z. 1–3 auf und dürften kurz danach entstanden sein. Die Überlegungen von Teil 1 von N. 17_1 werden jeweils in Teil 1 von N. 17_2 und N. 17_3 fortgesetzt. Teil 3 von N. 17_1 wird in Teil 3 von N. 17_2 weitergeführt; von letzterem gibt es auch eine Verbindung zu Teil 2 von N. 17_1.

Das Wasserzeichen des Papiers von N. 17_2 u. 17_3 ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt.

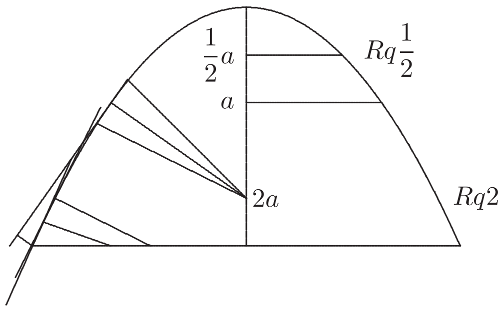
17_1. SCHEDULA PRIMA

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 XII, 2 Bl. 218. 1 Bl. 2°. 2 S. Textfolge 218 v°, 218 r° oberes Drittel, 218 v°, 218 r° untere zwei Drittel. Teil 2 in die Lücken von Teil 1 geschrieben. — Am oberen Rand von Bl. 218 r° zwei isolierte Zeilen mit teilweise durchgestrichenen Zahlen (= S. 205 Z. 17 f.).
Cc 2, Nr. 629

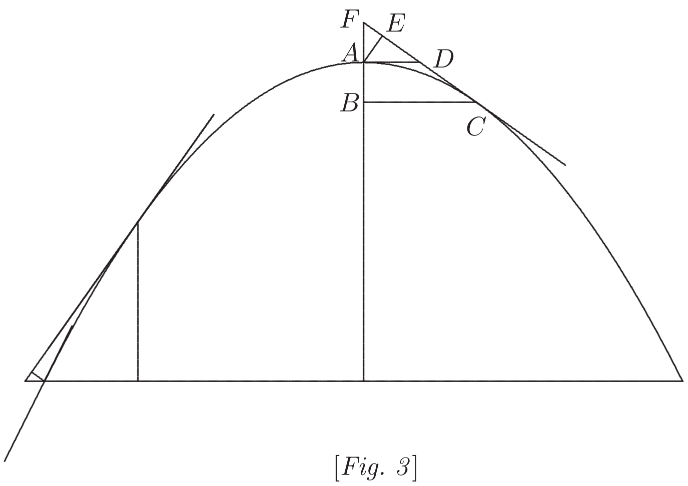
[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

$AB = AF = a$. $BC = b$. $BF = 2a$. $AD = \dfrac{b}{2}$. $\triangledown AFD = \dfrac{ab}{4}$. $\square AF = a^2$. $\square AD = \dfrac{b^2}{4}$. $FD = Rq\llcorner a^2 + \dfrac{b^2}{4}\lrcorner$. Ergo recta $AE = \dfrac{ab}{4} \smile Rq\llcorner a^2 + \dfrac{b^2}{4}\lrcorner \frown 2$ seu $\dfrac{ab}{2Rq\llcorner a^2 + \dfrac{b^2}{4}\lrcorner}$.

Fiat $AB = AF = 2a$. $BC = Rq2, b$. $BF = 4a$. $AD = \dfrac{Rq2, b}{2}$. $\triangledown AFD = 2a \frown$

---

1 *Zu Fig. 3, gestrichen*:

$$\begin{array}{r} b \frown a \\ Rq2\ b \frown a \\ Rq3\ b \frown a \\ Rq4\ b \frown a \end{array}$$

2 $\triangledown \mathrm{AFD} = \dfrac{\mathrm{ab}}{4}$. *erg. L*

---

1 *Fig. 3*: Leibniz bezeichnet in der Figur die Punkte mit kleinen Buchstaben; es wurde an die Schreibweise im Text angeglichen.

$\frac{Rq2,b}{2} \smile 2$ seu $\frac{aRq2,b}{2}$ dividatur per FD quod est $Rq\llcorner 4a^2+\frac{2b^2}{4}\lrcorner$ fiet producto duplicato $\frac{aRq2,b}{\cancel{2}} \smile Rq\llcorner 4a^2+\frac{2b^2}{4}\lrcorner \frown \cancel{2}$ seu $\frac{ab}{Rq\llcorner 4a^2+\frac{2b^2}{4}\lrcorner \smile Rq2}$ seu $\frac{ab}{Rq\llcorner 2a^2+\frac{b^2}{4}\lrcorner} = AE.$ seu

$$\frac{2ab}{2Rq\llcorner 2a^2+\frac{b^2}{4}\lrcorner} \overset{a=b}{=} \frac{2a^2}{\cancel{2}Rq\frac{8a^2+a^2}{\cancel{4}}} = \frac{2a^2}{Rq9a^2} = \frac{2a^2}{3a} = Rq\frac{4a^{\cancel{4}2}}{\cancel{9a^2}} = \frac{2a}{Rq9}.$$

Fiat $AB = 3a$. $BC = Rq3,b$. $BF = 6a$. $AD = \frac{Rq3,b}{2}$. $\nabla AFD = 3a \frown \frac{Rq3,b}{2} \smile 2$ seu $\frac{3aRq3,b}{4}$. $FD = Rq\llcorner 9a^2+\frac{3b^2}{4}\lrcorner$. Ergo $AE = \frac{3aRq3,b}{4} \smile Rq\llcorner 9a^2+\frac{3b^2}{4}\lrcorner \frown 2$ seu $\frac{3ab}{2Rq\llcorner 3a^2+\frac{b^2}{4}\lrcorner}$.

En ergo progressionem intervallorum verticis a tangentibus parabolae

$$\frac{ab}{2Rq\llcorner a^2+\frac{b^2}{4}\lrcorner} \qquad \frac{2ab}{2Rq\llcorner 2a^2+\frac{b^2}{4}\lrcorner} \qquad \frac{3ab}{2Rq\llcorner 3a^2+\frac{b^2}{4}\lrcorner}.$$

Cuius progressionis si poterit summa reperiri habebimus rectam curvae parabolicae aequalem, et quadraturam hyperbolae veram.

Q u a e s t i o a n a p o s s i t s u m i $= b$ in puncto scil. unde inchoatur. Hoc posito erit series

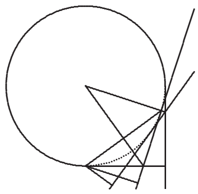
$$\frac{a^2}{\frac{\cancel{2}Rq5a^2}{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{R}qa^{\cancel{4}\cancel{2}}}{Rq5\cancel{a^2}} = \frac{ab}{2Rq\llcorner\frac{4a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\lrcorner} \qquad \frac{ab}{2Rq\llcorner\frac{a^2}{2}+\underset{4\frown 4}{\frac{b^2}{16}}\lrcorner}\ \boxed{\frac{2a}{Rq9}} \qquad \frac{ab}{2Rq\llcorner\frac{a^2}{3}+\underset{9\frown 4}{\frac{b^2}{36}}\lrcorner}.\ \boxed{\frac{3a}{Rq13}}$$

Cum ergo a posito $= b$. series intervallorum sit $\frac{a}{Rq5}$ $\frac{2a}{Rq9}$ $\frac{3a}{Rq13}$ etc. Cuius seriei summam addi posse spes est.

1 $\frac{\mathrm{aRq2,b}}{2}$ *(1)* quo *(2)* dividatur per ∇AFD. Producto duplicato fiet 2a *(3)* dividatur *L*

7 intervallorum *(1)* puncti dati | seu verticis *erg.* | *(2)* verticis *L*

Fingendae sunt mente figurae in quibus intervalla tangentium a vertice, vel aliquo puncto in curva assumto, habent certam quandam progressionem summabilem, ita enim poterit curvae exhiberi recta aequalis, data figurae quadratura.



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

Possunt ista ad circulum quoque applicari, progressio enim triangulorum ex puncto dato super tangentibus constitutorum implet segmenta continue donec maximum intervallum id est diameter attingatur quo casu summa progressionis est semicirculus. Si talis progressio summari posset haberemus quadraturam circuli, si quaelibet eius pars haberemus sectionem anguli universalem.

[*Teil 2*]

$\frac{2}{1} - \frac{4}{1} + \frac{8}{1} - \frac{16}{1} + \frac{32}{1} - \frac{64}{1}$ etc. potius sic $\frac{1}{1} - \frac{2}{1} + \frac{4}{1} - \frac{8}{1}$ etc. in infinitum hoc totum finitum est. Si liceret subtrahere antecedens adimendum a sequenti addendo ut $4 - 2$ et $16-8$ etc. totum fieret infinitum. Si liceret subtrahere sequens ab antecedente $2-4$, $8-16$ etc. totum foret minus nihilo, toto infinito, nunc fere cum neutrum liceat, aut potius cum non possit determinari utrum liceat, natura medium eligit, et totum aequatur finito.

---

1 *Am oberen Rand, vorher geschrieben*:

$$\begin{array}{cccc} 2\;4 & \cancel{2\,6} & \cancel{5\,6} & 9\,8 \\ 1\;2 & \cancel{8\,6} & \cancel{5\,4} & 3\,5 \end{array}$$

2 curva | parabolica *gestr.* | assumto *L* 7 est *(1)* semicirculus *(2)* diameter *L* 8 circuli *erg.* *L* 11 potius ... etc. *erg.* *L* 14 fere *(1)* totum non est *(2)* cum *L*

$a = 1$. $b = 1$. $\frac{c}{b} = 2$. seu $c = 2$. Tota series $= \frac{a}{b+c} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$. Nimirum infinita subtractio divisio est et facit ex re rationem, seu ex ente modum medium inter aliquid et nihil.

Ergo pro $\frac{a}{b+c} = \frac{ac}{b+1}$ summa haec substitui potest: $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5}$ etc. Ergo $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{b} - \frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^3} - \frac{c^3}{b^4}$ etc. Divisis omnibus [nominatoribus] per b habebimus

---

4–207,2 *Nebenbetrachtungen*: $\frac{a}{b+c}$. $\frac{a\smile c}{\frac{b}{c}+1}$. $\frac{a\smile c}{\frac{b}{c}+1} \fint \frac{\frac{ac^{\cancel{2}}}{b\cancel{c}}}{\cancel{c}} - \frac{\frac{ac^{\cancel{2}}}{b\cancel{c}}}{\frac{b}{c}+1}$.

$\frac{a}{b} - \frac{a\smile b}{\frac{b}{c}+1} \fint \frac{ac}{b^2} + \frac{\frac{ac}{b^2}}{\frac{b}{c}+1}$. $\frac{\frac{ac}{b^2}}{\frac{b}{c}+1} \fint \frac{ac\smile b^2}{\frac{\cancel{b}}{c}} = \frac{ac}{b^3}\smile\cancel{b^3} - \frac{\frac{ac^2}{b^3}}{\frac{b}{c}+1}$.

4–207,2 *Auf der Rückseite*:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{3} & 1 & & 1 & \\
 & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{2}{9} \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{9} &
\end{array}$$

5 nominatoribus *erg. Hrsg.*

---

4 $\frac{a}{b+c} = \frac{ac}{b+1}$: Die Gleichung gilt (ebenso wie die Gleichung in Z. 6) nur für den Spezialfall $c = 1$. Leibniz hat sie mit einem Verweisstrich zur zweiten Gleichung von Z. 7 versehen. 6 f. Leibniz rechnet in beiden Gleichungen fortlaufend.

$$\frac{1}{1+\dfrac{c}{b}}\ :\ 1-\frac{c}{b}+\frac{c^2}{b^2}-\frac{c^3}{b^3}\ \text{[etc.] Ergo}\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{8}\right]\ \text{etc. aequale}\ \left[\frac{1}{1+\dfrac{c}{2}}\right]\ \text{si}\ c=1.$$

Iam summari possunt fractiones geometricae in infinitum descendentes. Ergo istud $\dfrac{a}{b+x}$ semper summari potest, seu traduci ad simplicem divisorem sine multiplicatione oppositi aequationis termini. Haec applica ad Mercatoris quadraturam hyperbolae, forte enim perveniri potest ad praecisionem. Eadem methodo tentanda radicum extractio ex binomiis res foret generalissimi usus. Supponitur autem fractiones istas esse integris minores quod si non sunt, tales reddi possunt. In tuo est arbitrio, per quam binomii partem incipere velis. Hac methodo saepe puto aequationes ad planum reduci posse, quae alias solidae habentur aut etiam altiores.

Hinc novae emergent artes algebraicae, nam quae antea fugiebantur divisores binomii et radices ex binomiis nunc expetentur quia iis saepe contrahi poterunt aequationes. Sufficit constare nobis $\dfrac{a}{b}$ esse minus unitate. Si non sit eo usque deminuemus dum fiat.

Tentandum et in trinomiis ope limitum etc. Iungi possunt diversa nunc haec nunc illa ut ex multinomiis varia binomia formentur, unde novae aequationes inter ipsa.

[Teil 3]

$$\begin{array}{c} 1\\ \cancel{3}\cancel{7}\cdots\\ \hline 6\\ \hline \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}2\\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 16+9\\ \hline 4+1\\ \hline \cancel{1}\cancel{6}8+1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 16+8\\ \hline 4+1\\ \hline \cancel{1}\cancel{6}8+1 \end{array} \qquad 4+1-\frac{1}{8+1} \qquad \frac{8}{8+x}=x$$

14 *Rechts*: Haec inventio aequiparari potest Huddenianae *De maximis et minimis*.

1 $\dfrac{1}{1+\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}}$ *erg. L* 1 etc. *erg. Hrsg.* 1 $\dfrac{1}{16}$ *L ändert Hrsg.* 1 $\dfrac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}$ *L ändert Hrsg.*

2 possunt *(1)* numeri *(2)* fractiones *L* 9 f. altiores. | Imo nihil refert, an fractio sit minor an maior unitate. *gestr.* | Hinc *L* 11 iis *(1)* aliquae *(2)* saepe *L* 13 ope limitum *erg. L*

4 Mercatoris: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XIV–XVII S. 28–33 [Marg.]. 10 f. Hinc ... aequationes: Ähnlich N. 17_2 S. 219 Z. 8 f. 21 Huddenianae: J. Hudde, *De maximis et minimis*, 1659, *DGS* I, S. 507–516.

$$\begin{array}{rll} Rq & \cancel{16a^2} \; + & 6z^2 \\ \hline & 4a \; + & x \\ \hline & \cancel{16a^2} & 8a \end{array}$$

$\dfrac{6z^2}{8a+x} = x$. Ergo $6z^2 = 8ax + x^2$. $Rq\ 16a^2 + 6z^2 = 4a + \dfrac{6z^2}{8a+x}$.

$\dfrac{6z^2}{8a+x} = \dfrac{6z^2}{8a} - \dfrac{6z^2x}{64a^2} + \dfrac{6z^2x^2}{512a^3}$ etc. continue multiplicando per $\dfrac{x}{8a}$. Summa horum omnium quae est progressionis geometricae, est aequalis ipsi x. Haec autem summa terminorum progressionis geometricae iniri potest, modo constet nobis $\dfrac{6z^2x}{64a^2}$ esse minus unitate, seu terminum superiorem, esse maiorem inferiore, quod cum hoc loco non sit, superior enim terminus est solidum, inferior superficies, id tamen facile per artem ita obtinebimus ipsum $\dfrac{6z^2}{8a+x} = x$ dividatur per x ergo $\dfrac{6z^2}{8ax+x^2} = \dfrac{x}{x} = 1$. Ergo $\dfrac{z^2}{4ax+x^2} = \dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{z^2x^2}{16a^2x^2}$. Quaeritur iam an $16a^2x^2$ maius quam z^2x^2. Si est maius vel minus vel aequale etiam $16a^2$ ad z^2 erit maius vel minus vel aequale. Ergo in hac quaestione eliminato x ex caetera aequatione data facile determinari poterit sitne maius $16a$ quam x quod vel ex quaestione definiri potest vel si quaestio est indeterminata pro lubitu assumetur minueturve, ita habebimus quod volebamus. Iam series summanda haec erit

$\dfrac{z^2}{4ax} - \dfrac{z^2x^2}{16a^2x^2} + \dfrac{z^2x^4}{64a^3x^3} - \dfrac{z^2x^6}{256a^4x^4}$ etc. vel $\dfrac{z^2}{4ax} - \dfrac{z^2}{16a^2} + \dfrac{z^2x}{64a^3} - \dfrac{z^2x^2}{256a^4}$ etc. Termini progressionis geometricae continue decrescentis, in ratione $\dfrac{x^2}{4ax}$ necesse ergo est ipsum x^2 esse minus ipso $4ax$. Sin maius sit invertenda res est, incipietque semper divisio per maius, et fiet ratio $\dfrac{4ax}{x^2}$ ut proinde prior inquisitio de differentia inter $16a$ et z fuerit frustranea. Ergo

12 $16a^2$ *(1)* quam cum *(2)* ad *L* 12 hac *(1)* aequat *(2)* quaestione *L* 19 de *(1)* aequatione *(2)* differentia *L* 19 frustranea. *(1)* Et vero utra vera seu maior sit facile intelligi potest collecta summa *(2)* Redire *(3)* Ergo *L*

---

10 $\dfrac{z^2}{4ax+x^2} = \dfrac{1}{3}$: Richtig wäre $\dfrac{z^2}{4ax+\dfrac{x^2}{2}}$. Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler wirkt sich aus bis Z. 19.

redire possum ad primum. $\frac{6z^2}{8a+x}$ erit progressio decrescens: $= \frac{6z^2}{8a} - \frac{6z^2x}{64a^2} + \frac{6z^2x^2}{512a^3}$ etc. Differentia inter duos terminos primos est $\frac{6z^2}{8a} \mathbin{\overset{-}{\underset{-}{\times}}} \frac{6z^2x}{64a^2}$ $\frac{384z^2a^2 - 48az^2x}{512a^3}$, vel $\frac{24z^2a - 3z^2x}{32a^2}$. Per huius differentiae rationem ad terminum primum, multiplicetur terminus primus. Ratio haec est: $\frac{2\cancel{6}\cancel{z^2}}{1\cancel{8}\cancel{a}} \times \frac{\cancel{824}\cancel{z^2}a - \cancel{3}\cancel{z^2}x}{\cancel{32}\cancel{a^2}2a} = \frac{4a}{8a-x}$. Per hanc rationem multiplicetur terminus $\frac{3z^2}{\cancel{4a}}$ $\frac{\cancel{4a}}{8a-x}$ fiet $\frac{3z^2}{8a-x} = x$.

Ergo $\frac{6z^2}{8a+x} = \frac{3z^2}{8a-x}$. Ergo $\frac{2}{8a+x} = \frac{1}{8a-x}$. Ergo $8a + x = 2^{[\frown]}8a - 2x$. Ergo $8a = 2^{[\frown]}8a - x$. Ergo $0 = 8a - x$. Ergo $8a = x$. Errorem necesse est inesse calculo. Error in eo est, quod omnia summavi, quasi signum tantum esset $+$.

17_2. SCHEDULA SECUNDA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 210–211. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 640

[*Teil 1*]

Ostendi supra si in parabola, *a* assumas altitudinem ex vertice parabolae ad punctum datum, et applicatam in dato puncto esse altitudini aequalem atque inde progrediaris

---

5 *Über* fiet: er.

6 $\frown$ *erg. Hrsg.* 7 $\frown$ *erg. Hrsg.* 13 parabola, *(1)* si *(2)* A *(3)* a *L*

---

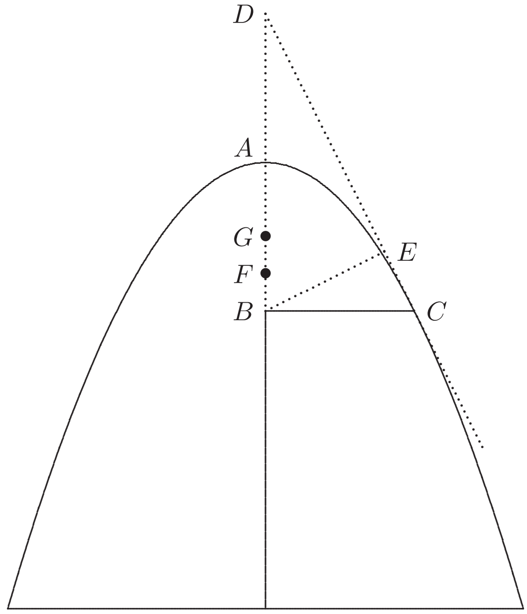
2 Differentia: Für die Berechnung der Summe der alternierenden geometrischen Reihe müßte Leibniz von der Differenz (also der Summe der Beträge) der beiden ersten Terme ausgehen, wie er schließlich erkennt. Die Überlegung wird außerdem durch zwei Rechenfehler beeinträchtigt. Wie Leibniz in N. 17_2 S. 215 Z. 14 ermittelt, ergibt sie richtig durchgeführt die identische Gleichung $\frac{6z^2}{8a+x} = \frac{6z^2}{8a+x}$.

13 Ostendi supra: s. o. N. 17_1 S. 204 Z. 15.

multiplicando altitudinem, cum applicatarum quadrata sint ut altitudines, progressum intervallorum puncti dati, a tangentibus, applicatas altitudinum multiplicatarum, hunc fore:

$$\overset{(2)}{\frac{a}{Rq\ 5}} \quad \overset{(4)}{\frac{2a}{Rq\ 9}} \quad \overset{(6)}{\frac{3a}{Rq\ 13}}.$$

Sed quia hoc punctum aequalitatis in ipso vertice assumi non potest ideo hac methodo non completur figura. Quaerenda ergo progressio intervallorum, si altitudo continue diminuatur.



[*Fig. 1*]

Esto altitudo parabolae AB. applicata ei aequalis $BC = a$. $DB = 2a$. eius $\square\ 4a^2$. $\square\ BC = a^2$. Summa quadratorum $5a^2$. Et $Rq\ 5a^2 = DC$. Triangulum $DBC = 2a \frown a \smile$

10 BC = a. *(1)*∇^{lum} *(2)* DB = 2a. *L*   11 5a^2. *(1)* Eius *(2)* Et *L*

9 *Fig. 1*: Leibniz bezeichnet die Punkte in der Figur durch kleine Buchstaben, geht aber im Text zu Großbuchstaben über; es wurde an diese Schreibweise angeglichen.

$2 = a^2$. Dividatur per $Rq\ 5a^2$. Et productum duplicetur fiet $a^2 \smile Rq\ 5a^2 \frown 2 = Rq\ \dfrac{4a^4}{5a^2} = Rq\ \dfrac{4a^2}{5} = \dfrac{2a}{Rq\ 5} = BE$.

Intervallum puncti applicatae in axe sumti a tangente eiusdem applicatae, altitudini aequalis. Iam altitudo $\underline{ab}$. a parte B. diminui intelligatur continue per partes aequales FB. GF. etc. Videamus an aliqua ratio progressionis intervallorum quibus puncta F. G. etc. absunt a tangentibus, inveniri queat; ne autem multiplicare lineas necesse sit, semper punctum B. (et caetera ab eo dependentia per consequens,[)] pro punctis F. G. etc. nominabimus, calculo tantum mutato. Esto ergo $AB = a - b$. $DB = 2a - 2b$. Cumque AB. antea fuerit a. erit ratio altitudinum $\dfrac{a-b}{a}$. Ergo applicatae praecedentis quadratum per hanc rationem multiplicetur, producti radix erit applicata praesentiarum $\dfrac{a^2}{1} \frac{—}{—} \dfrac{a-b}{a} = \dfrac{a^3 - a^2b}{a} = a^2 - ab$. Erit ergo applicata BC. nunc $Rq\ \overline{a^2 - ab}$. Eius $\square$ addatur $\square\ DB$. fiet $4a^2 + 4b^2 - 8ab + a^2\ [-ab] = 5a^2 + 4b^2 - 9ab$. eius $Rq = DC$.

$$\nabla BDC = \frac{Rq\ \ 4a^4 - [4ab^3] - 12a^3b + 12a^2b^2,}{2} \text{ vel}$$

$$\frac{2a - 2b, \frown Rq\ \overline{a^2 - ab}}{2} = a - b, \frown Rq\ \overline{a^2 - ab}.$$

Dividatur hoc triangulum per $Rq\ 5a^2 + [4b^2] - 9ab$, et productum duplicetur, productum erit intervallum. Sed cum res hoc modo sit implicatissima futura loco subtractionis,

---

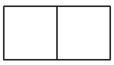
13 *Nebenrechnung*:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & 4a^2 & + & 4b^2 & - & 8ab \\
 & & & & a^2 & - & ab \\
\hline
 & - & 4a^3b & - & 4ab^3 & + & 8a^2b^2 \\
 & - & 8a^3b & + & 4a^4 & + & 4a^2b^2 \\
\hline
4a^4 & - & 4ab^3 & - & 12a^3b & + & 12a^2b^2
\end{array}$$

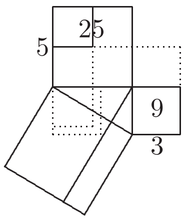
3 applicatae *erg. L* 4 altitudo *(1)* A *(2)* $\underline{\text{ab}}$. *L* 5 progressionis *(1)* tangentiu *(2)* intervallorum *(a)* a *(b)* quibus *L* 6 multiplicare *(1)* fig *(2)* lineas *L* 9 Ergo *(1)* ratio applicatarum $\frac{\quad}{\text{Rq a}^2}$ *(2)* applicatae *L* 12 +ab *L ändert Hrsg.* 13 12ab^3 *L ändert Hrsg.* 15 4b *L ändert Hrsg.*

tentandum uti ratione. Esto $AF.\ \frac{a}{\alpha}$ erit intervallum $\frac{2a}{\alpha Rq\ 5}$. Esto $AG.\ \frac{a}{\beta}$ erit intervallum $\frac{2a}{\beta Rq\ 5}$. Sed istae rationes $\alpha.\ \beta.$ etc. ita decrescent, ut earum tam numeratores, quam nominatores continue minuantur unitate ut si α sit $\frac{3}{4}$ seu si $AF.$ contineat tres quartas de $AB.$ necesse est $AG.$ continere $\frac{2}{3}$tias seu β esse $= \frac{2}{3}$. Et ita porro, idem est, si partes $BF.\ FG.$ omni linea assignabili minores numeroque infinitae intelligantur. Imo: error inest. Etsi $AF = \frac{a}{\alpha}$ non ideo intervallum ipsius $F.$ a tangente $= \frac{2a}{\alpha Rq\ 5}$. Ergo schedula alia calculum istum corrigemus.

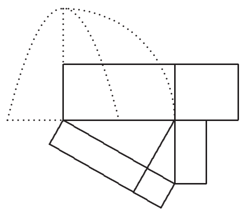
[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

$$a^2 - b^2$$

$$2a - b, \frown b \ + \ a-b \frown a-b$$
$$\cancel{2ab} - \cancel{b^2} \quad + \ a^2 + \cancel{b^2} - \cancel{2ab}$$

$$a \smile b, \frown a \quad \frac{a^2}{b}$$

6 f. schedula *(1)* seq *(2)* alia *L*

6 f. schedula alia: s. u. N. 17_3 Teil 1.

$$
\begin{array}{rrr}
 & 9 & 3 \\
 & \underline{16} & 4 \\
5) & 25 & \overline{7} \\
\underline{4} & \underline{16} & \\
1 & 9 & (3 \\
 & 9 & 3 \\
 & \underline{4} & \underline{2} \\
 & 5 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
25 & 5 \\
9 & 3 \\
\underline{16} & \overline{8} \\
2 &
\end{array}
\qquad
\frac{16}{5-3} = Rq\ 25 + Rq\ 9
\qquad
\begin{array}{rr}
25 & \\
\underline{9} & \\
34 & 34 \\
\underline{16} & \underline{16} \\
50 & 18
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
25 \frown 1. \\
\\
9 \frown 1. \\
\\
\dfrac{25 \frown 1}{1} + \dfrac{9 \frown 1}{1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
25 \\
\underline{1} \\
26 \\
\\
13
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
25 \\
\underline{13} \\
12 \\
\underline{12} \\
144
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
169 \\
\underline{144} \\
25
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
25 \\
\underline{25} \\
125 \\
\underline{50} \\
625 \\
\underline{81} \\
686
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
25 \\
\underline{9} \\
\underline{225} \\
2 \\
\\
\underline{225} \\
Rq\ 686
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{r}
25 - \dfrac{225}{Rq\ 686} \\[2ex]
9 - \dfrac{225}{Rq\ 686}
\end{array}\right\} = Rq\ 686
$$

9–15 *Nebenbetrachtung, gestrichen*:

$$
\begin{array}{r}
25 \\
\underline{1} \\
26
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
13 \\
\underline{13} \\
39 \\
\underline{13} \\
169 \\
\underline{1} \\
168
\end{array}
$$

17 *Nebenrechnung*:

$$
\begin{array}{l}
2 \\
\cancel{6}86 \\
\underline{\cdot\ \ \ \cdot} \\
\underline{2} \\
\cancel{4}4
\end{array}
$$

15–18 686: Richtig wäre 706. Der falsche Wert geht in die abschließende Rechnung nach der Formel $\sqrt{a^2+b^2} = \left(a - \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(b - \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ ein, die hier und i. a. auch näherungsweise nicht gilt.

[*Teil 3*]

Propositum esto extrahere radicem ex binomio ut $Rq\ 16a^2 + 6z^2 = 4a + x$. Sed $x = \dfrac{6z^2}{8a+x}$ seu $6z^2 = 8ax + x^2$. Sed illud inquirendum esset an ipsi x. aequale possit inveniri, hoc enim facto perfecta solutio est. Dividamus ergo $\dfrac{6z^2}{8a+x}$ quod ita fiet:

$\dfrac{6z^2}{8a+x} \fint \dfrac{6z^2}{8a} - \dfrac{6z^2x}{64a^2} + \dfrac{6z^2x^2}{512a^3} - \dfrac{6z^2x^3}{4096a^4}$ etc. continue multiplicando per $\dfrac{x}{8a}$. Suppono autem x esse minus quam [$8a$] (alioqui invertenda forent omnia) ita enim progressio est continue decrescens et proinde summabilis. Tota autem series aequalis ipsi x. quae ut summetur primum ei termini colligendi sunt qui + praefixum habent, deinde qui − et summa horum a summa illorum detrahenda. Sed exemplo in numeris rem declaremus[:]

Pro $\dfrac{6z^2}{8a}$ termino esto 1. pro $\dfrac{x}{8a}$ ratione esto $\dfrac{1}{2}$. erit series haec $+1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32}$ etc. ergo summanda primum $1.\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{16}$. etc. deinde $\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{32}$. etc. et haec summa ab illa subtrahenda. Porro uti integra series est [geometrica], ita et duae series excerptae alternantes. Ratio nimirum harum serierum excerptarum, est quadratum rationis seriei integrae. Quoniam nimirum alternus quisque terminus omittitur, si secundus tertiusque quisque omitterentur ratio excerptae seriei, foret cubus integrae etc. Cum autem ut dixi series istae sint geometricae descendentes earum invenire summam facile est.

Summa autem ita initur, si multiplicetur terminus primus in rationem suam ad differentiam a sequente. At ergo summentur $\dfrac{6z^2}{8a}\ \dfrac{6z^2x^2}{512a^3}$ etc. differentia investiganda est, ea est: $\dfrac{3072a^{\cancel{3}2}z^2 - 48\cancel{a}z^2x^2}{4096a^{\cancel{4}3}} = \dfrac{192a^2z^2 - 3z^2x^2}{256a^3}$. Haec differentia dividat terminum

3 $+x^2$ *(1)* quae aequatio si non plana est at per solida facilis est solutu, ac proinde possumus exhibere ipsum x seu radicem de Rq $16a^2+6z^2$. *(2)* . Sed *L* 6 quam | 8a *gestr., erg. Hrsg.* | *(1)* ita enim *(2)* (alioqui *L* 10 termino *erg. L* 11 etc. *(1)* Iungendo *(2)* ergo *L* 12 uti *(1)* summa *(2)* integra *L* 12 geometricas *L ändert Hrsg.* 13 rationis *erg. L* 14 nimirum *(1)* terminus secundus omittitur, *(2)* alternus *L* 14 si *(1)* tertius *(2)* secundus *L* 16 earum *(1)* rationem *(2)* invenire *L*

1 Teil 3 setzt N. 17_1 Teil 3 fort.

primum $\frac{6z^2}{8a}$ fiet $\dfrac{\overset{2}{(6)\cancel{z^2}}}{\underset{1}{\cancel{8}\cancel{a}}} \times \dfrac{\overset{64}{(192)a^2\cancel{z^2} - (3)\cancel{z^2}x^2}}{\underset{32a^2}{\cancel{256a^3}}} = \dfrac{64a^2}{64a^2-[x^2]}$ per hoc productum multiplicetur terminus primus, fiet $\dfrac{64a^2}{64a^2-[x^2]} \begin{smallmatrix}-\\-\end{smallmatrix} \dfrac{6z^2}{8a} = \dfrac{384a^2z^2}{512a^3-8a[x^2]}$ seu $\dfrac{48az^2}{64a^2-x^2}$ summa.

Nunc et summa detrahendorum $\dfrac{6z^2x}{64a^2}$ $\dfrac{6z^2x^3}{4096a^4}$ etc. investigetur, differentia horum duorum primorum terminorum est:

$$\frac{\overset{384a^2}{\cancel{24576}\cancel{a^4}}z^2x - \overset{6}{\cancel{384}\cancel{a^2}}z^2x^3}{\cancel{64} \frown 4096a^{\cancel{6}4}} = \frac{384a^2z^2x-6z^2x^3}{4096a^4}$$ quae dividat $\square^{tum}$ termini primi fiet:

$$\frac{\overset{6}{\cancel{36}}z^{\cancel{4}2}x^{\cancel{2}}}{\cancel{4096a^4}} \times \frac{\overset{64}{\cancel{384}}a^2\cancel{z^2}\cancel{x} - \cancel{6}\cancel{z^2}x^{\cancel{3}2}}{\cancel{4096a^4}} = \frac{6z^2x}{64a^2-x^2}$$ quae summa si subtrahatur a priore, fiet $\dfrac{48az^2-6z^2x}{64a^2-x^2} = x$ seu $\dfrac{\cancel{6}z^2}{8a+x} = \dfrac{\overset{8}{\cancel{48}}az^2 - \cancel{6}z^2x}{64a^2-x^2}$. Ergo $\dfrac{64a^2-x^2}{8a+x} = \dfrac{8a\cancel{z^2}-\cancel{z^2}x}{\cancel{z^2}\ 1}$. Iam $8a+x \frown 8a-x$ faciunt $64a^2-x^2$. Ergo aequatio orietur inutilis $64a^2-x^2 = 64a^2-x^2$. Signum est hoc, operationem fuisse praeclaram et rectam, sed aliis auxiliis opus esse ut aequatio utilis oriatur. Ergo sic rectius: ex aequatione ista $6z^2 = 8ax+x^2$ ita extrahemus radicem: $16a^2+6z^2 = 16a^2+x^2+8ax$ ergo $Rq\ 16a^2+6z^2 = 4a+x$. Sed ita res rursus redit in orbem, et ad priora. Cum sit $\dfrac{6z^2}{8a+x}$ et $\dfrac{6z^2}{8a}$ debeat multiplicari per $\dfrac{x}{8a}$ continue, ut fiat = alicui. Illud ipsum continue per $\dfrac{x}{8a}$ divisum erit = ipsi $\dfrac{6z^2}{8a}$.

2–4 x *L ändert Hrsg. dreimal* 18 f. Cum sit ... ipsi $\frac{6z^2}{8a}$. *erg. L*

1–3 Leibniz führt die Reduktion in vier Schritten durch: 1. Kürzung durch 3 (Klammerung); 2. Kürzung durch a (1 Strich); 3. Kürzung durch 8 (2 Striche); 4. Kürzung durch z^2 (3 Striche). Die beiden letzten Stufen werden durch einfache Streichung wiedergegeben.

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} \text{ etc. Ergo } \frac{1}{b+c} = \frac{1}{b} - \frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^3} - \frac{c^3}{b^4}.$$

$$\frac{1}{b} + \frac{c^2}{b^3} \text{ etc. } \frac{b^3 - c^2b}{b^4} \qquad \frac{b^2-c^2}{b^3} \text{ hoc dividatur } \frac{1}{b^2} \text{ fiet } \frac{1}{\underset{1}{\cancel{b^2}}} \times \frac{b^2-c^2}{b^{\cancel{3}}} = \frac{b}{b^2-c^2}.$$

Similiter $\frac{c}{b^2} \times \frac{c^3}{b^4} = \frac{b^{\cancel{4}2}c - c^3\cancel{b^2}}{b^{\cancel{6}4}}$ dividat $\frac{c^2}{b^4}$ fiet $\frac{\overset{c}{\cancel{c^2}}}{\cancel{b^4}} \times \frac{b^2\cancel{c} - c^{\cancel{3}2}}{\cancel{b^4}} = \frac{c}{b^2-c^2}$.

Ergo $\frac{1}{b+c} = \frac{b}{b^2-c^2} - \frac{c}{b^2-c^2}$ supposito b esse maius quam c. Sed ut fiat minus possemus ita dicere: $\frac{1}{\frac{b}{4} + c + \frac{3b}{4}}$ fieret $\frac{c + \frac{3b}{4} - \frac{b}{4}}{c^2 + \frac{9b^2}{16} + \frac{6bc}{4} - \frac{b^2}{16}} = \frac{c + \frac{b}{2}}{c^2 + \frac{\cancel{8}b^2}{\underset{2}{\cancel{16}}} + \frac{6bc}{4}} = \frac{1}{b+c}$.

Hinc apparet omnem istum calculum etsi verissimum, esse inutilem. Nec unquam hac ratione divisori binomio aequalem uninomium reperiri, nisi scilicet vel differentia vel summa (quibus casibus binomia esse cessant) vel ratio nominum nota sit. Si ratio nominum nota sit, vicimus.

215,19–216,1 ipsi $\frac{6z^2}{8a}$. *(1)* $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2}$ seu $\frac{a}{b} \times \frac{ab^2 - acb}{b^3} = \frac{ab^3}{ab^3 - acb^2} = \frac{b}{b-c}$. Ergo $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{b-c}$. Ergo $ab - ac = b^2 + bc$. Ergo $\frac{18}{4+2} = \frac{4}{}$ *(2)* $\frac{a}{b+c}$ *L* $1 - \frac{ac^3}{b^4}$ etc. *(1)* Ergo *(a)* $1+$ *(b)* $\frac{1 - c + c^2 - c^3 \text{ etc.}}{1} = \frac{b - b^2 + b^3 - b^4}{b+c}$. Ergo $\frac{b+c}{1} = \frac{b - b^2 + b^3 - b^4 \text{ etc.}}{1 - c + c^2 - c^3}$. *(2)* Ergo $\frac{1}{b+c}$ *L* 4 quam c. *(1)* Ergo $\frac{1}{b^2-c^2} =$ *(2)* Sed *L* 10–217,1 vicimus *(1)* v. g. ponamus fractionem $\frac{1}{b+c}$ *(a)* $= \frac{b-c}{b^2-c^2}$ *(b)* Esto ratio nobis nota $\alpha = \frac{c}{b}$. Erit $b + c = b + ab$. $1b + \alpha b$. $b \frown 1 + \alpha$ *(aa)* et $b^2 - c^2 = 1b^2 - \alpha^2 b^2 = b^2 \frown 1 - \alpha^2$ *(bb)* $\frac{1}{b+c} = \frac{1+\alpha}{b} = \frac{1 + \frac{c}{b}}{b}$. Ergo cum supra fuerit $x = \frac{6z^2}{8a + x}$ erit $= \frac{6z^2}{\frac{8a}{1} + \frac{8a}{\alpha}} = \frac{6z^2 \frown 1 + \alpha}{8a} = \frac{6z^2 + 6z^2\alpha}{8}$. | $\frac{8a}{\alpha} = x$. Ergo $x\alpha = 8a$. Ergo $\alpha = \frac{8a}{x}$ *am Rande, streicht Hrsg.*| Iam $\alpha = \frac{8a}{x}$ *erg.*| Ergo $x = \frac{6z^2 + \frac{6z^2 8a}{x}}{8a}$. Ergo

$$\frac{a}{b[+x]} = \frac{a}{\frac{b}{1}+\frac{bx}{b}} = \frac{a \smile 1+\frac{x}{b}}{b} \qquad \frac{a}{b} \times . \frac{1+\frac{x}{b}}{1} \qquad \frac{a}{b+x}$$

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1} & & \frac{a\alpha}{\alpha} & \\
& \frac{2}{3} & & \frac{a\alpha-a}{\alpha} \\
\frac{1}{3} & & \frac{a}{\alpha} & \\
\frac{1}{9} & & \frac{a}{\alpha^2} & \\
\frac{1}{27} & & &
\end{array}$$

$x = \frac{6z^2}{8a} + \frac{6z^2}{x}$. Ergo $x - \frac{6z^2}{x} = \frac{6z^2}{8a}$. Ergo $\frac{x}{6z^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{8a}$. Ergo $\frac{x^2-6z^2}{6z^2x} = \frac{1}{8a}$. Ergo $x^2 - 6z^2 = \frac{6z^2x}{8a}$. Ergo $x^2 - 6z^2 - \frac{6z^2x}{8a} = 0$. Ergo $x^2 - \frac{6z^2x}{8a} = 6z^2$. *(aaa)* Ergo $x^2 = \frac{6z^2}{1-\frac{6z^2}{8a}}$ *(bbb)* Ergo $\frac{x^2}{1} - \frac{x}{8a} = \frac{6z^2}{1-6z^2}$. $\frac{x^2 8a - x}{8a} = \frac{6z^2 8a}{1-6z^2}$ *(ccc)* $x^2 - \frac{6z^2x}{8a} = \frac{6z^2}{1}$. Ergo $\frac{x^2}{6z^2} - \frac{x}{8a} = 1$. Ergo $\frac{x^2 8a - x6z^2}{6z^2 8a} = \frac{1}{1}$. Ergo $6z^2 8a = x^2 8a - x6z^2$. $6z^2 = x^2 - \frac{x6z^2}{8a}$. Ergo $6z^2 + \frac{9z^4}{64a^2} = x^2 - \frac{x6z^2}{8a} + \frac{9z^4}{64a^2}$. Ergo $Rq\ 6z^2 + \frac{9z^4}{64a^2} = x - \frac{3z^2}{8a}$. Ergo $Rq\ 6z^2 + \frac{9z^4}{64a} + \frac{3z^2}{8a} = x$ *(aaaa)* vel $0 - x$. *(bbbb)* posito x esse maius quam $\frac{3z^2}{8a}$. Sin $\frac{3z^2}{8a}$ sit maius quam x. fiet $Rq\ 6z^2 + \frac{9z^4}{64a} + \frac{3z^2}{8a}, -\frac{3z^2}{8a} = x$. Ergo $Rq\ 16a^2 + 6z^2$. est $4a + Rq\ 6z^2 + \frac{9z^4}{64a} + \frac{3z^2}{8a}, -\frac{3z^2}{8a}$. Habemus ergo methodum faciendi ex divisore binomio uninomium v. g. ex $\frac{a}{b+x}$ fiet $\frac{a \frown \frac{c}{x}}{b}$ *(aaaaa)* $\frac{acx}{b}$ *(bbbbb)* Nihil est *(2)* . | $\frac{a}{b}$ *ändert Hrsg.* | $= \frac{a}{\frac{b}{1}+\frac{bx}{b}}$ *L* 1 f. $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}+\mathrm{x}}$ | si ratio nominum nota $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{b}}$ *gestr.* | $\frac{1}{1}$ *L*

$$\frac{a^2\alpha}{a\alpha - a} = \frac{a\alpha}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{1 - \dfrac{1}{\alpha}} \qquad \frac{\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}}{\alpha} \qquad \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}.$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \fint (\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha - 1}(1) + \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\dfrac{1}{\alpha}}{\alpha - 1} \qquad \frac{1}{\alpha^2 - \alpha}.\ \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$$ etc. Ex hoc calculo nullus alius usus ducitur, quam quod apparet nova methodus demonstrandi modum quo summantur series decrescentes proportionis geometricae, perpetua scilicet divisione per aliquam apotomam $a = \alpha^2 - \alpha$.

Quotiens ex cubo per differentiam quadrati et radicis diviso aequatur quadrato diviso per differentiam radicis et unitatis.

$$\frac{9}{3-1} \qquad \frac{9}{2}\Big|\,4\frac{1}{2} \qquad \frac{36}{6-1} \qquad \frac{36}{5} \fint 7\frac{1}{5}. \qquad \frac{49}{7-1} \qquad \frac{49}{6} \fint 8\frac{1}{6} \qquad \frac{49}{7-1} = 7 + 1 + \frac{1}{7-1}.$$

Ergo $\dfrac{\alpha^2}{\alpha - 1} = \alpha + 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ contra $\dfrac{\alpha^2}{\alpha + 1} \quad \dfrac{49}{7+1} \fint \dfrac{49}{8} \fint 6\,\dfrac{1}{8} = \alpha - 1 + \dfrac{1}{7+1}$.

$\dfrac{1}{\alpha - 1}$ aequatur summae reliquae seriei abscisso $\alpha + 1$. differentia $\dfrac{1}{\alpha^2} \times \dfrac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha^3}$ $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^4 - \alpha^3} \quad \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

217,2–6 *Nebenbetrachtung*:

a

$$\frac{ca}{c} - \frac{ab}{c} \qquad \frac{a^2c}{ca - ab} \qquad \frac{ac}{c\cancel{a} - b}$$

$\dfrac{ab}{c}$

8 *Nebenbetrachtung*: $\dfrac{1}{7}\ \dfrac{7}{7}\left(\dfrac{8}{7}\right) \quad \dfrac{6}{7} \quad \dfrac{7-1}{7}\Big\backslash\dfrac{1}{7} \quad \dfrac{49-7}{7} \fint 7 - 1$

5 a $= \alpha^2 - \alpha$. *(1)* Quadratum ra *(2)* Quotiens *L*

---

1 $\dfrac{\alpha}{1 - \dfrac{1}{\alpha}}$: Richtig wäre $\dfrac{a}{1 - \dfrac{1}{\alpha}}$; Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung nicht.

Habemus ergo hoc saltem utilitatis ex isto calculo, quod scilicet methodo tali possumus ex radicibus aut fractionibus divisorum binomiorum, quotlibet eruere terminos absolutos, et per eos, si res ita fert destruere alios terminos aequationis. Usum ergo habet haec analysis, quoties in reliqua aequatione sunt aliquot termini tales, quales ex perpetua divisione sunt orituri. Ita enim nonnunquam aequationem reducemus, alioquin irreducibilem ut si $\frac{a}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{x}{a}$. Certum est hac methodo $\frac{a}{b} + \frac{ax^2}{b^3}$ facile destrui posse.

Ergo his casibus saepe quaerere eiusmodi divisores binomios, utile erit, quos alias fugimus.

17_3. SCHEDULA TERTIA

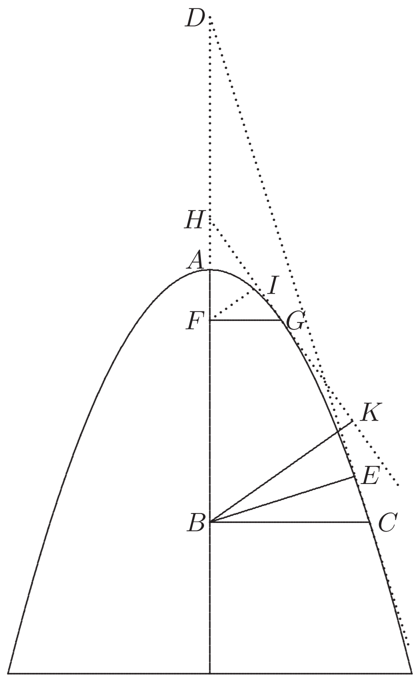
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 123–124. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 630

[*Teil 1*]

Operae pretium videtur, quae de intervallis tangentium curvae parabolicae a puncto altitudinis applicataeque aequalium a communi, ratiocinari coepimus, absolvere, nam si ad progressionem quandam summabilem revocari posset eorum series, curvae parabolicae rectam aequalem geometrice descriptam, ac proinde geometricam, non ut hactenus, mechanicam tantum hyperbolae quadraturam haberemus.

3 absolutos, *(1)* eo *(2)* et *(a)* contra *(b)* per *L* 5 nonnunquam *(1)* ad aequationem perveniemus, irr *(2)* aequationem *L* 7 f. posse. *(1)* Quo facto aequatio ita *(2)* Quodsi dimensiones non differant unitate, inflexione quadam id facile obtineri posse puto, *(3)* Ergo *L* 14 tangentium *(1)* parabolae *(2)* curvae semiparabolicae *(3)* curvae *L* 14 f. puncto *(1)* in eius applica *(2)* axi a *(3)* altitudinis *L* 18 tantum *(1)* parabolae *(2)* hyperbolae *L*

8 f. Ergo … fugimus: Ähnlich N. 17_1 S. 207 Z. 10 f. 15 coepimus: s. o. N. 17_1 Teil 1 u. N. 17_2 Teil 1.



[*Fig. 1*]

Esto altitudo parabolae AB. aequalis applicatae $BC = a$. $DB = 2a$. Eius $\square\ 4a^2$. $\square\ BC = a^2$. Summa quadratorum $5a^2$. Et $Rq\ 5a^2 = DC$. Triangulum $DBC = 2a \frown a \smile 2 = a^2$. dividatur per $Rq\ 5a^2$, et productum duplicetur fiet $a^2 \smile Rq\ 5a^2 \frown 2 = Rq\ \dfrac{4a^4}{5a^2} = Rq\ \dfrac{4a^2}{5} = \dfrac{2a}{Rq\ 5} = BE$. [intervallo] tangentis DC. a puncto B.

Assumatur nunc alia altitudo minor quam AB. nempe AF. cuius ratio ad AB. sit quaecunque $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ erit $AF = \left(\dfrac{a}{\alpha}\right)$. Cumque in parabola quadrata applicatarum sint ut

5 intervalli *L ändert Hrsg.*

1 *Fig. 1*: Die Figur gibt die Zeichnung von Leibniz möglichst getreu wieder, in der nicht wie im Text $AB = BC$ gilt.

altitudines, et applicata prior BC. fuerit a. erit eius quadratum a^2. multiplicetur per $\frac{1}{\alpha}$ fiet $\frac{a^2}{\alpha}$ et $Rq\ \frac{a^2}{\alpha} = \left(\frac{a}{Rq\ \alpha}\right)$ erit applicata FG. Eius $\square = \frac{a^2}{\alpha}$ addatur $\square HF = \frac{4a^2}{\alpha^2}$ fiet $\frac{a^2}{\alpha} + \frac{4a^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 a^2 + 4\alpha a^2}{\alpha^3} = \frac{a^2\alpha + 4a^2}{\alpha^2}$ cuius Rq erit: $\left(\frac{Rq\ a^2\alpha{+}4a^2}{\alpha}\right) = HG$. Triangulum DHG erit $\frac{2a}{\alpha} \frown \frac{a}{Rq\ \alpha} \smile 2 = \left(\frac{a^2}{Rq\ \alpha^3}\right)$ dividatur per HG. productumque duplicetur, fiet: $\frac{\overset{//}{\cancel{a^2}}\,Rq\ a^{\cancel{4}2}}{\cancel{Rq\ \alpha^3}\,Rq\ \alpha}\quad \frac{Rq\ \llcorner\cancel{a^2}\alpha + 4\cancel{a^2}}{\cancel{\alpha}} \frown 2 = \frac{2a}{Rq\ \alpha^2{+}4\alpha} = FI$. Cumque sit ut HF. ad HB. ita FI. ad BK. ita stabit regula proportionum $HF = \frac{2a}{\alpha}$ dat $HB = \left(a + \frac{a}{\alpha}\right)$ quid dabit FI.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2a}}}{\cancel{\alpha}} \;—\!—\; \frac{\alpha a + a}{\cancel{\alpha}} \;—\!—\; \frac{\overset{1}{\cancel{2a}}}{Rq\ \cancel{\alpha^2}{+}4\cancel{\alpha}} = \left(\frac{\alpha a + a}{Rq\ \alpha^2{+}4\alpha}\right) = BK.$$

$$Rq\ \cancel{\alpha^2}\alpha \qquad\qquad Rq\ \alpha{+}4$$

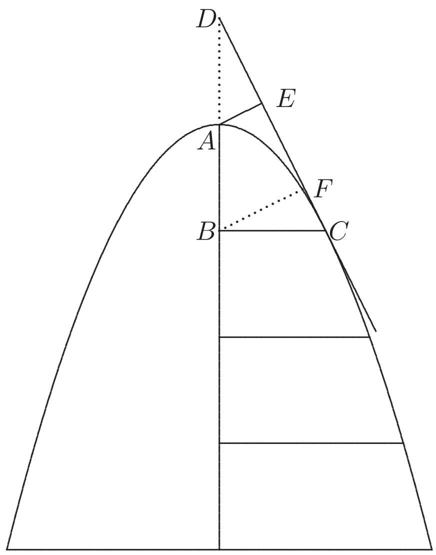
$$Rq\ \frac{1}{\alpha}$$

Ergo si ratio altitudinum sit $\frac{1}{\alpha}$, ratio intervallorum erit: $\frac{2\cancel{a}}{\underset{1}{Rq\ 5}} \times \frac{\overset{1}{\alpha\cancel{a} + \cancel{a}}}{Rq\ \frac{\alpha^2 + 4\alpha}{5}} = \frac{2Rq\ \llcorner\alpha^2 + 4\alpha\lrcorner}{\cancel{\alpha}Rq\ 5\alpha^2 + Rq\ 5}$.

8–11 *Nebenrechnungen*: $\frac{\frac{a}{\alpha}}{a} = \frac{a}{a\alpha} = \frac{1}{\alpha} \qquad \frac{1}{1} \times \frac{1}{Rq\ \alpha} \qquad \frac{Rq\ \alpha}{1}$

3 fiet *(1)* Rq $\frac{5a^2}{\alpha}$ *(2)* $\frac{a^2}{\alpha}$ *L*

Si iam ponatur altitudo continue decrescere uniformiter, erit $a =$ infinito x. reliqua infinit.-1 x. infinit.-2 x. infin.-3 x. etc. et si partes sint finitae poterit esse $a = 10x$. reliqua $9x$. $8x$. $7x$. etc. Ergo rationes ita ibunt: $\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{10}}$ $\dfrac{\frac{9}{10}}{1} = \dfrac{1}{\alpha}$ ergo $\dfrac{10}{9} = \alpha$. Erit ergo α. modo $\dfrac{10}{9}$ $\dfrac{10}{8}$ $\dfrac{10}{7}$ $\dfrac{10}{6}$ etc.



[*Fig. 2*]

---

4 *Dazu, gestrichen*: Nota summa talis seriei ita inibitur $1+\frac{1}{9}+1+\frac{2}{8}+1+\frac{3}{7}+1+\frac{4}{6}$ etc.

4 *Nebenbetrachtung*: $\dfrac{\frac{10a}{9}+a}{Rq\ \frac{100}{81}+\frac{40}{36}}$ $\dfrac{\frac{10a}{8}+a}{Rq\ \frac{100}{40}+\frac{40}{32}}$

Inquirere distantias verticis, a tangentibus parabolae.

Esto vertex A. altitudo AB. applicata BC. tangens CD. intervallum tangentis a vertice, AE. Calculum ita inibimus AB. esto $a = AD$. BC. esto b. $BD = 2a$. $\Box$ de $BC = b^2$. $\Box$ de $BD = 4a^2$. et $CD = Rq\ 4a^2{+}b^2$.

$\nabla^{\text{lum}}\ DBC = \dfrac{2ab}{2}$ dividatur per hypotenusam DC. et productum duplicetur, habebimus BF. $\dfrac{2ab}{\cancel{2}} \smile Rq, 4a^2 + b^2 \frown \cancel{2}$ quo rursus dimidiato habebimus $\dfrac{2ab}{2} \smile Rq, 4a^2 + b^2$ intervallum tangentis DC. a vertice A. vel $Rq\ \dfrac{\cancel{4}a^2b^2}{\cancel{4} \frown \llcorner 4a^2 + b^2 \lrcorner}$.

Esto AB. $2a$. BC. $Rq2\ b$. BD. $4a$. $\Box$ de BC. $2b^2$. $\Box$ de BD. $16a^2$. et $CD = Rq, 2b^2 + 16a^2$.

$\nabla^{\text{lum}}\ [DBC] = \dfrac{2 \frown 2aRq2\,b}{2}$ dividatur per DC. productumque duplicetur, et rursus dimidietur id est relinquatur, fiet: $\dfrac{2 \frown \cancel{2} \frown 2aRq2\,b}{\cancel{2}} \smile Rq, 2b^2{+}16a^2 \frown \cancel{2}$ seu $Rq \dfrac{\overset{(8a^2b^2)}{4a^2 2b^2}}{16a^2 + 2b^2} = AE$. intervallo.

Et si AB. ponatur $3a$. erit intervallum tangentis a vertice: $Rq\ \dfrac{9a^2 3b^2}{36a^2 + 3b^2}\ (27a^2b^2)$.

Et si AB. $4a$. $Rq\ \dfrac{16a^2 4b^2}{64a^2 + 4b^2}\ (64a^2b^2)$

vel sic: $Rq\ \dfrac{\cancel{Rq}\ 4a^2}{\cancel{Rq}\ \dfrac{16a^2}{2b^2}{+}1}$ $\quad Rq\ \dfrac{9a^2}{\dfrac{36a^2}{3b^2} + 1}$ $\quad Rq\ \dfrac{16a^2}{\dfrac{64a^2}{4b^2} + 1}$

vel sic: $Rq\ \dfrac{4a^2}{\dfrac{8a^2}{b^2} + 1}$ $\quad Rq\ \dfrac{9a^2}{\dfrac{12a^2}{b^2} + 1}$ $\quad Rq\ \dfrac{16a^2}{\dfrac{16a^2}{b^2} + 1}$

$$\frac{2a}{Rq\ \dfrac{8a^2}{b^2}{+}1} \qquad \frac{3a}{Rq\ \dfrac{12a^2}{b^2}{+}1} \qquad \frac{4a}{Rq\ \dfrac{16a^2}{b^2}{+}1}.$$

222,4+223,1 etc. *(1)* Si in vertice parabol *(2)* Inquirere *L* 6 rursus *(1)* duplicato, habebimus *(2)* dimidiato *L* 10 DB *L ändert Hrsg.* 10 duplicetur, *(1)* fiet *(2)* |fiet *streicht Hrsg.*| *(3)* et *L*

Illud tantum quaestio nunc est, an ratio ipsius a. ad b. seu applicatae ad altitudinem, investigari possit, sumta scilicet altitudine minima, seu quavis assignabili minore. Pendere videtur aestimatio illa a quantitate eius altitudinis, in qua applicata fit altitudini aequalis. Esto enim altitudinis istius b. ad minimam a. ratio α. erit altitudo illa αa. eique aequalis applicata. Iam applicatarum quadrata sunt ut altitudines, ergo cum altitudinum ratio sit α. erit et quadratorum applicatarum. Quadratum applicatae altitudini aequalis est $\alpha^2 a^2$. quod si dividatur per α habebitur αa^2. cuius Rq nempe $Rq\ \alpha, \frown a$. erit applicata altitudinis a.

Unde intelligi potest res mirabilis, applicatam altitudinis qualibet assignabili minoris esse mediam proportionalem inter altitudinem qualibet dabili minorem et eam, quae applicatae suae aequalis est seu quadratum applicatae minimae esse aequale rectangulo altitudinis applicatae suae aequalis cum altitudine minima. Hinc data altitudine applicatae suae aequali, c. erit $a = \dfrac{c}{\alpha}$ et $b = \dfrac{c}{Rq\ \alpha}$.

Ergo intervalla tangentium ita stabunt:

$$\frac{2\dfrac{c}{\alpha}}{Rq\ \dfrac{8\dfrac{c^2}{\alpha^2}}{\dfrac{c^2}{\alpha}}+1} = \frac{2\dfrac{c}{\alpha}}{Rq\ \dfrac{8}{\alpha}+1} = \frac{Rq\ 4c^2}{Rq\ 8+\alpha}.\ Rq\ \frac{4c^2}{8+\alpha}.\ Rq\ \frac{c^2}{2+\dfrac{\alpha}{4}}.\ \frac{2c}{Rq\ 8+\alpha}.$$

$$\frac{3\dfrac{c}{\alpha}}{Rq\ \dfrac{12\dfrac{\cancel{c^2}}{\cancel{\alpha^2}}}{\dfrac{\cancel{c^2}}{\cancel{\alpha}}}+1} = \frac{3c}{Rq\ 12+\alpha}.\ \frac{4c}{Rq\ 16+\alpha}.\ \frac{5c}{Rq\ 20+\alpha}\ \text{etc.}$$

2 quavis *(1)* dabili *(2)* assignabili *L* 3 fit *(1)* basi altitudinis *(2)* altitudini *L* 7 nempe Rq $\alpha, \frown$ a. *erg.* *L* 10 eam, *(1)* in qua et applicata basi *(2)* quae *L* 11 minimae *erg.* *L*

15 $= \dfrac{Rq\ 4c^2}{Rq\ 8+\alpha}$: Richtig wäre im Nenner $\sqrt{8\alpha + a^2}$. Leibniz rechnet konsequent weiter und übernimmt den Fehler in die folgenden Werte von AB. In S. 225 Z. 3 dividiert er unter der Wurzel im Nenner durch 4 statt mit 4 zu multiplizieren, was das Ergebnis in S. 225 Z. 11 zusätzlich beeinträchtigt.

Quod si iam sint triangula infinita, quorum basis latus curvae, minus qualibet recta assignabili sit β. altitudines intervalla tangentium, triangula ipsa erunt

$$\frac{2c\beta}{Rq\ 2+\frac{\alpha}{4}} \quad \frac{3c\beta}{Rq\ 3+\frac{\alpha}{4}} \quad \frac{4c\beta}{Rq\ 4+\frac{\alpha}{4}} \quad \frac{5c\beta}{Rq\ 5+\frac{\alpha}{4}} \text{ etc.}$$

quorum infinita simul sumta, aequantur segmento parabolico seu residuo semiparabolae triangulo inscripto ademto. Quod si ergo rectangulum parabolae circumscriptum sit 3. et parabola 2. et triangulum inscriptum $\frac{3}{2}$ erit segmentum parabolicum $2-\frac{3}{2}$ seu $\frac{4}{2}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

Ac proinde si semiparabolae altitudo et applicata sit c. cum rectangulum futurum sit c^2. et triangulum $\frac{c^2}{2}$ et parabola $\frac{2c^2}{3}$ erit segmentum $\frac{2c^2}{3}-\frac{c^2}{2}=\frac{4c^2}{6}-\frac{3c^2}{6}=\frac{c^2}{6}$.

Ergo $\frac{c^2}{6} =$ erit omnibus illis triangulis simul sumtis, dividatur utraque aequationis pars per c. erit $\frac{c}{6} = \cancel{Rq}\ Rq\ \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\beta^{\cancel{2}}}{2+\frac{\alpha}{4}} + \cancel{Rq}\ Rq\ \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\beta^{\cancel{2}}}{3+\frac{\alpha}{4}}$ etc. si tamen NB. maximum horum seu ultimum (nam in infinitum progredi alioquin licet) definiatur.

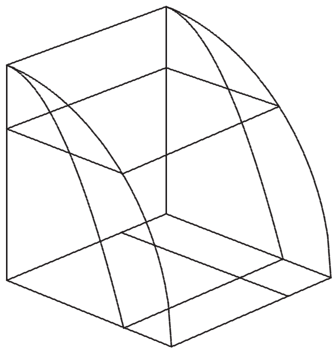
[*Teil 2*]

Sinus est media proportionalis inter radium et parallelam axi parabolae.

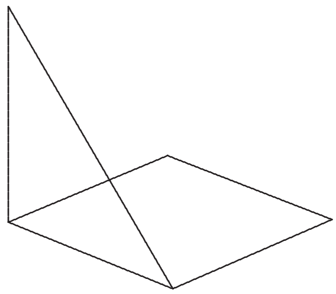
			sinus
1	1	16 − 1	*Rq* 15
2	4	16 − 4	*Rq* 12
3	9	16 − 9	*Rq* 7
4	16	16 −16	*Rq* 0

1 f. latus ... assignabili *erg. L* 3 $\frac{2c\beta}{\text{Rq } 2+\frac{\alpha}{4}}$ *erg. L*

14 *Sinus ... parabolae*: Leibniz zitiert fast wörtlich aus H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 73; in seinem Handexemplar ist die Stelle unterstrichen; daneben steht folgender Hinweis: „Adde quae Hugenius in *Cyclom.* adhibita parabola“; s. Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, theor. III prop. III S. 3–5 (*HO* XII S. 123 f.). Fabris Satz erscheint mit der zugehörigen Figur auch in Cc 2, Nr. 500 und in *Mathematica*, *LSB* VII, 1 N. 106 S. 658 f.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

Figura conflata ex quadratis sinuum, aequatur cylindro cuius basis est quadrans, altitudo radius.

Eadem figura conflata ex quadratis sinuum, est ad figuram conflatam ex quadrantibus eorundem sinuum seu ad quadrantem hemisphaerii ut quadratum ad quadrantem inscriptum.

Esto quadrans xa. radius a. Erit figura conflata ex quadratis sinuum xa^2.

At figura conflata ex quadrantibus $\frac{2xa^2}{3}$. Esset ergo quadratum ad quadrantem ut 3 ad 2. Ergo posito quadrato 3. erit radius *Rq* 3. quo si dividatur quadrans 2. et productum duplicetur, habebimus, arcum quadrantis si credere fas est: $2 \times \frac{Rq\ 3}{1}\ \frac{2 \frown 2}{Rq\ 3} = \frac{4}{Rq\ 3}$ et peripheriam circuli $\frac{16}{Rq\ 3}$. radio posito *Rq* 3. et diametro *Rq* 12. Ergo ratio peripheriae ad diametrum erit: $\frac{16}{Rq\ 3} \times \frac{Rq\ 12}{1}\ \frac{16}{Rq\ 36}\ \frac{16}{6}$ quod est absurdum.

---

6 *Daneben in anderem Duktus und mit anderer Tinte*: Falsum

4 f. conflatam ex *(1)* circulis *(2)* quadrantibus *L* 5 seu ... hemisphaerii *erg. L* 9 Ergo *(1)* posito *(a)* quadrato 3. erit radius Rq 3. *(b)* radio a. cum quadrans fiat ex radio in semiquadrantem peripheriae ducto, ergo $\frac{4xa}{}$ *(2)* posito *L* 10 habebimus, *(1)* circumferentiam *(2)* arcum

Falsum ergo figuram conflatam ex quadratis sinuum, esse ad figuram conflatam ex quadrantibus, ut quadratum ad quadrantem. Ergo valde cavendum ne indivisibilibus abutamur.

	1	3	4	5		
16	17	20	24	29		
	4	4	4	4	4	4
12	16	20	24	28	32	36

1	3	5	7	9
1	4	9	16	25
4				

Rq 1. *Rq* 3. *Rq* 5. *Rq* 7. *Rq* 9. *Rq* 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25.

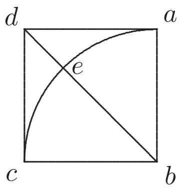
1 ex *(1)* summis *(2)* quadratis *L* 5 *(1)* $10 + 4$ $16 + 4$ *(2)* 16 *L*

18. DE RADICIBUS ET SERIEBUS SUMMANDIS
[April – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Überarbeitetes Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 206–207. 1 Bog. 2°. 4 S. Text tlw. zweispaltig. Teil 3 in die Lücken der Teile 1 und 2 geschrieben.
Cc 2, Nr. 615

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. Die Verwendung der Schreibweise $\frac{\text{infinitum}}{2} - \frac{1}{2}$ etc. (S. 238 Z. 3–8) deutet darauf hin, daß das Stück nach N. 16 (s. dort) und vermutlich auch nach *LSB* VII, 1 N. 36 entstanden ist.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]
[*Blindzeichnung*]

Esto quadratum *abcd*, in eo quadrans *abcea* triangulum semiquadratum *adb* volvantur simul circa axem *ab*. Triangulum producet conum, quadrans hemisphaerium, quadratum cylindrum, et conus erit tertia pars cylindri, hemisphaerium duplum coni, scutella producta a trilineo *cdae* erit aequalis cono *adb*. Scutella enim componitur ex zonis circularibus, quarum quaelibet aequalis circulo coni c o o r d i n a t o , quod demonstratur eadem fere methodo, qua lunulam quadravit Hippocrates. Ut adeo dimensionem sphaerae et cylindri Hippocrati ex parte quadam debeat Archimedes.

Ergo ut circuli compositores coni, ita zonae compositrices scutellae crescunt ut altitudinum quadrata. Rectae porro componentes triangulum, crescunt ut eorum quadratorum

11 simul *erg. L* 14 adb *erg. L* 15 quaelibet *erg. L* 19 ut *(1)* cylin *(2)* circuli *L*

18 debeat Archimedes: Leibniz bezieht sich vermutlich auf die Herleitung in G. Galilei, *Discorsi*, 1638 S. 28–30 (*GO* VIII S. 74 f.), in der Ausgabe der *Opere*, 1656, Band 2, Nr. 17, aus der er den einschlägigen Abschnitt auf S. 21 im Herbst/Winter 1672 exzerpierte (vgl. *LSB* VI, 3 N. 11_2 S. 167). Eine ähnliche Darstellung findet sich auch in H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, positio III S. 318 f. Der Beweis in Archimedes, *De sphaera et cylindro I*, beruht auf anderen Überlegungen.

radices, id est ut altitudines, at non rectae componentes trilineum, quae quomodo crescant videamus: Sunt scilicet ut radii zonarum. Sed hac methodo rem investigare difficile aliam tentemus:

Scimus summam superficiei [hemisphaericae] aequalem, summae superficiei cylindricae, id est circulum duplum maioris circuli in sphaera. Cum ergo summa peripheriarum constituat hunc circulum rationis est summam radiorum, constituere quadratum vel rectangulum, quod sit ad eum circulum, ut radius ad peripheriam. Sed cum alibi ostensum sit, quadratum generans cylindrum esse ad superficiem cylindricam vel [hemisphaericam] seu circulum diagonalem quadrati ut radius ad circumferentiam; ideo sequeretur quadratum hoc esse quadranti aequale, totum parti, quod est absurdum. Hinc demonstratur, non posse componi radios, ut peripherias licet coordinatas.

Circuli in hemisphaerio crescunt ut applicatae in semiparabola. Sinus in quadrante, crescunt ut radices eius mensurae qua crescunt applicatae in parabola.

Rem ad numeros redigamus, ut fiat lucidior, et aperiatur fortasse via per arithmeticam infinitorum.

230,1–9 *Nebenrechnungen:*

1	1	49
2	4	<u>36</u>
3	9	13
4	16	<u>25</u>
5	25	24
6	36	<u>16</u>
7	49	33

4 superficei *(1)* cylindricae, id est cir *(2)* | sphaericae *ändert Hrsg.* | aequalem *L* 6 f. vel rectangulum *erg. L* 8 sphaericam *L ändert Hrsg.*

---

9 sequeretur: Die Folgerung ist nicht zulässig. Leibniz erkennt dies in *LSB* VII, 1 N. 6_1 S. 66 Z. 3–9. 17–23 Leibniz berechnet in der rechten Spalte sukzessive $49 - 36 = 13, 49 - 25 = 24, 49 - 16 = 33$.

	cylinder	conus	hemisphaerium	quadrans circuli
7	xa	xa	0	[0]
6	xa	$xa \frown 36 \smile 49$	$xa \frown 13 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 13 \smile \cancel{49}\lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
5	xa	$xa \frown 25 \smile 49$	$xa \frown 24 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 24 \smile \cancel{49}\lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
4	xa	$xa \frown 16 \smile 49$	$xa \frown 33 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 33 \smile \cancel{49}\lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
3	xa	$xa \frown 9 \smile 49$	$xa \frown 40 \smile 49$	$[2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 40 \smile \cancel{49}\lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}]$
2	xa	$xa \frown 4 \smile 49$	$xa \frown 45 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 45 \smile \cancel{49}\lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
1	$\underline{xa}$	$\underline{xa \frown 1 \smile 49}$	$\underline{xa \frown 48 \smile 49}$	$\underline{2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}\lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}}$
	$7\ xa$	$\dfrac{7\ xa}{3}$	$\dfrac{14\ xa}{3}$	Summa ignoratur.

1–9

(1)	cyl. prism.	conus pyram.	hemisphaer. differentiae praecedentium	quadrans radices differentiarum *erg.*
	7	$\frac{7}{1}$	0	0
	6	$\frac{7}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,17}{2\mathrm{x}}$
	5	$\frac{7}{9}$	$\frac{38}{9}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,38}{3\mathrm{x}}$
	4	$\frac{7}{16}$	$\frac{57}{16}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,57}{4\mathrm{x}}$
	3	$\frac{7}{25}$	$\frac{68}{25}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,68}{5\mathrm{x}}$
	2	$\frac{7}{36}$	$\frac{65}{36}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,65}{6\mathrm{x}}$
	1	$\frac{7}{49}$	$\frac{42}{49}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,42}{7\mathrm{x}}$

x est ratio radii ad latus quadrati circulo aequalis. Sed non opus est uti isto x, termino ignoto, cum enim sint radii ut radices circulorum, ideo sufficit omnia multiplicari seu affici per radium a. Et ita fiet:

Caeterum omnia in infinitas partes divisa cogitanda sunt.

En ergo quadrantem circuli c o m p e n d i o s i u s exhibitum:

9–16 *Nebenbetrachtung zur Stufe (2) der Variante, nicht gestrichen:* Sed cum 7 debeat intelligi = 49.

$1 - \frac{7}{1} \times \frac{1}{4} \qquad 49 - 7 - \frac{36}{\frac{7}{29}} \qquad 36 - \frac{7 \frown 36}{49} - 25$ [*bricht ab*]

Fortsetzung der Lesart zu S. 230 Z. 1–9:

(a)	$\frac{2Rq\,17}{a}$	*(b)*	$\frac{aRq\,17}{2}$	vel	$Rq\,17 \frown \frac{a}{2}$	*(2)*	triang.	prism.	pyram.	*(3)*	*L*
	$\frac{3Rq\,38}{a}$		$\frac{aRq\,38}{3}$		$Rq\,38 \frown \frac{a}{3}$			cyl.	conus		
	$\frac{4Rq\,57}{a}$		$\frac{aRq\,57}{4}$		$Rq\,57 \frown \frac{a}{4}$		(7)	7	$\frac{7}{1}$ $\quad \frac{1}{1}$		7
	$\frac{5Rq\,65}{a}$		$\frac{aRq\,68}{5}$		$Rq\,68 \frown \frac{a}{5}$		(6)	7	$\frac{7 \frown 36}{49} \Big\vert \frac{36}{7} \quad \frac{1}{4}$		6
							(5)	7	$\frac{7 \frown 25}{49} \Big\vert \frac{25}{7}$		5
							(4)	7	$\frac{7 \frown 16}{49}$		4
							(3)	7	$\frac{7 \frown 9}{49}$		3
							(2)	7	$\frac{7 \frown 4}{49}$		2
							(1)	7	$\frac{7 \frown 1}{49}$		1

230,1–9

hemisphaerium	*(1)* quadrans circuli	*(2)* quadrans circuli	*L*
0		⌊0 *erg. Hrsg.*⌋	
xa $\frown$ 13 $\smile$ 49	2aRq$\llcorner$xa $\frown$ 13 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \smile \cancel{49}$	
xa $\frown$ 24 $\smile$ 49	2aRq$\llcorner$xa $\frown$ 24 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \smile \cancel{49}$	
xa $\frown$ 33 $\smile$ 49	2aRq$\llcorner$xa $\frown$ 33 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \smile \cancel{49}$	
xa $\frown$ 40 $\smile$ 49	2aRq$\llcorner$xa $\frown$ 40 $\smile$ 49$\lrcorner$	⌊2a $\frown \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \smile \cancel{49}$ *erg. Hrsg.*⌋	
xa $\frown$ 45 $\smile$ 49	2aRq$\llcorner$xa $\frown$ 45 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \smile \cancel{49}$	
xa $\frown$ 48 $\smile$ 49	2aRq$\llcorner$xa $\frown$ 48 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \smile \cancel{49}$	
$\frac{14xa}{3}$	Summa ignoratur.	Summa ignoratur.	

$$
\begin{array}{cc}
2a & Rq\,\frac{13}{48} \\
2a & Rq\,\frac{24}{48} \\
2a & Rq\,\frac{33}{48} \\
[2a & Rq\,\frac{40}{48}] \\
2a & Rq\,\frac{45}{48} \\
2a & \left(Rq\,\frac{48}{48}\right) \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\text{hemisphaer.}} \\
xa & \frac{13}{49} \\
xa & \frac{24}{49} \\
xa & \frac{33}{49} \\
[xa & \frac{40}{49}] \\
xa & \frac{45}{49} \\
xa & \frac{48}{49} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\frac{14\,xa}{3}}
\end{array}
$$

Summa ignoratur.

Cum in infinitum facta supponatur subdivisio nil refert 48 pro 49, differunt enim non nisi puncto, id est nihilo quod ad usum calculi. Si quis ergo rationem reperiret quadrantis ad $2a$ ut reperta est hemisphaerii ad xa, haberemus circuli quadraturam.

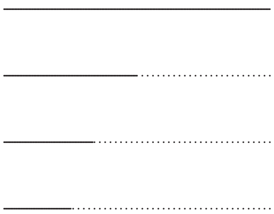
Nota isti numeri 13, 14, 48, 49, etc. significant lineas, et in $\frac{14xa}{3}$ 14 significat lineam, 3 est numerus. Tantum opus est reperiri methodum ista summandi:

Qui rationem hoc summandi repererit, universalem is nobis quadraturam circuli exhibuerit.

$$
\begin{array}{ll}
Rq\ 13 & \\
 & 11 \\
Rq\ 24 & \\
 & 9 \\
Rq\ 33 & \\
 & 7 \\
Rq\ 40 & \\
 & 5 \\
Rq\ 45 & \\
 & 3 \\
Rq\ 48 & \\
 & 1 \\
Rq\ 49 &
\end{array}
$$

5 2a Rq $\frac{40}{48}$ *erg. Hrsg.* 5 xa $\frac{40}{49}$ *erg. Hrsg.*

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & 0 & & & & & & \\
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & 0 & \left(\frac{1}{2}\right) & & & & \\
\frac{1}{3} & + & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \left(\frac{3}{3}\right) & & & \\
\frac{1}{4} & + & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \left(\frac{6}{4}\right) & & \\
\frac{1}{5} & + & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & [0] & \left(\frac{10}{5}\right) & \\
\frac{1}{6} & + & \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & [0] & \left(\frac{15}{6}\right)
\end{array}$$

Si summare velis $\frac{1}{2}\ \frac{3}{3}\ \frac{6}{4}\ \frac{10}{5}\ \frac{15}{6}\ \frac{21}{7}\ \frac{28}{8}\ \frac{36}{9}\ \frac{45}{10}$ etc. habes 1. 1. 1. 1. 1. 1. et praeterea:

$$\boxed{\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{2}{4}}} \quad \left[\frac{5}{5}\,\middle|\,\frac{1}{1}\right] \quad \frac{9}{6}\,\Big|\left[\frac{3}{2}\right] \quad \frac{14}{7}\,\Big|\,\frac{2}{1} \quad \frac{20}{8}\,\Big|\,\frac{5}{2} \quad \frac{27}{9}\,\Big|\,\frac{3}{1} \quad \frac{35}{10}\,\Big|\,\frac{7}{2}$$

Ergo $\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$ etc. +[1.] 2. 3. 4. etc. Iam haec $\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$ rursus resolvuntur et fiunt: 1. 2. 3. etc. $+\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ etc. Habemus ergo summam huius seriei infinitae inventam.

Iam tentemus hoc quoque summare:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{3} & \frac{3}{4} & \frac{6}{5} & \frac{10}{6} & \frac{15}{7} & \frac{21}{8} & \frac{28}{9} & \frac{36}{10} & \frac{45}{11} \\
 & & \frac{1}{5} & \frac{4}{6} & \frac{8}{7} & \frac{14}{8} & \frac{19}{9} & \frac{26}{10} & \frac{34}{11} \\
 & & & & \frac{1}{7} & \frac{6}{8} & \frac{10}{9} & \frac{16}{10} & \frac{23}{11} \\
 & & & & & & \frac{1}{9} & \frac{6}{10} & \frac{12}{11} \\
 & & & & & & & & \frac{1}{11}
\end{array}$$

6 f. 0 *gestr. L, erg. Hrsg. zweimal* 9 $\frac{5}{10}\Big|\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.* 9 $\frac{2}{3}$ *L ändert Hrsg.* 10 1. *erg. Hrsg.*

Hoc non aeque facile, alia rem ratione aggrediamur. Aio summari posse hanc seriem:

$$\frac{2}{4}\quad \frac{5}{5}\quad \frac{9}{6}\quad \frac{14}{7}\quad \frac{20}{8}\quad \frac{27}{9}\quad \frac{35}{10}\quad \text{etc.}$$

seu $\frac{1}{2}\quad 1\quad \left[\frac{3}{2}\right]\quad \frac{2}{1}\quad \frac{5}{2}\quad \frac{3}{1}$ etc. Ut patet.

Ergo si summari posset sequens, haberemus summam $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ etc.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{3}{5} & \frac{7}{6} & \frac{12}{7} & \frac{18}{8} & \frac{25}{9} & \frac{33}{10} & \frac{42}{11} \\ & \frac{1}{6} & \frac{5}{7} & \frac{10}{8} & \frac{16}{9} & \frac{23}{10} & \\ & & & \frac{2}{8} & \frac{7}{9} & \frac{13}{10} & \end{array}$$

Si esset

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{3}{6} & \frac{7}{7} & \frac{12}{8} & \frac{18}{9} & \frac{25}{10} & \frac{33}{11} & \frac{42}{12} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{2}{1} & \frac{5}{2} & \frac{3}{1} & \frac{7}{2} \end{array}$$ etc. facile summaremus.

Differentia autem inter praecedentem et hanc seriem est

$$\frac{4}{6}\quad \frac{5}{7}\quad \frac{6}{8}\quad \frac{7}{9}\quad \frac{8}{10}\quad \frac{9}{11}\quad \frac{10}{12}$$

quam ita summabimus:

$$\frac{4}{6}\quad \frac{6}{8}\quad \frac{8}{10}\quad \frac{10}{12}\quad \text{etc.}$$

mult.

$$(6)\quad \frac{4}{1}\quad \frac{36}{8}$$

Alia fieri transpositio potest hoc modo:

$$\frac{4}{6}\quad \frac{6}{8}$$

divis.

$$(6)\quad \frac{4}{36}\quad \frac{1}{8}$$

2–5 *Nebenrechnungen auf der Rückseite:* $\frac{9}{6}\ \frac{2}{3}\quad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\quad \frac{3+4}{6}\quad \frac{7}{6}$

12 *Nebenrechnung:* $\frac{4}{6} \times \frac{6}{8}$ (with $-$ between 6 and 8) $\quad \frac{32+36}{48} = \frac{68}{48} \Big| \frac{34}{24}$

1 f. seriem: *(1)* $\frac{2}{3}\ \frac{5}{4}\ \frac{9}{5}\ \frac{7}{6}$ *(2)* $\frac{2}{4}$ *L* 3 $\frac{2}{3}$ *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{lcccc} & \frac{36}{8} & \frac{8}{10} & & \\ (8) & \frac{36}{1} & \frac{64}{10} & & \\ & & \frac{64}{10} & \frac{10}{12} \\ (10) & & \frac{64}{1} & \frac{100}{12} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lccc} & \frac{1}{8} & \frac{8}{10} & \\ (8) & \frac{1}{64} & \frac{1}{10} & \\ & & \frac{1}{10} & \frac{10}{12} \\ (10) & & \frac{1}{100} & \frac{1}{12} \end{array}$$

ergo summa: $4.36.64.\frac{100}{12}$. Eodem modo alteram $\frac{5}{7}\ \frac{7}{9}\ \frac{9}{11}$ etc.

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{6}{7} & \frac{7}{8} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{6} & \frac{25}{12} & \left[\frac{137}{60}\right] & & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \end{array}$$

---

7 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{12} \\ 50 \\ \underline{250} \\ 300 \\ \underline{12} \\ 312 \end{array}$$

5 f. etc. *(1)* Hinc mihi tandem quaesita diu se ratio offert summas ineundi fractionum quadraticarum et cubicarum etc.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \text{etc.} \\ \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & & & & \\ \frac{4}{6} & & & & & \end{array}$$

(2) $\frac{1}{1}$ *L*

7 $\frac{312}{144}$ *L ändert Hrsg.* 8 $\frac{1}{7}$ | etc. est dimidium infiniti. *gestr.* | *L*

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

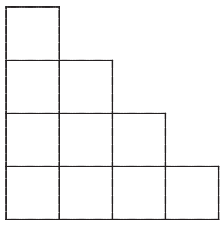
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

Nota

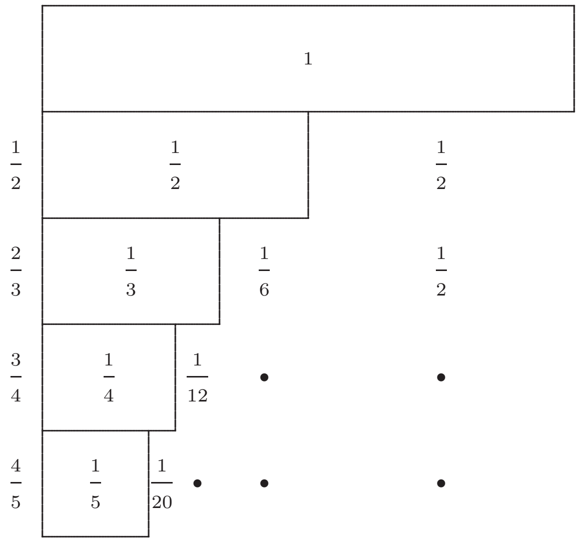
1	est	$\frac{1}{1}$	de	1	1	1	1		7	49
1	=	$\frac{1}{2}$	—	2	1	2	4		6	36
1	=	$\frac{1}{3}$	—	3	1	3	9		5	25
1	=	$\frac{1}{4}$	—	4	1	4	16		4	16
1	=	$\frac{1}{5}$	—	5	4	10	30		3	9
1	=	1	—	1	3	6	14		2	4
$\frac{1}{2}$	=	$\frac{1}{4}$	—	2	2	3	5		1	1
$\frac{1}{3}$	=	$\frac{1}{9}$	—	3						
$\frac{1}{4}$	=	$\frac{1}{16}$	—	4						

Apex erit fastigiumque analyseos atque arithmeticae infinitorum, ex datis rationibus partium, certas progressiones habentium, invenire rationes totorum.

1 f. Zeilen in der Vorlage als Spalten angeordnet.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

1–5 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{lll}
1 & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\quad \frac{2}{12}\quad \frac{3}{20} \\
\frac{1}{2} & & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6}\,\Big|\,\frac{1}{3} \quad \frac{20}{60} \\
\frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{20} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6} \\
\frac{1}{5} & &
\end{array}$$

$$\frac{1}{20}\quad\frac{2}{12}\quad\frac{3}{6}\quad\frac{4}{2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+1-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{20}=1-\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\text{ etc. facit }\frac{\text{infinitum}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\text{inf.}}{6}-\frac{2}{6}+\frac{\text{inf.}}{12}-\frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{2}\quad\frac{2}{6}\quad\frac{3}{12}\quad\frac{4}{20}=\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2}\,\text{infin.}-2\qquad\frac{1}{6}\,\frac{\text{infin.}\,-3}{3}\qquad\frac{1}{12}\,\frac{\text{infin.}\,-4}{4}$$

$$\frac{\dfrac{\text{infin.}}{2}-\dfrac{2}{2}}{\dfrac{1}{2}}\qquad\frac{\dfrac{\text{inf.}}{6}-\dfrac{3}{6}}{\dfrac{2}{6}}$$

$$\frac{\text{inf.}-2}{2}\quad\begin{matrix}+\\\times\\-\end{matrix}\quad\frac{\text{inf.}-3}{3}\quad\begin{matrix}+\\\times\\-\end{matrix}\quad\frac{\text{inf.}-4}{4}$$

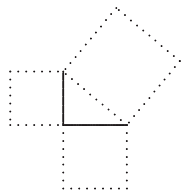
$$\frac{5\,\text{inf.}-12}{6}\quad+\quad\frac{\text{inf.}-4}{4}\quad=\quad\frac{26\,\text{inf.}-72}{24}$$

1 *Unter* $\frac{1}{20}\ \frac{2}{12}\ \frac{3}{6}\ \frac{4}{2}$: $|\ \frac{1}{20}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{3}$ *(!)* 2 *gestr.* | *L*

5 $\frac{1}{2}$ infin.−2: Nach dem Verfahren von Z. 3 würde sich hier $\frac{1}{2}\,(\text{inf}-1)+\frac{1}{6}\left(\frac{\text{inf}-2}{2}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{\text{inf}-3}{3}\right)$ etc. ergeben. Konsequent weitergerechnet müßte der Nenner des zweiten Doppelbruches in der folgenden Zeile $\frac{3}{6}$ lauten.

[*Teil 3*]

36	6	36	6	
$\underline{25}$	$\underline{5}$	$\underline{16}$	$\underline{4}$	
61	$11 \frown 11 = 121$	52	$10 \frown 10 = 100$	
		104		
25	5	25	5	$a^2 + b^2 + ab$
$\underline{16}$	$\underline{4}$	$\underline{9}$	$\underline{3}$	$Rq\,a^2 + Rq\,b^2$
41	$9 \frown 9 = 81$	34	$8 \frown 8 = 64 + 2 \frown 2 = 4$	
		68		
16	4	36	6	
$\underline{9}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	
25	$7 \frown 7 = 49$	40	$8 \frown 8 = 64$	
		$\underline{2}$	$\underline{16}$	
		80	80	



[*Fig. 5*]

Ex his exemplis colligo theorema maximi momenti ad analysin et omnem omnino arithmeticam et geometriam.

Duas radices quadratas invicem addere (subtrahere) addantur quadrata, summa duplicetur, productum excedet quadratum summae radicum, quadrato differentiae.

2–4 *Nebenrechnungen:*

36	6 + 5	
25	36 + 25 −2	

$$\begin{array}{r} 1 \\ \cancel{1}\,\cancel{2}\,6 \\ \cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{4}\,\cancel{0} \\ \hline 3\;\;2 \\ \hline \cancel{9}\,6\,2 \end{array}$$

15 f. *Daneben:* NB. verissimum.

17 quadrata, *(1)* productum *(2)* summa *L* 25 NB. *(1)* hoc verum non est nisi quando radices sunt numeri progressionis *(a)* geometricae *(b)* arithmeticae. *(2)* *(3)* verissimum *L*

$Rq\,ab + Rq\,\dfrac{cd^2}{a} = Rq\,x^2 + Rq\,\dfrac{xa^2}{d}$. Haec aequatio non nisi arte nostra a surdis purgari potest. Ecce methodum generalem purgandi omnem aequationem a numeris surdis.

$$Rq\,ab + Rq\,\frac{cd^2}{a} = x + Rq\,\frac{xa^2}{d}\ [=]\ Rq\,x^2 + Rq\,\frac{xa^2}{d}$$

$$\square\llcorner Rq\,ab + Rq\,\frac{cd^2}{a}\lrcorner = x^2 + \frac{xa^2}{d} + 2Rq\,\frac{x^3a^2}{d}$$

En regulam breviorem: quadratis addatur factus ex radicibus duplicatus, producti radix est radicum summa.

Nota si summa radicum ducatur in differentiam productum est differentia quadratorum.

Regula alia memorabilis si summa quadratorum dividatur per differentiam quotiens erit radix minor, residuum maior, modo quotiens et residuum ducantur in differentiam quadratorum.

[*Zusätze auf den Rückseiten*]

$$\begin{array}{rl} Rq\,a^2 + Rq\,b^2 & \qquad \square, Rq\,a^2 - Rq\,b^2\,. \ = a^2 + b^2 - 2Rq\,a^2b^2 \\ \underline{Rq\,a^2 - Rq\,b^2} & \\ a^2 \cancel{+ Rq\,a^2b^2} - \cancel{Rq\,a^2b^2} + b^2 & \qquad Rq\,a^2 + Rq\,b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad a^2 + b^2 \\ \underline{\qquad\quad 2 \qquad} \\ 2a^2 + 2b^2\ \ +a^2 + b^2 - 2Rq\,a^2b^2 = 3a^2 + 3b^2 - 2Rq\,a^2b^2 \\ 2a^2 + 2b^2\ \ -a^2 - b^2 + 2Rq\,a^2b^2 = [\textit{bricht ab}] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Rq\,a - Rq\,b. & \qquad 2a + 2b = \square, Rq\,a - Rq\,b. + \square, Rq\,a + Rq\,b. \\ & \qquad 2a + 2b = 2a + 2b + Rq\,ab - Rq\,ab. \end{array}$$

---

2 *Darunter:* Non est error sed nullus est usus.

9–11 *Daneben:* N B. d e r e s i d u o a q u o t i e n t e d i v e r s o.

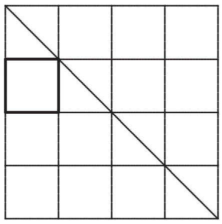
3 = *erg. Hrsg.* 9 differentiam *(1)* productum *(2)* quotiens *L* 22 *(1)* Error puto. *(2)* Non *L*

$$ab : \frac{a}{b} = \frac{ab}{\frac{a}{b}} = \frac{ab^2}{a} = b^2 \qquad \begin{matrix} ab & ac & ad \\ \\ a & a & a \\ \frac{a}{b} & \frac{a}{c} & \frac{a}{d} \end{matrix}$$

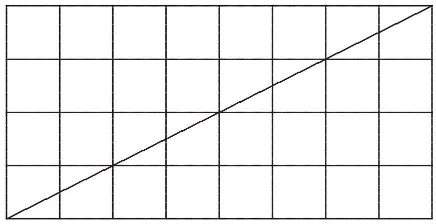
19. DE ADDITIONE SERIERUM PROGRESSIONIS ARITHMETICAE [April – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 II 1 Bl. 291–292. 1 Bog. 2°. Die oberen 3/5 von Bl. 291 abgeschnitten. 2 1/2 S. Textfolge Bl. 291 r°, 292 v°, 292 r°, 291 v°.
Cc 2, Nr. 515

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. Das Stück enthält einen Verweis auf *LSB* VII, 1 N. 36 (s. Erl. zu S. 4 Z. 12 f.) und ist daher vermutlich auch nach N. 16 (s. dort) anzusetzen.



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 2a*]

(*a*)					(*b*)	
	·	·	·	·	·	5
1	○	·	·	·	·	4
2	○	○	·	·	·	3
3	○	○	○	·	·	2
4	○	○	○	○	·	1
(*c*)	4	3	2	1		

fig. 1

	·	·	·	·	·	·	·	7
[2]	○	·	·	·	·	·	·	5
[4]	○	○	○	○	·	·	·	3
[6]	○	○	○	○	○	○	·	1

fig. 2

16 2 *erg. Hrsg.* 17 4 *erg. Hrsg.* 18 6 *erg. Hrsg.*

	○	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	13
3	○	○	○	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	10
6	○	○	○	○	○	·	·	·	·	·	·	·	·	7
9	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	·	4
12	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	·	1

fig. 3

	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	11
3	○	○	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
6	○	○	○	○	○	○	·	·	·	·	·	5
9	○	○	○	○	○	○	○	○	○	·	·	2

fig. 4

Si series numerorum arithmeticae progressionis continuae, ad initium productae, ut 5. 4. 3. 2. 1. addatur alteri seriei proxime minori ut 4. 3. 2. 1. summa 25 est $\square^{\text{tus}}$ termini maximi 5. Demonstratio patet ex fig. 1.

Imo regula universalior: Si series numerorum progressionis arithmeticae cuiuscunque productae ad unitatem, v. g. duplae, ut 1. 3. 5. 7. addatur alteri proxime minori 6. 4. 2. (0) summa est rectangulus seu factus ex ductu numeri maximi in numerum terminorum, maximae seriei, ut $7 \frown 4 = 28$. Vid. fig. 2 et 3.

12 ad initium productae *erg. L* 15 f. cuiuscunque | *(1)* ad initium productae *(2)* productae ad unitatem *erg.* | v. g. *L* 17 rectangulus seu *erg. L* 18–244,1 28. | Vid. fig. 2 et 3. *erg.* | Ab initio producta intelligitur progressio, cum producitur ad terminum minimum, quem in hac serie habere potest. Ut si progressio sit *(1)* tripla *(2)* ternaria, et terminus maximus sit 13. minimus erit 1. si maximus 12. minimus 3. si maximus 11. minimus 2. si maximus 10. minimus 1. Est ergo terminus minimus vel differentia progressionis, vel numerus aliquis ea minor. *gestr.* | Notandum *(a)* autem *(b)* quoque *L*

Notandum quoque seriem *proxime minorem* hoc loco vocari eam, cuius terminus maximus minor est unitate termino maximo praecedentis, ut post seriem 7. 5. 3. 1. proxime minor est 6. 4. 2. non vero 5. 3. 1. quae in ipsa serie maxima continebatur. Nisi quod in progressione arithmetica continua hoc tantum evenit ut series proxime minor in ipsa maiore comprehensa, et series proxime minor cuius terminus maximus unitate differt, coincidant, quia ipsa differentia progressionis arithmeticae continuae est unitas.

Imo vero regula fieri potest etiamnum, universalior: Nihil enim necesse est, progressionem arithmeticam produci ad unitatem. Potest enim *producta* intelligi *ad initium suum*, etiamsi non producatur ad unitatem, dummodo producatur ad terminum minimum quem in ea serie habere potest, id est differentiam progressionis, vel terminum aliquem, ea minorem. Ut si progressio sit ternaria, et terminus maximus sit 13. minimus erit 1. si maximus sit 12. minimus erit 3. si maximus sit 11. minimus erit 2. si maximus sit 10. minimus erit 1. Est autem 3 differentia progressionis ternariae, 2 et 1 numeri proxime minores.

Imo vero tandem ne illud quidem refert an progressio producatur ad initium suum, undecunque enim incipiat, et quocunque desinat, manebit regulae veritas, dummodo differentia inter terminos maximos progressionis maioris et minoris, sit terminus minimus progressionis maioris. Regulam ergo universalissimam et ut credo a nullo tactam, ita concipiemus:

Si sint duae series (11. 8. 5. 2. et 9. 6. 3.) progressionis arithmeticae eiusdem (ut ternariae), et differentia inter terminum maximum seriei unius, et terminum maximum seriei alterius, sit terminus minimus seriei unius, (nempe maioris) (ut diff. inter 11 et 9 est 2), et numerus terminorum unius seriei est unitate minor numero terminorum alterius seriei; tunc summa terminorum utriusque seriei erit rectangulum, comprehensum sub termino maximo seriei maioris, et numero terminorum eiusdem seriei maioris. Seu $11+8+5+2. + 9+6+3. = 11 \frown 4 = 44.$

2 maximus *(1)* minor est unitate *(2)* differt a termino *(3)* minor *L* 6 f. unitas. *(1)* Porro non refert seriesne maxima | an *gestr.* | in unitatem desinat, an alium numerum, in unitatem desinit, fig. 1. 2. 3. et exempli causa fig. *(a)* 4. *(b)* 3. ubi progressio est ternaria et terminus maximus est 13. At si ut in fig. 4. terminus maximus sit 11, minimus erit 2. Series enim erit 8. 5. 2. et tamen si addatur series proxime minor: 9 *(2)* Imo *L* 17 differentia inter terminos maximos *erg. L* 18 et ut credo a nullo tactam, *erg. L* 20 (11. 8. 5. 2. et 9. 6. 3.) *erg. L* 20 f. (ut ternariae) *erg. L* 22 f. (ut diff. inter 11 et 9 est 2) *erg. L* 25 sub *(1)* numero *(2)* termino *L*

Quia vero in progressione arithmetica continua ad initium producta numerus terminorum, et numerus maximus seriei coincidunt, ut $\begin{array}{ccccc} \text{V.} & \text{IV.} & \text{III.} & \text{II.} & \text{I.} \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \end{array}$ hinc non nisi corollarium est propositionis istius universalis, propositio ab initio posita: Si series numerorum progressionis arithmeticae continuae addatur alteri seriei proxime minori itidem ad initium productae, summam esse termini maximi quadratum.

Unde itidem corollarii instar duci potest, illustris illa propositio: Numeros impares deinceps ab unitate, esse differentias quadratorum deinceps ab unitate. Inspice fig. 1. ubi abscindendo marginem ex quadrato de 5. fit quadratum de 4. Margo autem abscissus $\underline{bac}$. componitur ex $\underline{ab}$. termino maximo, ut 5. et $\underline{ac}$. numero terminorum, itidem 5, ergo margo abscissus seu differentia $\square^{\text{torum}}$ est summa termini maximi et numeri terminorum, qui cum sint aequales, erit duplum termini maximi (vel numeri terminorum) demta tamen unitate, quia unitas, $\underline{a}$, quippe utrique tam termino maximo quam numero terminorum communis, non duplicatur. Ergo differentia duorum quadratorum est duplum radicis maioris demta unitate. Et proinde numeri impares deinceps etc.

Idem corollarium etiam hinc probatur eadem opera, quia iungendo terminos diversarum serierum fiunt numeri impares ut

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 9 & 7 & 5 & 3 & 1. \end{array}$$

Quod si sic $\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 8 & 6 & 4 & 2. \end{array}$ fiet

1 ad initium producta *erg.* *L* 2 ut *(1)* $\begin{smallmatrix} 5. & 4. & 3. & 2. & 1 \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5 \end{smallmatrix}$ *(2)* $\begin{smallmatrix} \text{V.} \\ 1. \end{smallmatrix}$ *L* 3 posita | et nunc ita reddita universalior *erg. u. gestr.* |: Si *L* 11 f. itidem 5, | est *gestr.* | ergo margo abscissus | seu differentia $\square^{\text{torum}}$ est *erg.* | summa *L* 12 maximi | 5. *gestr.* | et *L* 14 f. Ergo *(1)* differentiae quadratorum sunt *(2)* differentia *L*

7–16 Vgl. Leibniz für die Royal Society, 13.II.1673, *LSB* III, 1 N. 4 S. 25.

Unde aliud corollarium, si ad summam terminorum progressionis continuatae duplicatam accedat numerus terminorum unitate auctus vel numerus proxime maior datis summa erit quadratum huius numeri accessorii.

Ex theoremate nostro (de rectangulis,) demonstrari potest quoque, quod alibi demonstratu necessarium esse dixi triangulum rectangulum esse aequale altitudini ductae in basin facto dimidiato. Sunt enim excessus aequales, minimus omnium punctum, hinc alterius progressionis, complentis maximus cum non nisi puncto differat a maximo primae, erit aequalis.

Vellem simili ratione demonstrari quaedam possent de intactis hactenus figurarum generibus. Huius loci est lemma illud Archimedis, positum ab eo in *De spiralibus* quo utitur et Galilaeus ad quadraturam parabolae dial. 2. mech. *Si quotcunque lineae (quantitates[)] se excedant aequaliter, et excessus sit aequalis minimae earum, et sint aliae quotcunque aequales maximae, quadrati omnium harum erunt minores triplis quadratorum earum quae se excedunt sed plus quam tripli aliorum illorum quae restant subtracto quadrato maximae.*

Adde huc quae habet Galilei dial. 3. fine seu appendice, ubi de centro gravitatis.

1 si *(1)* termini progressionis continuatae duplicatae *(2)* ad *L* 10 f. quo | Archimedes *gestr.* | utitur *L* 16 dial. *(1)* ibid. *(2)* 3. *L*

4 alibi: vgl. *De bipartitionibus numerorum*, *LSB* VII, 1 N. 36 S. 227 f. 10 lemma illud Archimedis: *De lineis spiralibus*, Lemma zu prop. 10, zitiert in G. Galilei, *Discorsi*, 1638, S. 141 f. (*GO* VIII, S. 181 f.). 16 quae habet Galilei: *a. a. O.*, S. 289–[314] (*GO* I, S. 187–208)

			15	10	6	3	1			
				5	4	3	2			
	5	5	·	·	·	·	·			
3										
	8	4	·	·	·	·	○	1	2	
		4	·	·	·	·	○	1		
1										4
	9	3	·	·	·	○	○	2	6	
		3	·	·	·	○	○	2		
		3	·	·	·	○	○	2		
1										6
	8	2	·	·	○	○	○	3	12	
		2	·	·	○	○	○	3		
		2	·	·	○	○	○	3		
		2	·	·	○	○	○	3		
3										8
	5	1	·	○	○	○	○	4	20	
		1	·	○	○	○	○	4		
		1	·	○	○	○	○	4		
		1	·	○	○	○	○	4		
		1	·	○	○	○	○	4		
			0	5	9	12	14			
					4	3	2			

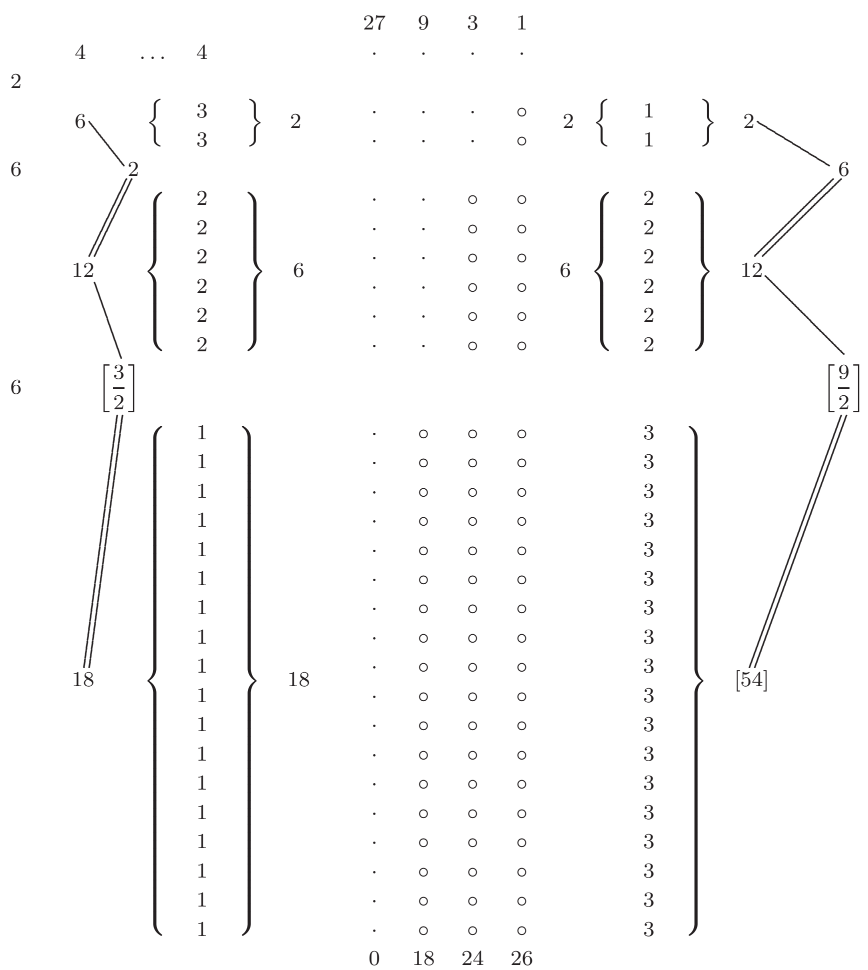
[*Fig. 5*]

Nota haec delineatio utilis esse potest ad dimensionem parabolae, vid. Galil. loc. dicto.

9–16 *Daneben:* Ulterius ista provehi possunt, et ex plano in solidum assurgi, si praegnantia intelligantur data et poterit ipsa exsurrectio eleganter exprimi inscriptis aliis magnitudinis continue deminutae. Ita in ipso plano poterit in solidum assurgi praesertim umbris nonnihil adhibitis.

---

1 f. und 22 f.: quer geschrieben. 25 vid. Galil.: *a. a. O.*, S. 142–144 (*GO* VIII, S. 182 ff.)



[*Fig. 6*]

13 2 *L ändert Hrsg.* 13 6 *L ändert Hrsg.* 23 72 *L ändert Hrsg.*

1–33 Schema quer geschrieben außer Z. 1 und Z. 33.

20. DE LOCIS INTERSECTIONUM OPE SERIERUM
[Spätes Frühjahr – Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 88. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 88 r°. Bl. 88 v° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Die verwendete Notation (Wurzelsymbol, Gleichheitszeichen) deutet auf eine Entstehung des Stückes zwischen dem späten Frühjahr 1673 und vor dem Spätsommer 1674 hin. Den Begriff des Parameters von Kegelschnitten (s. S. 250 Z. 8) hat Leibniz offenbar zuerst bei Cl. Mydorge, *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum ... libri*, 1631 u. ö. kennengelernt (vgl. *Triangulum characteristicum, speciatim de trochoidibus et cycloide*, Cc 2, Nr. 549). Auf diese Schrift ist er durch die Beilage von J. Collins in H. Oldenburgs Sendung vom 20.IV.1673 hingewiesen worden (s. *LSB* III, 1 N. 13 S. 70). Die Sendung hat Leibniz am 26.IV.1673 erhalten, wie er in seinem Schreiben an H. Oldenburg vom selben Datum erwähnt (s. *LSB* III, 1 N. 17 S. 88). Außerdem gibt es inhaltliche Berührungspunkte zu *LSB* VII, 1 N. 8 [Frühjahr – Sommer 1673], in dem ebenfalls die Frage der Anwendung von Reihen auf die Bestimmung von Kurvenschnittpunkten erörtert wird (s. dort S. 107 Z. 22 – S. 108 Z. 4). Darüber hinaus notiert Leibniz dort S. 106 Z. 16 f., daß die Ellipse der geometrische Ort aller Dreiecke mit festem Umfang und gegebener Basis zwischen den Brennpunkten ist; die Bemerkung in N. 20 S. 250 Z. 12 f. verallgemeinert diesen Sachverhalt. N. 20 dürfte also kurz nach *LSB* VII, 1 N. 8 entstanden sein.

An ope serierum convergentium inveniri possunt per numeros loca intersectionum, seu ordinatae communes duarum curvarum?

Non sunt contemnendae contemplationes Iacobi Gregorii de serierum convergentium terminationibus inveniendis: etiamsi in infinitum procedant. Sed rem non videtur in regulam redegisse, neque artem exhibuisse semper quando id fieri potest [invenire] quantitatem quae eodem modo componatur ex duobus terminis quibuslibet.

Mihi ita videtur; id semper fieri non posse. Non magis quam figurae omnes aequationis sunt capaces: nec ideo figurae desinent habere terminationem; etsi aliter componantur

22 f. de *(1)* ineunda *(2)* serierum convergentium *(a)* summis ineundis *(b)* terminationibus *L*
24 invenire *erg. Hrsg.*

22 contemplationes Iacobi Gregorii: *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, S. 19–24 [Marg].

termini. Semper quidem habebitur regula quaedam, sed non semper aequatio. Ut si figura logarithmica descripta fingatur.

Exemplo quodam opinor convincere licebit eius doctrinam, adhibendo ☽$^{\text{nulam}}$ Hippocratis investigandoque per inscripta et circumscripta: non puto inveniet eius quadrabilitatem; neque modum quendam exhibendi terminationem eodem semper modo compositam. Caeterum ubi id fieri potest tradam ego methodum universalem, quae eadem est, ac si data quadam figura geometrica; sed in meris incognitis, propositum sit quaerere parametrum. Ut si propositum sit quaerere figuram, quae componatur ex mediis proportionalibus inter continue crescentes decrescentesque aequaliter, sunto duae inter quas quaeritur media x. z. media erit $\sqrt{xz}$. eritque aequatio $y^2 = xz$. Deinde $y^2 = x + \beta \frown z - \beta = xz - x\beta + \beta z - \beta^2$. sed haec aliter facilia reductu. Difficilius si supponatur: e. g. figura habens duos focos, ita ut summae laterum inde ad curvam ductorum aequentur continue applicatis eiusdem trianguli rectanguli.

NB. Hac methodo per synthesin examinandum an dentur figurae altioris gradus quae focos habeant tres, etc. item quae focos habeant duos, sed qui non dent aequalitatem sed certam progressionem summarum vel differentiarum.

1 termini *erg.* *L* 2 fingatur. *(1)* Caeterum ubi reperiri potest haec ae *(2)* Exemplo *L* 9 proportionalibus *(1)* | quarum *streicht Hrsg.* | una continue *(2)* inter *L* 14 examinandum *(1)* aliae *(2)* an *L*

---

6 methodum: Gemeint ist wohl die in *Ex Dettonvillaeo seu Pascalii geometricis excerpta: cum additamentis* (Cc 2, Nr. 544) entwickelte Methode; vgl. D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 31–35.

21. DE METHODI QUADRATURARUM USU IN SERIEBUS
[August – September 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 237–238. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 38 r°. Bl. 37 r°, v° u. Bl. 38 v° leer.
Cc 2, Nr. 694

Datierungsgründe: N. 21 setzt inhaltlich den Brief von H. Oldenburg vom 16.IV.1673 (*LSB* III, 1 N. 13) voraus (s. Erl. zu S. 252 Z. 17). Das Wasserzeichen des Papiers ist für August 1673 belegt. Leibniz verwendet den in *Methodus tangentium inversa seu de functionibus* (Cc 2, Nr. 575, datiert August 1673) eingeführten Begriff functio (s. S. 252 Z. 12), so daß N. 21 vermutlich danach anzusetzen ist. Da Leibniz bei der Aufzählung seiner Entdeckungen die Kreisreihe nicht erwähnt, dürfte das Stück vor Herbst 1673 entstanden sein.

Posita quadratura hyperbolae et omnium eius partium sequitur quadratura figurae logarithmorum, ex iis quae a Gregorio a S. Vincentio et ex eius principiis a P. Sarrasa demonstrata sunt, de relatione logarithmorum ad hyperbolam. Cum vero methodum invenerim generalem describendi figuram quae u b i q u e   q u a d r a r i   p o t e s t adhibita inprimis 2[da] methodo quadraturarum universali, quae per segmenta, et dimidias productas procedit: Hinc descripta ista figura logarithmorum habebitur inventio quotcunque mediarum proportionalium, sola altitudinis figurae logarithmicae sectione, ita ut sectio anguli aut rationis in data ratione, reducatur ad sectionem rectae in data ratione.

Inventa methodo quadraturarum, secunda inprimis per segmenta et dimidias reductarum, seu per portiones applicatarum, continetur aliquid omni quadratura maius, methodus scilicet inveniendi summas omnium serierum; sive infinitarum, sive finitarum. Quo nihil maius in his scientiis a pura ratiocinatione pendentibus, optari propemodum

13 logarithmorum, *(1)* ut a Gregorio a S. Vincentio demonstratum est *(2)* ex *L* 22 serierum; *(1)* item methodus *(2)* sive *L*

13 S. Vincentio: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, Buch VI prop. CIX S. 586 f. 13 Sarrasa: A. de SARASA, *Solutio problematis*, 1649, S. 5–17. 14 methodum: vgl. die Erl. zu S. 250 Z. 6. 16 2[da] methodo: Zur Entstehungsgeschichte des Transmutationssatzes im Anschluß an Cc 2, Nr. 545/6 vgl. D. MAHNKE, *Neue Einblicke*, 1926, S. 34–37 und die Erläuterung in *LSB* III, 1 S. 115 f.

potest. Nam series proposita quam suppono esse regularem, id est ab aequatione quadam pendentem, nam confusum chaos terminorum, cum regula careat, utique non nisi singulis collectis in summam addi potest, potest concipi in modum figurae, in qua scilicet unitas constructionis non est infinite parva, atque ita methodo geometrica haberi potest summa; et quidem per portiones quas dixi applicatarum. (Nam altera methodus ubi summa sinuum ad basin initur, non facile habet locum, nisi altitudine in infinitum divisa infinitoque existente numero eorum quorum summa quaeritur.) Et notandum est idem esse solvere hoc problema, ac invenire aliud problema calculi seu arithmeticae universalis, invenire scilicet seriem, cuius differentiae sint termini seriei datae, quod problema alioquin profecto desperatum hoc modo solvitur. Nam si data serie quadam, alia quaeritur series, cuius termini pro differentiis habeant terminos seriei datae; tunc quaerenda est figura in qua lineae terminos seriei datae repraesentantes faciant functionem portionum ex applicatis, quam dixi; et rectangula sub applicatis huius figurae in suam abscissam ductis dimidiata; erunt termini, quorum differentiae erunt termini seriei datae.

Porro etsi series data sit confusa, tentandum est, an in regulam reduci possit, quod peculiaris artis negotium futurum est, habetque aliquid commune cum iis quae de interpolationibus Collinius dixit, sed et cum iis quae in *Arte combinatoria* dixi, nulla esse tam confusa in quibus aliquis omniscius non possit observare quandam harmoniam, etsi forte ab altissimi gradus, v. g. centesimae dimensionis aequatione pendeat. Sed cum termini sunt nimis multi id homini mortali utique difficillimum foret, etiam regulis in eam rem datis; si pauci, non est operae pretium summam per hanc methodum invenire, cum facile addi possint methodo communi. Sunt duo alii huius speculationis fructus maximi, quod huius artis ope, divinari quodammodo posset, et data aliqua serie, vel ab homine, vel a natura; ab homine, ut si tabulam videam Angli pro futuris declinationibus a se calcu-

1 Nam *(1)* unitas constructionis *(2)* series *L* 6 basin *(1)* intelligatur *(2)* initur *L* 6 nisi *(1)* partibus in infinitum divisis *(2)* altitudine *L* 7 quaeritur *(1)* , utroque inquam iuncto, quia posterius potest esse aliquando sine priore, ut in *(2)* .) Et *L* 8 arithmeticae *(1)* inf *(2)* universalis *L* 23 posset, *(1)* discernique *(2)* et *L*

17 Collinius: Leibniz wurde durch H. Oldenburg im Brief vom 16.IV.1673 über die Interpolationsmethode von J. Collins unterrichtet (*LSB* III, 1 N. 13 S. 58–60). 17 dixi: vgl. *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, problema II § 33 S. 25 (*LSB* VI, 1 S. 187). 24 Angli: H. Bond, *The Variations of the Magnetick Needle predicted for many years following*, in *Philosophical Transactions* III Nr. 40 vom 19./29. Okt. 1668, S. 789 f.

latam; a natura, ut si tabulam intuearis observationum a nautis ut a Beaulieu de dictis variationibus factarum; invenire aequationem seu rationem seriei tabulaeque constructionem. Potest autem eadem series data esse pars aliarum diversarum, ex his eligenda est simplicissima aut rebus praesentibus accommodatissima, quod aliunde dignosci potest. Posse esse differentium partes, sic probo: Quia si v. g. unus adhuc terminus adderetur nullae ad alios terminos relationis, opus foret ad altiorem forte ire aequationem regulae seriei reperiendae causa. Est haec ipsissima doctrina divinandi seu de hypothesibus, quam nemo accurate tractavit. Huius pars est doctrina de chiffris construendis solvendisque, quam vellem a Wallisio accurate tradi.

Alius usus est huius artis, reducendi terminos confusos datos, ad seriei regularis formam, isque maximus et propemodum non aliunde compensabilis, datis scilicet pluribus quantitatibus surdis quarum summa quaeritur; cum enim hactenus nemo mortalium in hoc genere remedium invenerit, id ab hac methodo in promtu est. Fingendo scilicet eas esse partes seriei cuiusdam regularis cuius summam quaerimus. At ne in natura seriei illius regularis investiganda, nimia nos difficultate calculi oneremus, ideo duos tresve terminos summemus; et rursus alios duos vel tres; et horum summas rursus eadem plane methodo.

Hinc haberi potest summa radicum surdarum, res impossibilis habita hactenus, et mihi ipsi desperata. Et hic vero in serie surdarum finita methodo ista ineundi summam seriei datae, non tantum, ut in rationalibus, utilis est (nam in rationalibus finitis si velimus possumus singulatim computare), sed et necessaria, cum nulla alia extet; quemadmodum et in seriebus infinitis sive rationalium sive irrationalium.

19 in *(1)* serie *(2)* serie *(a)* finita *(b)* surdarum finita *erg. L* 20 finitis *erg. L*

1 Beaulieu: A. de Beaulieu, *Mémoires du voyage aux Indes orientales*, gedruckt in M. Thevenot [Hrsg.], *Relations de divers voyages curieux* II, 1666 [Marg.], enthält S. 124–127 eine von Beaulieus Steuermann Le Tellier zusammengestellte Tafel der magnetischen Deklination. Die Marginalien zu dieser Tafel in Leibniz' Handexemplar (Niedersächs. Landesbibl. Hannover E-A 10026) stammen aus Hannoverscher Zeit (vgl. die Erl. in *LSB* III, 3 S. 445 sowie M. Palumbo, *Leibniz e i geographica*, 1996, S. 31–33 u. 198 f.). 9 Wallisio: J. Wallis erwähnt seine Dechiffriertätigkeit in der *Mathesis universalis*, 1657, cap. IX S. 56 (*WO* I, S. 47). Leibniz' Quelle waren möglicherweise die Hinweise in Th. Hobbes, *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*, 1660, S. 36 bzw. *Dialogus physicus*, 1661, S. 35 (recte: 34), auch gedr. in *Opera philosophica*, 1668, pars II S. 38 f. bzw. pars VI S. 38, (*HOL* IV S. 55 bzw. S. 290), oder in B. de Monconys, *Journal des voyages*, P. 2, 1666, S. 54.

Omnes series arithmeticae reduci possunt ad seriem numerorum naturalium varie complicatorum, quemadmodum omnes series geometricae ad x. abscissam, cum semper relatio inter applicatam et abscissam haberi queat.

22. PROGRESSIONIS HARMONICAE DIFFERENTIAE
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 12–13. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 12 v° u. 13 r°, tlw. zweispaltig. Auf dem Rest des Bogens Cc 2, Nr. 1237 u. 1238 (Druck in einem späteren Band der Reihe) mit der auch N. 22 umfassenden Überschrift: „*De quadratura circuli et hyperb. et aliis curvis inde pendentibus et utrum duae illae a se invicem quod hic asseritur. Item progressionis harmonicae differentiae*“.
Cc 2, Nr. 1239

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum August 1673 bis Juni 1674 belegt. Die auf den Rest des Bogens geschriebenen Fortsetzungen (Cc 2, Nr. 1237 u. 1238) zur bisher frühesten bekannten Abhandlung zur Kreisreihe, der *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A), sind offenbar nach N. 22 entstanden. Das Stück ist vor N. 25 anzusetzen, das einen Verweis auf Cc 2, Nr. 1237 enthält. Es dürfte also etwa zur Zeit der Entdeckung der Kreisreihe oder kurz danach entstanden sein.

[Progressionis harmonicae differentiae]

[*Teil 1*]

Si qua sit figura, quae procedat instar numerorum sequentium:

1		2^2		3^3		4^4		5^5	
1		4		27		256		3125	etc.
	3		23		229		2869		
		20		206		2640			
			186		2434				
				2248					

Si sit $x \qquad \dfrac{4x^2}{a} \qquad \dfrac{27x^3}{a^2} \qquad \dfrac{256x^4}{a^3} \qquad \dfrac{3125x^5}{a^4}$

differentiae $\dfrac{4x^2 - xa}{a}$ [*bricht ab*]

15 Progressionis ... differentiae *erg. Hrsg. nach Cc 2, Nr. 1237*

[*Teil 2*]

$$\underbrace{\frac{1}{6}\qquad\frac{1}{5}}_{\frac{5+6}{30}}\;\underbrace{\qquad\frac{1}{4}}_{\frac{5+4}{20}}\;\underbrace{\qquad\frac{1}{3}}_{\frac{4+3}{12}}\;\underbrace{\qquad\frac{1}{2}}_{\frac{3+2}{6}}\;\underbrace{\qquad\frac{1}{1}}_{\frac{2+1}{2}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{6}\qquad\frac{1}{5}}$$

$$\underbrace{\frac{5+6}{30}\qquad\frac{1}{4}}$$

0 20 44 74

$$\underbrace{\frac{20+24+30}{120}\qquad\frac{1}{3}}$$

20 24 30

$$\underbrace{\frac{60\ 72\ 90\ 120}{360}\qquad\frac{1}{2}}$$

$$\underbrace{\frac{120\ 144\ 180\ 240\ 360}{720}\qquad\frac{1}{1}}$$

0 60 132 222 342

$$\frac{120\ 144\ 180\ 240\ 360\ 720}{720}$$

60 72 90 120

Maximus semper terminus unius expressionis est minimus sequentis aut parum variatus NB.

255,19 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rl} 4 & \bullet \\ \underline{4} & \\ 16 & \bullet\ \bullet \\ \underline{4} & \\ 64 & \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \underline{4} & \\ 256 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{rl} 5 & \bullet \\ \underline{5} & \\ 25 & \bullet\ \bullet \\ \underline{\ \ 5} & \\ 125 & \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \underline{\ \ 5} & \\ 625 & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \underline{\ \ \ 5} & \\ 3135 & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

0		120		264		444		684		1044		1764
	120		144		180		240		360		720	
		96		108		120		120		0		
		24		36		60		120		360		
			12		24		60		240			
				12		36		180				
					24		144					
						120						

$$\frac{720\quad 360\quad 240\quad 180\quad 144\quad 120}{720}+\frac{1}{7}\quad \text{vel}\quad \frac{10\quad 12\quad 15\quad 20\quad 30\quad 60}{60}+\frac{1}{7}\quad \text{fiet}$$

$$\frac{420\quad 210\quad 140\quad 105\quad 84\quad 70\quad 60}{420}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{3360\quad 1680\quad 1120\quad 840\quad 672\quad 560\quad 480\quad 420}{3360}$$

vel $$\frac{840\quad 420\quad 280\quad 210\quad 168\quad 140\quad 120\quad 105}{840}$$

---

1 *Nebenrechnung:*

120	120
144	264
180	444
240	684
360	1044
720	1764

2–5 *Nebenrechnung:*

120		
	96	
24		[84]
	12	
12		

16 72 *L ändert Hrsg.*

Summae serierum transversalium ascendentium

720			
	120		
600		0	
	120		
480		24	
	96		0
384		24	
	72		
312			

At summae serierum transversalium demtis terminis extremis:

120	
	0
120	
	24
96	
	24
72	

NB. eaedem cum differentiis summarum serierum transversalium ascendentium integrarum.

NB. Eodem modo summa demtis duabus extremis 0. 24. 24. est secunda differentia.

$\begin{array}{ccccc} a & & b & & c \\ & a-b & & b-c & \end{array}$, et $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a-b}{b-c}$, quaeritur $a+b+c$. Ergo $ab - ac = ca - bc$. Ergo $ab = 2ac - bc$, et $\dfrac{ab}{c} = 2a - b$ vel $ab + bc = 2ac$. Ergo $a + b = \dfrac{2ac}{b}$ et $c + d = \dfrac{2ce}{d}$ et $e+f = \dfrac{2eg}{f}$. Iam $\dfrac{2ac}{b} + \dfrac{2ce}{d} = \dfrac{2acd + 2bce}{bd}$. $\dfrac{2acd + 2bce}{bd} + \dfrac{2eg}{f} = \dfrac{2acdf + 2bcef + 2bdeg}{bdf}$.

Memorandae proprietates seriei harmonicae:

1–9 *Nebenrechnungen:*

		180		
	240	180	288	240
	240	60	72	48
	<u>120</u>	<u>60</u>	<u>24</u>	<u>24</u>
720	600	480	384	312

Si cuiusdam seriei harmonicae sed integrae differentiae differentiarum exhibeantur, primae cuiuslibet gradus faciunt eandem seriem harmonicam.

Si expositis continue differentiis series transversales ascendentes fiant, quae semper iungant exempli causa: terminum tertium seriei primae directae, secundum secundae directae, primum tertiae directae, etc. In eiusmodi serie transversa semper termini utrinque aequidistantes sibi respondent, ut in serie: 180. 60. 60. 180. Hinc series transversae descendentes aequales directis. Unde series quoque certa ratione se per crucem intersecantes ut 60. 24. 12. eaedem sunt.

Sed maxime memorabilis proprietas haec: In differentiis primi gradus, prima differentia est $\frac{1}{2}$, secunda $\frac{1}{6}$, 3^{tia} $\frac{1}{12}$, quarta $\frac{1}{20}$ etc. termini primi.

differentiae 2^{dae} 240. 60. 24. etc. comparentur cum 360. primo termino secundae seriei descendentis, fiet
$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} & \frac{1}{30}. \\[4pt] \frac{20}{30} & \frac{5}{30} & \frac{2}{30} & \frac{1}{30} \end{array}$$

At 180. 36. 12. in 240. sunt: $\frac{3}{4}\left(\frac{15}{20}\right)\ \frac{3}{20}\ \frac{1}{20}$ sed satius etiam secundas et tertias differentias conferre cum termino omnium primo, ut 240. 60. 24. 12 cum 720 fiet

11–14 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{l} \cancel{1}\cancel{2} \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{0} \ \ \cancel{f}\ \ 15 \\ \cancel{2}\cancel{4}\cancel{4} \\ \ \cancel{2} \end{array} \qquad\qquad \frac{36}{240} \ \ \frac{3}{20}$$

1 cuiusdam *(1)* proposition *(2)* seriei harmonicae | *(a)* incipi *(b)* sed integrae *erg.* | differentiae *L*
14 et tertias *erg.* *L*

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{30} \quad \left[\frac{1}{60}\right]$$

$$\frac{40}{120} \quad \frac{10}{120} \quad \frac{4}{120} \quad \left[\frac{2}{120}\right] \quad \text{seu} \quad \frac{20.\ 5.\ 2.\ 1}{60}.$$

Si semper cum antecedente vel sequente termino conferas differentiam, fiet in serie differentiarum prima $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, nam 360 est $\frac{720}{2}$ sed et $360 = \frac{360}{1}$. Iam $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{lll} 120 = \frac{360}{3} & 120 = \frac{240}{2} & \frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ 60 = \frac{240}{4} & 60 = \frac{180}{3} & \text{etc.} \\ 36 = \frac{180}{5} & 36 = \frac{144}{4} & \\ 24 = \frac{144}{6} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 240 = \frac{2}{3}\ 360 & 240 = \dfrac{120}{\frac{1}{2}} \ \left(\frac{2}{1} \frown 120\right) & 180 = \frac{3}{4}\ 240 & 180 = \frac{3}{1}\ 60 \\ 60 = \frac{2}{4}\ 120 & 60 = \dfrac{60}{\frac{2}{2}} \ \left(\frac{2}{2} \frown 60\right) & 36 = \frac{3}{5}\ 60 & 36 = \frac{3}{2}\ 24 \\ 24 = \frac{2}{5}\ 60 & 24 = \dfrac{36}{\frac{3}{2}} \ \left(\frac{2}{3} \frown 36\right) & 12 = \frac{3}{6}\ 24 & 12 = \frac{3}{3}\ 12 \\ 12 = \frac{2}{6}\ 36 & 12 = \dfrac{24}{\frac{4}{2}} \ \left(\frac{2}{4} \frown 24\right) & & \end{array}$$

---

7 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} \ \ 3 \\ \cancel{1}\cancel{8}0 \ \cancel{\div}\ 5 \\ \ \ \cancel{3}6 \end{array}$$

1 $\frac{1}{40}$ *L ändert Hrsg.* 2 $\frac{1}{120}$ *L ändert Hrsg.* 3 cum *(1)* sequent *(2)* antecedente | vel sequente *erg.* | termino *L*

Numerus maximae seriei transversalis ascendentis 120. 24. 12. 12. 24. 120 intermedius (12) est semper omnium numerorum mensura communis. Semper ergo videbimus quomodo in illis contineatur mensura communis seu dividantur omnia per 12 fiet:

10		12		15		20		30		60
	2		3		5		10		30	
		1		2		5		20		
			1		3		15			
				2		12				
					10					

10 − 2	[12 − 3]	15 − 5	20 − 10	30 − 30
8	[9]	10	10	0

---

4 *Nebenbetrachtungen:*

NB.	10	2		
	15	3.	5	
	30		10	
	10	2		5)
	15	3		
	12	3		4)
	20	5		
	15	5		3)
	30	10		
	20	10		2)
	60	30		

NB.		5	25	
	3			7
		8	32	
	7			13
		15	45	
	[25]			35
		40	80	

1 120 . . . 120 *erg. L* 2 (12) *erg. L* 10 12 − 3 *erg. Hrsg.* 11 9 *erg. Hrsg.* 18 20 *L ändert Hrsg.*

420		210		140		105		84		70		60		
	210		70		35		21		14		10			
840		420		280		210		168		140		120		105
9		9		9		9		9		9		9		9
7560		3780		2520		1890		1512		1260		1080		945
	420		140		70		42		28		20		15	

210 − 210		140 − 70		105 − 35		84 − 21		70 − 14		60 − 10
0		70		70		63		56		50
			0		7		7		6	
						0		1		

420 − 420		280 − 140		210 − 70		168 − 42		140 − 28		120 − 20		105 − 15	
0		140		140		126		112		100		90	
													9
		0		14		14		12		10			
												5	
						0		2		2			
											1		
									0				

3–6 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 210 \\ \underline{168} \\ 42 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{8}40\ \cancel{|}\ 8 \\ \cancel{1}05 \end{array}$$

13–17 + 263, 4–10: Leibniz hat beiden Schemata Schrägzeilen angefügt, die durch einen Schrägstrich abgetrennt wiedergegeben werden. In Z. 17 hat er die durch $90 : 10 = 9, 10 : 2 = 5$ gewonnene Folge für $2 : 0$ mit 1 fortgesetzt.

7560 3780 2520 1890 1512 1260 1080 945 840

3780 1260 630 378 252 180 135 105

0 1260 1260 1134 1008 900 810 735

660

0 126 126 108 90 75

60

0 18 18 15

12

0 3

[0]

3

Ex hoc fundamento videtur ratio iniri posse colligendi summam progressionis harmonicae. Quia differentiarum iniri potest summa, et differentiarum quoque inter differentias et terminos sequentes videtur haberi posse summa.

1–4 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 1890 \\ \underline{1512} \\ 378 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1512 \\ \underline{1260} \\ 252 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1512 \\ \underline{378} \\ 1134 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1260 \\ \underline{1134} \\ 126 \end{array}$$

3–8 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 3 \\ \underline{5} \\ 15 \\ \underline{5} \\ 75 \end{array} \qquad 735 ⨍ 9$$

10 3 *ändert Hrsg.* 13 differentiarum *(1)* ratio *(2)* iniri *L*

23. PROGRESSIO FIGURAE SEGMENTORUM CIRCULI AUT EI SYGNOTAE

[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 93–94. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 94 v° u. 93 r°. Auf Bl. 93 v° u. 94 r° Cc 2, Nr. 559 (Druck in Band VII, 4).
Cc 2, Nr. 557, 558

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1673 belegt.

Progressio figurae segmentorum circuli, aut ei sygnotae

[*Teil 1*]

$$\frac{100}{100} \qquad \frac{100}{108} \qquad \frac{100}{118} \qquad \frac{100}{132}$$

2

$\dfrac{100}{100+1 \frown 2} \qquad \dfrac{100}{100+4 \frown 2}$, etc. divisisque omnibus per 2. fiet:

$\dfrac{50}{50+1} \qquad \dfrac{50}{50+4} \qquad \dfrac{50}{50+9} \qquad \dfrac{50}{50+16}$ etc. vel:

$\dfrac{a}{a+1} \qquad \dfrac{a}{a+4} \qquad \dfrac{a}{a+9} \qquad \dfrac{a}{a+16}$ etc. vel

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}} \qquad \dfrac{1}{1+\dfrac{4}{a}} \qquad \left[\dfrac{1}{1+\dfrac{9}{a}}\right] \qquad \dfrac{1}{1+\dfrac{16}{a}}$, vel $\dfrac{1}{\dfrac{16}{16}+\dfrac{16}{a}}$ vel $\dfrac{\dfrac{16}{16}}{\dfrac{16}{16}+\dfrac{16}{a}}$, divisisque omnibus per 16, fiet: $\dfrac{\dfrac{1}{16}}{\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{a}}$, vel $\dfrac{\dfrac{1}{16}}{\dfrac{a+16}{16a}}$ vel $\dfrac{a}{a+16}$.

15 $\dfrac{1}{1+\dfrac{9}{a}}$ *erg. Hrsg.*

$$\frac{a}{a+1} - \frac{a}{a+4} = \frac{a^2+4a-a^2+a}{a^2+4a+a+4} = \frac{5a}{a^2+5a+4}, \text{ sive omissis caeteris } \frac{5a}{a^2} = \frac{5}{a}.$$

Ergo differentiae huius figurae sunt homogeneae summis ex duobus numeris quadratis proximis, ut

$\underbrace{0+1}_{1}$ $\underbrace{1+4}_{5}$ $\underbrace{4+9}_{13}$ $\underbrace{9+16}_{25}$ $\underbrace{16+25}_{41}$ $\underbrace{25+36}_{61}$ $\underbrace{36+49}_{85}$ etc. quae si ducantur in distantias seu numerum terminorum, summae eorum aequantur sive homogeneae sunt summis figurae:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 11 & & 51 & & 151 & & 356 & & \text{etc.} & & & & & \\
& 1 & & 10 & & 39 & & 100 & & 205 & & 366 & & 595 & & 904 & & 1305 \\
& & 9 & & 29 & & 59 & & 105 & & 161 & & 229 & & 309 & & 401 & \\
& & & 20 & & 30 & & 44 & & 56 & & 68 & & 80 & & 92 & & \\
& & & & 10 & & 14 & & 12 & & 12 & & 12 & & 12 & & & \\
& & & & & 4 & & 2 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
& & & & & & 2 & & 2 & & 0 & & 0 & & & & & \\
& & & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & & & & \\
& & & & & & & & 0 & & 0 & & & & & & & \\
& & & & & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

---

1 *Daneben:* Male.

9 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 49 \\ \underline{64} \\ 113 \\ \underline{8} \\ 904 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ \underline{81} \\ 145 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 145 \\ \underline{9} \\ 1305 \end{array}$$

2 differentiae *(1)* harum *(2)* huius *(a)* progr *(b)* figurae *(aa)*, sive eius reduct *(bb)* sunt *L*

---

1 Im Zähler des mittleren Ausdrucks der Gleichungskette müßte $-a$ und konsequent im folgenden $3a$ bzw. 3 stehen. Die Addition von Termen mit der „unitas constructionis“ zu Konstanten ist jedoch nicht zulässig, wie Leibniz selbst erkennt und am Rand anmerkt. Auf S. 266 Z. 1 f. führt er die Differenzenberechnung neu durch. 8–17 Die Berechnung der Werte des Schemas wird durch zwei Flüchtigkeitsfehler — 51 statt 50 in Z. 8, 59 statt 61 in Z. 10 — beeinträchtigt.

$$\frac{a^3}{a^2+y^2} - \frac{a^3}{a^2+y^2+1+2y} = \frac{a^5+y^2a^3+a^3+2ya^3-a^5-a^3y^2}{a^4+2a^2y^2+y^4}$$

sive $\dfrac{2ya^3}{a^4+2a^2y^2+y^4} = x$ quae ideo quadrabilia[,] ideo etiam quadrabilis figura ipsius $\dfrac{a^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$ seu $\dfrac{a^4}{y^4}$ summas continens. Ita ex hyperboloeidibus vel paraboloeidibus quadrabilibus alias figuras comminisci licet, quadrabiles.

Ducantur in y, fiet: $\dfrac{2y^2a^3}{a^4+2a^2y^2+y^4}$ quae etiam pendent ex circuli quadratura. Quae homogenea sunt momento omnium $\dfrac{ya}{a^2+y^2}$ horum haberi potest summa.

	1		2		6		19		66		102		etc.	
0		1		5		13		25		41		61		
		1		2		3								

Igitur quando in seriem aliquam geometricam inquiritur, reducatur in arithmeticam, tum pure nullo omissso examinetur, si opus, tum omittantur quae inferioris sunt dimensionis; et, differentiae eius differentiarumve differentiae quaerantur, vel sume si alia non succedant continue differentias a differentiis et terminis seqq. omissis semper quae opus, donec incidatur in differentias inter se aequales. Quo reperto habetur quadratura. Quod si frustra ita progrediaris et vel mutata serie, vel retenta non evanescunt tandem differentiae; duc differentiarum primarum quarundam seriem in numerum terminorum, et aliam habes figuram, cuius quadratura cum figurae datae quadratura eadem, quam eodem rursus modo examinare potes.

NB. Si cuius figurae datur quadratura, etiam seriei differentiarum in numerum terminorum ductarum datur quadratura.

Inquirendum aliquando in naturas figurarum continue variantium, quae scilicet non sunt certae dimensionis sed transcendentes, ut: 1. 2. 6. 24. 120. huiusmodi figurae

2–4 ideo ... quadrabiles *erg. L* 5 f. quadratura. *(1)* Horum quae aequantur mo *(2)* homogenea *L* 10 aliquam | vel in *gestr.* | geometricam *L* 10 f. arithmeticam, *(1)* | omittantur *streicht Hrsg.* | *(a)*, quae inferi *(b)* ac *(c)* vel primu *(2)* tum *L* 12 f. vel ... seqq. *erg. L* 16 primarum *erg. L* 21 scilicet *(1)* crescunt, *(2)* non *L*

7 Richtig summiert ergeben sich die Werte 0, 1, 6, 19, 44, 85; die Fehler wirken sich nicht weiter aus.

quaerantur tangentes, aliaque. Video enim talis naturae aut similis id est transcendentem fore figuram circuli et hyperbolae quadratricem; et nemo huiusmodi figuras consideravit in geometria, cum tamen et motu continuo filorum flexorum describi queant, quando sunt quadratrices. Atque ita quadraturis illis inventis dici etiam possunt geometricae, etsi non sint aequabiles.

[*Teil 2*]

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{1}+\cancel{a}} \fint 1 - \frac{a}{1+a}. \text{ Nam } \frac{1}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a}. \text{ Unde } = 1 - \frac{a}{1+a}.$$

$$-\frac{\cancel{a}+a^2-a^2}{\cancel{1}+a} = \fint -a + \frac{a^2}{1+a}$$

$$\frac{a^2}{1+a} \fint = \frac{\cancel{a^2}+\cancel{a^3}-a^3}{\cancel{1}+\cancel{a}} \fint a^2 - \frac{a^3}{1+a}$$

$$1 \cdots\cdots - a \cdots\cdots + a^2 - \frac{a^3}{1+a} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1-a+a}{1-a} \fint 1 + \frac{a}{1-a}$$

$$+\frac{\cancel{a}-\cancel{a^2}+a^2}{\cancel{1}-\cancel{a}} \fint a + \frac{a^2}{1-a}$$

$$+\frac{a^2}{1-a} \fint a^2, \quad \frac{a^3}{1-a}$$

$$1 \cdots\cdots + a \cdots\cdots + a^2 + \frac{a^3}{1-a} \text{ etc.}$$

2 fore *(1)* quadraturam *(2)* figuram *L* 2 et hyperbolae *erg. L*

$$\frac{1}{1+\frac{1}{10}} = \frac{1+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}}{1+\frac{1}{10}} =$$

$$\llcorner 1 - \frac{\frac{1}{10}}{1+\frac{1}{10}} \lrcorner$$

$$\cdots\cdots = \frac{\cancel{\frac{1}{10}} + \cancel{\frac{1}{100}} - \frac{1}{100}}{\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{10}}} \text{ƒ} = \llcorner \frac{1}{10} - \frac{\frac{1}{100}}{1+\frac{1}{10}} \lrcorner$$

$$\cdots\cdots = \frac{\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{1000}}{1+\frac{1}{10}} = \frac{1}{100} - \frac{\frac{1}{1000}}{1+\frac{1}{10}},$$

$$\cdots\cdots = \frac{\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}-\frac{1}{10000}}{1+\frac{1}{10}} = \frac{1}{1000} - \frac{\frac{1}{10000}}{1+\frac{1}{10}}$$

$$1 \cdots\cdots - \frac{1}{10} \cdots\cdots + \frac{1}{100} \cdots\cdots - \frac{1}{1000} \text{ etc.}$$

---

1 *Nebenbetrachtungen:*

$$\frac{1}{\frac{11}{10}} \quad \frac{10}{11} \qquad \frac{2}{2+\frac{1}{10}} = \frac{2+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}}{2+\frac{1}{10}} = \text{ƒ}\, 1 - \frac{\frac{1}{10}}{2+\frac{1}{10}} \qquad \frac{2}{\frac{21}{10}} = \frac{20}{21} \qquad \frac{4}{4+\frac{1}{10}} \quad \frac{40}{41}$$

$$\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} \sqcap 1 - \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}}$$

$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}} = \frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}} \sqcap 1 - \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}$$

$$\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} = \qquad 1 \cdots\cdots\cdots\cdots - 1 + \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}.$$

Sed nulli usui ista sunt.

270,1–11 *Daneben:* Nota quoniam $\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a+b}$ ideo statim una harum fractionum in alteram converti potest, utilius autem est, [numeratorem] esse variabilem b. Hinc posito $a = 1$. erit: $\frac{b}{1+b}$. eoque casu in omnibus productis poterit a. semper omitti.

6 nominatorem *L ändert Hrsg.* 270,10 ba^3 *L ändert Hrsg.* 270,11 etc. | Haec nunc ad aequationem nostram: $\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2} = \mathrm{y}$. applicemus, quae est aequalis huic: $1 - \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}$ $\left(= \frac{\cancel{\mathrm{a}^2}+\mathrm{x}^2-\cancel{\mathrm{a}^2}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}\right)$. | Si iam sit *erg.* | $\mathrm{a}^3 = \mathrm{ya}^2 + \mathrm{x}^2\mathrm{y}$. fiet: $\frac{\mathrm{a}^3-\mathrm{ya}^2}{\mathrm{y}} = \mathrm{x}^2$. Ergo $\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{y}} - \mathrm{a}^2 = \mathrm{x}^2$ *gestr.* | *L*

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a+b-b}{a+b}=$$

$$1-\frac{b}{a+b}$$

$$\frac{b}{a+b}=\frac{b+a-a}{a+b}=1-\frac{a}{a+b}$$

$$\frac{b}{a+b}=\frac{b+\frac{b^2}{a}-\frac{b^2}{a}}{a+b}=\frac{b}{a}-\frac{\frac{b^2}{a}}{a+b}=\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ba}$$

$$\cdots\cdots=\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ba}$$

$$=\frac{b^2+\frac{b^3\cancel{a}}{\cancel{a^2}}-\frac{b^3\cancel{a}}{\cancel{a^2}}}{a^2+ba}=\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3\cancel{a}}{a^3+ba^2}$$

$$\cdots\cdots=\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3+ba^2}$$

$$\cdots\cdots=\frac{b^3+\frac{b^4a^2}{a^3}-\frac{b^4a^2}{a^3}}{a^3+ba^2}=\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4+ba^3}$$

$$=\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4+ba^3}$$

$$\cdots\cdots=\frac{b^4+\frac{b^5}{a}-\frac{b^5}{a}}{a^4+ba^3}=\frac{b^4}{a^4}-\frac{a^5}{a^5+[ba^4]}$$

$$\frac{b}{a+b}=\frac{b}{a}\cdots\cdots-\frac{b^2}{a^2}\cdots\cdots+\frac{b^3}{a^3}\cdots\cdots-\frac{b^4}{a^4}\text{ etc.}$$

24. DE SERIE DIFFERENTIAE INTER SEGMENTUM QUADRANTIS ET EIUS FULCRUM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 II 1 Bl. 161–162. Bl. 161 aufgeschnittener an Leibniz adressierter Briefumschlag mit schwarzem und rotem Siegel. Bl. 162 ein Bl. 2°. Haupttext auf Bl. 162. 2 S. Beilage auf Bl. 161 v°. 1/2 S. Quer beschrieben. Auf Bl. 161 v° unten Notiz (Münzrechnung). 6 Zeilen. Auf Bl. 161 r° Briefadresse in unbekannter Hand. 4 Zeilen. Gegenläufig beschrieben: „A Monsieur; Monsieur Leibnitz Consellier de son Altesse Electorale de Mayence à Paris.“
Cc 2, Nr. 633, 634

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für August 1673 belegt. Das Stück setzt die Entdeckung der Kreisreihe voraus; es ist vermutlich nicht lange danach entstanden, da es direkte Bezüge zur bisher frühesten bekannten Abhandlung zur Kreisreihe, der *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233A) aufweist.

[*Notiz*]

4	sols	marq.	=	5	sols comm.
				30	doubles
2	sols	m.	=	15	doubles
1				$7\frac{1}{2}$	

[*Hauptteil*]

Ostensum est a me, data ratione ineundi summam progressionis harmonicae, in infinitum productae, habitum iri quadraturam circuli. Sed et aliud quiddam admirabilius, et supra vota, ut ad usum vitae nihil aliud vel optandum videatur. Ecce enim esto series

21 f. *Links*: Error fiet.

16 | 6 sols *gestr.* | 4 sols *L* 21 ineundi *(1)* progressionem harmonicam, in infinitum productam *(2)* summam *L* 22 circuli *(1)*, hoc modo: *(2)*. Sed *L*

16 sols marq.: Der alte Sou wurde seit 1640 durch Gegenstempeln gegenüber den neueren Münzen um ein Viertel im Wert erhöht. 21 Ostensum: Leibniz bezieht sich auf die *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A), s. u. Erl. zu S. 275 Z. 10–15; zur Auffassung der Kreisreihe als Differenz zweier harmonischer Reihen vgl. *LQK*, prop. XXXIV S. 81. 24 Error fiet: Leibniz erkennt nachträglich (s. u. die Erl. zu S. 277 Z. 17) den Fehler in der Argumentation und merkt die ungültigen Behauptungen an.

numerorum fractorum $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15}$ etc. Huius seriei in infinitam productae quantitatem, finitam esse, ex alibi a me demonstratis constat. Quam velut inventam ponamus esse $= \delta$. Aio hoc numero semel invento ac perpetuo constanterque

---

271,22–272,2 *Nebenbetrachtung*:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \text{ etc.} \qquad\qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{1} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} & \qquad & \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21} \quad \frac{100}{210} \\[1ex]
\frac{1}{5} + \frac{1}{9} = \frac{14}{45} & & \frac{1}{7} + \frac{1}{11} = \frac{18}{77} \\[1ex]
\frac{1}{9} + \frac{1}{13} = \frac{22}{117} & & \frac{1}{11} + \frac{1}{15} = \frac{26}{165}
\end{array}$$

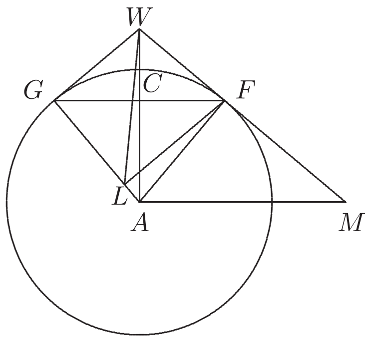
3 f. *Links*: E r r o r .

1 etc. *(1)* Posito enim radio 1, si huius seriei in infinitum productae summa appelletur *(a)* d^2 *(b)* d, atque in eam ducatur valor *(2)* | Esto *streicht Hrsg.* | series quaedam ineundo segmentum circuli datum AFCA cuius area quaeritur *(3)* Huius *L* 2 constat. *(1)* Ea ergo series, *(2)* Quam *L* 3 esse = *(1)* d. *(2)* δ. *L* 5 f. *linke Spalte* etc. | $\frac{2}{2}\ \frac{2}{10}\ \frac{2}{18}$ *gestr.* | $\frac{1}{1}$ *L* 5 f. *rechte Spalte* etc. | $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ *gestr.* | $\frac{1}{3}$ *L*

---

2 alibi: Leibniz bezieht sich vermutlich darauf, daß die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n)^2 - 1}$ als Teilreihe der summierbaren Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$ (vgl. N. 15 S. 180 Z. 6 – S. 181 Z. 8) einen endlichen Wert haben muß.

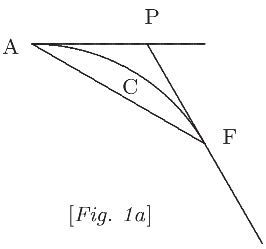
adhibito; cuiuslibet segmenti circularis aream, mirabili naturae rerum harmonia, definiri. Idque ita fiet:



[*Fig. 1*]

Dato circuli segmento $GCFG$, quod sit semicirculo minus; ad extrema eius puncta, G et F, tangentes GW, FW ducantur, quae sibi occurrant in W. Quemadmodum et radii GA, FA qui sibi occurrent in centro A. Ipsi GW, ducatur parallela LF, iungaturque WL. itemque WA. Ac WF producatur, donec ipsi AM perpendiculari ad WA, (vel parallelae ad GF,) occurrat in M. Recta FM, erit tangens complementi semiarcus CF quem vocemus g. Radius autem esto a. Rectangulum ga, sub radio, et tangente complementi semiarcus segmenti dati comprehensum, et per numerum, δ, quem semper constantem ac qualicunque segmento assumto, invariatum, diximus, multiplicatum si a triangulo GWL subtrahatur: residuum erit area segmenti propositi.

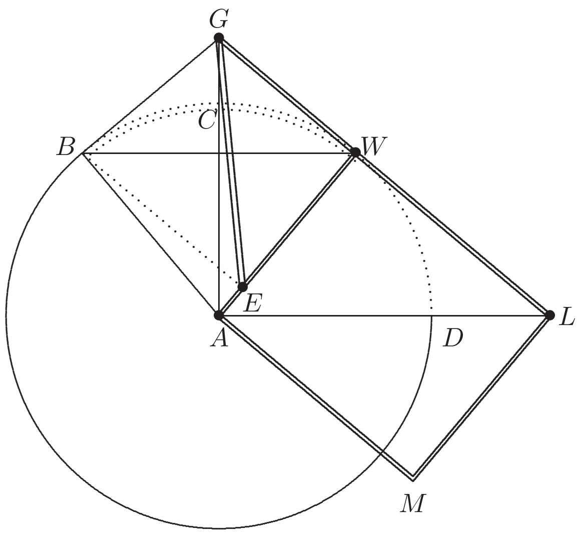
1 aream *erg.* *L* 1 rerum *(1)* lusu *(2)* harmonia *L* 2 fiet: *(1)*



[*Fig. 1a*]

Dato circuli segmento AFCA, *(a)* circulo *(b)* quod sit semicirculo minus; ad extrema eius puncta, A et F, tangentes AP, FP ducantur, quae sibi occurrant in P. Praeterea ex puncto alterutro A vel P, *(2)* [*Fig. 1*] *L*

6 GA, FA *erg.* *L* 8 tangens *(1)* arcus *(2)* complementi *L* 9 vocemus g. *(1)* Aio *(2)* Radius *L* 10 δ, *(1)* multiplicatum *(2)* quem *L*



[*Fig. 2*, *tlw. Blindzeichnung*]

Idem elegantius hoc quidem modo enuntiabitur: Proposito segmento $BWCB$, cuius arcus BCW non sit quadrante maior; si rectangulum sub radio AW et arcus WD seu complementi ipsius semiarcus CW tangente WL per numerum semper invariatum δ multiplicetur, ac productum ab EGW semirectangulo sub GW tangente ipsius semiarcus CW, et WE sinu verso arcus integri BCW subtrahatur; residuum erit area segmenti dati.

Vel ut vocabulis illis sero inter geometras receptis abstineamus:

Dato circuli segmento $BWCB$ ex centro duae educentur rectae inter se normales, AG, AL quarum altera ACG arcum datum bisecet in C, ducatur recta GWL quae utrique earum occurrat, et circulum in extremo segmenti W, (ab ea parte sumti in quam AL

2 enuntiabitur: *(1)* Dato segmento circuli, cuius arcus non sit quadrante maior; rectangulum sub radio et tangente complementi semiarcus per numerum δ, multiplicetur, ac productum a semirectangulo sub *(a)* radio *(b)* tangente ipsius semiarcus, et sinu verso arcus integri subtrahatur; *(2)* Proposito *L*
8 circuli *erg. L* 9 AG, AL *erg. L* 9 altera | ACG *erg.* | *(1)* circulum *(2)* arcum *L* 9 quae *(1)* simul et circu *(2)* utrique *L*

---

1 *Fig. 2*: Leibniz hat die Figur überarbeitet; es wird nur die Endfassung wiedergegeben.

ducta est) tangat. Ex altero extremo B, recta BE radio AW perpendiculariter occurrat in E. Iungatur EG tum AM ipsi AW, et LM, ipsi AM perpendiculariter incidant. Aio si rectangulum AL multiplex secundum numerum δ, adimatur triangulo GWE, differentiam fore aream segmenti $BWCB$.

Ex his facile intelligi potest, numerum δ, esse u n i t a t e imo et s e m i s s e minorem. Nam si BCW sit arcus quadrantis, erit $\square$ AL duplum $\triangle$ AW, sequitur et ex data quadratura circuli totius dari quadraturam quarumlibet partium quae geometrice abscindi possint. Et rursus vel unica eius portione quae geometrice abscindi possit quadrata, dari quadraturam caeterarum omnium, circulique totius.

Sed nunc deprehendo contemplationem istam, non quidem ex toto falsam, non tamen ab omni errore fuisse immunem, nam ex serie a me certa demonstratione inventa: $+\frac{1}{3}\,\frac{b^3}{a} - \frac{1}{5}\,\frac{b^5}{a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$, etc. hanc collegeram: $\frac{a^2}{3\gamma} - \frac{a^2}{5\gamma} + \frac{a^2}{7\gamma}$ etc. quod est falsum. At ego hinc collegeram, si per $\frac{a^2}{\gamma}$, omnia dividantur restare: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ etc. hanc ergo summam $= \delta$ duci debere in $\frac{a^2}{\gamma}$, id est (γ posita $= \frac{GW}{a}$,) in $WL \frown a$, ducebam. Fundamentum autem collectionis seriei posterioris ex priori hoc erat, ponebam $\frac{a}{\gamma} = b$. Ergo $\frac{1}{3}\,\frac{b^3}{a}$, dabit $\frac{\frac{a^3}{\gamma^3}}{3a} = \frac{a^2}{3\gamma^3}$ et $\frac{b^5}{5a^3}$, dabit: $\frac{\frac{a^5}{\gamma^5}}{5a^3} = \frac{a^2}{5\gamma^5}$ etc., fiet ergo series haec:

$$\frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5} + \frac{a^2}{7\gamma^7} - \frac{a^2}{9\gamma^9} \text{ etc.}$$

1 tangat. *(1)* Huic ex altero parallela *(2)* Ex *L* 1 recta | nimirum *gestr.* | BE *erg. L* 1 perpendiculariter *erg. L* 2 tum AM *(1)* parallela WL *(2)* perpendicularis *(3)* ipsi *L* 2 et LM, | parallela *gestr.* | ipsi *L* 2 Aio *(1)* rectangulum AL *(2)* segmentum BWC *(3)* si *L* 3 δ, *(1)* subtrahatur a triangulo GWE, residuum *(2)* adimatur *L* 13 falsum. *(1)* Sic ergo procedend *(2)* At *L* 14 $= \delta$ *(1)* multiplicari debere per *(2)* duci *L* 14 f. ducebam *(1)*, at inde non rectangulum, sed lineam tantum habuissem, volebam ergo ducere in AW, radium. Sed hoc sine causa. Rectius ergo sic procedemus: posita *(2)*. Fundamentum *L*

10–15 deprehendo: Leibniz knüpft an die *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A) an, wo die in Z. 15 erwähnte Setzung $\frac{a}{\gamma} = b$ auf *LH* 35 II 1 Bl. 241 v° gemacht wird.

Unde primum illud deduco, praeclarum, nihil opus esse, ut a ponatur $= 1$ dummodo talis ponatur, ut γ sit maior quam 1. Ideo si a ponatur $= b$ tunc γ erit $= 1$ quod fit in segmento, cuius arcus est quadrans. Eoque casu area figurae nostrae complementalis erit: $\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{7} - \frac{a^2}{9}$ etc. omisso γ cum suis potestatibus. Si γ sit maior quam 1, seu si b [minor] quam a semper crescent γ, et fractiones decrescent, tandemque negligi poterunt. Nunquam autem nostra quidem tractandi ratione γ erit minor.

At quid si alia facta suppositione ponamus $\gamma a = b$. Erit $\left[\frac{b^3}{3a}\right] = \frac{\gamma^3 a^3}{3a} = \left[\frac{\gamma^3 a^2}{3}\right]$. $\frac{b^5}{5a^3} = \frac{\gamma^5 a^5}{5a^3} = \frac{\gamma^5 a^2}{5}$ etc. De caetero si ponas $b = 1$ fiet: $\frac{1}{3a} - \frac{1}{5a^3} + \frac{1}{7a^5} - \frac{1}{9a^7}$ etc.

Porro valor huius seriei $\frac{1}{3a} - \frac{1}{5a^3} + \frac{1}{7a^5} - \frac{1}{9a^7}$ etc. in infinitum continuatae, utique finitus, semper est idem, quia a radius, est invariabilis, qualiscunque assumatur b, et si

---

6 *Links*: Semper effici potest, ut γ valeat 10. NB. quolibet valore, ipsi a dato, proportione.

7–277,16 *Nebenbetrachtung mit Nebenrechnungen*: $6 - 4 \frown a = b = 1$. Ergo $\frac{1}{6-\sqrt{16}} = a$, et $\frac{a^2}{\delta} = \frac{1}{4\delta} = \frac{1}{36+16-12\sqrt{16}[,\frown \delta]}$. Posito iam $\langle \gamma = \rangle$ $6 - 4$ fiet $\frac{1}{36+16-12\sqrt{32}}$.

$$\begin{array}{rr} 32 & 2 \\ \underline{12} & \underline{\cancel{3}84} \\ 64 & 1\ 2 \\ \underline{32} & \overline{\cancel{1}29} \\ 384 & \end{array}$$

2 sit *(1)* minor *(2)* maior *L* 4 potestatibus. *(1)* Si γ sit maior quam 1, seu si b sit minor quam a, *(2)* Imo semper sumi potest $\gamma = 1$ *(3)* Imo semper *(4)* Si *L* 5 maior *L ändert Hrsg.* 5 tandemque *(1)* ⟨etiam⟩ crescent *(2)* negligi *L* 7 $\frac{\mathrm{b}^3}{\mathrm{a}}$ *L ändert Hrsg.* 7 $\gamma^3\mathrm{a}^2$ *L ändert Hrsg.* 8 f. etc. *(1)* | et erit $\gamma = \mathrm{a}$, *streicht Hrsg.* | fietque $\frac{\mathrm{a}^5}{3} - \frac{\mathrm{a}^7}{5} + \frac{\mathrm{a}^9}{7} - \frac{\mathrm{a}^{11}}{9}$ etc. *(2)* Porro *L* 10–277,1 si *(1)* autem *(2)* aliter *L* 14 $, \frown \delta$ *erg. Hrsg.*

aliter pro alia, aliave unitate, $b = 1$ assumta, exprimatur, appelletur autem $\frac{a^2}{\delta}$. Cum enim summa ista, sit aliquota ipsius quadrati radii, numerus secundum quem eius aliquota est, vocetur δ. Unde intelligitur, etsi expressio valoris ipsius $\frac{a^2}{\delta}$ semper mutetur, pro alia atque alia unitate seu b assumta; tamen mutationem illam influere tantum in a^2, seu valorem ipsius a, radii, exprimendum, ipso numero δ non valore tantum, sed et e x p r e s s i o n e , seu valore relativo, invariabili.

Hinc iam si BCW arcus segmenti dati, sit quadrans posito ut semper $b = GW$ esse 1, sequetur etiam $AW = a$, radium esse $= 1$ hoc quidem loco, quoniam rescissa radio aequalis est, si arcus est quadrans. Ergo, $\frac{a^2}{\delta} = \frac{1}{\delta}$. Erit ergo $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. et $\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\delta}$ seu f i g. h i c $GWA - \frac{1}{\delta}, =$ segmento quadrantis.

Si vero b sit semilatus octogoni regularis circumscripti, seu si arcus, sit octans (vide figuram calculumque in schedula separata ☿) ostendi ipsius b (DF) magnitudinem, radio posito a, esse $\sqrt{2a^2},-a$ vel $a\sqrt{2},-a$, vel $\llcorner\sqrt{2},-1\lrcorner \frown a = b$. Ponatur $b = 1$ erit $\sqrt{2},-1,\frown a = 1$ et erit $\frac{1}{a} = \sqrt{2},-1$, vel $a = \frac{1}{\sqrt{2},-1}$. Ergo si b ponatur 1, erit $\frac{1}{2+1-2\sqrt{2},\frown\delta} =$ differentiae inter triangulum in fig. schedulae NAF, et segmentum: ADA. (: Vide figuram schedulae dictae :). At vero nunc posito rursus $a = 1$ erit $b = \sqrt{2}-1$, quod in locum 1, in invento $\frac{1}{2+1-2\sqrt{2},\frown\delta}$, substituatur, fiet:

$$\frac{\sqrt{2},-1}{2\sqrt{2}-2\lrcorner+\sqrt{2}-1\lrcorner-\llcorner\llcorner 2\sqrt{2}-2\lrcorner\frown\sqrt{\llcorner 2\sqrt{2}-2\lrcorner}\lrcorner\lrcorner\,\lrcorner\lrcorner\lrcorner\frown\delta} = \frac{1}{2+1-2\sqrt{2\sqrt{2}-2\lrcorner\lrcorner}\frown\delta}.$$

7 quadrans *(1)* erit *(2)* posito | ut semper *erg.* | b = GW *L* 9 f. et ... quadrantis. *erg.* *L* 11 sit *(1)* quadrans *(2)* octans *L* 15 in fig. schedulae *erg.* *L*

12 schedula: s. u. Beilage. 17 in locum 1: Die Substitution ist unzulässig. Leibniz rechnet konsequent weiter. In der Folge identifiziert er unzulässigerweise die Werte δ für den Quadranten und den Oktanten und erhält auf S. 280 Z. 4 schließlich einen algebraischen Wert für $\frac{1}{\delta}$. Leibniz erkennt die Unstimmigkeit und notiert am Rand „Nugae“.

Restat ut inveniamus in figura schedulae aream trianguli NAF, a quo subtracta quantitas proxime inventa relinquat ADA. Ac primum $AF = DF = b$ nota est, $= \sqrt{2}, -1$. Sed AN ita inveniemus, manifestum est esse $GA - GN = \underset{\overset{\uparrow}{1}}{a} - GN$. Porro GN est $= ND$, quia $GA = AB$, et quia $GD = a = 1$, erit $GN = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, eritque $AN = a - \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, vel $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ergo ANF, triangulum vel $\dfrac{NA \frown AF}{2}$, vel $\dfrac{\sqrt{2}-1, \frown 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}$, erit $\dfrac{\sqrt{2} - 1 - 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} - 1 + \dfrac{1}{\sqrt{8}}$.

Ergo $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{8}} - 1 - \dfrac{1}{\llcorner\llcorner \underbrace{2+1}_{3} - 2\sqrt{2\sqrt{2}-2}\lrcorner\lrcorner \frown \delta} = \odot$ aequatur ipsi ADA segmento octantis, quemadmodum ut supra ostensum est $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\delta}$ aequatur segmento quadrantis. Sed et an sufficit considerare supplementa, pone enim esse $A - B$, et $C - D$, notamque esse rationem $\dfrac{A}{C}$, item $\dfrac{B}{D}$ quaestio est, an, inde inveniatur ratio $\dfrac{A-B}{C-D}$, sane datis $\dfrac{A}{C}$ et $\dfrac{B}{D}$ datur et: $\dfrac{\dfrac{A}{C}}{\dfrac{B}{D}} = \dfrac{AD}{BC}$. Item $\dfrac{AD+BC}{CD}$, item $\dfrac{\dfrac{AD+BC}{\cancel{C}D}}{\dfrac{AD}{\cancel{C}B}} = \dfrac{BAD + B^2C}{AD^2}$. Sed pono iam ipsos quoque terminos A, et C esse datos. Iam ergo cum data sit: $\dfrac{AD+BC}{CD}$, data erit quoque $\dfrac{D+B}{D}$, ergo et $\dfrac{B}{D}$ sed haec iam habebatur, caeterum dabitur et $\dfrac{AD}{B}$, item

7 *Links*: H o c n o t a b i l e

277,18–278,1 $= \dfrac{1}{2+1-2\sqrt{2\sqrt{2}-2}\lrcorner\lrcorner\delta}$ $|= \odot$ *gestr.*$|$. Restat L 2 quantitas *(1)* $\dfrac{1}{\delta}$ rel *(2)* $\odot$ *(3)* proxime L 5 ANF, *(1)* rectangulum *(2)* triangulum L 9 et *(1)* ipsa supplici *(2)* an L

$\frac{D}{CB}$, sed quia nunquam ex his haberi potest $\frac{A}{D}$, vel BC, ideo nec $\frac{A}{C-D}$, nec $\frac{B}{C-D}$, ergo nec $\frac{A-B}{C-D}$. Haec ergo methodus minime sufficit.

Igitur tentandum est an possimus venire ad aequationem, qua nobis quantitas δ definiatur. Segmentis ergo hactenus inventis, sua addamus fulcra, et segmento quadrantis $\frac{1}{2}-\frac{1}{\delta}$, addamus fulcrum suum $\frac{1}{2}$, fiet $= 1-\frac{1}{\delta}$ sector quadrantis. At fulcrum octantis ita inveniemus, (vide figuram schedulae), AD chorda octantis, seu latus octogoni inscripti est $\sqrt{AN^2+ND^2}$, iam $AN^2 = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \square, = 1+\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{2}}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}-\sqrt{2}$ et $ND = GN = \frac{1}{\sqrt{2}}$ per superiora, erit $ND^2 = \frac{1}{2}$ et $AN^2+ND^2 = \frac{3}{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2} = 2-\sqrt{2}$ eritque AD latus octogoni inscripti seu chorda octantis $= \sqrt{2-\sqrt{2}}$. Basis fulcri, cuius ut obtineatur et altitudo [GP], effici utique potest quadrato [AP], (dimidiae AD) a quadrato radii AG subducto residui enim quadrati latus erit [GP] altitudo fulcri seu sinus complementi. Inde ducta [AP] in [GP], habebitur area fulcri. Sed praestat uti methodo quadam compendiosiore, atque elegantiore habendi aream huius fulcri, sine basi eius aut altitudine, seu chorda, aut sinu complementi, cognitis. Scilicet datur triangulum $GAB = \frac{1}{2}$ ab hoc adimatur area trianguli ADB, restabit fulcrum seu triangulum GAD, area autem trianguli ADB, facile habetur, nulla nova lineae investigatione, quia habetur eius basis $AB = 1$, et altitudo $AN = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ergo eius area est $\frac{AB}{2} \frown AN = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{8}}$, auferatur a GAB $\nabla^{\text{lo}} = \frac{1}{2}$, restabit: $\frac{1}{\sqrt{8}}$ = fulcro octantis seu ∇^{lo} GAD, addatur ipsi ADA, segmento octantis, fiet sector octantis $DGAD = \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\left(2\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{8}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{2}}\right)\sqrt{2}, -1-$

1 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{CB}}$, *(1)* ergo et A *(2)* sed *L* 3 quantitas *(1)* $\frac{1}{\delta}$ *(2)* δ *L* 10–12 GF *bzw.* AF *L ändert Hrsg. fünfmal* 12 altitudo ... complementi *erg. L*

$$\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2\sqrt{2}-2},\frown\delta}\right)\ \frac{1}{3\delta-\delta\sqrt{\sqrt{128}-8}.}$$

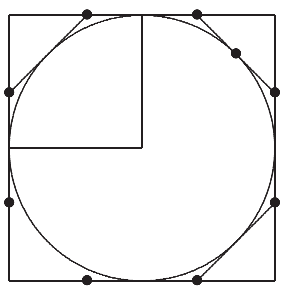
At sector quadrantis, aequatur sectori octantis duplicato, ergo:

$\sqrt{8}-2-\dfrac{1}{\frac{3}{2}\delta-\delta\sqrt{\sqrt{8}-2}}=1-\dfrac{1}{\delta}$. Ergo $\dfrac{1}{\delta}-\dfrac{1}{\frac{3}{2}-\sqrt{\sqrt{8}-2}}\frown\dfrac{1}{\delta}=\underbrace{1+2}_{3}-\sqrt{8}.$

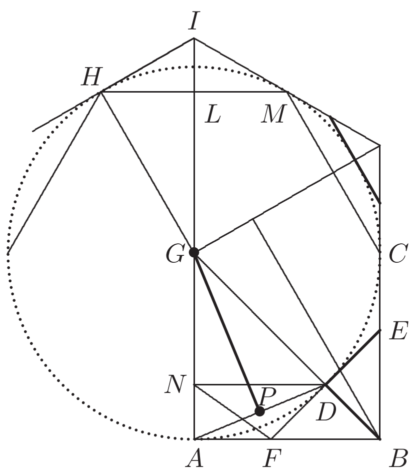
Unde fit $\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{3-\sqrt{8}}{1-\dfrac{1}{\frac{3}{2}-\sqrt{\sqrt{8}-2}}}$ = segmenti quadrantis differentiae a suo fulcro, seu semiquadrato radii.

[*Beilage*]

☿. Referatur haec schedula ad eam semiplagulam, in qua demonstravi, quod $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$ etc., posito radio, $a=1$. aequentur differentiae inter segmentum quadrantis et eius fulcrum seu semiquadratum radii, $\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{1}{2}$.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

5 *Links*: N u g a e

$$AB = a = GA = GD = GH\ [=]\ HM. \quad AF = FD = DE = EC = \frac{FE}{2} = DB.$$

Erit $GB = \sqrt{2a^2}$ et $DB = DF$, erit $\sqrt{2a^2} - a$. Erit $LG = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ eritque $\dfrac{HI}{\frac{a}{2} = HL} =$

$$\frac{HG = a}{GL}, \text{ seu } \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = HI, \text{ seu } \frac{\cancel{a^2} \frown \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{\cancel{a^2} + \frac{\cancel{a^2}}{4}} \text{ seu } HI = \frac{4\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{5}.$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

1 $=$ *erg.* *L*

---

2 $LG = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$: Richtig wäre $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$. Nach einem weiteren Flüchtigkeitsfehler erhält Leibniz für HI den Wert $\dfrac{4\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{5}$ statt $\dfrac{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}}{3}$.

25. DE SERIE AD SEGMENTUM CIRCULI
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 248–249. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 554.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum August 1673 bis Juni 1674 belegt. Das Stück setzt die Entdeckung der Kreisreihe voraus; es ist vermutlich kurz danach entstanden, da es direkte Bezüge zur bisher frühesten bekannten Abhandlung zur Kreisreihe, der *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A), aufweist. Außerdem enthält N. 25 einen Verweis auf *De quadratura circuli et hyperb.* (Cc 2, Nr. 1237), das auf demselben Bogen steht wie N. 22 und nach diesem geschrieben ist. N. 25 ist also nach N. 22 enstanden.

[*Teil 1*]

Inventum est a me:

$\overbrace{\text{Prop. 1.}}$ Si dato quodam circuli segmento ⌓ ; cuius arcus non sit quadrante maior, radius ponatur esse $\underline{a}$, tangens semiarcus $\underline{b}$, sinus versus vero arcus integri $\underline{c}$, tunc seriei in infinitum productae $\dfrac{b^3}{3a} - \dfrac{b^5}{5a^3} + \dfrac{b^7}{7a^5} - \dfrac{b^9}{9a^7}$ etc. etc., summam, aequalem fore ipsi $\dfrac{bc}{2} -$ ⌓; seu residuo post segmentum datum ex semirectangulo tangentis semiarcus in sinum versum arcus ductu facto, subtractum.

Unde ante omnia consequentia ducitur eiusmodi:

$\overbrace{\text{Prop. 2.}}$ Posito radio $a, = 1$, erit: $\dfrac{bc}{2} -$ ⌓ $= \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^5}{5} + \dfrac{b^7}{7} - \dfrac{b^9}{9}$ etc.

14 tunc *(1)* differentiam inter $\dfrac{\text{bc}}{2} -$ ⌓, *(a)* fore *(b)* erit = *(2)* seriem in infinitum productam *(3)* seriei *L* 16 seu *(1)* differentia resi *(2)* residuo *L*

12 Inventum est a me: *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A), LH 35 II 1 Bl. 241 r°.

Hinc statim habetur a p p r o p i n q u a t i o illa praeclara p e r p o t e s t a t e s. Modo enim a sit maior quam b, posito $a = 1$, erit $b, =$ fractioni cuidam. At fractiones quanto ad maiores assurgunt potestates, tanto sunt minores; adeo ut, si usum spectes, posteriores infinitae tuto negligi possint, sumtis tantum aliquot prioribus; et eo paucioribus quo minor est b quam a. Et vero potest b fieri quantumvis minor quam a, quia segmentum in alia minora aequalia bisectione arcus resolvi potest. Ut autem exactitudo appareat, accipe specimen:

$\overbrace{\text{Prop. 3.}}$ Si $\underline{a}$ sit plus quam decuplo maior ipsa $\underline{b}$ sumtis quatuor terminis prioribus reliqui omnes in infinitum, nondum aequant ipsius radii quadrati 1000^{mam}.

Ponatur enim esse $b = \dfrac{1}{10}$, ergo $\dfrac{b^{11}}{11}$, erit $\dfrac{1}{1100,000,000,000}$, sed omittamus fractiones, seu divisores, et pro $\dfrac{b^{11}}{11}+\dfrac{b^{15}}{15}+\dfrac{b^{19}}{19}$ etc. $-\dfrac{b^{13}}{13}-\dfrac{b^{17}}{17}-\dfrac{b^{21}}{21}$ etc. substituamus: $b^{11}+b^{15}+b^{19}$ etc., $-b^{13}-b^{17}-b^{21}$, etc. id enim manifeste maius priore. Huius autem seriei licet infinitae cum sit pure geometrica decrescens, haberi potest summa. Erit enim summa harum $b^{11}+b^{15}+b^{19}$ etc., $= A$, et A ad b^{11}, ut b^{11} ad $b^{11}-b^{15}$, seu $\dfrac{b^{22}}{b^{11}-b^{15}} = A$, seu $= \dfrac{b^{11}}{1-b^4}$, vicissim $+\, b^{13}+b^{17}+b^{21}$ etc., $= B$ et B ad b^{13}, ut b^{13} ad $b^{13}-b^{17}$. Ergo $B = \dfrac{b^{26}}{b^{13}-b^{17}} =$

1 praeclara *(1)*, qualis hactenus in hyperbola tantum extabat, at in circulo, undique surdis quantitatibus involuto, desperata habebatur. *(2)* p e r *L* 3 ut *(1)*, ad usum *(2)*, si *L* 4 prioribus; *(1)* pluribus paucior *(2)* et *L* 5 vero *(1)* si b *(2)* potest *L* 5 fieri *(1)* minus *(2)* quantumvis *L* 6 f. exactitudo | admirabilis *gestr.* | appareat *L* 8 b *(1)* sufficiunt quatuor termini priores *(2)* sumtis *L* 9 reliqui *(1)* enim *(2)* omnes *L* 9 aequant *(1)* $\dfrac{1}{10,000,000,000}$ *(2)* ipsius radii | quadrati *erg.* | *(a)* centesimam *(b)* 1000^{mam} *L* 12 f. licet infinitae *erg.* *L* 13 decrescens *erg.* *L* 14 et A *erg.* *L*

1 a p p r o p i n q u a t i o: *a. a. O.*, LH 35 II 1 Bl. 91 r°. 12 $-b^{13} - b^{17} - b^{21}$, etc.: Die Abschätzung der Differenz der beiden Reihen durch einen dem Betrag nach größeren Subtrahenden ist unzulässig.

$\dfrac{b^{13}}{1-b^4}$, ergo $A-B$, seu $b^{11}-b^{13}+b^{15}-b^{17}+b^{19}-b^{21}$, etc., erit $\dfrac{b^{11}-b^{13}}{1-b^4}$. Iam $1-b^4$, $=$ $1-\dfrac{1}{10,000}$, $=\dfrac{10,000-1}{10,000}$ et $\dfrac{b^{11}-b^{13}}{1-b^4}=\dfrac{\dfrac{1}{100,000,000\cancel{,000}}-\dfrac{1}{10,000,000,000\cancel{,000}}}{\dfrac{10,000-1}{(10\cancel{,000})}}$, vel: $\dfrac{10\cancel{,000}}{10,000\cancel{,000}}-\dfrac{1}{10,000,000}-\dfrac{10\cancel{,000}}{1000,000\cancel{,000}}+\dfrac{1}{1000,000,000}$ vel $\dfrac{1}{1000}+\dfrac{1}{1000,000,000}-$ $\dfrac{1}{100,000}-\dfrac{1}{10,000,000}$. $\dfrac{1000,001,\cancel{000}}{1000,000,000,\cancel{000}}-\dfrac{10,100,\cancel{000}}{1000,000,000,\cancel{000}}=\dfrac{989,901}{1000,000,000}$. Ponatur esse: $\dfrac{1\cancel{000,000}}{1000,\cancel{000,000}}$ erit prope $\dfrac{1}{1000}$. Unde etsi termini sequentes seriei propositae omissi, sine fractionibus esse intelligantur, ac proinde multo maiores quam revera sunt; omnes tamen simul nondum ascendent ad $\left[\dfrac{1}{1000}\right]$. Unde error ipsis omissis nondum erit $\dfrac{1}{1000}$ seu unius millesimae. Unde et facile intelligi potest, quot alii termini adici debeant, quatuor assumtis, prout scilicet maior exactitudo desideratur, ut in astronomicis fieri solet.

2 $\dfrac{10,000-1}{10,000}$ $|=\dfrac{\mathrm{b}^4-1}{\mathrm{b}^4}$ *gestr.* | et *L* 5 $\dfrac{1\cancel{000,000}}{1000,\cancel{000,000}}$ *(1)* erit $=\dfrac{1}{10,000}$ *(2)* erit | prope *erg.* | $=\dfrac{1}{1000}$ *L* 5 etsi *(1)* in terminis sequentibus *(2)* termini *L* 6 proinde *(1)* sine comparatione *(2)* multo *L* 7 simul *(1)* vix ex *(2)* nondum *L* 7 ad | $\dfrac{1}{10,000}$ *ändert Hrsg.* |. *(1)* Quare sin *(2)* Unde *L* 7 f. erit *(1)* $\dfrac{1}{10,000}$ seu unius deciesmillesimae *(2)* $\dfrac{1}{1000}$ *L*

---

1 $\dfrac{b^{11}-b^{13}}{1-b^4}$: In Cc 2, Nr. 555 A berechnet Leibniz für den allgemeinen Fall den Wert $\dfrac{a^2b^{11}-b^{13}}{a^{11}-a^7b^4}$. 3 $\dfrac{10\cancel{,000}}{10,000\cancel{,000}}-\dfrac{1}{10,000,000}-\dfrac{10\cancel{,000}}{1000,000\cancel{,000}}+\dfrac{1}{1000,000,000}$: Leibniz multipliziert den Faktor $10,000-1$ in den Zähler statt in den Nenner und erhält als Ergebnis daher $\dfrac{1}{1000}$ anstelle von $\dfrac{1}{10,000,000,000}$.

Caeterum quoties arcus segmenti dati est quadrante minor, toties et tangens semiarcus, $= b$, ipso radio a minor est. Et quoties arcus est quadrans, toties, est $a = b$.

$\overbrace{\text{Prop. 5.}}$ Ergo si segmenti dati arcus sit quadrans peripheriae, erit: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{7} - \frac{a^2}{9}$ etc.

Quoniam semper $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc. unde posito hoc loco $a = b$, fiet, quod dixi.

Si vero a sit maior quam b, tunc potest b intelligi esse fractio, posito $a = 1$, et dici potest esse $\frac{a}{\gamma} = b$. Imo idem universaliter dici potest, sive a, sive b maior sit.

$\overbrace{\text{Prop. 6.}}$ Ergo initio assumta aequatio: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3}$ etc.; ita quoque exprimi potest: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5} + \frac{a^2}{7\gamma^7} - \frac{a^2}{9\gamma^9}$ etc.

$\overbrace{\text{Prop. 7.}}$ Contra potest fieri $a\lambda = b$, vel $a = \frac{b}{\lambda}$ (posito $\lambda = \frac{1}{\gamma}$), unde haberetur aequatio haec: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2\lambda^3}{3} - \frac{a^2\lambda^5}{5} + \frac{a^2\lambda^7}{7} - \frac{a^2\lambda^9}{9}$ etc.

Diversae hae suppositiones, quae in aliis usum haberent nullum, in his, ubi in infinitum itur, habent maximum, ut apparebit. Quemodmodum illud quoque maximi refert quem numerum uni eorum tribuas, id enim in arbitrio est, cum caeterarum valor varietur. Nam numerorum tantum rationumve, id est ipsorum valorum, absolutus est valor, caeterarum rerum respectivus, ita ut uni ex illis quemlibet pro arbitrio valorem tribuere possis, unde caeterarum quoque rerum valor varietur:

3 $\overbrace{\text{Prop. 5.}}$ *(1)* Ergo si radius, ut semper po *(2)* Ergo *L* 5 hoc loco *erg. L* 7 et *(1)* fiet *(2)* dici *L* 9 Ergo *(1)* series *(2)* initio *L* 11 vel $\mathrm{a} = \frac{\mathrm{b}}{\lambda}$ *erg. L* 16 valorum, *(1)* infinitus *(2)* absolutus *L*

3 $\overbrace{\text{Prop. 5.}}$: Zählung springt von 3 auf 5.

Primum ergo posito $a = 1$, iam supra prop. 2. ostensum est, fieri: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. ex $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc.

At posito $a = 1$, et praeterea $b = \frac{a}{\gamma}$, seu sumta serie p r o p. 6. quae erat: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5} + \frac{a^2}{7\gamma^5} - \frac{a^2}{9\gamma^9}$, fiet aequatio haec:

$$\overbrace{\text{Prop. 8.}}\ \frac{bc}{2} - \frown = \frac{1}{3\gamma^3} - \frac{1}{5\gamma^5} + \frac{1}{7\gamma^7} - \frac{1}{9\gamma^9}, \text{ etc.}$$

At ex $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2\lambda^3}{3} - \frac{a^2\lambda^5}{5}$ etc., fiet aequatio haec:

$$\overbrace{\text{Prop. 9.}}\ \frac{bc}{2} - \frown = \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^5}{5} + \frac{\lambda^7}{7} - \frac{\lambda^9}{9} \text{ etc. posito } a = 1, \text{ et } \lambda = \frac{b}{a} = \frac{1}{\gamma}.$$

Quantitatem autem a, cur alteri cuidam numero, quam unitati aequalem ponamus, ratio nulla est. Illud prius videndum an caeteri termini, b, item γ vel λ aliquando sive pro u n i t a t e, sive pro aliquo numero arbitrio, ut d e n a r i o inprimis sumi possint, quod nihil utique prohibet. Quoties enim ex data quadam quantitate alia haberi potest, reciproce; possumus quamlibet earum assumere velut radicem valoris, eique quamlibet tribuere quantitatem, dummodo eius suppositionis in toto processu calculi praesentis meminerimus.

Ac primum, ut a facillimo ordiamur, ponamus b seu tangentem semiarcus segmenti dati, $= 1, (1z)$ resumtaque serie sive aequatione prop. 1. Unde fiet haec:

$$\overbrace{\text{Prop. 10.}}\ \frac{bc}{2} - \frown\ (\frac{c}{2} - \frown) = \frac{1(z^3)}{3a} - \frac{1(z^5)}{5a^3} + \frac{1(z^7)}{7a^5} - \frac{1(z^9)}{9a^7} \text{ etc.}$$

5 $\overbrace{\text{Prop. 8.}}$ *(1)* Si a = 1, erit *(2)* $\frac{\text{bc}}{2}$ *L* 8 cuidam *(1)* quantitat *(2)* numero *L* 10 inprimis *(1)* assumi *(2)* sumi *L* 11 nihil *(1)* mea seu *(2)* utique *L* 11 ex *(1)* datis quibusdam qua *(2)* data *L* 11 alia *(1)* dari *(2)* haberi *L* 12 reciproce; *(1)* quotcunque earum da *(2)* nihil *(3)* possumus *L*

Utilius autem erit, uti ipso γ, nam, ipso λ, cum sit $\frac{1}{\gamma}$, separatim uti nihil attinet. Supra p r o p o s i t i o n e [6.] ostensa est aequatio haec: $\frac{bc}{2} - \text{⌓} = \frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5} + \frac{a^2}{7\gamma^7} - \frac{a^2}{9\gamma^9}$ etc. posito γ esse numerum, secundum quem a est multiplex ipsius b. Ponamus exemplum nobis oblatum esse, in quo sit $\gamma = 5$, vel $\frac{a}{5} = b$. Desiderari autem a nobis commodioris calculi causa, et ut logistica decimali uti liceat, ut γ valeat 10. Sed hoc obtineri non potest, ut cuivis rem accurate expendenti patebit. Unde nec γ vel λ possunt valere unitatem.

Sed ut clarius appareat, an, et quid inde queat duci, rem ad seriem finitam et numeros exempli gratia traducamus. Resumamus: $\frac{bc}{2} - \text{⌓} = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3}$, quasi nihil ultra sequeretur. Ponatur $\frac{a}{5} = b$. Ergo a posito 1 erit $b = \frac{1}{5}$, et fiet $\frac{1}{125 \frown 3\ \ (1z)} - \frac{1}{3125 \frown 5\ \ (1z^3)}$. Sed si poneretur $b = 1$, fieret $a = 5(1z)$ et haberemus $\frac{1(z^3)}{3 \frown 5\ \ (1(z))} - \frac{1(z^5)}{5 \frown 125\ \ (1(z^3))}$.

Ex his facile apparet, nihil inde duci posse universale posito $b = 1$, bene tamen $a = 1$ posito, quia a est invariabilis. Superest nunc ut in huius seriei: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. sum-

---

9–288,3 *Nebenrechnungen*:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 5 \\ \hline 125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125 \\ 25 \\ \hline 625 \\ 250 \\ \hline 3125 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 143 \\ 63 \\ \hline 80 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ 15 \\ \hline 315 \\ 63 \\ \hline 945 \end{array}$$

$$16 - 1 \frown 64 - 1 = 16 \frown 64 - 16 - 64 + 1$$

1 f. attinet. *(1)* Sed non *(2)* Supra *(a)* ostensum est *(b)* p r o p o s i t i o n e |5. *ändert Hrsg.*| ostensa *L* 3 *b*. *(1)* Fingamus *(2)* Ponamus *L* 5 10. *(1)* Quod ut obineatur, *(a)* ponendum tantum est esse $\mathrm{a} = 1$, $\frac{2\mathrm{a}}{10} = \mathrm{b}$ *(b)* $\gamma = \frac{10}{2}$ duplicetur *(2)* Sed *L* 9 Ponatur *(1)* $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = 5$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{5} = \mathrm{b}$ *L*

---

9 f. Leibniz verwendet die Potenzen von z sowohl um Potenzen von b (in der ersten Differenz in den Nennern, in der zweiten in den Zählern der Brüche) als auch um Potenzen von a (in der zweiten Differenz in den Nennern) zu kennzeichnen.

mam inquiramus $= \underset{3 \frown 5}{\dfrac{2}{15}} + \underset{7 \frown 9}{\dfrac{2}{63}} + \dfrac{2}{11 \frown 13 = 143}$ etc.

$$\frac{[96]}{15 \frown 63} \qquad \frac{[160]}{63 \frown 143} \qquad \text{etc.}$$

Si esset: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. $= \frac{[2]}{15} + \frac{[2]}{35} + \frac{[2]}{63} + \frac{[2]}{99}$ [etc.] $= \frac{1}{3}$. Ergo $\frac{[2]}{15} + \frac{[2]}{63} + \frac{[2]}{143}$ etc. $= \frac{1}{3} - \frac{[2]}{35} - \frac{[2]}{99}$ etc.

Positum est supra esse $a = \frac{b}{\lambda}$. Ergo haec series: $\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc. elidendo a, dabit: $\frac{b^2\lambda}{3} - \frac{b^2\lambda^3}{5} + \frac{b^2\lambda^5}{7} - \frac{b^2\lambda^7}{9}$ etc.

Cum in hyperbola est $\frac{1}{1+b}$ et $b = a$, tunc eodem modo evanescunt omnia, et erit area spatii $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. Si vero sit $\frac{1}{1-b}$ et $b = a, = 1$, tunc fiet divisor infinite parvus, et dividendus infinite magnus: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. aequalis spatio hyperbolico asymptoto infinito.

Cumque alibi a me sit ostensum ex data hyp. quad. dari quad. circ. tunc conferendae istae series inter se.

Cum sector sit $\frac{bc}{2} -$ series + fulcrum quaerendum est an reperiri possint sectores, in quibus ea sit ratio ipsius $\frac{bc}{2} +$ fulcrum, unius ad idem alterius sectoris, quae est sectoris. Hinc enim daretur ratio serierum. Sed et sine seriebus, si darentur duo sectores, quorum fulcra essent ut segmenta haberetur ratio segmentorum, et proinde tetragonismus.

3 48 *L ändert Hrsg.* 3 80 *L ändert Hrsg.* 4 1 *L ändert Hrsg. viermal* 4 etc. *erg. Hrsg.* 5 1 *L ändert Hrsg. fünfmal.*

287,12–288,1 summam inquiramus: Leibniz führt die Überlegungen in Teil 3 anhand der Werte der halbierten Reihe in der Form $\frac{1}{16-1}, \frac{1}{64-1}, \frac{1}{144-1}$ etc. durch. 4 Si esset: Leibniz nimmt diese Überlegung in S. 298 Z. 13 wieder auf. 12 alibi: *De quadratura circuli et hyperb.* (Cc 2, Nr. 1237); vgl. auch *LQK* prop. XXXIV S. 81.

Antequam excedamus campo extrema tentanda sunt: aequatio esto cum serie finita $\frac{bc}{2} - \text{⌓} = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3}$. Ponatur $\frac{a}{\gamma} = b$, fiet $\frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5}$, ponatur $\gamma = 5$, fiet: $\frac{a^2}{3\smallfrown 125} - \frac{a^2}{5\smallfrown 625}$. Sed faciendum est ut sit $\gamma = 10$, quod ita fiet $\frac{ac}{2\smallfrown\gamma} - \text{⌓} = \frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5}$ (et $\gamma = 5$) ut vera fiat aequatio, $\frac{ac}{2\smallfrown 5} - \text{⌓} = \underbrace{\frac{a^2}{3\smallfrown 125} - \frac{a^2}{5\smallfrown 625}}_{\odot}$. Ergo $\frac{ac}{2\smallfrown 5} - \odot = \text{⌓}$ vel $= \frac{ac}{2\smallfrown 5} + \frac{a^2}{5\smallfrown 625} - \frac{a^2}{3\smallfrown 125} = \text{⌓}$ positoque $a = 3$, et $c = 1$, fiet $\text{⌓} = \frac{3}{10} - \underset{(375)}{\frac{9}{3\smallfrown 125}} + \frac{9}{5\smallfrown 625} = \frac{1035}{3750} + \frac{9}{5\smallfrown 625}$.

Ponamus iam potius esse $c = 2$, fiet: $a = 6$, et $\gamma = 10$, et habebimus: $\frac{12}{2\smallfrown 10} - \text{⌓} = \frac{36}{3\smallfrown 1000} - \frac{36}{5\smallfrown 100,000}$. Ut facilior sit calculus sumamus unum numerum tantum, esto $\frac{ac}{2\gamma} - \text{⌓} = \frac{a^2}{3\gamma^3}$.

2–4 *Nebenbetrachtung*: $\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\ \frac{3a - 2b}{6}$ $\qquad \frac{a^\gamma}{2} - \frac{a^\delta}{3} = \frac{3a^\gamma - 2a^\delta}{6}$

4 f. *Nebenrechnungen*:

$$\begin{array}{r} 125 \\ 3 \\ \hline 3750 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1250 \\ 125 \smallfrown 9 \\ \hline 1125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1125 \\ 90 \\ \hline 1035 \end{array}$$

3 $\gamma = 5$) *(1)*. *(a)* Igitur si initio ita fuisset a = 1, c = 3, et $\gamma = 5$, fieret *(b)* Ponatur 1 esse = 2 investigandum qualiter foret 1 *(2)* ut *L* 6 iam *(1)* unitatem hoc loco valere 2; seu esse 1 = 2r, seu fiet: a = 6, et c = 2, *(2)* potius *L*

11–13 Leibniz rechnet im mittleren Ausdruck $125 \cdot 9 = 1250 - 125 = 1125$.

Ponatur primum $a = 3l, c = 2l$ et $\gamma = 5$, et unitatem vocemus, proinde l, fiet: $\dfrac{6l^2}{10} - \dfrac{9l^2}{375} =$ ⌓. Quod si ponatur $l = 2g$, fiet $a = 6g, c = [4]g$. Unde apparet, l, unitatem, vel g, non ingredi ipsam γ. Aequatio prima fuit : $\dfrac{a}{5} = b$. Unde $\dfrac{a}{10} = \dfrac{b}{2}$, sed ita posito γ=10, non prodibit pure $\dfrac{a^2}{3\gamma^3}$ etc.

Si iam resumatur $\dfrac{b^3}{3a} - \dfrac{b^5}{5a^3} + \dfrac{b^7}{7a^5} - \dfrac{b^9}{9a^7}$, posito $b = 1$, iam a assurget ad altiores potestates, et quando adhibetur $\dfrac{a^2}{3\gamma}$, etc., ubi a ascendit tantum ad quadraticam, ibi vero non potest γ fieri $= 1$, quia est numerus.

Non omittenda hic observatio memorabilissima. Habes in hyperbola: $\dfrac{b}{1} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{b^3}{3} + \dfrac{b^4}{4}$ etc. Sed ipsa b rursus sunt: vel 1 vel 2 vel 3 vel 4. Hinc tabula:

---

8 f. *Nebenbetrachtung*:

$$\frac{1}{0} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{16}{4} \quad \frac{32}{5} \quad \left[\frac{64}{6}\right] \quad \frac{128}{7}$$

$$\frac{1}{0} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{27}{3} \quad \frac{81}{4} \quad \frac{243}{5} \quad \text{etc.}$$

$$\begin{array}{r} 8 \frown 16 \\ \underline{8} \\ 128 \\ \underline{16} \\ 768 \\ \underline{128} \end{array}$$

$$\frac{8}{3} \quad \frac{128}{7} \quad \frac{2048}{11}$$

1 primum *(1)* a = 3, c = 2 et $\gamma = 5$, fiet ⌓ $= 3 \frown 2$ *(2)* a = 3l, c = 2l, et *(a)* $\gamma = 5$l, et unitatem vocemus, proinde l, fiet: $\dfrac{6l^2}{10l} - \dfrac{9l^2}{375l^3}$ *(b)* $\gamma = 5$ *L* 2 2 *L ändert Hrsg.* 11 $\dfrac{64}{6}$ *erg. Hrsg.*

---

3 Aequatio prima fuit: s. o. S. 287 Z. 4.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & \text{etc.} \\
2 & + & \frac{4}{2} & + & \frac{8}{3} & + & \frac{16}{4} & + & \frac{32}{5} & \text{etc.} \\
3 & + & \frac{9}{2} & + & \frac{27}{3} & + & \frac{81}{4} & + & \frac{243}{5} & \text{etc.} \\
\text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & \\
\end{array}$$

$$\text{Sic}\quad \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{6} + \frac{c^4}{12} + \frac{c^5}{20} + \frac{c^6}{30}\ \text{etc.}$$

Quaelibet series aequalis figurae ergo summa omnium serierum est summa omnium figurarum, seu momentum earum ex applicata maxima, seu basi portionis maximae, quod si ponatur maximae figurae altitudo aequalis ipsi a unitati seu lateri quadrati immutabilis, summa fiet $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$ etc. Cuius vero seriei summa habetur $=1$, et tunc momentum quoque est aequale ipsi $a^2=1$. Sed etsi si terminus maximus assumtus sit maior quam a, et non a sed ipse ponatur esse unitas, tunc eodem modo proceditur quasi dividendus seu numerator fractionis $\frac{a^2}{1-y} = \left[\frac{a^2}{1-1}, \frac{a^2}{1-2}\right]$ esset 1 seu quasi esset $\frac{1}{1-y}$ productum autem tantum ducitur in a^2. Igitur necesse esset, ut ita summa ineatur maximam applicatam, si eam 1 esse vis pertingere ad asymptoton alioquin enim fit non $-$ sed $+$ unde alternatio summam turbans. Porro momentum ipsius figurae seu portionis spatii hyperbolici, citra asymptoton, differt a momento ex asymptoto, cylindro figurae cuius altitudo distantia $= d$ axis librationis, ab asymptoto. Ergo contra momentum illud seu

---

5 *Nebenbetrachtung*:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{4}{2} & \frac{8}{6} & \frac{16}{12} & \frac{32}{20} & \frac{64}{30} \\[1em]
2 & \frac{4}{3} & \frac{8}{6} & \frac{16}{10} & \frac{32}{15}
\end{array}$$

9 $= 1$ *erg. L* 12 fractionis *(1)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}-\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}-1}, \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}-2}$ etc. *(2)* $\frac{\mathrm{a}^2}{1-\mathrm{y}} = \mid \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}-1}, \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}-2}$ *ändert Hrsg.* | esset *L* 17 $=$ d *erg. L*

$\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{6}+\frac{c^4}{12}+\frac{c^5}{20}$ etc. cyl. fig. seu $+\,cd+\frac{1}{2}c^2d+\frac{1}{3}c^3d+\frac{dc^4}{4}$ etc. $=ca$ seu momento figurae ex asymptoto. Summa ergo fractionum [quarum] numeratores [geometricae] nominatores [arithmeticae] progressionis, pendet a quad. hyperbolae.

Iam et si alternent signa, ut in aliis hyperbolae casibus et circulo videndum est ut $b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{b^4}{4}$ etc. et b infinitis sumtis, numeroque variationum, c seu maximo $b=c$, fiet $\frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{6}+\frac{c^4}{12}$ etc. Quod si ea sit a, nempe maxima $b=c=a=1$ fiet $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}$ etc.: momentum spatii hyperbolici cuius basis seu maxima latitudo a, et altitudo etiam, a, momentum inquam ex illo a. Differentia eius momenti a momento ex asymptoto $a^3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ etc. erit $\frac{2}{6}+\frac{2}{20}$ etc. seu $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$ etc. Ergo si quis summam exhibere potest huius seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{21}+\left[\frac{1}{36}\right]$ etc. seu fractionum triangularium per saltus, dabit q u a d r a t u r a m h y p e r b o l a e .

In circulo cum sit series $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}$ etc. auferatur ab hyp. $\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$ etc. Restabit $1+\frac{1}{2}+\frac{0}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0}{7}+\frac{1}{8}+\frac{2}{9}$ etc. Ecce diff. inter circ. et hyp. De caetero seriei seu $\frac{b^3}{3}-\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}-\frac{b^9}{9}$ etc. summa fiet $\frac{c^4}{12}-\frac{c^6}{30}+\frac{c^8}{56}$ etc. momentum complem. fig. cissoeid. nov. ex basi, quod = hyp. cuidam. Ergo ista series = hyp. cuidam. Auferantur et ab hyp. interrupt.: $\frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{6}+\frac{c^4}{12}-\frac{c^5}{20}$ etc. vel $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ etc. Unde eadem omissio et duplicatio alternatae.

1 seu + *(1)* $c+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{3}c^3$ *(2)* cd *L* 2 f. Summa *(1)* ista ita fit $c+c^2$ *(2)* ergo | quaerenda *gestr.* | fractionum | cuius *ändert Hrsg.* | numeratores | arithmeticae *ändert Hrsg.* | nominatores | geometricae *ändert Hrsg.* | progressionis *L* 7 momentum *(1)* figurae *(2)* spatii *L* 7 f. et *(1)* latitudo *(2)* altitudo *L* 10 $\frac{1}{28}$ *L ändert Hrsg.* 10 seu *(1)* pyram. numerorum in *(2)* fractionum *L* 14 momentum | complem. *erg.* | fig. *L* 16 eadem *(1)* interruptio *(2)* omissio *L*

[*Teil 2*]

$$\frac{2y^2a}{a^2+y^2} = \frac{2y^2a}{\begin{array}{c} a+y \frown a-y \\ y+a \frown y-a \end{array}}.$$

Si $\dfrac{y^2}{a+y} = x$. Ergo $y^2 = ax + yx$ vel $y^2 + \dfrac{x^2}{4} - yx = ax + \dfrac{x^2}{4}$. Ergo $\begin{array}{c} y-x \\ (x-y) \end{array} = \sqrt{ax + \dfrac{x^2}{4}}$.

Si $\dfrac{y^2}{a-y} = x$. Ergo $y^2 = ax - yx$. Ergo $y^2 + \dfrac{x^2}{4} + yx = ax + \dfrac{x^2}{4}$ vel $y + x = \sqrt{ax + \dfrac{x^2}{4}}$.

$$\frac{a^2}{\begin{array}{c} a-y \\ y-a \end{array}} = x. \quad \frac{a^2}{a+y} = x.$$

$$\frac{a^3}{a^2+y^2} - \frac{a^3}{a^2+y^2+2y+1} = \frac{\cancel{a^5} + \cancel{a^3y^2} + 2a^3y + a^3 - \cancel{a^5} + \cancel{a^3y^2}}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}.$$

$$\frac{y^2+2y+1 \frown a}{a^2+y^2+2y+1} - \frac{y \frown a}{a^2+y^2}$$

$$= a^3y^2 + \cancel{2}ya^3 + a^3, + y^4a + \cancel{2y^3a} + \cancel{y^2}a - \cancel{ya^3} - \cancel{y^3a} - \cancel{2}y^2a - ya$$

$$[=]\ y^4a + \cancel{y^3a} + y^2a^3 - \cancel{y^2}a + \cancel{ya^3} - \cancel{ya}$$

---

2 *Zum Gleichheitszeichen*: Error

10–294,1 = *erg. Hrsg. zweimal*

---

2 $\dfrac{2y^2a}{a^2+y^2}$: Leibniz zerlegt hier und in S. 294 Z. 2 den Term a^2+y^2 in die Faktoren $a+y$, $a-y$ und erkennt nachträglich seinen Irrtum. 10–294,1 Das Gleichheitszeichen steht hier nicht für algebraische Identität, sondern verbindet die sukzessiven Schritte einer Tangentenrechnung mit 1 als infinitesimaler Einheit. In Z. 6 wäre deshalb im Zähler der rechten Seite noch der Term $+a^3$ zu streichen. Denselben Ansatz berechnet Leibniz in *Differentiae figurae circulo homogeneae rationalis* (Cc 2, Nr. 608) und in N. 23 S. 266 Z. 1. In Z. 7 müßte im Zähler des zweiten Ausdrucks y^2 statt y stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter bis S. 294 Z. 1.

$$[=]\frac{y^4a+y^2a^3}{a^4+2a^2y^2+y^4} \qquad \text{vel} \qquad \frac{ay^2+a^3, \frown y^2}{a^2+y^2 \quad \frown \quad a^2+y^2}$$

$$\begin{array}{ccc} a+y \frown a-y & & a+y \frown a-y \\ a-y,\square & \frown & a+y,\square \end{array}$$

etc.

$$\frac{a^2}{y^2+a^2}=\frac{a^2+\dfrac{a^4}{y^2}-\dfrac{a^4}{y^2}}{y^2+a^2}=\frac{a^2}{y^2}-\frac{a^4}{y^4+a^2y^2}.$$
$$-\frac{a^4}{y^4}+\frac{a^6}{y^6+a^2y^4}$$

[*Teil 3*]

NB. $\dfrac{[-1]}{b^2y^2-1}$ accedat $\dfrac{+b^2y^2}{b^2y^2-1}$, fiet $\dfrac{+b^2y^2-1}{b^2y^2-1}$. b^2 semper [16] seu $b=[4]$ at y variat per omnes numeros naturales possibiles. Infra omisso y pro eo substitutum est b.

---

1 *Zum linken Ausdruck*: Quadrab.

5 *Nebenbetrachtung*:

$$\frac{a^4}{y^4+a^2y^2}=\frac{a^4+\dfrac{a^4}{y^4}\frown a^2y^2-\ldots=\dfrac{a^6}{y^2}-\dfrac{a^6}{y^2}}{y^4+a^2y^2}. \qquad \frac{a^2}{y^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{a^4+y^4}{y^2a^2}.$$

8 1 *L ändert Hrsg.* 8 4 *L ändert Hrsg.* 8 2 *L ändert Hrsg.*

---

6 Leibniz formt den letzten Term der darüberstehenden Gleichung um. 8 Leibniz setzt in Teil 3 Betrachtungen des Abschnitts S. 287 Z. 12 – S. 288 Z. 5 fort. 9 Infra omisso y: s. u. S. 297 Z. 1–8; Leibniz hat nachträglich b in y umbenannt. 12 Leibniz rechnet in der ersten Gleichung im Zähler des rechten Bruches fortlaufend.

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{1}{16-1} & \dfrac{1}{64-1} & \dfrac{1}{144-1} \\
2 \frown 2, \square, -1 & 2 \frown 4, \square, -1 & 2 \frown 6, \square, -1 \\
4 \frown 1, \square, -1 & 4 \frown 2, \square, -1 & 4 \frown 3, \square, -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc}
(4) & \dfrac{1}{16} & + & \dfrac{1}{16 \frown 16} & + & \dfrac{1}{16 \frown 16 \frown 16} \\
(8) & \dfrac{1}{64} & + & \dfrac{1}{64 \frown 64} & + & \dfrac{1}{64 \frown 64 \frown 64} \quad \text{etc.} \\
(12) & \dfrac{1}{144} & + & \text{etc.} & &
\end{array}$$

$$\frac{1}{4 \frown 2, \square, -1} = \frac{1 - \dfrac{1}{4 \frown 2, \square} + \dfrac{1}{4 \frown 2, \square}}{4 \frown 2, \square, -1} = \frac{1}{4 \frown 2, \square} + \frac{\dfrac{1}{4 \frown 2, \square}}{4 \frown 2, \square, -1} =$$

$$\frac{1}{4 \frown 2, \square} + \frac{1}{4 \frown 2, \square\square, , -4 \frown 2, \square} \;[=]\; \frac{1}{4 \frown 2, \square} + \frac{1}{4 \frown 2, \square\square} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{cc}
\dfrac{1}{4 \frown 3, \square} & \dfrac{1}{4 \frown 3, \square\square} \\
\dfrac{1}{4 \frown 4, \square} & \dfrac{1}{4 \frown 4, \square\square} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

$$b = 4. \quad \frac{1}{16y^2 - 1} = \frac{1 - \dfrac{1}{16y^2} + \dfrac{1}{16y^2}}{16y^2 - 1} = \boxed{\frac{1}{16y^2}} + \frac{\dfrac{1}{16y^2}}{16y^2 - 1} = \frac{1}{16y^2} + \frac{1}{[256y^4 - 16y^2]}.$$

$$\frac{16y^2}{16y^2 - 1} = \frac{16y^2}{-1} \quad \left[\frac{+256y^4}{16y^2 - 1}\right].$$

8 $=$ *erg. Hrsg.* 12 $\dfrac{1}{16\text{y}^2} + \,|\, \dfrac{1}{256\text{y}^2 - 16\text{y}}$ *ändert Hrsg.* | $\dfrac{1}{\begin{matrix}256\text{y}^2 - 16\text{y}^2 \\ \text{b}^4\text{y}^2 - \text{b}^2\text{y}^2\end{matrix}}$ *gestr.* |. *L*

13 $\dfrac{-256\text{y}^4 + 256\text{y}^4}{16\text{y}^2 -}$ *L erg. u. ändert Hrsg.*

$$\underset{-1+b^2y^2}{\frac{b^2y^2}{\boxed{b^2y^2-1}}} = \frac{b^2y^2\,\dfrac{+b^2y^2 \frown b^2y^2}{-1}\;\dfrac{-b^2y^2 \frown b^2y^2}{-1}}{-1+b^2y^2} = \frac{b^2y^2\,\dfrac{+b^4y^4}{-1}\;\dfrac{-b^4y^4}{-1}}{-1+b^2y^2} =$$

$$\frac{b^2y^2}{-1}\;\frac{\dfrac{-b^4y^4}{-1}}{-1+b^2y^2} = \frac{-b^4y^4}{+1-b^2y^2} = -b^2y^2\frac{+b^4y^4}{-1+b^2y^2} \text{ sed et sic } -b^2y^2\frac{-b^4y^4}{1-b^2y^2}.$$

Mirabile $\dfrac{b^2y^2}{b^2y^2-1} = -b^2y^2 - b^4y^4$ vel $-b^2y^2 + \dfrac{b^4y^4}{-1}$ etc. in infinitum.

$$\frac{1}{b^2y^2-1} = \frac{1-\dfrac{1}{b^2y^2}+\dfrac{1}{b^2y^2}}{b^2y^2-1} = \boxed{\frac{1}{b^2y^2}} + \frac{1}{b^4y^4-b^2y^2}.$$

$$\frac{1}{b^4y^4-b^2y^2} = \frac{1-\dfrac{1}{b^2y^2}+\dfrac{1}{b^2y^2}}{b^4y^4-b^2y^2} = \boxed{\frac{1}{b^4y^4}} + \frac{1}{b^6y^6-b^4y^4}.$$

$$\frac{1}{b^6y^6-b^4y^4} = \frac{1-\dfrac{1}{b^2y^2}+\dfrac{1}{b^2y^2}}{b^6y^6-b^4y^4} = \boxed{\frac{1}{b^6y^6}} + \frac{1}{b^8y^8-b^6y^6}. \quad \text{etc.}$$

Ergo $\dfrac{1}{b^2y^2-1} = \dfrac{1}{b^2y^2} + \dfrac{1}{b^4y^4} + \dfrac{1}{b^6y^6}$ etc.

$$\frac{1}{16y^2,-1} = \frac{1}{16y^2} + \frac{1}{256y^4} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{y^2-1} = 1-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4-y^2} \text{ etc.}$$

Idem sic quoque exprimi posset

---

8 *Daneben*: NB.

---

3 f. $= \dfrac{-b^4y^4}{+1-b^2y^2}$: Leibniz rechnet fortlaufend und formt nur den letzten Term um.

$$\frac{1}{16-1} = \frac{1}{9+6} = \frac{1}{y^2+2y} = \frac{1}{y+2} \smile y.$$

$$\frac{1}{64-1} = \frac{1}{49+14}$$

$$\frac{1}{144-1} = \frac{1}{121+22}$$

$$\frac{1}{y+2} = \frac{1+\cancel{\frac{y}{2}}-\cancel{\frac{y}{2}}}{y+2} = \frac{1}{2} - \frac{y}{2y+4} \text{ duplicetur fiet: } \frac{2}{y+2} = \frac{2-y+y}{y+2} = 1 - \frac{y}{y+2}$$

ut persequamur iam hoc: $\dfrac{2}{y+2}$, vel $\dfrac{y}{y+2}$.

$$\frac{y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{2}}{y+2} = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2y+4}. \quad \frac{y^2+\frac{2y^3}{4}-\frac{2y^3}{4}}{2y+4} = \frac{y^2}{4} - \frac{\frac{y^3}{2}}{2y+4} = \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{4y+8}.$$

Ergo: $\dfrac{y}{2} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{y^3}{8} - \dfrac{y^4}{16}$ etc. divisisque omnibus per y, et multiplicatis per 2 fiet:

$$\begin{array}{lccccccccl}
 & 1 & - & \frac{y}{2} & + & \frac{y^2}{4} & - & \frac{y^3}{8} & & \text{etc.} \\[1ex]
\text{Ergo} & 1 & & \frac{3}{2} & & \frac{9}{4} & & \frac{[27]}{8} & & \\[1ex]
 & 1 & & \frac{7}{2} & & \frac{49}{4} & & \frac{[343]}{8} & & \\[1ex]
 & 1 & & \frac{11}{2} & & \frac{121}{4} & & \frac{1331}{8} & & \\[1ex]
 & \text{etc.} & & & & & & & & \\
 & \cdot & - & \cdot & + & \cdot & - & \cdot & &
\end{array}$$

9–11 *Nebenrechnungen*:

$$\frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{6}{8} \,\Big|\, \frac{3}{4} \qquad \frac{49}{4} - \frac{7}{2} = \frac{98-28}{8} = \frac{70}{8}$$

9 81 *L ändert Hrsg.* 10 729 *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\[4pt] \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\[4pt] \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\[4pt] \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} \\[4pt] \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & \frac{1}{125} \\[4pt] \frac{1}{6} & \frac{1}{36} & \frac{1}{216} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 30 & & 20 & & 12 & & 6 & & 2 & & 0 \\ & & & 8 & & 6 & & 4 & & 2 & \\ & & & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 294 & & 180 & & 100 & & 48 & & 18 & & 4 & & 0 \\ & 114 & & 80 & & 52 & & 30 & & [14] & & 4 & \\ & & 34 & & 28 & & 22 & & [16] & & 10 & & \\ & & & 6 & & 6 & & 6 & & [6] & & & \end{array}$$

(1) $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{256}$ etc.

(2) $\frac{1}{16 \frown 16}$ $\frac{1}{256 \frown 256}$

Si esset $\frac{1}{15}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{63}\ \frac{1}{99}$ etc. seu $\frac{1}{16-1}\ \frac{1}{36-1}\ \frac{1}{64-1}\ \frac{1}{100-1}$, fieret

1–7 *Nebenrechnungen*: $4-2=2$ $9-3=6$ $16-4=12$ $25-5=20$ etc. $8-4=4$ $27-9=18$ $64-16=48$ $125-25=100$

6 16 *L ändert Hrsg.* 7 14 *L ändert Hrsg.* 8 4 *L ändert Hrsg.*

12 Si esset: Leibniz nimmt die Überlegung von S. 288 Z. 4 f. wieder auf.

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{16} & + & \frac{1}{16 \frown 16} & + & \frac{1}{16 \frown 16 \frown 16} & & \text{etc.} \\
\frac{1}{36} & + & \frac{1}{36 \frown 36} & + & \frac{1}{36 \frown 36 \frown 36} & & \text{etc.} \\
\frac{1}{64} & + & \frac{1}{64 \frown 64} & + & \frac{1}{64 \frown 64 \frown 64} & & \text{etc.} \\
\text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}\right\} = \left[\frac{1}{6}\right].$$

Unde videtur apparere progressiones has fore summabiles modo termini sint finiti. Sed quia numerus terminorum infinitus, adeo ut nec spatio aliquo finito exhiberi possit, eluditur opera, si tamen vocetur b, inde sequetur summa haec: $b - \frac{[b^2]}{4} + \frac{[b^3]}{12} - \frac{[b^4]}{32} + \frac{[b^5]}{80}$ etc. quod etsi b intelligatur numerus sine limitatione infinitus figurae nostrae aequale est. Unitas autem hoc loco est radii quadratum.

Mira haec contemplatio.

2 $\frac{1}{3}$ *L ändert Hrsg.* 5 *(1)* Iam sumto *(2)* Unde *L* 7 $2b^2$ *L ändert Hrsg.* 7 $2b^3$ *L ändert Hrsg.* 7 $2b^4$ *L ändert Hrsg.* 7 $2b^5$ *L ändert Hrsg.* 8 f. est. *(1)* Quae hic signi *(2)* Unitas *L*

26. DE APPROPINQUATIONE CIRCULI PER SERIEM I
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 II 1 Bl. 80+124. 1 Bog. 2°. 4 S. Textfolge 80 r°, 124 v°, 80 v°, 124 r°. Geringe Textverluste durch Ausrisse im Falz. Auf Bl. 124 r° rechts oben Notiz (Münzrechnung), vor Teil 4 geschrieben.
Cc 2, Nr. 556.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum August 1673 bis Juni 1674 belegt. Das Stück ist vermutlich kurz nach der Entdeckung der Kreisreihe, jedoch vor der spätestens Mitte 1674 anzusetzenden Abhandlung Cc 2, Nr. 555 A und vor N. 34 (s. Erl. zu S. 355 Z. 2 u. S. 355 Z. 4) entstanden, welche die in N. 26 berechneten Werte für $\frac{b^3}{3}$ und $\frac{b^5}{5}$ — Cc 2, Nr. 555 A auch den Wert $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$ — (s. S. 307 Z. 15 u. S. 308 Z. 12 u. S. 308 Z. 15) übernehmen.

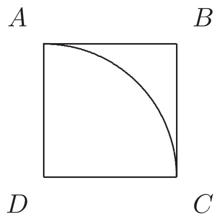
[*Notiz*]

$$
\begin{array}{rrrcl}
110 & 110 & \cancel{2}15 & \cancel{f} & 10\frac{15}{} \\
22\frac{1}{2} & 22\frac{1}{2} & \cancel{2}\cancel{0}0 & & 10 \text{ fr. } 15. \\
12\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & 2 & & \\
3 & 13 & & & \\
2\frac{1}{2} & 2\frac{1}{2} & & & \\
 & 5 & & & \\
\underline{65} & \underline{60} & & & \\
[215\frac{1}{2}] & \underline{1\frac{1}{2}} & & & \\
 & 215\frac{1}{2} & & &
\end{array}
$$

20 $5\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.*

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{3}-\frac{1}{5} & +\frac{1}{7}-\frac{1}{9} & +\frac{1}{11}-\frac{1}{13} & +\frac{1}{15}-\frac{1}{17} & +\frac{1}{19}-\frac{1}{21} & +\frac{1}{23}-\frac{1}{25}. \\ \backslash/ & \backslash/ & \backslash/ & \backslash/ & \backslash/ & \backslash/ \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{63} & \frac{2}{143} & \frac{2}{255} & \frac{2}{399} & \frac{2}{[575]} \end{array}$$



[*Fig. 1*]

$\frac{126+30}{945} = \frac{156}{945} \times \frac{2}{143} = \frac{24198}{135135} + \beta = ABCA$. Ergo $1 - \frac{24198}{135135}$ etc. $\beta = ADCA = \frac{110937}{135135}$ etc. Adde hanc seriem utcunque lubet in infinitum, nunquam attinget eius diffe-

---

2–302,1 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rrrrrr} 17 & 24 & 156 & 945 & 2835 & 135135 \\ 15 & 24 & 143 & 143 & 945 & 24198 \\ \hline 85 & 96 & 468 & 2835 & 3780 & 110937 \\ 17 & 48 & 624 & 3780 & & \\ \hline 255 & 576 & 156 & 945 & & \\ & & \overline{22308} & \overline{135135} & & \\ & & 1890 & & & \\ & & \overline{24198} & & & \end{array}$$

3 576 *L ändert Hrsg.* 5 etc. β *erg. L* 6 nunquam *(1)* excedes *(2)* attinget *L*

rentia ab 1, $\frac{6,283,800}{8,000,000}$. Imo nunquam attinget $\frac{628,318,53[3],600}{800,000,000,000}$.

Si radium ducas in octavam circumferentiae partem habes quadrantem circuli, qui aequatur differentiae seriei nostrae ab 1. posito radio 1.

Radio posito 1,000,000 circumferentia est inter $\frac{6,928,200}{6,000,000}$ vel inter $\frac{6,283,800}{6,282,720}$ vel radio posito $100,000,000,000$ inter $\begin{cases} 628,318,53[3],600 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12,000 \end{cases}$. Ergo ratio: $\frac{\text{rad.}}{\text{circ.}}$ $\frac{1,000,000}{\begin{cases} 6,283,800 \\ 6,282,720 \end{cases}}$.

Ergo $\frac{\text{circ.}}{\text{rad.}} = \frac{\begin{cases}\ldots\ldots\ldots \\ \end{cases}}{\ldots\ldots\ldots}$. circ. $= \frac{\begin{cases}\ldots\ldots\ldots \\ \end{cases}}{\ldots\ldots\ldots} \frown$ rad. Ergo si rad. $= 1.$ erit circumf.$=$ $\begin{cases} \frac{\begin{cases} 6,283,800 \\ 6,282,720 \end{cases}}{1,000,000} \end{cases}$.

Radio posito 1,000,00$\cancel{0}$ erit tangens 30. grad.: 577,35$\cancel{0}$. Ergo $\frac{\text{rad.}}{\text{tang.}} = \frac{100,000}{57735}$, seu

---

1 *Nebenbetrachtungen*:

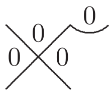
$\frac{\begin{cases} 6,283,800 \\ 6,282,720 \end{cases}}{8,000,000}$ $\frac{62838}{80000}$ $\frac{31429}{40000}$ 857 $\cancel{1}\cancel{9}\cancel{6}\cancel{8}9$ $\cancel{4}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \not\mid 1$ $\cancel{3}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}$ $31429 \not\mid 3$ $\underline{8579}$ $\frac{1}{1+\frac{8579}{31429}}$

$\frac{1429}{40000}$ $\frac{143\cancel{0}}{4000\cancel{0}}$ $\frac{142}{4000} \Big| \frac{71}{2000}$ $\frac{7\cancel{0}}{200\cancel{0}}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{3}{4} + \frac{1}{30}$

1+5 5 *L ändert Hrsg. zweimal*

1–311,22 $\frac{6,283,800}{8,000,000}$: Die Näherungswerte 6,283,800, 628,318,533,600, 6,928,200, 6,282,720 und 628,318,512,000 für den Kreisumfang sowie unten der Winkelfunktionen tan 30° $= 0,57735$, tan 1° $=$ $0,017455$ und sin 1° $= 0,017452$ hat Leibniz vermutlich aus I. G. Pardies, *Elémens de géométrie*, 1671, livre IX, articles 39–41 S. 114–116 entnommen. 10 f. $\frac{31429}{40000}$: Richtig wäre $\frac{31419}{40000}$; bei der Division unterläuft Leibniz ein weiterer Fehler (8579 statt 8571). Er rechnet konsequent weiter. Das Ergebnis der zweiten Abschätzung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

tang. $= \dfrac{57735}{100,000} \frown 1$ (rad.), posito rad. $= 1$. Ducatur ter in se ipsum fiet:

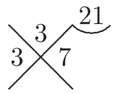


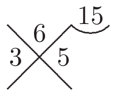
$$
\begin{array}{rcr}
\cancel{5}\cancel{7}\cancel{7}35 & & \\
\underline{57735} & & \\
288675 & & 288675 \\
173205 & & 173205 \\
404145 & & 404145 \\
288675 & & 404145 \\
\overline{331110225} & & 288675 \\
57735 & & \overline{3333330225} \\
\overline{165555\cancel{1}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{5}} & & \\
\cancel{9}\cancel{9}33\cancel{3}0\cancel{6}75 & & \\
\cancel{2}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{5}75 & & \\
2317771575 & & \\
1655551125 & & \\
3)\ \overline{\cancel{1}\cancel{9}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{5}} & \not{f} & \dfrac{637\,22162\,80125}{1,00000,00000,00000} \\
\cancel{1}\cancel{2}\quad \cancel{1}\ \cancel{2}\quad \cancel{1} & &
\end{array}
$$

---

1 *Nebenbetrachtung*:

$$
\begin{array}{ccrcr}
 & & 57 & & \\
\dfrac{57}{100} & & \underline{57} & & \\
 & & 399 & & 1,00,00,00 \\
 & & \underline{2\ 85} & & \\
 & & 3\ 249 & & 100,0000 \\
 & & \underline{57} & & 1 \\
 & & 22\ 743 & & 1 \\
 & & \underline{162\ 45} & & \\
 & & \dfrac{185\ 193}{1,000,000} & \not{f} & \dfrac{61\ 731}{1000,000}
\end{array}
$$





---

6 Leibniz vergißt bei der Multiplikation, den Summanden 404145 zweimal anzuschreiben. Der Fehler wirkt sich aus bis Z. 15. Leibniz erkennt dies und setzt in Z. 4, rechte Spalte, neu an.

57735
3333330225
: : : :288675
. . .115470
. .11547
1732050
173205
173205
173205
173205
173205
3)$\not1 9 \not2 \not4 \not4 \not9 \not8 \not2 0 \not5 \not4 0 \not3 \not7 \not5$ ƒ $\dfrac{6 \not4 \not1 \not4 \; \not9 \not9 \not4 0 1 \; \not8 0 \not1 2 \not5}{100000, 00000, 00000}$
$\not1 \; \not1 \not2 \not2 \not1 \; \not2$

192449820540375
331110225
962249102701875
384899641080750
384899641080750
1924498205403750
192449820540375
192449820540375
577349461621125
577349461621125
637221033803331878344375

$\not6 \not3 \not7 \not2 \not2 \not1 0 \not3 \not3 \not8 0 \not3 \not3 \not3 \not1 \not8 \not7 \not8 \not3 \not4 \not3 \not7 \not5$
5) $\not1 \not3 \not2 \not2 \not2 \not1 \; \not3 \not3 \not3 \; \not3 \not3 \not3 \not1 \not3 \not2 \not3 \not3 \not4 \not3 \not2$

641499401801250000000000
prod. $\not1 \not2 \not7 \not4 \not4 \not4 \not2 0 \not6 \not7 \not6 0 \not6 \not6 \not6 \not3 \not7 \not5 \not6 \not6 \not8 \not7 \not5$
628754981125183362433125
1000000000000000000000000

[*Teil 2*]

$$\frac{a^2}{y^2+a^2} = \boxed{\frac{a^2}{y^2}} - \frac{a^4}{y^4+a^2y^2}. \quad -\frac{a^4}{y^4+a^2y^2} = \boxed{-\frac{a^4}{y^4}} + \frac{a^6}{y^6+a^2y^4} \text{ etc.}$$

$\dfrac{a}{y+a} = \dfrac{a}{y} - \dfrac{a^2}{y^2} + \dfrac{a^3}{y^3} - \dfrac{a^4}{y^4}$ etc. $\dfrac{y}{y+a} = \dfrac{y}{a} - \dfrac{y^2}{a} + \dfrac{y^3}{a^3} - \dfrac{y^4}{a^4}$ etc. Iam $\dfrac{a}{y+a}$ est $= 1 - \dfrac{y}{y+a}$. Ergo $\dfrac{a}{y} - \dfrac{a^2}{y^2} + \dfrac{a^3}{y^3} - \dfrac{a^4}{y^4}$ etc. $= 1 - \dfrac{y}{a} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{y^3}{a^3} + \dfrac{y^4}{a^4}$ etc.

Et quoniam non tantum omnium paraboloeidum, sed etiam omnium hyperboloeidum summa datur, demta prima ideo harum summarum differentia dabit $\dfrac{a}{y}$. Et credo dabit alia fractionum serie. Hinc habebitur summa ipsius $\dfrac{a}{y}$; seu incipiendo ab asymptoto; expressa serie alternatim negante, cum alias non nisi alternatim affirmante haberi soleat. Sed an non inde sequitur spatium asymptoton non omni magnitudine infinitum? Imo est.

Si sic: $\dfrac{a}{y-a}$, tunc easdem partes quas ante per $+$ et $-$ alternatim, tractare iam potes per purum $+$. Ita ipsum y semper maius quam a, fit autem $\dfrac{a}{y} + \dfrac{a^2}{y^2} + \dfrac{a^3}{y^3}$ etc. Item si sit $\dfrac{y}{a-y}$ (complementum ipsorum $\dfrac{a}{a-y}$) fit $\dfrac{y}{a} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{y^3}{a^3}$ etc. Conferenda ista omnia

---

304,14 *Links*: $\dfrac{b^3}{3a} - \dfrac{b^5}{5a^3} + \dfrac{b^7}{7a^5} - \dfrac{b^9}{9a^7}$ etc. $\dfrac{b^2}{a} - \dfrac{b^4}{a^3} + \dfrac{b^6}{a^5} - \dfrac{b^8}{a^7}$. 1 ∞ $\dfrac{b^2}{a^2}$, seu si maius est ut a^2, proxime minus est b^2.

10 $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{y-a}}$, | vel $\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{y-a}}$ *gestr.* | tunc *L* 10 per + | *(1)* iam *(2)* et − alternatim *erg.* |, tractare *L* 11 Ita *(1)* maximum y *(2)* ipsum *L* 11 f. Item *(1)* fit *(2)* si *L*

304,15 331110225: Leibniz rechnet mit dem von ihm zuvor als falsch erkannten Wert für 57735^2 weiter. Der Fehler beeinträchtigt das Ergebnis der Rechnung. Leibniz bricht ab und setzt in Teil 3 zu einer weiteren Kreisrechnung an.

in ipsis figuris. Ex quibus hic etiam usus ut videantur maiora spatia metiri posse, etiamsi non cum Wallisio ponamus $y = 1$ sed $a = 1$ ut alias semper.

[*Teil 3*]

Radio posito $1,000,000$ tangens 1. gradus. Ergo radio posito 1. tangens 1. gradus est: $\dfrac{17455}{1,000,000} = b$.

$$
\begin{array}{rrr}
17 & & \dfrac{17}{1000} \\
17 & & \\
\hline 119 & & \\
17 & & \\
\hline 289 & & 1,000,000 \\
17 & & \\
\hline 2023 & & \\
289 & \cancel{1}\cancel{1}\cancel{2}2 & \\
\hline 4913 & \cancel{4}\cancel{9}\cancel{1}\cancel{3} \; f \quad 1637\frac{2}{3} & |1,000,000,000 \\
289 & \cancel{3}\cancel{3}\cancel{3} & \\
\hline 44217 & & \\
39304 & & \\
9826 & & \\
\hline 1419857 & 3) \quad 473285\frac{2}{3} & |1,000,000,000,000,000 \\
 & & \\
4913000000 & 1637,000,000 & \frac{17}{2}000,000,000 \\
1419857 & 473 \;\; 285 & 1\;636,526,715 \\
\hline 4911580143 & 1636 \;\; 526 \;\; 715 & 6,363,473,285 \\
\hline [1,000,000,000,000,000] & & \overline{1,000,000,000,000,000}
\end{array}
$$

---

5 *Nebenbetrachtung*: Sinus versus 2. grad. $\dfrac{1000-999}{1000} = \dfrac{1}{1000}$ ducatur in tang. 1. grad. dimid. $\left[\dfrac{8\frac{1}{2}}{1000}\right]$, fiet $\dfrac{8\frac{1}{2}}{1000,000}$.

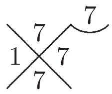
$$\begin{array}{lr}
4 & 17455 \\
 & 17455 \\
\hline
 & 87275 \\
 & 87275 \\
 & 69820 \\
 & 122185 \\
 & 17455 \\
\hline
 & 304677025 \quad b^2 \\
7 & 17455 \\
\hline
 & 1523385125 \\
 & 1523385125 \\
 & 1218708100 \\
 & 2132739175 \\
 & 304677025 \\
\hline
1 \quad 1 \quad 3) & \cancel{5}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{4}71375 \quad b^3 \\
 & \cancel{3}\cancel{2}\;\cancel{2}\;\cancel{0}\cancel{1}\cancel{2}\quad\cancel{1}\cancel{2} \\
 & \cancel{2}
\end{array}$$

$$0,000,000,000,000$$

$$⨍ \quad 1 \ 772 \ 712 \ 490 \ 458\frac{1}{3} \quad \frac{b^3}{3}$$

306,4 1, 000, 000 tangens *(1)* minuti *(2)* 1. gradus *L* 306,4 f. 1. tangens *(1)* minuti *(2)* 1. gradus *L* 306,7 dimid. | 17 *ändert Hrsg.* |, fiet *(1)* 1700 *(2)* $\frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$ *(3)* $\frac{8\frac{1}{2}}{1000,000}$ *L* 306,21 *mittlere Spalte* 3) $473285\frac{2}{3}$ *erg. L* 306,22 *rechte Spalte (1)* 17000, 000, 000 *(2)* $\frac{17}{2}$000, 000, 000 *L* 306,24 *rechte Spalte (1)* 5, 363, 473, 285 *(2)* 6, 363, 473, 285 $\frac{1}{2}$ *(3)* 6, 363, 473, 285 *L* 306,25 1, 000, 000, 000, 000 *L ändert Hrsg.*

306,2 non cum Wallisio: Vgl. J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, 1668, S. 755. 306,4 17455: S. Erl. zu Z. 302,1. 306,6 f. Leibniz berechnet eine Abschätzung für den Wert $z \cdot \frac{b}{2} - \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}\right)$, wobei $z =$ sinus versus 2^o. Dabei unterlaufen ihm mehrere Flüchtigkeitsfehler. In Z. 7 vergißt er zunächst b zu halbieren und mit dem Faktor $\frac{1}{1000}$ zu multiplizieren. Er bemerkt den Fehler später und korrigiert hier und in S. 306 Z. 22–24, rechte Spalte, unvollständig. In S. 306 Z. 21 teilt er b^5 durch 3 statt durch 5, was das Ergebnis zusätzlich beeinträchtigt. Der in S. 306 Z. 22–24, linke Spalte, ermittelte Wert $b^3 - b^5$ wird nicht verwendet.



	5318137471375	
	304677025	
	26590687356875	
	10636274942750	
	372269622996250	
	37226962299625	
	31908824828250	
	21272549885500	
	159544124141250	
	1620314303319557659375	b^5
	$\cancel{1}\quad\cancel{4}\quad\cancel{2}\cancel{1}\quad\cancel{4}\quad\cancel{2}$	
5)	324062860663911531875	$\frac{b^5}{5}$
Ergo	177271249045800000000000	
	324062860663911531875	
	$\frac{1772388427597336088468125}{1000,000,000,000,000,000,000,000,000,000}$	$\frac{b^3}{3}-\frac{b^5}{5}$

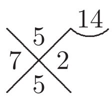
Iam ut sinum versum habeamus arcus 2. grad. quaerendus est eius sinus e, qui est $\frac{348995}{10,000,000}$. Unde facile habetur sinus versus, nam esto sinus versus z. est $\frac{z}{e = 348995} = \frac{b}{1} = \frac{\text{seu tang. semiarcus} = b}{\text{ad rad.} = 1} = \frac{17455}{1,000,000}$. Ergo $z = b \frown e$ [,] qui z. ducendus in b, faciet b^2e. Ergo

---

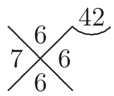
307,15 *Nebenbetrachtung*:

17455000,000,,000,000,,000,000	17455000,000,,000,000
1 772,712,,490,458	1772,712, 490,458
17454999,998,,227,287,,509,542	17453227,287, 509,542
180	180
139639999,985, 818,300, 076,3360	139625818,300, 076,3360
174549999 982 272 875 095 42	174532272 875 095 42
314189999 968 091 175 171 7560	314158091 175 171 7560

$$\begin{array}{r} 304\,677\,025 \\ 348\,995 \\ \hline 1\,523\,385\,125 \ \aleph \\ 27\,420\,932\,25 \\ 274\,209\,322\,5 \\ 2\,437\,416\,200 \\ 12\,187\,081\,00 \\ 91\,403\,107\,5 \\ \hline 10\cancel{6}\ \cancel{3}\cancel{3}0\ 7\cancel{5}\cancel{8}\ 3\cancel{3}\cancel{9}\ \cancel{8}\cancel{7}\cancel{5} \end{array}$$



Imo ut supra sumseram tang. semiarcus seu unius gradus solum $\frac{17455}{1,000,000}$, non $\frac{174551}{10,000,000}$ ita hic non per 348995, sed per 34899 multiplicandum. Ergo subtrahatur a producto $\aleph$, nempe 1523385125.



$$\begin{array}{r} [10,000,000,000,000,000,000] \\ 1\,523\,385\,125 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{[106\,329\,234\,954\,750,\ 000,000,000,00]}{1,000,000,000,000,000,000,\ 000,000,000,000} = b^2e.$$ Ab hoc subtrahatur $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$.

$$\begin{array}{r} 1,772,388,427,597,\ 336,088,468,125 = \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} \\ \hline 104,556,846,527,152,\ 663,911,531,875 = \end{array}$$ residuum, aequale segmento arcus cui addendum est fulcrum 2. graduum, et habebitur sector 2. grad. seu [180$^{\text{ma}}$] circuli portio. Fulcrum autem est triangulum, quod habet basin, chordam arcus 2. grad. seu duplicem sinum arcus 1. grad. et altitudinem sinum complementi unius grad.: Est autem $\frac{\text{rad.}}{\text{sin. compl.}} = \frac{\text{tang.}}{\text{sin.}}$ seu sin. compl. $= \frac{\text{sin.} \frown \text{rad.}}{\text{tang.}}$ et si rad. $=$ 1. erit $= \frac{\text{sin.}}{\text{tang.}}$. Est

308,16 arcus 2. grad *erg.* *L* 308,18 $=$ *L ändert Hrsg.* 10 100, 000, 000, 000, 000, 000, 000 *L* *ändert Hrsg.* 12 106 329 234 954 750 000 000 000 000 *L ändert Hrsg.* 15 f. arcus *(1)* quo subtrahen *(2)* cui *L* 16 seu *(1)* sexagesima *(2)* | 30$^{\text{ma}}$ *ändert Hrsg.* | circuli *L* 17 est triangulum, quod *erg.* *L* 18 complementi *(1)* arcum *(2)* unius *L*

308,21 Leibniz setzt in der linken Spalte den Wert für b um den Faktor 10^6 zu hoch an; er bemerkt den Fehler und setzt in der rechten Spalte neu an. 12 Ab hoc subtrahatur: Es müßte von $\frac{b^2e}{2}$ subtrahiert werden. Leibniz erkennt den Fehler und stellt eine neue Berechnung an.

autem sin 1. grad. $= \dfrac{17452}{1,000,000}$ et tang. eiusdem est $\dfrac{17455}{1,000,000}$, erit sin. compl. $= \dfrac{17452}{17455}$. Ducatur in semichordam seu sinum arcus 1^{mi} gradus, fiet $\dfrac{17452\square}{17455 \frown 1,000,000} = \dfrac{17452 - 3 \frown 1 - \dfrac{3}{17455}}{1,000,000}\langle\text{— —}\rangle$.

Sed ne fractione decimali sit exeundum sumamus sinum complementi grad. 1. seu sinum grad. 89. ex tabulis, qui est 999847. Eum ducamus in sinum arcus primi gradus: 17452, fiet:

309,12 *Nebenbetrachtung*: Imo ad habendum sinum versum arcus 2. grad. tantum sinus compl. arcus 2. grad. subtrah. a radio

1,000,000	17455	cuius dimid.
999,390	610	5323775000,000,000,000,000,000
$\overline{0,000,610}$	$\overline{174550}$	1772388427,597,336,088,468,125
	104730	$\overline{3551386372\ 402\ 663\ 911\ 531\ 875}$.
	$\overline{10647550}$	
	$\overline{1000,000,000,000}$	

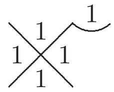
2 gradus, *(1)* restituitur *(2)* fiet *L* 4 f. grad. 1. seu sinum grad. 89. *erg. L* 311,8–10 $\dfrac{17{,}449{,}329{,}844|000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}{1{,}000{,}000{,}000{,}000|000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}$

(1) | addatur $b^2e - \dfrac{b^3}{3} + \dfrac{b^5}{5} =$ $\underline{\underline{104,556,846,527,152,663,911,531,875}}$ *streicht Hrsg.* |
sector circuli, 2. grad. .... $\underline{1,847,086,690,527,152,663,911,531,875}$
$\underline{\underline{1,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000}}$ *streicht Hrsg.* |
(a) ductus in 180 dabit ipsum circulum, et ductus in 90 semicirculum *(b)* ductus in 30 *(2)* Addatur *(a)* fulcrum ex sin. rect. et sin. compl. 1. gr. factum *(b)* segmentum *L*

---

1 $\dfrac{17455}{1,000,000}$: S. Erl. zu S. 302 Z. 1.

999 847
17 452
1 999 694
49 992 35
399 938 8
6 998 929
9 998 47
$\cancel{1}\cancel{7},\cancel{4}\cancel{4}\cancel{9},\cancel{3}2\cancel{9},\cancel{8}44$ | 000,000,000,000,000,000
1,000,000,000,000 | 000,000,000,000,000,000



Addatur segmentum quod est differentia inter rectangulum sub semisinu [verso] arcus 2. grad. et tang. 17,449,329,844,000,000,000,000,000,000

arcus 1. grad. [et $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$] fiet: 3,551,386,572,402,663,911,531,875

S e c t o r 2. g r a d. 17,452,881,230,572,402,663,911,531,875

Ducatur in 360, fit circulus duplicatus, 360

104,717,287,383,434,415,983,469,191,250,0
523 586 436 917 172 079 917 345 956 25

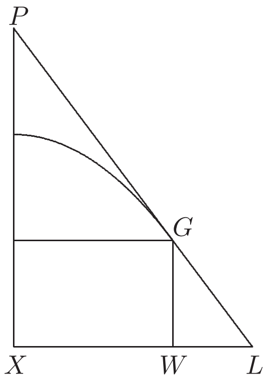
circulus duplicatus . . . 628 303 724 300 606 495 900 815 147 5000 ג
per radium 1. divisus 1,,000,000,,000,000,,000,000,,000,000,,000,000 ב

dat circumf. en ergo eadem radio posito ב circumferentia erit ג. Iam scilicet ut appareat veritati consentire, posito tantum radio 1000,000, et sumto 360 vicibus tangente ⟨17455 et sinu⟩ 17452 unius gradus, illic dabitur 6283800, hic 6282720 illud circumferentia polygoni ⟨circumscripti, hoc⟩ [inscripti], illa maior, haec minor circumferentia circuli, et eius valore ⟨—⟩

12 verso *erg. Hrsg.* 13 1. grad. | et $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$ *erg. Hrsg.* | *(1)* quae summa ducta in 180 facit *(2)* fiet: *L* 21 consentire, *(1)* tangens *(2)* posito *L* 23 hoc⟩ | circumscripti *ändert Hrsg.* | *(1)* inter qua *(2)* illud maius, hoc *(3)* illa *L*

[*Teil 4*]

$\langle 2ax \mp x^2\rangle = y^2$. Ergo $2ap \mp 2xp = 2y^2$, seu $p = \frac{y^2}{a \mp x} = \frac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$. Quodsi iam ipsa ordinata, dividatur per p. oritur differentia:



$$\frac{PX}{XL} = \frac{GW}{WL}.\ \text{Ergo}\ \frac{XL \frown GW}{PX} = WL := \frac{XL}{PX}[\frown GW].$$

[*Fig. 2*]

Iam $\frac{y}{p}$ hoc loco $= \frac{\sqrt{2ax \mp x^2}}{2ax \mp x^2} \frown a \mp x = \frac{\sqrt{2ax \mp x^2} \frown a \mp x}{\sqrt{2ax \mp x}, \frown \sqrt{2ax \mp x}} = \frac{a \mp x}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$. Homog. $\frac{a^2}{\sqrt{2ax \mp x^2}} \mp \frac{xa}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$ quae quadrabilia. Iam $\frac{xa}{\sqrt{2ax \mp x^2}} = y$. Ergo $\frac{x^2a^2}{2ax \mp x^2} = y^2$ fiet $\frac{xa^2}{2a \mp x} = y^2$, vel $xa^2 = 2ay^2 \mp xy^2$ seu $xa^2 \mp xy^2 = 2ay^2$. Unde $x = \frac{2ay^2}{a^2 \mp y^2}$ figura segmentorum.

---

8 *Nebenbetrachtung*: $2a^2y = a^2x + y^2x$ seu $2a^2y - y^2x = a^2x$.
$a \frown 2ay \; - y^2 - a^2, \frown x = 0$.

4 $\frown$ GW *erg. Hrsg.* 7 $\mp \frac{\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax} \mp \mathrm{x}^2}}$ |. Hae duae sunt applicatae eiusd. figurae, *erg. u. gestr.*| quae *L* 9 figura segmentorum *erg. L*

NB. Haec figura aequatur semper ei figurae, cuius differentiae sunt $\dfrac{2ay^2}{a^2 \mp y^2}$ seu homogeneae figurae segmentorum. Haec figura fingi potest dari ex data circuli quadratura, dabitur huius figurae etsi minus geometricae dimensio ex data huius $\dfrac{2ay^2}{a^2 \mp y^2}$ dimensione. Haec autem figura pendet ex dimensione alterius $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$ et vicissim, at haec pendet ex quadratura circuli (vel hyp.). Est enim f i g u r a a n g u l o r u m.

Ergo quadratura huius figurae, cuius differentiae sunt homogeneae figurae segmentorum, seu quae est quadratrix figurae segmentorum pendet ex circuli quadratura, videndum an hoc aliquem habet usum.

Porro differentiae sinuum circuli $\square^{\text{to}}$ addatur $\square^{\text{tum}}$ $\dfrac{a^2}{a^2}$, seu 1. fiet $\sqrt{\dfrac{a^2 + x^2 \mp 2ax}{2ax \mp x^2} + \dfrac{2ax[\mp]x^2}{2ax \mp x^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \mp x^2}}$ latus infinite parvum circuli vel hyperb. Ergo figura arcui circuli homogenea foret $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} = y$ ut alibi demonstratum.

Notabile exemplum ex quo apparet unitatem addi, si modo fractionis cuiusdam numeratori addideris eius denominatorem.

1 f. seu... segmentorum *erg. L* 5 (vel hyp.) *erg. L* 9 f. fiet *(1)* $\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2 \mp 2\mathrm{ax}}{2\mathrm{ax} \mp \mathrm{x}^2} + \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2}}$ *(2)* | $\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2 \mp 2\mathrm{ax}}{2\mathrm{ax} \mp \mathrm{x}^2} + \dfrac{2\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2}{2\mathrm{ax} \mp \mathrm{x}^2}}$ *ändert Hrsg.* | $= \sqrt{\dfrac{\mathrm{a}^2}{2\mathrm{ax} \mp \mathrm{x}^2}}$ *(a)*. Ergo figura *(b)* latus *(aa)* polygoni *(bb)* infinite *L* 10 vel hyperb. *erg. L* 11 foret *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}^2}{2\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2} = \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{a}}$ cuius aequatio $\mathrm{a}^3 = 2\mathrm{axy} - \mathrm{x}^2\mathrm{y}$ *(2)* $\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}^2}{2\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2}}$ *(3)* $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\sqrt{2\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2}} = \mathrm{y}$ *L*

10 vel hyperb.: Die Behauptung gilt nicht für die Hyperbel, für welche sich bei Addition der Terme unter der Wurzel $\sqrt{\dfrac{a^2 + 4ax + 2x^2}{2ax + x^2}}$ ergibt. 11 alibi demonstratum: vgl. *De hyperbola* (Cc 2, Nr. 612).

Curva cuius latus $\frac{a}{x}$. Eius $\square$ est $\frac{a^2}{x^2}$, auferatur $1 = \frac{x^2}{x^2}$ fiet: $\frac{a^2 - x^2}{x^2}$, unde radix: $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = y$. Ergo $a^{2\frown}\, a^2 - x^2 = y^2x^2$, vel $a^4 - a^2x^2 = y^2x^2$, vel $a^4 = y^2x^2 + a^2x^2$. Unde fiet: $\frac{a^4}{y^2 + a^2} = x^2$ seu $\frac{a^2}{\sqrt{y^2 + a^2}} = x$. Summa ergo huius figurae dabit figuram cuius curva sit spatio hyperbolico syntomos.

---

2 *Unter* $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = y$, *mit Hinweisstrich verbunden*: NB. Si multiplices per x fiet $\sqrt{a^2 - x^2} = y$ seu sinus circuli. Eius ergo summa dabit figuram aequalem isti nempe ipsi $\frac{a^2}{\sqrt{y^2 + a^2}}$ cuius curva spatio hyperbolico syntomos.

3 *Über* Summa … dabit: At ego demonstravi, eiusdem cum circulari consensum.

1 $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$. *(1)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{x}}{\mathrm{x}}$. Eius differentiae *(2)* Eius *L* 1 $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}^2}$, *(1)* addatur *(2)* auferatur *L* 4 hyperbolico *(1)* symptotos *(2)* syntomos *L*

---

2 $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = y$: Leibniz rechnet mit der Homogenitätsgröße a inkonsequent, an sich müßte es $\frac{y}{a}$ statt y heißen. 4 syntomos: Leibniz bezeichnet Kurvenbögen bzw. Flächen als syntomos, wenn ihre Abschnitte kontinuierlich gleich sind; vgl. *LSB* III, 1 N. 39 S. 142. 8 demonstravi: vgl. S. 313 Z. 9–11.

27. SUMMA PROGRESSIONIS HARMONICAE I
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 247–248. 1 Bog. 2°. 2 S. Bl. 248 v° gegenläufig beschrieben. Bl. 247 v° u. Bl. 248 r° leer. Überschrift auf Bl. 248 v° ergänzt. Textfolge 248 v° untere drei Viertel, 247 r°, 248 v° oberes Viertel.
Cc 2, Nr. 1184

Datierungsgründe: Die Stücke N. 27 – N. 30 hängen eng zusammen: N. 28 und N. 30 stehen auf demselben Träger; das singuläre Wasserzeichen des Papiers ähnelt stark dem ebenfalls singulären Wasserzeichen von N. 27; möglicherweise bilden die beiden Zeichen ein Paar. Das Wasserzeichen des Papiers von N. 29 ist von August 1673 bis Juni 1674 belegt. In N. 28 berechnet Leibniz auf S. 323 Z. 4–22 die Werte der Fakultäten bis 10!; letzteren Wert verwendet er in N. 29 S. 333 Z. 20 als Anfangswert eines Differenzenschemas. Die Überlegungen von Teil 2 von N. 29 wiederum bilden die Grundlage der Konstruktion des harmonischen Dreiecks in Teil 2 von N. 30. Es läßt sich also vermuten, daß die Betrachtungen zur harmonischen Reihe mit N. 27 und N. 28 begonnen und mit N. 29 fortgesetzt wurden und schließlich in N. 30 in das harmonische Dreieck mündeten. N. 27 und N. 30 setzen die Entdeckung der Kreisreihe voraus. Die verwendete Notation deutet darauf hin, daß die vier Stücke spätestens bis Mitte 1674 entstanden sind.

[*Teil 1*]

Summa progress. harmon.

$$\frac{ba^4}{1}+\frac{b^2a^3}{2}+\frac{b^3a^2}{3}+\frac{b^4a}{4}+\frac{b^5}{5}\quad \text{etc.} = \quad \ldots \text{ Ponatur } b=3.\ \textit{et}\ a=1. \text{ fiet:}$$

$$\frac{3}{1}+\frac{9}{2}+\frac{27}{3}+\frac{81}{4}+\frac{243}{5}+\frac{729}{6}+\text{etc. et reducendo sub unum denominatorem,}$$

$$\frac{3}{1}\times\frac{+9}{-2}=\frac{6+9}{2}=\boxed{\frac{15}{2}}+\frac{27}{3}=\frac{45+54}{6}=\boxed{\frac{99}{6}}+\frac{81}{4}=\frac{396+486}{24}=\boxed{\frac{882}{24}}+\frac{243}{5}=$$

21 $+\frac{729}{6}$ *erg. L*

22–316,17 Leibniz addiert die Brüche fortlaufend. In S. 316 Z. 3 unterläuft ihm ein Flüchtigkeitsfehler (im Zähler des fünften Bruches steht 29 statt 27), der sich auf beide Differenzenschemata auswirkt; diese werden außerdem durch Fehler in den S. 316 Z. 7 (16312 statt 12312) bzw. S. 316 Z. 12 (520 statt 540) beeinträchtigt.

$$\frac{[4410]+5832}{120}=\boxed{\frac{[10242]}{120}}+\frac{729}{6}=\frac{61452+87480}{720}=\frac{148932}{720}.$$

$$\frac{3}{1}+\frac{9}{2}+\frac{27}{3}+\frac{81}{4}+\frac{243}{5}+\frac{729}{6}.$$

$$\frac{3}{1}+\frac{9}{2}=\frac{6+9}{2}+\frac{27}{3}=\frac{18+29+54}{6}+\frac{81}{4}=\frac{72+116+216+486}{24}+\frac{243}{5}=$$
$$\frac{360+580+1080+2430+5832}{120}+\frac{729}{6}=\frac{2160+3480+6480+14580+34992+87480}{720}.$$

2160		3480		6480		14580		34992		87480
	1320		3000		8100		20412		52488	
		2680		5100		16312		32076		
			2420		11212		15764			
				8792		4552				
					−4240					

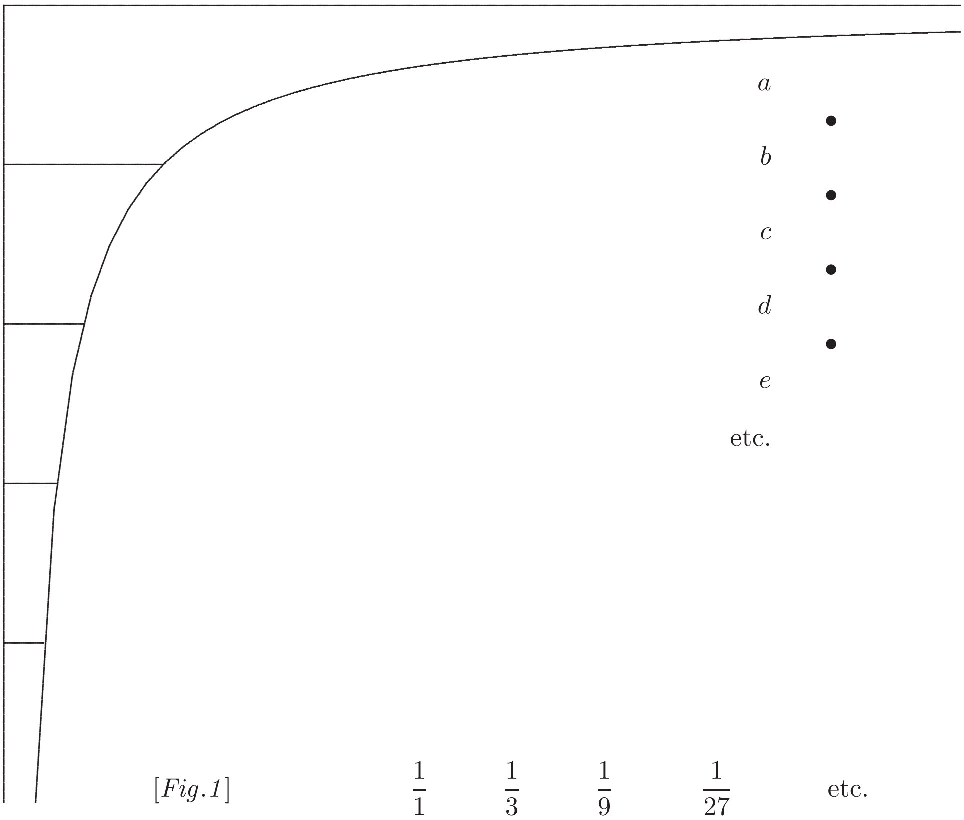
	2160		3480		6480		14580		34992		87480
12)	180		290		520		1215		2916		7290
		110		230		695		1701		4374	
			120		465		1006		2673		
				345		541		1667			
					196		1126				
						930					

315,22–316,1 $+\frac{243}{5}=$ | $\frac{882}{24}+\frac{243}{5}=$ *streicht Hrsg.* | $\frac{4510+5832}{120}=\boxed{\frac{10342}{120}}$ *ändert Hrsg.* | $+\frac{729}{6}$

L

[*Teil 2*]

$$\begin{array}{cc} a & \\ & \bullet \\ b & \\ & \bullet \\ c & \\ & \bullet \\ d & \\ & \bullet \\ e & \\ \text{etc.} & \end{array}$$

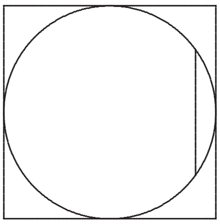


[*Fig. 1*]

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{27} & & \text{etc.} \\ & \frac{2}{3} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{27} & & \text{etc.} & \end{array}$$

$$\frac{z}{1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = z = \frac{1}{\frac{2}{3}} \text{ seu } z = \frac{3}{2}.$$

12 *Fig. 1*: Leibniz skizziert zum Differenzenschema Z. 2–11 eine Hyperbel, rechnet anschließend aber mit einer geometrischen Folge.



[*Fig. 2*]

$$\underbrace{\frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{35} \quad + \quad \frac{1}{99}} \quad \text{etc.}$$

1	3	5	7	9	etc.
<u>2</u>					
2	6	10	14	18	
4	36	100	etc.		
3	35	99			

2–7 *Nebenbetrachtungen*:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2+cb}. \quad -\frac{ac}{b^2+cb} = [-]\frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3+cb^2}.$$

$$\frac{b^5}{6-1} = \frac{b^5}{6} + \frac{b^5}{36} + \frac{b^5}{216} \text{ etc.} = \frac{b^5}{4+1} = \frac{b^5}{4} - \frac{b^5}{16} + \frac{b^5}{64} \text{ etc.}$$

$$\frac{b^7}{8-1} = \frac{b^7}{8} + \frac{b^7}{64} + \frac{b^7}{512} \text{ etc.}$$

9 *Vorzeichen erg. Hrsg.*

2–319,5 Vgl. N. 31 S. 345 Z. 2 f. sowie *LQK* S. 78–91, insbesondere die prop. XXXI, XXXII, XXXV, XXXVII u. XLII.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{99} \quad \frac{1}{195} \quad \frac{1}{323}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\boxed{\frac{2}{15}}. \quad \frac{1}{7}-\frac{1}{9}=\boxed{\frac{2}{63}}. \quad \frac{1}{11}-\frac{1}{13}=\boxed{\frac{2}{143}}.$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{12}{45}\Big|\frac{4}{9}. \quad \frac{1}{35}-\frac{1}{63}=\frac{28}{2205}\Big|\frac{4}{315}. \quad \frac{1}{99}-\frac{1}{63}=\frac{44}{6237}=\frac{4}{567}.$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}, \text{ etc. } \text{——}1$$

$$1-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{15}. \quad \frac{2}{3}-\frac{1}{15}=\frac{27}{45}\Big|\Big[\frac{3}{5}\Big].$$

1–3 *Nebenrechnungen*:

14	18	63	143	99	$\cancel{1}\cancel{7}\cancel{7}$
14	18	35	99	63	$\cancel{6}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{7}$ ⨍ 567
56	144	315	44	297	$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}$
14	18	189		594	$\cancel{1}\cancel{1}$
196	324	2205		6237	

5 ^{3} *L erg. Hrsg.*

---

3 $\frac{1}{99}-\frac{1}{63}$: Richtig wäre $\frac{1}{99}-\frac{1}{143}=\frac{44}{14157}=\frac{4}{1287}$. 4 Leibniz subtrahiert die Reihe von 1.

28. SUMMA PROGRESSIONIS HARMONICAE II
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung:

L Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 245–246. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 245 r° u 246 v°. Auf Bl. 245 v° N. 30. Bl. 246 r° leer. Überschrift ergänzt. Isolierte Rechnung auf Bl. 246 v° rechts oben (= S. 326 Z. 2–7).
Cc 2, Nr. 1182

LiH Randbemerkung in Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665, Nr. VII *De numerorum continuorum productis*: *Niedersächs. Landesbibl.* Nm-A 605, S. 13 (= S. 323 Z. 25–27; Druck der restlichen Marginalien in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 00.

Datierungsgründe: Das Stück gehört zu der Gruppe um N. 27 (s. dort).

S u m m a p r o g r e s s. h a r m o n.

1	
2	$2 \frown 2-1$
3	$3,\,, \frown \llcorner 3-1 \lrcorner \frown 2-1$
	$3-1, -1$
4	$4 \frown 4-1 \frown 4-2 \frown 4-3$
5	$5 \frown 5-1 \frown 5-2 \frown 5-3 \frown 5-4$
6	
7	

$5 \frown 5 \frown 5 \frown 5 \frown 5$			
$5 \frown 5-1 \frown 5-2 \frown 5-3 \frown 5-4$	$5 \frown 420$	10	5 4 3 2 1
$4 \frown 4-1 \frown 4-2 \frown 4-3$	$4 \frown 312$	6	4 3 2 1
$3 \frown 3-1 \frown 3-2$	$3 \frown 2\ 6$	3	3 2 1
$2 \frown 2-1$	$2 \frown 1\ 2$	1	2 1
1	$1 \frown 1\ 1$	$\frac{1}{2}$	1
$5\quad 9-1\quad 12-3\quad 14-6\quad 15-10$			
$5 \frown 8 \frown 9 \frown 8 \frown 5$			

25	64	81
5	8	9
3	[1]	

	5	5 -1	5 -2	5 -3	5 -4
	4	4 -1	4 -2	4 -3	4 -4
	3	3 -1	3 -2	3 -3	3 -4
	2	2 -1	2 -2	2 -3	2 -4
	1	1 -1	1 -2	1 -3	1 -4
	15	10 (-0)	6 (-1)	3 (-3)	1 (-6)
$5+4+3+2+1$		$4+3+2\ \ +1$	$3+2\ \ +1$	$2\ \ +1$	1

Auferatur a producto triangularium.

5	6 ⌢	3 ⌢	1 ⌢	0	1	1		
							2	
4	7 ⌢	4 ⌢	2 ⌢	1	3	3		13
							15	
3	8 ⌢	5	3	1	6	18		[147]
							[162]	
2	9	6	3	1	10	180		[2358]
							[2520]	
1	10	6	3	1	15	2700		
		[24]	12	[4]				

3 2 *L ändert Hrsg.* 17 87 *L ändert Hrsg.* 18 92 *L ändert Hrsg.* 19 1428 *gestr. L ändert Hrsg.* 20 1520 *L ändert Hrsg.* 22 25 *bzw.* 3 *L ändert Hrsg.*

7	7 – 1	7 – 2	7 – 3	7 – 4	7 – 5	7 – 6
	6	6 – 1	6 – 2	6 – 3	6 – 4	6 – 5
		5	5 – 1	5 – 2	5 – 3	5 – 4
			4	4 – 1	4 – 2	4 – 3
				3	3 – 1	3 – 2
					2	2 – 1
						1
7	13 – 1	18 – 3	22 – 6	25 – 10	27 – 15	28 – 21
7	12	15	16	15	12	7

7		12		15		16
	5		3		1	
		2		2		
			0			

Haec differunt a prioribus.

Aliae plane proderint summae pro alia dispositione.

[Z. *17–28 Zusatz auf der gegenüberliegenden Seite, teilweise überschrieben*]

$1 \frown 7$	$\frown$	$2 \frown 6$	$\frown$	$3 \frown 5$	$\frown$	$4 \frown 1$
$1 \frown 6$		$2 \frown 5$		$3 \frown 4$		
$1 \frown 5$		$2 \frown 4$		$3 \frown 1$		
$1 \frown 4$		$2 \frown 3$		$3 \frown 0$		
$1 \frown 3$		$2 \frown 1$				
$1 \frown 2$						

	5		3		11	
7		12		15		4
	4		2			
6		10		12		
	3		5			
5		8		3		
	2		6			
4		6		0		
	1					
3		2				
	2					
2		0				

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \text{etc.} = \frac{1}{1} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{1}{3}\ \frac{3+1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{18\ 6\ 3}{18} + \frac{1}{10} = \frac{180\ 60\ 30\ 18}{180}.$$

Summam invenire fractionum quarum numerator unitas idem est quod invenire productos continuorum.

$$\begin{array}{rrr}
1 & 1 & 2 \\
\underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \\
2 & 3 & 8 \\
\underline{3} & & \\
6 & 3 & 6 \\
\underline{4} & \underline{5} & \underline{8} \\
24 & 15 & 48 \\
\underline{5} & & \\
120 & 7 & 10 \\
\underline{6} & \underline{9} & \underline{12} \\
720 & 63 & 120 \\
\underline{7} & & \\
5040 & 11 & \\
\underline{8} & \underline{13} & \\
40320 & 143 & \\
\underline{9} & \text{etc.} & \\
362880 & & \\
\underline{10} & & \\
3628800 & &
\end{array}$$

2 f. *Randbemerkung in Leibniz' Handexemplar von Bl.* Pascal, *Traité du triangle arithmétique, 1665*:
Producti continuorum cum progressione harmonica, plurimum habent connexionis. Sed hoc Pascalius non observavit. Nimirum: $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ etc. est series progressionis harmonicae, reducendo omnes ad unum nomen fiet: $\frac{2,3,4+1,3,4+1,2,4+1,2,3}{1,2,3,4}$.

2 quarum ... unitas *erg. L* 25 continuorum *(1)* sunt progressionis harmonicae. *(2)* cum *L* 26 non *(1)* noverat *(2)* observavit *L*

23 f. *Bl.* Pascal, *Traité du triangle arithmétique, 1665*: Nr. VII *De numerorum continuorum productis* S. 13 (*PO* III S. 528).

Ergo 1 3 8 15 48 63 120 143 etc. in se ducti continue dant etiam terminos progressionis harmonicae. Et si omnes sumantur termini, quadrati unitate minuti continue, fiet duplum puto harmonicae progressionis, demto ultimo etc. Hac eadem ratione etiam aliis modis per saltus continue productos assumere potes. Adde quae habet Paschalius *De continue productis*.

Si loco horum 1 2 3 4 5 6 etc. continue in se ductorum quadrati eorum continue in se ducti intelligantur pro $\begin{matrix}1\\2\end{matrix} > \begin{matrix}2\\2\end{matrix}\ 4-1.\ \ \begin{matrix}3\\4\end{matrix} > \begin{matrix}4\\4\end{matrix}\ 16-1.$ etc. fient saltus nisi duplices, seu ita facias 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 etc. Hoc modo enim eruere potes omnes quadratos sed summam non duplicas, sed ducis in se ipsam. NB.

Caeterum ex his $\square^{\text{tos}}$ in se ductos facies: $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\!>1\quad \begin{matrix}2\\2\end{matrix}\!>4\quad \begin{matrix}3\\3\end{matrix}\!>9\quad \begin{matrix}4\\4\end{matrix}\!>16.$

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{4}\quad \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}$$

$$\backslash/$$

$$\frac{4+1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{36+9+4}{36}+\frac{1}{16}=\frac{\overset{576}{(24)}\ \ \overset{144}{(12)}\ \ \overset{64}{(8)}\ \ \overset{36}{(6)}}{576}\qquad \frac{1}{25}$$

$$4)\ \underline{57600\ \ 14400\ \ \ 6400\ \ \ 3600}$$
$$14400\ \ \ 3600\ \ \ 1600\ \ \ 900\ \ \ 576$$
$$[=]\ \frac{([120])\ \ ([60])\ \ ([40])\ \ \ (30)\ \ \ (24)}{14400}$$

Radices horum quadratorum sunt progressionis harmonicae.

---

3 *Über* duplum puto: Imo quadratum summae.

16 = *erg. Hrsg.* 16 1200 *L ändert Hrsg.* 16 600 *L ändert Hrsg.* 16 400 *L ändert Hrsg.*

---

4 Paschalius: *a. a. O.*

576		900		1600		3600		14400		
										3600
	324		700		2000		10800			
									2000	
		376		1300		8800				
								1300		
			924		7500					
							924			
				[6576]						

Hinc collige illas differentias, vel differentiarum differentias, secundi gradus, pro quibus cubis etc. usus sum esse ipsas transversales. Et tertii gradus esse rursus easdem cum primis. Idque verum in omnibus seriebus.

Iungendae inter se series differentiarum, etc. addendo vel subtrahendo, item cum terminis et videndum an inde oriatur series differentiarum.

In harmonica $\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & d & & e. \\ & a-b & & b-c & & c-d & & d-e & \end{array}$ $\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{c}$. $\dfrac{b-c}{c-d} = \dfrac{b}{c}$. Ergo $b-c = \dfrac{ac-bc}{a} = c - \dfrac{bc}{a}$ et $b-c = \dfrac{bc-bd}{c} = b - \dfrac{bd}{c}$. Ergo $c - \dfrac{bc}{a} = b - \dfrac{bd}{c}$, vel $c^2a - bc^2 = bca - bda$. Ergo $c^2a - bca + bda = bc^2$. Ergo $a = \dfrac{bc^2}{c^2 - bc + bd}$. Item $bda = bca - c^2a + bc^2$. Ergo $d = \dfrac{bca - c^2a + bc^2}{ba} = c - \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{c^2}{c} - \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{c^2}{a} = d$ memorabile theorema.

In omni serie etiam arithmetica quaerenda parameter, seu quantitas constans, qualem habet et harmonica progressio, et relatio ad quandam abscissam seu terminos progressionis arithmeticae.

9 1576 *L ändert Hrsg.*

15 $= \frac{b}{c}$: Richtig wäre $\frac{b}{d}$. Der Fehler beeinträchtigt die Überlegung bis Z. 19.

[*Isolierte Rechnung*]

$$\begin{array}{r} 99999 \\ 999 \\ \hline [899991] \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \hline \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

2–7 (*1*) $\begin{array}{r} 999\,9\,9 \\ \langle\cdot\rangle 8 \\ \hline 7999\,9\,2 \\ \cdots\cdots \\ \hline \cdots\cdots\cdots \end{array}$ (*2*) $\begin{array}{r} 99999 \\ 999 \\ \hline |799992 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \hline \cdots\cdots\cdots \end{array}$ *ändert Hrsg.*| *L*

29. DE PROGRESSIONE HARMONICA ET DE DIFFERENTIIS DIFFERENTIARUM
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 251–252. 1 Bog. 4°. Ca 2 1/2 S. Bl. 251 v° leer. Überschrift auf Bl. 251 r° oben und auf freigebliebenem Raum rechts ergänzt. Textfolge 251 r° obere zwei Drittel, 252 r°, 252 v°, 251 r° unteres Drittel.
Cc 2, Nr. 1335

Datierungsgründe: Das Stück gehört zur Gruppe um N. 27 (s. dort).

Progress. harmon. item De differentiis et differentiis differentiarum per terminos exprimendis observatio singularis

[*Teil 1*]

$$\frac{a+x}{b+y} = \gamma.\ \text{Ergo}\ \frac{a}{b+y} + \frac{x}{b+y} = \gamma.\ \text{Ergo}\ \left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} - \frac{ay}{b^2} + \frac{ay^2}{b^3} - \frac{ay^3}{b^4}\ \text{etc.} \\ \\ +\frac{x}{b} - \frac{xy}{b^2} + \frac{xy^2}{b^3} - \frac{xy^3}{b^4}\ \text{etc.} \end{array}\right\} = \gamma.$$

Sive $\frac{1}{b} - \frac{y}{b^2} + \frac{y^2}{b^3} - \frac{y^3}{b^4}$ etc. $\frown$ $a{+}x = \gamma$.

Sed et $\frac{x}{b+y} = \frac{x}{y} - \frac{xb}{y^2} + \frac{xb^2}{y^3}$ etc.

$$+\frac{x}{y} \overset{-}{\underset{-}{\times}} \frac{y}{b^2} = \frac{xb^2 - y^2}{yb^2}.\quad -\frac{xb}{y^2} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{y^2}{b^3} = \frac{-xb^4 + [y^4]}{y^2 b^3}.$$

---

13 *Nebenbetrachtung*:

$$\begin{array}{cc} \frac{a}{b} - \frac{ay}{b^2+yb} & \\ -\ \ \frac{ay}{b^2} & + \frac{ay^2}{b^3+yb^2} \end{array}$$

18 y^3 *L ändert Hrsg.*

Ergo $\frac{x}{b}+\frac{[xb^2-xy^2]}{yb^2}+\frac{-xb^4+[xy^4]}{y^2b^3}$ etc. $=\frac{2x}{b+y}$.

$$\left.\begin{array}{l} \qquad -\frac{ay}{b^2}+\frac{ay^2}{b^3}-\frac{ay^3}{b^4}\ \text{[etc.]}\\[1em] +\frac{a}{b}\\[1em] \qquad +\frac{x}{y}-\frac{xb}{y^2}+\frac{xb^2}{y^3}\ \text{[etc.]}\end{array}\right\}=\gamma.$$

seu $\frac{a}{b}\quad \frac{-ay^2+xb^2}{b^2y}\quad \frac{+ay^4-xb^4}{b^3y^2}\quad$ [etc.] $=\gamma$.

seu $\frac{a}{b}\quad \frac{-a+x}{b}\frown\underbrace{\frac{y^2+b^2}{by}}_{\substack{=\frac{y}{b}+\frac{b}{y}\\ =\xi}}\quad \frac{+a-x}{b}\frown\frac{y^2+b^2}{by}\frown\frac{y^2-b^2}{by}$ etc. $=\gamma$.

seu $\underset{}{\frac{a}{b}}\quad \underset{A}{\frac{-a+x}{b}\frown\llcorner\frac{b}{y}+\frac{y}{b}\lrcorner}\quad \underset{B}{\frac{+a-x}{b}\frown\llcorner\frac{b}{y}+\frac{y}{b}\lrcorner\frown\llcorner\frac{b}{y}-\frac{y}{b}\lrcorner}$ etc. $=\gamma$.

$\frac{a+x}{b+y}$ sive $\gamma=\frac{a}{b}\quad \underset{A}{A}\quad \underset{B}{-A\frown\llcorner\frac{b}{y}+\frac{y}{b}\lrcorner}\quad \underset{C}{-B\frown\llcorner\frac{b}{y}-\frac{y}{b}\lrcorner}\quad \underset{D}{-C\frown\llcorner\frac{b}{y}+\frac{y}{b}\lrcorner}$

Est haec series ut apparet aliquid ex progressione geometrica deformata.

2–5 *Nebenrechnung*: $-\frac{ay}{b^2}+\frac{x}{y}=\frac{-ay^2+xb^2}{b^2y}$

1 $\mathrm{xb-y^2}$ *L ändert Hrsg.* 1 $\mathrm{y^3}$ *L ändert Hrsg.* 2–5 etc. *erg. Hrsg. dreimal* 6+9 $=\gamma$. *(1)* seu $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}-\frac{\mathrm{-a+x}}{\mathrm{b}}\frown\xi\ \frac{\mathrm{+a-x}}{\mathrm{b}}-\xi^2$ *(2)* seu *L*

---

6 $\frac{-a+x}{b}\frown\frac{y^2+b^2}{by}$: Die Zerlegung ist unzulässig; weitere Versehen beeinträchtigen die Überlegung bis Z. 11.

[*Teil 2*]

A						
	$A-B$ $(=[B])$					
B		$A-B-B+C$ $(=C)$				
	$B-C$		$A-3B+3C-D$ $(=D)$			
C		$B-2C+D$		$A-4B+6C-4D+E$ $(=E)$		
	$C-D$		$B-3C+3D-E$		$A-5B+10C-10D+5E-F$ $(=F)$	
D		$C-2D+E$		$B\ C\ D\ E\ F$		$A-6B+15C-20D+15E-6F+G$ $(=G)$
	$D-E$		$C\ D\ E\ F$		$B\ C\ D\ E\ F\ G$	
E		$D-2E+F$		$C\ D\ E\ F\ G$		
	$E-F$		$D\ E\ F\ G$			
F		$E-2F+G$				
	$F-G$					
G						

3 A *L ändert Hrsg.*

In progressione harmonica ab 1. differentiae terminis aequales.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \frac{1}{1} & A \\
\frac{1}{2} & & \\
 & \frac{1}{2} & B \\
\frac{1}{6} & & \\
 & \frac{1}{3} & C \\
\frac{1}{12} & & \\
 & \frac{1}{4} & D \\
\frac{1}{20} & & \\
 & \frac{1}{5} & E \\
\frac{1}{30} & & \\
 & \frac{1}{6} & F \\
\frac{1}{42} & & \\
 & \frac{1}{7} & G
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}
=
\begin{array}{l}
A \\
\\
A - B \\
\\
A - 2B + C \\
\\
A - 3B + 3C - D \\
\\
A - 4B + 6C - 4D + E \\
\\
A - 5B + 10C - 10D + 5E - F \\
\\
A - 6B + 15C - 20D + 15E - 6F + G \\
\hline
7A - 21B \quad 35C \quad 35D \quad 21E \quad 7F \quad G
\end{array}
$$

$$\frac{7}{1}-\frac{21}{2}+\frac{35}{3}-\frac{35}{4}+\frac{21}{5}-\frac{7}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=x.$$

$$\frac{1}{1}\ -\ \frac{3}{2}\ +\ \frac{5}{3}\ -\ \frac{5}{4}\ +\ \frac{3}{5}\ \ -\ \ \frac{1}{[6]}\ +\ \frac{1}{49}=x.$$

$$\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\quad -\frac{1}{2}\quad +\quad \frac{5}{12}\quad +\quad \left[\frac{13}{30}\right]\quad [\textit{bricht ab}]$$

[*Teil 3*]

$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{a^2}{2b}+\dfrac{a^2}{3b}+\dfrac{a^2}{4b}=x.$ Quaeritur quanta sit x, ut non sit opus prolixa additione.

vel $\dfrac{a}{1}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{4}=x.$

fiet : $\dfrac{4a}{1}+\dfrac{4a}{2}+\dfrac{4a}{3}+\ a\ =4x\ =5a+\dfrac{4a}{2}+\dfrac{4a}{3}=4x.$ Ergo et $\dfrac{15a}{4a}+\dfrac{12a}{2}=12x.$ Ergo et

$\begin{array}{r}30\\ 8\\ 12\end{array}\ a=24x.$ Eritque $x=\dfrac{30+8+12}{24}a.$

2 f. *Nebenbetrachtung*: $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}.\quad \dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{15-6}{10}=\dfrac{9}{10}.\quad \dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{12}.$
$\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{49}=\dfrac{245-12}{}=\dfrac{233}{588}.$

1 f. $=$ x. *(1)* $\frac{6}{1}-\frac{22}{2}+\frac{34}{3}-\frac{36}{4}+\frac{20}{5}-\frac{8}{6}+\frac{0}{7}$ *(2)* $\frac{1}{1}$ *L* 2 7 *L ändert Hrsg.* 2 f. $=$ x. *(1)* $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{7}{42}$ *(2)* Ex *(a)* data ultima differentia omnibus *(b)* datis *(3)* Cum differentiae hoc loco terminis coincidant igitur ex ultima differentia G caetera componemus: $\frac{1}{1}-\frac{3}{2}=$ *(4)* $\frac{3}{2}-\frac{2}{2}$ *L* 3 $\frac{16}{35}$ *L ändert Hrsg.*

2 Leibniz setzt die durch 7 dividierte Reihe ebenfalls gleich x.

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\ \ \dfrac{a}{1} + \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{4} = x. \\
2\left\{\begin{array}{l}
3 \frown \left\{\begin{array}{l}
4 \frown 1 \frown a + \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{4} = x \frown 4. \\
\\
\ldots\ldots\ a + 4 \frown \dfrac{a}{2} + \dfrac{4a}{3}\ \mathfrak{S} = x \frown 4 \frown 3.
\end{array}\right. \\
\\
\ldots\ldots\ 4 \frown a + 3 \frown \dfrac{4a}{2}\ \mathfrak{S} \\
3 \frown 4 \frown a\ \mathfrak{S} \qquad = x \frown 4 \frown 3 \frown 2.
\end{array}\right.
\end{array}
&
\left.\begin{array}{l}
2 \frown 3 \frown 4 \\
2 \frown 3 \\
\\
2 \frown 4 \\
\\
3 \frown 4
\end{array}\right\} a = x \frown 4 \frown 3 \frown 2.
\end{array}$$

$$\text{Ergo } \frac{2 \frown 3 \frown 4}{2 \frown 3 \frown 4} + \frac{2 \frown 3}{4 \frown 3 \frown 2} + \frac{2 \frown 4}{4 \frown 3 \frown 2} + \frac{3 \frown 4}{4 \frown 3 \frown 2} \frown a = x.$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frown a = x.$$

1–5 *Nebenbetrachtung zum rechten Schema*:

$$\begin{array}{ccc}
6 & & \\
 & 2 & \\
8 & & 2 \\
 & 4 & \\
12 & & 8 \\
 & 12 & \\
24 & &
\end{array}$$

331,8–332,1 $\dfrac{30+8+12}{24}$ a. | $\dfrac{a}{1} + \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{4} = x$. *streicht Hrsg.* | *(1)* $3 \frown \left\{ \dfrac{4 \frown 1a}{1} + \dfrac{4a}{2} + \dfrac{4a}{3} = x \right.$ *(2)* $\dfrac{a}{1}$ *L*

---

9 f. Vgl. die in N. 28 S. 323 Z. 25–27 abgedruckte Randbemerkung zu Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665.

1 2 3 4 5 6

3628800						
	40320					
4032000		10080				
	 50400		4320			
4536000		 14400		[2880]		
	 64800		[7200]		[2880]	
5184000		.... [21600]		[5760]		[4320]
	 86400		[12960]		[7200]	
6048000		 34560		[12960]		
	 120960		25920			
7257600		60480				
	 181440					
9072000		120960				
	 302400					
12096000		[302400]				
	.... [604800]		907200			
18144000		1209600				
	 1814400					
36288000						

2–20 *Nebenrechnungen*:

$$362880\cancel{0} : [10] \qquad \begin{array}{l} \ \ \cancel{1} \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 \ \cancel{\div}\ 403200[: 9] \\ \ \cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}9 \end{array}$$

6 380 *L ändert Hrsg.* 7 7400 *L ändert Hrsg.* 7 4480 *L ändert Hrsg.* 8 21800 *L ändert Hrsg.* 8 5360 *L ändert Hrsg.* 8 3320 *L ändert Hrsg.* 9 12760 *L ändert Hrsg.* 9 7800 *L ändert Hrsg.* 10 13160 *L ändert Hrsg.* 16 102400 *L ändert Hrsg.* 17 404800 *L ändert Hrsg.* 23 9 *L ändert Hrsg.* 23 : 9 *erg. Hrsg.*

20 3628800: Den Wert 10!= 3628800 berechnet Leibniz in N. 28 S. 323 Z. 4–22 *linke Spalte*.

362880	
	322560
40320	
	30240
10080	
	5760
4320	
	[1440]
[2880]	
	[0]
[2880]	
	[−1440]
[4320]	

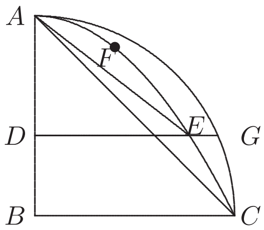
$$\begin{array}{lcl} \cancel{4}\ \cancel{4} & & \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 & ⨍ & 453600 : 8 \\ \cancel{8}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8} & & \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \cancel{1}\cancel{5}\cancel{2} & & \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 & ⨍ & 518400 : 7 \\ \cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \ \ \cancel{4} & & \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 & ⨍ & 604800 : 6 \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6} & & \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \cancel{1}\ \cancel{3}\cancel{3} & & \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 & ⨍ & 725760 : 5 \\ \cancel{5}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5} & & \end{array}$$

907200 : 4
1209600 : 3
1814400 : 2

8 3940 *L ändert Hrsg.* 9 380 *L ändert Hrsg.* 10 −4100 *L ändert Hrsg.* 11 4480 *L ändert Hrsg.* 12 1160 *L ändert Hrsg.* 13 3320 *L ändert Hrsg.*

[*Teil 4*]



[*Fig. 1*]

Ponatur figura ABC lineis basi parallelis in quotcunque partes aequales geometrice secari posse. Quaeritur an aliqua inde lux ad eius quadraturam?

Ponatur a recta DE secta esse in duas partes aequales.

Ergo datur $\dfrac{AFED}{[AFCB]}$ datur et $\dfrac{AED}{ACB}$. Videndum an reperiri possit casus ubi rationes istae duae sint inter se aequales. Sed nihil tamen inde sequeretur. Figura haec secari potest, in data qualibet ratione commensurabili seu numeris expressa, v. g. ut portio sit $\dfrac{3}{4}$, inventa enim $\dfrac{1}{4}$ vel angulus in circulo, tantum duplicetur, triplicetur etc. angulus v. g. AG circuli AGC, et ex puncto invento ducatur ordinata, quae figuram in imperata ratione secabit; quadrari poterit portio inter figuram et circulum intercepta[,] modo figura non habet flexum continuum.

---

5 *Nebenbetrachtung, durch Umrahmung abgetrennt*: $AD = x$. $DE = \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$. $DE^2 = \dfrac{a^2}{2ax - x^2}$.

3 geometrice *erg. L* 6 AFCD *L ändert Hrsg.* 6 $\frac{\text{AED}}{\text{ACB}}$. *(1)* Ergo *(2)* Si aliquas ⟨-⟩ *(3)* Videndum *L* 7 haec *erg. L* 9 $\frac{1}{4}$ *(1)* | tantum *streicht Hrsg.* | duplicetur, *(2)* vel *L* 10 puncto *(1)* anguli *(2)* invento *L* 11 poterit *(1)* figura in *(2)* portio *L*

---

13 $DE = \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$: Die dem Quadranten einbeschriebene Kurve würde die Basis BC innen, also nicht im Punkt C schneiden.

30. DE TRIANGULO HARMONICO
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 245–246, 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 245 v°. Auf Bl.245 r° u. 246 v° N. 28. Bl. 246 r° leer. Überschrift von Teil 2 am Rand ergänzt. Cc 2, Nr. 1183.

Datierungsgründe: Das Stück gehört zu der Gruppe um N. 27 (s. dort).

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{9} & + & \frac{1}{11} & - & \frac{1}{13} & \text{etc.} \\ \frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{5} & - & \frac{1}{7} & + & \frac{1}{9} & - & \frac{1}{11} & & & \\ & \frac{1}{6} & & + & & \frac{2}{35} & & + & & \frac{2}{99} & & & & \end{array}$$

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1} - \underset{\displaystyle [-]\frac{1}{1} + \frac{1}{1+1}}{\underset{/\backslash}{\frac{1}{1+1}}}. \text{ Ergo } \frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ etc.}$$

[*Teil 2*]

De triangulo harmonico.

Proprietas admirabilis numerorum progressionis harmonicae.

12 $-$ *erg. Hrsg.*

8–10 Leibniz benutzt die Kreisreihe zur Berechnung des Quadrantensegments; vgl. N. 25 prop. 1.

									$\frac{1}{10}$									
								$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{90}$								
							$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{72}$		$\frac{1}{360}$							
						$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{56}$		$\frac{1}{252}$		$\frac{1}{840}$						
					$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{168}$		$\frac{1}{504}$		$\left[\frac{1}{1260}\right]$					
				$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{105}$		$\frac{1}{280}$		$\left[\frac{1}{630}\right]$		$\left[\frac{1}{1260}\right]$				
			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{60}$		$\frac{1}{140}$		$\frac{1}{280}$		$\frac{1}{504}$		$\frac{1}{840}$			
		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{60}$		$\frac{1}{105}$		$\frac{1}{168}$		$\frac{1}{252}$		$\frac{1}{360}$		
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{56}$		$\frac{1}{72}$		$\frac{1}{90}$	
$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{10}$
	$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{6}$		$\frac{7}{12}$		$\frac{9}{20}$		$\frac{11}{30}$		$\frac{13}{42}$		$\frac{15}{56}$		$\frac{17}{72}$		$\frac{19}{90}$	
		$\frac{28}{12}$		$\frac{102}{72}$		$\frac{[248]}{240}$		$\frac{490}{600}$										

$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{[50]}{24}$	$\frac{[274]}{120}$	$\frac{[1764]}{720}$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{6}$	$2\left[\frac{2}{24}\middle\vert\frac{1}{12}\right]$	$2\left[\frac{34}{120}\middle\vert\frac{17}{60}\right]$	$2\left[\frac{324}{720}\middle\vert\frac{9}{20}\right]$

5 $\frac{1}{980}$ *L ändert Hrsg.* 6 $\frac{1}{830}$ *bzw.* $\frac{1}{980}$ *L ändert Hrsg.* 12 148 *L ändert Hrsg.* 13 53 *bzw.* 289 *bzw.* 1854 *L ändert Hrsg.* 14 $\frac{5}{24}$ *bzw.* $\frac{40}{120}\Big|\boxed{\frac{5}{15}}\ \frac{1}{3}$ *bzw.* $\frac{207}{260}$ *L ändert Hrsg.*

Nebenbetrachtungen und Nebenrechnungen zur Tabelle S. 337 Z. 1–10:

337,6–8

$$\frac{16}{80}\Big|\frac{1}{5} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{280}$$

$$\frac{9}{36}\Big|\frac{1}{4} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{280} \quad \frac{1}{504} \quad \frac{1}{840}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{168} \quad \frac{1}{252} \quad \frac{1}{360}$$

337,6 f. $\frac{40}{20 \frown 60}\Big|\frac{1}{30} \quad \frac{80 = 20 \frown 4}{60 \frown 140 = 20 \frown 7 \frown 4 \frown 15} \quad \begin{array}{r} 15 \\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$

$40 \frown 30$

$$\begin{array}{l} 1 \\ \cancel{2}\cancel{2}4 \\ \cancel{7} \end{array} \not{f} \; 32 \qquad \begin{array}{l} \cancel{1}2 \\ \cancel{5}\cancel{0}4 \\ \cancel{4}\cancel{4}4 \end{array} \not{f} \; 126 \qquad \begin{array}{r} 126 \\ 5 \\ \hline 830 \end{array} \not{f}$$

$$\frac{224 = 32 \frown 7}{280 \frown \quad 504 = \quad 40 \frown 7 \frown 4 \frown 126}\Big|\frac{1}{5 \frown 126} \quad \frac{1}{830}$$

$$\begin{array}{ccc} 280 & 504 & 40 \\ / \backslash & / \backslash & / \backslash \\ 40 \frown 7 & 4 \frown 126 & 5 \frown 8 \\ / \backslash & & \\ 5 \frown 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 840 \\ 504 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\frac{336}{\begin{array}{l} 2 \\ \cancel{5}04 \frown 840 \\ 3 \end{array}} \Big| \overset{3}{\smile} \frac{112}{168 \frown 840} \Big| \overset{8}{\smile} \frac{18}{21 \frown 840} \Big| \frac{6}{7 \frown 840} \Big| \frac{1}{7 \frown 140}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{1}7 \\ \cancel{4}\cancel{2} \\ \cancel{8}\cancel{4}0 \\ \cancel{1}\cancel{8}8 \\ \cancel{1} \end{array} \not{f} \; 45 \qquad \begin{array}{l} \cancel{2} \\ \cancel{8}\cancel{4}0 \\ \cancel{6}\cancel{6} \end{array} \not{f} \; 140 \qquad \begin{array}{r} 140 \\ 7 \\ \hline 980 \end{array}$$

337,8–11 Richtig wäre $126 \cdot 5 = 630$ und somit in der folgenden Zeile $\frac{1}{630}$ statt $\frac{1}{830}$.

337,7 f.

$$\begin{array}{l} 30 \\ \underline{12} \end{array}$$

$$\frac{18}{360}\Big|\frac{2}{40}\Big|\frac{1}{20} \qquad \frac{45}{60\frown 105}\Big|\frac{15\frown 3}{15\frown 4\frown 35\frown 3}\Big|\frac{1}{[4\frown]35} \qquad \begin{array}{c} 35 \\ \frac{4}{140} \end{array}$$

$$\frac{63}{168\frown 105}\Big|\frac{7\frown 3\frown 3}{3\frown 7\frown 5{,}3\frown 56} \qquad \begin{array}{l} \;1 \\ \cancel{1}\cancel{6}8 \text{ ⨍ } 56 \\ \cancel{3} \\ \qquad \overline{280} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 105 \text{ ⨍ } 5 \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 252 \\ 168 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 84 \text{ ⨍ } 7 \\ 12 \end{array} \qquad \frac{84}{168\frown 252}\Big|\frac{7\frown 4\frown 3}{3\frown 7\frown 8\frown 4\frown 63} = \frac{1}{8\frown 63} \qquad \frac{1}{7\frown 8\frown 9} \qquad \begin{array}{l} 1 \\ \cancel{2}\cancel{5}2 \text{ ⨍ } 63 \\ \cancel{4} \qquad 8 \\ \qquad \overline{504} \end{array}$$

337,7–10

$$\frac{9}{36}\Big|\frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{12}\Big|\frac{1}{3} \qquad \frac{6}{72}\Big|\frac{1}{12} \qquad \frac{8}{240}\Big|\frac{1}{30} \qquad \frac{1}{60} \qquad \frac{1}{105} \qquad \frac{1}{168} \qquad \frac{1}{252} \qquad \frac{1}{360}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{20} \qquad \frac{1}{30} \qquad \frac{1}{42} \qquad \frac{1}{56} \qquad \frac{1}{72} \qquad \frac{1}{90}$$

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{7} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{9} \qquad \left[\frac{1}{10}\right]$$

337,8 *in Vorlage als Spalten geschrieben*:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 3 & & 12 & & 30 & & 60 & & 105 & & 168 & & [252] & & 360 \\ & 9 & & 18 & & 30 & & 45 & & 63 & & [84] & & [108] & \end{array}$$

4 $4 \frown$ *erg. Hrsg.* 14 $_{10}$ *L erg. Hrsg.* 16 256 *L ändert Hrsg.* 17 98 *bzw.* 104 *L ändert Hrsg.*

338,16 Die falsche Kürzung durch 8 führt zu $\frac{1}{980}$ statt $\frac{1}{1260}$. 338,18–22 Die abgebrochene Überwärtsdivision 840 : 18 geht nicht in die weitere Rechnung ein.

337,8 f.

$$
\begin{array}{rl}
42 & \\
30 & \\
\hline
\cancel{1}\cancel{2}60 & ⨍\ 105 \\
\cancel{1}\cancel{2}2 & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
56 \\
42 \\
\hline
112 \\
224 \\
\hline
2352
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\cancel{1} & \\
\cancel{3}\cancel{3} & \\
\cancel{9}\cancel{1} & \\
\cancel{2}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{2} & ⨍\ 168 \\
\cancel{1}\cancel{4}\cancel{4}4 & \\
\cancel{1}\cancel{1} &
\end{array}
$$

$$
\frac{4 \frown 4}{56 \frown 72}\Bigg|\,\underline{1}
\qquad
\begin{array}{r}
72 \\
56 \\
\hline
432 \\
360 \\
\hline
4032
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\cancel{3} & \\
\cancel{2}\cancel{8} & \\
\cancel{4}\cancel{0}32 & ⨍\ 252 \\
\cancel{1}\cancel{6}\cancel{6}6 & \\
\cancel{1}1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
36 & \\
28 & \\
\hline
288 & \\
72 & \\
\hline
1008 & ⨍\ 504
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
9 \frown 2 = 18 \\
\hline
72 \quad \frown \quad 90 \\
9 \frown 8 \qquad 45 \frown 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
45 \\
8 \\
\hline
360
\end{array}
$$

337,13 f. *Nebenrechnungen*:

$$
\begin{array}{r}
289 \\
6 \\
\hline
1734 \\
120 \\
\hline
1854
\end{array}
$$

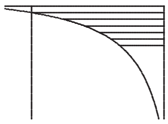
$$
\frac{3}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{11}{6} \times \frac{1}{4} \quad
\begin{array}{r} 44 \\ 9 \\ \hline \end{array}
\frac{53}{[24]} \quad \frac{53}{24} \times \frac{1}{5} \quad
\begin{array}{r} 265 \\ 24 \\ \hline \end{array}
\frac{289}{120} \times \frac{1}{6}
$$

24 $\frac{1}{3}$ *(1)* $\frac{11}{9} \times \frac{1}{4}$ *(2)* $\frac{11}{6} \times \frac{1}{4}$ | $\begin{array}{r} 44 \\ 9 \\ \hline \end{array}\frac{53}{36}$ *ändert Hrsg.* | $\frac{53}{24} \times \frac{1}{4}$ $\begin{array}{r} 212 \\ 24 \\ \hline \end{array}\frac{236}{96}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{53}{24} \times \frac{1}{5}$ *L*

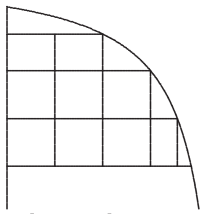
---

22 f. Richtig wäre 44 + 6 = 50. Der Fehler wirkt sich auf die Berechnung der folgenden Terme aus.

[*Teil 3*]



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$$\frac{a^2}{y} = x.\ \frac{a^2}{y} \times \frac{a^2}{y-\beta} = \frac{a^2y - a^2\beta[-]a^2y}{y^2 - y\beta} = \frac{a^2\beta}{y^2 - y\beta}$$

$$\begin{array}{l} \quad 41 \\ \cancel{1}\cancel{8}\cancel{5}4 \ ⨍ \ 2 \ \ \frac{414}{720}\Big|\frac{207}{}\Big|\frac{69}{} \ \ [\textit{bricht ab}] \\ \quad \cancel{7}\cancel{2}\cancel{0} \end{array}$$

3 + *L ändert Hrsg.* 5 2 $\frac{414}{720}\Big|$ *(1)* $\frac{207}{260}\Big|\frac{69}{8}$ *(2)* $\frac{207}{}\Big|\frac{69}{}$ *L*

3 $= \frac{a^2\beta}{y^2 - y\beta}$: Leibniz berechnet den absoluten Wert.

31. DE USU GEOMETRIAE PRO SERIEBUS INFINITIS
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 32. 1/2 Bog. 4°. 1 S. auf Bl. 32 r°, 2 Figuren und quer geschriebene Rechnungen auf Bl. 32 v°.
Cc 2, Nr. 516

Datierungsgründe: Das Stück setzt die Entdeckung der Kreisreihe voraus. Reihen für den Vollkreis (s. S. 345 Z. 2) treten nicht in den frühesten Behandlungen der Kreisreihe auf (vgl. u. a. N. 24, 25, 26), sondern erst etwas später z. B. in N. 27 und am Ende von Cc 2, Nr. 555 A. Die verwendete Notation deutet auf eine Entstehung des Stückes vor dem Spätsommer 1674 hin.

Doctrina de seriebus infinitis arithmeticis, intervalla nimirum assignabilia habentibus, suapte natura intractabilis, non nisi ope geometriae provehi potest. Ope autem geometricarum demonstrationum innumerae in ea detegi possunt novae aequationes et harmoniae, eaeque forte inductione nobis multa admiranda daturae.

Cum geometrice dentur adscriptae multorum arcuum circumferentiae sygnotωn atque inter se; exprimantur duo sectores cuiusque seriebus istis infinitis. Cumque detur ratio sectorum, dabitur et ratio serierum, v. g. una alterius dupla, tripla; etsi hoc ex ipsis forte nemo mortalium sit agniturus.

Ex tangente semiarcus invenitur tangens arcus ipsius regula brevi a Pellio tradita.

14 dentur *(1)* multorum arcuum circumferentiae sygnotorum ideo *(2)* adscriptae *L*

18 a Pellio tradita: Die Regel von Pell, $Tan\ 2\alpha = \dfrac{2R^2 Tan\,\alpha}{R^2 - (Tan\,\alpha)^2}$ (R Radius, $Tan\ \alpha = R \cdot tan\ \alpha$, $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{4}$), hat Leibniz vermutlich aus Fr. van Schooten, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*, 1661, *DGS* II, S. 368, der auf Pell hinweist; vgl. *De problematis Geometriae Cartesii. De compositione rationem*, *LSB* VII,1 N. 110, S. 687; s. auch J. Pell, *Controversiae de vera circuli mensura* pars prima, 1647, S. 13.

Si [a] sit [1000], fiet $\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc. $\frac{\frac{1}{3}}{1000} - \frac{\frac{1}{5}}{1000,000,000} + \frac{\frac{1}{7}}{1000,000,000,000,000} - \frac{\frac{1}{9}}{1000,000,000,000,000,000,000}$ seu $\frac{\frac{a^6}{3} - \frac{a^4}{5} + \frac{a^2}{7} - \frac{1}{9}}{a^7} = \frac{5a^6 - 3a^4}{15} + \frac{a^2}{7} = \frac{35a^6 - 21a^4 + 15a^2}{105} - \frac{1}{9} = \frac{315a^6 - 189a^4 + 135a^2 - 105}{945a^7}$.

$\frac{a}{l}$ $\frac{b}{m}$ $\frac{c}{n}$ $\frac{d}{p}$. Ergo $\frac{a}{l} + \frac{b}{m} = \frac{am + bl}{lm} + \frac{c}{n} = \frac{amn + bln + clm}{lmn}$ etc.

Atque ita semper quilibet terminus in caeteros omnes ductus intelligetur, demto qui ei subscriptus est. Atque haec est compendiosa ratio reducendi quotcunque fractiones ad eundem denominatorem, nimirum termini omnes ducantur in se. Inde quot sunt termini

3 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{cccc} 350 & 210 & 150 & 105 \\ 35 & 21 & 15 & 9 \\ \hline 315 & 189 & 135 & 945 \end{array}$$

1 b sit $\frac{1}{1000}$ *L ändert Hrsg.* 1 f. etc. *(1)* $\frac{\frac{1}{3}}{1000,000} - \frac{\frac{1}{5}}{1000,000,000,000,000} + \frac{\frac{1}{7}}{1000,000,000,000,000,000,000} - \frac{\frac{1}{9}}{1000,000,000,000,000,000,000,000}$ *(2)* $\frac{\frac{1}{3}}{1000}$ *L* 4 *(1)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}} + \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{ad + bc}}{\mathrm{bd}} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}} = \frac{\mathrm{adf + bcf + bde}}{\mathrm{bdf}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{l}}$ *L* 4 Ergo *erg. L* 7 Inde *(1)* tot ali *(2)* quot *L*

3 $\frac{5a^6 - 3a^4}{15}$: Leibniz berechnet zuerst den Zähler des Bruches und rechnet dabei fortlaufend.

4 Ergo $\frac{a}{l} + \frac{b}{m}$: Leibniz rechnet fortlaufend.

toties adhibeatur productus, aliquo termino alio atque alio minutus et residuum in eum numeratorem ducatur, qui est subtracti nominator, v. g.

$$\left.\begin{array}{lllll} \frac{lmnp}{l} \frown a & & lmnp \frown \frac{a}{l} \\ \frac{lmnp}{m} \frown b & & lmnp \frown \frac{b}{m} \\ & \text{vel fiet} & \\ \frac{lmnp}{n} \frown c & & lmnp \frown \frac{c}{n} \\ \frac{lmnp}{p} \frown d & & lmnp \frown \frac{d}{p} \end{array}\right\} \begin{array}{ll} & amnp \\ & blnp \\ \text{divisum per } lmnp. & \\ & clmp \\ & dlmn \end{array}$$

---

1 *Nebenrechnung zur Lesart:*

$$\begin{array}{rl} 1 & 720- \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ \underline{6} & \\ 720 & \end{array}$$

5 *Unter* divisum per *lmnp*: Ergo nihil hinc ducitur.

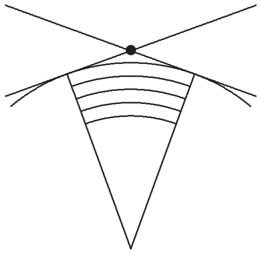
7 *Darunter:*

$$\begin{array}{llll} 2. \frown 3. \frown 4. & \textit{Rechts}: & a+b+c+d, & \frown l \\ 1. \frown 3. \frown 4. & & a+b+c+ & \frown m \\ 1. \frown 2. \frown 4. & & & \\ 1. \frown 2. \frown 3. & & & \end{array}$$

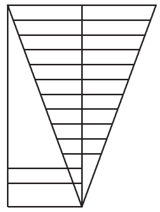
1 termino | alio atque alio *erg.* | minutus *(1)* v. g. lmnp − l ⌢ a lmnp − m ⌢ b lmnp − n ⌢ c lmnp − p ⌢ d. Atque ita praeclara habetur ratio, eaque universalissima inveniendi fractionum summas: F a c t u s n o m i n a t o r u m d u c a t u r i n s u m m a s n u m e r a t o r u m , a p r o d u c t o a u f e r a t u r s u m m a f a c t o r u m e x q u o l i b e t n u m e r a t o r e i n s u u m n o m i n a t o r e m , e. g. $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$ *(2)* et *L*

---

1 aliquo termino: Das angegebene Verfahren zur Addition von Brüchen ist nicht richtig. Leibniz bemerkt den Fehler, bessert das Schema aus und streicht das folgende Theorem, korrigiert den Text hier aber nicht.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$$\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}+\frac{2}{195}+\frac{2}{323}+\frac{2}{483}+\frac{2}{675}\text{ etc.}}$$

$$\frac{1}{3}\quad\left[\frac{1}{8}\right]\ \frac{1}{15}\quad\frac{1}{24}\quad\frac{1}{35}\qquad\text{etc.}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$$

$$\frac{abc^4+defg}{c^6}=\frac{\begin{matrix}170000\\+4321\end{matrix}}{1000000}.\text{ Eius }\square\text{ est }=\frac{a^2b^2c^8+d^2e^2f^2g^2}{c^{12}}.$$

$$\frac{ac^5+bc^4+dc^3+ec^2+fc+g}{c^6}.\text{ Eius }\square\ =[\textit{Rechnung bricht ab}]$$

2 *(1)* $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+\frac{1}{195}+\frac{1}{323}+\frac{1}{483}+\frac{1}{675}$ *(2)* $\frac{2}{3}$ *L* 3 | 1 *gestr.* | $\frac{1}{3}$ *L* 3 $\frac{1}{8}$ *erg. Hrsg.* 5 | $\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$. Ergo *gestr.* | $\frac{\mathrm{abc^4+defg}}{\mathrm{c^6}}$ *L* 6 *(1)* $\frac{\mathrm{ac^5+bc^4+defg}}{\mathrm{c^6}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{ac^5+bc^4+dc^3+ec^2+fc+g}}{\mathrm{c^6}}$ *L* 6 Eius $\square$ = | $\mathrm{a^2c^{10}+2abc^9+2ade}$ *gestr.* | *L*

3 Zur Kreisreihe in der Form $\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}$ etc. vgl. N. 27 S. 318 Z. 2 – S. 319 Z. 5; zu ihrem Zusammenhang mit der Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}$ etc. vgl. u. a. N. 38_2 S. 386 Z. 10–18 u. *LQK*, prop. XLII S. 88–91.
5 Eius $\square$ est: Im Zähler fehlt der Term $+2abc^4defg$.

32. RADICUM EXTRACTIO PER SERIEM INFINITAM
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 119. Ca 2/5 Bog. 4°. 1 S. Rückseite leer. — Am unteren Rand gestrichene Gesprächsaufzeichnung über Salpetergewinnung (= S. 347 Z. 9 f.).
Cc 2, Nr. 1467

Datierungsgründe: Die folgenden drei Stücke sind auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben. Die verwendete Notation deutet auf eine Entstehung der Stücke etwa im Sommer 1674 hin: In N. 21 treten Formen kombinierter Doppelvorzeichen und vereinzelt der Waagebalken als Gleichheitszeichen auf, deren Gebrauch bei Leibniz ab dieser Zeit belegt ist. N. 32 und N. 33 befassen sich mit der Reihenentwicklung von Quadratwurzeln aus Binomen. In N. 32 verwendet Leibniz eine fehlerhafte Formel, ebenso in N. 38_{15} vom Oktober 1674 (s. Erl. zu S. 347 Z. 4). N. 34 setzt die Entdeckung der Kreisreihe und Rechnungen in N. 26 voraus (s. Erl. zu S. 355 Z. 2 u. S. 355 Z. 4).

Radicum extractio per seriem infinitam.

Omnis radicum extractio nobis novum quoddam genus offert seriei continue decrescentis cuius haberi potest summa. Et radicis quadratae extractio summam exhibet fractionum quarum numeratores sunt potestates numeri alicuius dati, exponentium geometrica progressione crescentium, ut si numerus ponatur esse $2, = b$ fient numeratores illi:

b	b^2	b^4	b^8	b^{16}	b^{32}	etc.
2	4	16	256	65536	65536×65536	

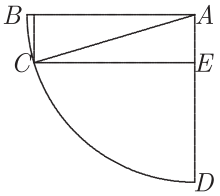
Unde patet si b ponatur $= \dfrac{1}{2}$ posteriores terminos fieri indicibiliter parvos.

Consule quae de eiusmodi progressione summanda annotavit Gerickius.

Hinc sequitur appropinquationes haberi posse radicum surdarum admirabiles quae ad quadraturas quoque figurarum transferri possunt.

14 *(1)* Series per radicum extractionem *(2)* Radicum *L* 17 alicuius *erg.* *L* 24 sequitur *(1)* nullas reperi *(2)* appropinquationes *L*

23 annotavit Gerickius: O. v. Guericke, *Experimenta nova*, 1672, S. 67 f.



[*Fig. 1*]

Esto quadrans circuli $ABCDA$ et abscissa quaelibet ex AD a centro, sit $AE = x$. et sinus rectus $CE = y$. Radius $AD = AC = a$. Patet esse: $y^2 = a^2 - x^2$. Ergo: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Hinc usus esse potest praeclarus extractionis sive evolutionis appropinquatoriae ad quadraturam appropinquatoriam admirabilem. Est enim radix composita ex terminis quorum 1^{mus} a, secundus $\dfrac{x^2}{a}$, tertius $\dfrac{x^4}{a^2 - x^2, \frown a}$ etc. quartus $\dfrac{x^8}{\ldots}$. Sed quia video etiam divisorem valde crescere, hinc metuo ne non satis lucremur.

---

8 *Darunter, gestrichen:* Mons. Blanchard m'a dit que le salpetre se fait du ⟨tophum⟩ en France. Mons. Rochas amy de M. Blanchard, son pere avoit esté [*bricht ab*]

---

4 evolutionis appropinquatoriae: Leibniz verwendet eine fehlerhafte Formel für die Reihenentwicklung der Quadratwurzeln aus Binomen wie in N. 38_{15} S. 519 Z. 6–9. Dort wie hier vergißt er den Faktor Zwei im Nenner der Rekursionsformel. 6 secundus $\dfrac{x^2}{a}$: Richtig wären $\dfrac{x^2}{2a}$ für den zweiten, $\dfrac{x^4}{4a(2a^2 - x^2)}$ für den dritten und $\dfrac{x^8}{16a(2a^2 - x^2)^3 - 8ax^4(2a^2 - x^2)}$ für den vierten Term. 9 f. Mons. Blanchard ... Mons. Rochas ... pere: nicht ermittelt.

33. DE RADICIBUS EX BINOMIIS QUANTITATIBUS EXTRAHENDIS SPECIMEN UNIVERSALE

[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 120–121. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 121 v° u. 120 r°. Bl. 120 v° u. 121 r° leer.
Cc 2, Nr. 1030

Datierungsgründe: Das Stück gehört zu der Gruppe um N. 32 (s. dort).

De radicibus ex binomiis quantitatibus specimen universale, in quadrata radice

$\sqrt{a+b} = \ldots$

<table>
<tr><td>$\cancel{a}$</td><td colspan="2">$+\cancel{b}+\cancel{\frac{b^2}{4a}}-\cancel{\frac{b^2}{4a}}+\cancel{\frac{b^4}{16a \frown \llcorner 4a^2+4ab+b^2 \lrcorner}} - \frac{b^4}{16a \frown \llcorner 4a^2+4ab+b^2 \lrcorner}$ ☿ $(\frac{b^4}{16a, \frown 2a+b \frown 2a+b})$</td></tr>
<tr><td>$+\sqrt{a}$</td><td>$+\frac{b}{2\sqrt{a}}$</td><td>$\boxed{-\frac{b^2\sqrt{a}}{8a^2+4ab}(\text{vel } \frac{b^2}{8a\sqrt{a}+4b\sqrt{a}} = \frac{b^2}{4\sqrt{a}, \frown 2a+b} \text{ NB.})}$
$-\frac{b^2}{4\sqrt{a}, \frown 2a+b}$</td></tr>
<tr><td>$\cancel{\sqrt{a}}$</td><td>$2\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ vel $\frac{4a+b}{2\sqrt{a}}$

multiplicetur per $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ fiet:
$\frac{4ab+b^2}{4a}$ seu $\cancel{b}+\cancel{\frac{b^2}{4a}}$</td><td>$2\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}$ vel $\frac{2a+b}{\sqrt{a}} - \frac{\frac{b^2}{4a}}{\frac{2a+b}{\sqrt{a}}}$ vel $\frac{2a+b}{\sqrt{a}} - \frac{b^2}{\sqrt{a}, \frown 8a+4b}$
seu $\frac{4 \frown 2a+b \frown 2a+b,, - b^2}{\sqrt{a}, \frown 8a+4b = \sqrt{a}, \frown 4 \frown 2a+b}$ ducatur in
$\frac{[-]b^2}{\sqrt{a}, \frown 8a+4b}$ fiet: $\frac{-\llcorner\llcorner 4 \frown 2ab^2+b^3 \frown 2a+b \lrcorner\lrcorner + b^4}{a \frown 16 \frown 4a^2+4ab+b^2}$ vel:
$\frac{b^2,,, \frown b^2,, -4, \frown 4a^2+4ab+b^2}{a, \frown 16, \frown 4a^2+4ab+b^2}$ cuius quaeratur differentia
a $-\frac{b^2}{4a}$ vel a $-\frac{b^2 \frown 4 \frown \llcorner 4a^2+4ab+b^2 \lrcorner}{a^2 \frown \underbrace{4 \frown 4}_{16}, \frown \llcorner 4a^2+4ab+b^2 \lrcorner}$ est
$\frac{-b^4}{a \frown 16 \frown \llcorner 4a^2+4ab+b^2 \lrcorner}$</td></tr>
</table>

11 ☿ (. . .) *erg. L* 16 $-$ *erg. Hrsg.*

$-\boxed{\dfrac{b^4}{\llcorner\llcorner\llcorner 2a+b,cub,, \frown 2,,, + b^2, \frown 2a+b\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown 8\sqrt{a}}}$ $\dfrac{b^4}{2a+b,\square, \frown 2,, + b^2,,, \frown 8\sqrt{a}, \frown 2a+b}$	Porro $\dfrac{b^8}{2a+b,\square\square,, \frown 4,,, + b^4,,, + 2a+b \frown 4 \frown b^4,,,,}$ $\overline{64a, \frown 2a+b,\square \frown \text{omnes priores radices duplas}}$
$2\sqrt{a}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}-\dfrac{b^2}{\sqrt{a}, \frown 8a+4b}$ ☽ vel $\dfrac{2a+b}{\sqrt{a}}+$ $\dfrac{\cancel{2}b^2}{\cancel{2}\sqrt{a}, \frown 4a+2b}$ vel $\dfrac{\llcorner\llcorner 2a+b\lrcorner \frown 2 \frown \llcorner 2a+b\lrcorner\lrcorner + b^2}{2\sqrt{a} \frown 2a+b}$ ☽. Iam $-\dfrac{\dfrac{b^4}{16a \frown \llcorner 4a^2+4ab+b^2}}{\dfrac{2a+b}{\sqrt{a}}+\dfrac{b^2}{2\sqrt{a}, \frown 2a+b}}$ $\odot = \dfrac{☿}{☽}$ seu $-\dfrac{b^4 \frown 2\sqrt{a}, \frown 2a+b}{\llcorner 2a+b\lrcorner\square\square \frown 2,, + b^2 \frown 2a+b,\square,,, \frown 16a}$ vel $\odot - \dfrac{b^4}{2a+b,(cub) \frown 2,, + b^2 \frown \llcorner 2a+b\lrcorner,,, \frown 8\sqrt{a}}$. Iam $\odot +$ ☽$, \frown \odot,, -$ ☿, et $\odot = \dfrac{☿}{☽}$. Ergo fiet $\dfrac{☿}{☽}$ + ☽$, \frown \dfrac{☿}{☽},, -$ ☿ sive $\dfrac{☿^2}{☽^2}$ + ☿ − ☿ = $\dfrac{☿^2}{☽^2}$.	

Ecce ergo operationem tandem ita in compendium reductam, nempe, residuum operationis praecedentis appelletur ☿. duplum radicis appelletur ☽. Tunc radix nova $= \odot$ erit $= \dfrac{☿}{☽}$, residuum novum $\dfrac{☿^2}{☽^2} = \odot^2$, seu radicis novae quadratum.

11 Tunc *erg. L*

1–9 Dieser Teil des Schemas schließt in der Vorlage rechts an S. 348 Z. 12–19 an.

Et quia prima ☿ est b, prima ☽ $\boxed{\sqrt{a}}$, erit ergo secunda radix ${}_2$☽ $\boxed{\frac{☿}{2\,☽}}$, et residuum secundum seu dividendus tertius seu ${}_2$☿ erit $= \dfrac{☿^2}{4\,☽^2}$, et tertia radix erit

$$\frac{☿^2}{4\,☽^2,\frown 2,\frown \llcorner ☽ + \dfrac{☿}{2\,☽}\lrcorner} = \boxed{\frac{☿^2}{8\,☽^3 + 4☿\,☽}}$$ et quarta erit

$$\frac{☿^4}{64\,☽^6 + 64\,☽^4☿ + 16\,☿^2\,☽^2,\frown 2 \frown \;☽ + \dfrac{☿}{2\,☽} - \dfrac{☿^2}{8\,☽^3+4☿\,☽}}.$$

---

1 *Zu* prima ☿ ... $\boxed{\sqrt{a}}$: $\boxed{\begin{array}{l}☿ = b\\ ☽ = \sqrt{a}\end{array}}$

351,2–12 *Nebenrechnungen:*

38	38	228
38	12	228
304	76	1824
114	38	456
1444	456	456
6		51984
8664		
6		
51984		

1 f. est b, *(1)* erit ergo prima radix $\frac{☿}{2\,☽}$, et residuum primum *(2)* prima ... ergo | radix *streicht Hrsg.* | secunda ... et | residuum *gestr. u. erg.* | secundum | seu ... tertius *erg.* | seu *L* 2 et *(1)* secunda *(2)* tertia *L*

---

1 prima ☽ $\boxed{\sqrt{a}}$: Leibniz ändert den ursprünglichen Ansatz $☽ = 2\sqrt{a}$ zu $☽ = \sqrt{a}$. 1 f. radix ${}_2$☽ ... seu ${}_2$☿: Leibniz verwendet zweimal vorangestellte Ziffern zur Indexbezeichnung. 351,3–6 $-\frac{1}{1442}$: $-\frac{1}{328776 = 228 \cdot 1442}$ wäre richtig; der Fehler unterläuft Leibniz bei der Umformung des Doppelbruches in S. 351 Z. 5 der vorletzten Spalte und beeinträchtigt auch die letzte Spalte.

$$y+\frac{b}{2y}-\frac{b^2}{2,,\frown 4y^2,\frown y+\dfrac{b}{2y}}-\frac{b^4}{2\frown,4y^2,,\square,,,\frown \llcorner y+\dfrac{b}{2y},\square\lrcorner,,,,\frown 2y,+\dfrac{b}{y}-\dfrac{b^2}{4y^2,\frown y+\dfrac{b}{2y}}}$$

$$\cancel{9}+\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{36}}-\cancel{\frac{1}{36}}+\cancel{\frac{1}{51984}}-\frac{1}{51984}$$

$$3+\frac{1}{6}\qquad-\frac{1}{228}\qquad-\frac{1}{1442}$$

$$\cancel{3}\quad\boxed{6+\frac{1}{6}\qquad\frac{\dfrac{1}{6}}{\cancel{1}+\cancel{\dfrac{1}{36}}}}$$

$$6+\frac{2}{6}\qquad\frac{\dfrac{1}{36}}{6+\dfrac{2}{6}=\dfrac{38}{6}}$$

seu

$$\frac{\dfrac{1}{6}}{38}=\frac{1}{38\frown 6}$$

seu $\dfrac{1}{228}$

$\dfrac{38}{6}+\dfrac{1}{38\frown 6}$ seu $+\dfrac{38}{6}-\dfrac{1}{38\frown 6}$, $\frown\dfrac{1}{38\frown 6}$ fiet $-\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{51984}$

$$+\frac{38}{6}-\frac{2}{38\frown 6}$$

Iam $\dfrac{-\dfrac{1}{38\frown 6},\frown\dfrac{1}{38\frown\cancel{6}}}{\dfrac{38}{\cancel{6}}-\dfrac{2}{38\frown\cancel{6}}}=\dfrac{\dfrac{1}{\cancel{6}}\frown\dfrac{1}{\cancel{6}}}{\dfrac{38\frown 38}{\cancel{6}}-\dfrac{2}{\cancel{6}}}$

seu $\dfrac{1}{38\frown 38,-2}=\dfrac{1}{1442}$

$$\frac{38}{6}-\frac{2}{38\frown 6}-\frac{2}{38\frown 38-2}$$

$$-\frac{\dfrac{1}{38,\square\square,,+4,,-38\square\frown 4}}{\dfrac{38}{6}-\dfrac{2}{38\frown 6}-\dfrac{2}{38\square-2}}$$

Si quantitati cuidam velut termino primo (a), alia (b) per primi duplam divisa velut terminus 2dus addatur (subtrahatur), et a summa subtrahatur (ad summam addatur) terminus tertius qui sit quadratum secundi a praecedentium terminorum duplo divisum; et a residuo rursus subtrahatur (ad residuum addatur) terminus quartus qui sit quadratum tertii a praecedentium terminorum duplo divisum; atque ita porro in infinitum continuatus intelligatur processus: Summa seriei huius infinitae aequabitur radici qua-

13 f. Si *(1)* termino *(2)* radici quadrat *(3)* quantitati cuidam | velut ... (a) *erg.* | , alia | (b) *erg.* | per *(a)* primam *(b)* primi ... divisa | velut ... 2dus *erg.* | addatur | (subtrahatur) *erg.* | et *L* 14 (ad ... addatur) *erg.* *L* 16 (ad ... addatur) *erg.* *L*

dratae binomii (residui), ex quantitatis primo assumtae a, quadrato, et altera quantitate b compositi seu $= \sqrt{a^2+b}$ $(= \sqrt{a^2-b})$.

Si hoc applicetur ad circulum cuius natura $\sqrt{a^2-x^2} = y$ fiet: $a - \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{x^4}{8a^3 - [4]ax^2}$.

Quaerenda aequatio circulo symmetros cuius potestas statim ab initio alta.

$\dfrac{x^4}{a^3 - x^2 a} = y$. Ergo $x^4 = a^3 y - ax^2 y$: $[y] = \dfrac{x^4}{a^3} + \dfrac{x^6}{a^5 - x^2 a^3}$.

$\dfrac{a^2y^2}{4} + x^4 + x^2 ay = a^3 y + \dfrac{a^2y^2}{4}$. Ergo $\left[\dfrac{ay}{2}\right] + x^2 = \sqrt{a^3 y + \dfrac{a^2 y^2}{4}}$ seu $x = \sqrt{a\sqrt{a^{\cancel{3}} y + \dfrac{\cancel{a^2} y^2}{4}} - \left[\dfrac{ay}{2}\right]}$.

1 binomii | (residui) *erg.* | ex *(1)* termino *(2)* quadrato ter *(3)* quantitatis *(4)* quantitate *(5)* quantitatis *L* 3 f. $\mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{x}^2}{2\mathrm{a}} +$ | $\dfrac{\mathrm{x}^4}{8\mathrm{a}^3 - 2\mathrm{ax}^2}$ *ändert Hrsg.* | . *(1)* $8\mathrm{a} \frown \mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2$ *(2)* | $10\mathrm{ay} \frown \mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^4$. *streicht Hrsg.* | Ergo *(3)* Quaerenda *L* 5 y *erg. Hrsg.* 6 f. ay *L ändert Hrsg. zweimal*

34. DE APPROPINQUATIONE CIRCULI PER SERIEM II
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 II 1 Bl. 246–247. 1 Bog. 2°. 4 S. — Auf Bl. 247 r° rechts oben Figur ohne Bezug zum Haupttext, quer zur Schreibrichtung.
Cc 2, Nr. 778

Datierungsgründe: Das Stück gehört zu der Gruppe um N. 32 (s. dort).

[*Teil 1*]

$b =$ tangens arcus 1. gradus 174550 minor vero, radio posito 10,000,000

$$\begin{array}{rrrr}
 & 174550 & & \\
 & 17455\ 0 & & \\
\hline
 & 8727500 & & \\
 & 87275 & & \\
 & 69820 & & \\
 & 122185 & & \\
 & 17455 & & \\
\hline
b^2 & 304677025 & 00 & - \ 1) \\
 & 609354050 & 00 & - \ 2) \\
 & 914031075 & 00 & - \ 3) \\
 & 1218708100 & 00 & - \ 4) \\
 & 1523385125 & 00 & - \ 5) \\
 & 1828062150 & 00 & - \ 6) \\
 & 2132739175 & 00 & - \ 7) \\
 & 2437416200 & 00 & - \ 8) \\
 & 2742093225 & 00 & - \ 9) \\
\hline
\end{array}$$

23 2742093225 | 00 – 9) | 30467933250 | 00 – 10) *gestr.* | *L*

$$\begin{array}{r}
30467702500 \\
17455 \quad 0 \\
\hline
1523385125 \\
1523385125\cdot \\
1218708100\cdot\cdot \\
2132739175\cdot\cdot\cdot \\
304677025\cdot\cdot\cdot\cdot \\
\hline
5205925261375 \\
11221221 \\
\hline
b^3 = 5318137471375000 \\
(b^2)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \quad 00 \\
\hline
1523385125 \\
2132739175\cdot \\
91\cancel{4}031075\cdot\cdot \\
304\cancel{6}77025\cdot\cdot\cdot \\
\cancel{2}\cancel{1}327\cancel{3}9175\cdot\cdot\cdot\cdot \\
1\cancel{2}\cancel{1}870\cancel{8}100\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
\cancel{2}1\cancel{3}\cancel{2}739\cancel{1}75\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
\cancel{9}1\cancel{4}031075\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
304\cancel{6}\cancel{7}702\cancel{5}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
243\cancel{7}4\cancel{1}6200\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
304\cancel{6}7\cancel{7}025\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
9140\cancel{3}10\cancel{7}5\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
15233851\cancel{2}5\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
\hline
151918207909523644837 5 \\
1 \quad 1132224224321211 \\
\hline
b^5 = 1620314303319557659375000 00
\end{array}$$

$$\frac{b^3a^4}{a^7} = 531813747137[5]000, 0000.000, 0000.000, 0000.000, 0000.000$$

$$\frac{b^3}{3} = 1772712490458333\frac{1}{3}$$

$$\frac{b^3a^4}{3a^7} = 17, 727.1249, 0458.333, 3333.333, 3333.333, 3333.333, 3333.333\frac{1}{3}$$

$$\frac{b^5}{5} = 3240628606639115318750000$$

1 471375 *L ändert Hrsg.* 4 $\frac{\mathrm{b}^5}{5}$ = *(1)* 34010476777318588645820 0,000 *(2)* 3240628606639115 3187500000 *L*

---

2 $\frac{b^3}{3}$: Leibniz berechnet den Wert in N. 26 S. 307 Z. 15–17. 4 $\frac{b^5}{5}$: Leibniz berechnet den Wert in N. 26 S. 308 Z. 10–12.

49
4
7 7
4

· · · · · · · · · · · · · 3046770250,0
$\cancel{1}\cancel{6}\cancel{2}0\cancel{3}1\cancel{4}\cancel{3}0\cancel{3}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{9}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{6}\cancel{5}\cancel{9}375$ 00,000
· · · · · · · · · · · · 152338512$\cancel{5}$
· · · · · · · · · · · 2132739175 ·
· · · · · · · · · · · 914031075 · ·
· · · · · · · · · 2$\cancel{7}$42093225 · · ·
· · · · · · · · 15$\cancel{2}$3385125 · · · ·
· · · · · · · 1828062150 · · · · ·
· · · · · · 2132$\cancel{7}$39175 · · · · · ·
· · · · · 15233$\cancel{8}$5125 · · · · · · ·
· · · · 152338$\cancel{5}$125 · · · · · · · ·
· · · 2742093$\cancel{2}$25 · · · · · · · · ·
· · · 304677025 · · · · · · · · · ·
· · 91403107$\cancel{5}$ · · · · · · · · · · ·
· 914031075 · · · · · · · · · · · ·
9140310750 · · · · · · · · · · · · ·
1218708100 · · · · · · · · · · · · · · ·
304677025 · · · · · · · · · · · · · · · ·
914031075 · · · · · · · · · · · · · · · · ·
6093540500 · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
1828062150 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
304677025 ·
48245131837812801764101714837 5
1122122312222243433333 21211
$\cancel{4}\cancel{9}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{3}\cancel{5}0\cancel{4}\cancel{5}\cancel{1}\cancel{9}7\cancel{4}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{8}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{9}\cancel{3}\cancel{7}5$ 000, 000 $= b^7$

7) $\cancel{1}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{3}$ $\cancel{5}\cancel{1}$ $\cancel{5}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{4}$ $\cancel{2}\cancel{4}$ $\cancel{5}\cancel{1}\cancel{3}$ $\cancel{2}\cancel{6}\cancel{4}$

$$\frac{b^7}{7} = 7052.464,8785.764,3502.820,4833.705,3571.428\frac{4}{7}$$

Iam $+\frac{b}{1}$	174550,0000.000,0000.000,0000.000,0000.000,0000.000,0000.000
$+\frac{b^5}{5}$	...........32.406,2860.663,9115.318,7500.000,0000.000,0000.000
$-\frac{b^3}{3}$	.....17,7271.249,0458.333,3333.333,3333.333,3333.333,3333.333
$-\frac{b^7}{7}$	...................7052.464,8785.764,3502.820,4833.705,3571,428
	174532,2761.156,5349.865,6997.221,0663,846,1832.961,3095.239

[*Teil 2*]

$$\frac{1}{1} \quad 1 \qquad\qquad \frac{2}{1} \quad \underbrace{\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{\ }}$$

$$\frac{1}{4} \quad 4 \qquad\qquad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{81}$$

$$\frac{1}{9} \quad 9 \qquad\qquad \frac{4}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{16} \quad 16$$

$$\frac{1}{25} \quad 25$$

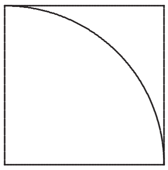
$$\frac{1}{36}$$

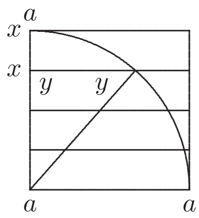
7–9 *Nebenbetrachtungen*: $\frac{1}{1-x} \sqcap 1 + \boxed{\frac{x}{1-x}} + x + \frac{x^2}{1[-x]}$ $1 - x + x$ [*bricht ab*] $\frac{x}{1-x}$ $\fint$ $x - x^2 +$ [*bricht ab*] $\frac{x}{x-1}$ $\frac{2}{2-1}$ $\frac{2}{2-1=1}$ 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$ 1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ etc.

1 Iam *(1)* | $\frac{\mathrm{b}}{1}$ = *streicht Hrsg.* | 174550, 0000000, 0000000, 0000000, 0000000, 0000000, 0000000, 0000000 *(2)* $+\frac{\mathrm{b}}{1}$ *L* 13 $-$x *erg. Hrsg.*

356,25 Leibniz fügt dem Ergebnis der Multiplikation eine Null zuwenig an. Dadurch wird das Ergebnis der abschließenden Summation ab der zwölften Stelle verfälscht.

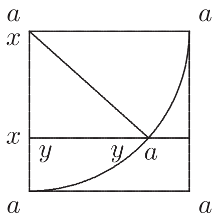
[*Teil 3*]

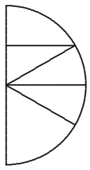


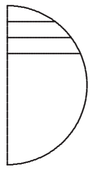


$2ax - x^2 = y^2.$
$\sqrt{2ax - x^2} = y.$
$\sqrt{2ax - x^2}$ ad a.

[*Fig. 1*] [*Fig. 2*]







$\sqrt{a^2 - x^2} = y.$
$a^2 + x^2 = y^2.$
$-$

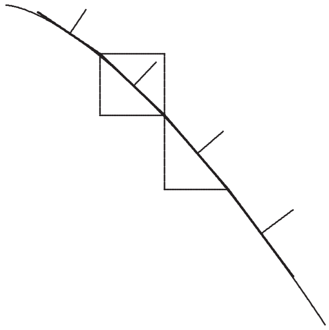
[*Fig. 3*] [*Fig. 4*] [*Fig. 5*]

$a^2 - x^2 = y^2$. $\sqrt{a^2 - x^2} = y$. Sinus $\odot^{\text{i}}$ ad elementum $\square^{\text{ti}}$ ut $\sqrt{a^2 - x^2}$ ad a. $1 - x^2$ ad $1^{\square}$. $\sqrt{1^{\square} - \frac{1}{3}}$. $\sqrt{1 - \frac{1}{3}}$. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ad 1. Si radius est 1, circulus erit $\boxed{1 - \frac{1}{3}}$ $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2–4 *Nebenbetrachtungen*: $2ax - x^2 = y^2$. $\sqrt{2ax - x^2} = y$. $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$. $2ax + x^2 = y^2$.

---

11 circulus: Gemeint ist der Sinus.



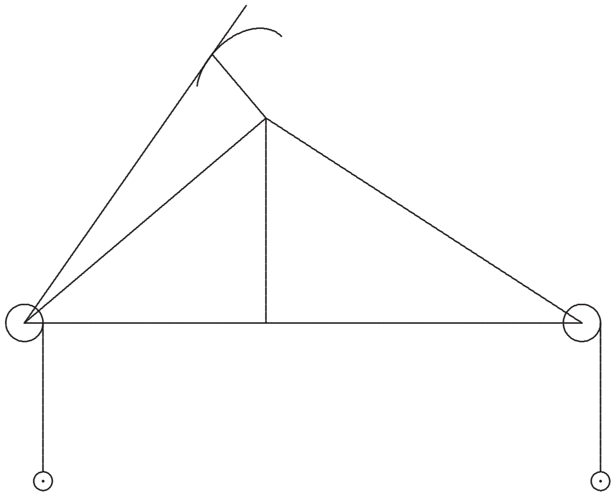
[*Fig. 6*]

$$ax^2 = y^3.\ x^2 = \frac{y^3}{a}.\ x = \sqrt{\frac{y^3}{a}}.\ \sqrt{x} = \sqrt{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}.\ x = \sqrt{\frac{y^3}{a}}.\ xa = \sqrt{y^3 a}.\ x^2 a = y^3.$$

$$\underset{\xi}{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}.\ \frac{x}{\xi} = \frac{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}}.\ \xi = \sqrt{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}.\ \xi^2 = \sqrt{\frac{y^3}{a}}.\ \xi^4 = \frac{y^3 a^2}{a}.\ \xi^4 = y^3 a.$$

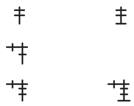
2 *Nebenbetrachtung*: $x^2 = ay$. $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

3 $\xi^4 = \frac{y^3 a^2}{a}$: Leibniz rechnet ab hier wieder dimensionsgerecht und ergänzt daher den Faktor a^2 im Zähler.



[*Fig. 7, ohne Bezug zum Haupttext, quer zur Schreibrichtung*]

[*Notiz*]



1 *Fig. 7*: Eine ähnliche Figur überschrieben in *Data basi … invenire triangulum. Tentamen tertium*, *LSB* VII, 1 N. 14_3 S. 146.

35. THEOREMA ARITHMETICAE INFINITORUM
[August/September 1674]

Überlieferung: *L* Reinschrift mit gestrichenem Zusatz: LH 35 III B 10 Bl. 1. 1 Bl. 2°, davon oben ein Streifen von ca. 1/5 abgerissen. 2 S. Reinschrift auf Bl. 1 r°, Zusatz auf Bl. 1 r° unten und auf Bl. 1 v°. — Teildr.: *LBG* S. 79 (= Z. 10 – S. 362 Z. 9).
Cc 2, Nr. 517

Datierungsgründe: Das verwendete Gleichheitszeichen deutet auf eine Entstehung nicht vor Juni 1674 hin. Die lateinische Reinschrift des Theorems und der gestrichene Zusatz bilden die Vorlage für das französische Konzept N. 36, datiert September 1674. N. 35 dürfte also kurz zuvor entstanden sein.

Theorema arithmeticae infinitorum.

Binarius, est summa seriei infinitae fractionum, quarum numerator unitas, denominatores vero numeri triangulares inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.

$$A \quad \text{series} \odot \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \text{ etc. in infinitum} \quad \sqcap 2.$$

Demonstratio

Esto series infinita fractionum, quarum numerator unitas, nominatores vero sint numeri naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum

$$B \quad \text{series} ☽ \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ etc. in infinitum.}$$

Exponatur et series $\odot$ dimidiata:

$$C \quad \text{series} ☿ \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \text{ etc. in infinitum.}$$

Quam aio esse $\sqcap$ 1.

11 Binarius, est *erg. L* 11 summa *(1)* fractionum infinitarum *(2)* seriei *L* 13–362,5 A, B, C, D, E *erg. L* 13 $\sqcap$ 2. *erg. L* 15 series *(1)* fractionum infinitarum *(2)* infinita *L* 20 Quam aio esse $\sqcap$ 1. *erg. L*

10–362,9 Theorema: vgl. N. 36 S. 368 Z. 1 – S. 369 Z. 4.

Nam auferatur series ☿ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit

$$D \qquad \frac{1}{2} + \frac{4}{12} + \frac{9}{36} + \frac{16}{80} + \frac{25}{150} + \frac{36}{252} \text{ etc.}$$

sive depressis fractionum terminis

$$E \text{ series ♀} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \text{ etc. in infinitum.}$$

Ab eadem serie ☽ auferatur 1. residua erit eadem series ♀. Ergo 1 et series ☿ sunt inter se aequales. Quia ab eadem serie ☽ ablatae, relinquunt idem. Ergo dupla series ☿ sive series ⊙ erit aequalis binario.

Quod demonstrandum sumseramus.

[*Zusatz, gestrichen*]

Sed hoc in infinitum eventurum debet demonstrari. Quod ita facio: terminus seriei ☽, v. g. $\frac{1}{3}$, ita exprimatur: $\frac{1}{y}$. supponendo y significare numerum quemlibet: triangulus ab y est $\frac{y^2+y}{2}$ v. g. $\frac{9+3}{2} \sqcap 6$. Ergo terminus seriei ⊙ ita exprimetur: $\frac{2}{y^2+y}$. v. g. $\frac{2}{9+3} \sqcap \frac{1}{6}$.

Terminus seriei ☿ erit $\frac{1}{y^2+y}$ v. g. $\frac{1}{9+3} \sqcap \frac{1}{12}$. Auferantur termini seriei $\frac{1}{y^2+y}$, a terminis seriei $\frac{1}{y}$ fiet: $\frac{y^2+y-y}{y^3+y^2}$, sive $\frac{1}{y+1}$. v. g. $\frac{1}{3+1}$ sive $\frac{1}{4}$.

Lemma[:] La moitié d'une fraction triangulaire (c'est à dire dont le numerateur est l'unité, et le nominateur un nombre triangulaire) estant ostée de la fraction naturelle qui

---

5 *Darunter:* ∗

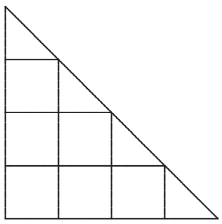
3 D | series ♀ *gestr.* | $\frac{1}{2}$ *L* 11 *(1)* Unum superest cuius forte demonstrationem exactior aliquis desideret, quod scilicet in infinitum futurum sit, *(2)* Sed *L* 17 Lemma *(1)* Les fr *(2)* Une fraction triangulaire *(3)* Si d'une *(4)* La moitié *L* 17 f. (c'est ... triangulaire) *erg. L*

17–363,14 Vgl. N. 36 S. 367 Z. 1–18.

luy repond (c'est à dire ayant pour numerateur l'unité, et pour le nominateur le costé du triangle rectangle isoscele, dont le nombre triangulaire exprime l'aire) il reste la fraction naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand.

Demonstration: Soit un nombre pris à discretion, y, v. g. 3. Le triangle qui luy repond sera $\frac{y^2+y}{2}$. $\frac{9+3}{2}$ ou $\sqcap$ 6. comme d'autres l'ont demonstré, outre que la demonstration en est fort aisée. Donc la fraction triangulaire sera $\frac{2}{y^2+y}$ v. g. $\frac{2}{9+3}$ ou $\frac{1}{6}$, et la moitié de la fraction triangulaire $\frac{1}{y^2+y}$ v. g. $\frac{1}{9+3}$ ou $\frac{1}{12}$. Et la fraction naturelle qui luy repond sera $\frac{1}{y}$ v. g. $\frac{1}{3}$. De $\frac{1}{y}$ v. g. $\frac{1}{3}$ ostons $\frac{1}{y^2+y}$ v. g. $\frac{1}{12}$, c'est à dire ostons la moitié de la triangulaire de la naturelle, il restera $\frac{y^2+y-y}{y^3+y^2}$, ou $\frac{y^2}{y^3+y^2}$, ou $\frac{1}{y+1}$, v. g. $\frac{1}{4}$. Or $\frac{1}{y+1}$ est la fraction du nombre naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand, puisque son denominateur qui est le nombre naturel, n'est augmenté que de l'unité; estant par consequent le costé du triangle prochainement plus grand.

Donc si la moitié d'une fraction triangulaire est ostée de la fraction naturelle qui luy repond, il reste la fraction naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand.



[*Fig. 1*]

1 repond *(1)* qui a *(2)* dont le numerateur est l'unité, et dont le nominateur est *(3)* (c'est *L* 3 naturelle *(1)* du triangle *(2)* qui repond *L* 4 Demonstration: *(1)* Soit la fraction triangulaire *(2)* Soit *L* 6 $\frac{1}{6}$, *(1)* et la fraction naturelle qui luy repond $\frac{1}{\mathrm{y}}$ v. g. $\frac{1}{3}$ *(2)* et *L* 10 fraction *(1)* naturelle du *(2)* du *L* 11 puisque *(1)* elle n'est que la fraction naturelle du triangle *(2)* le nombre naturel *(3)* son *L*

5 d'autres: vgl. Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [Marg.] S. 11 (*PO* III, S. 463).

Definitions

F r a c t i o n   t r i a n g u l a i r e est, dont le numerateur est l'unité, et le nominateur un nombre triangulaire, v. g. $\frac{1}{6}$.

N o m b r e   t r i a n g u l a i r e est icy, un nombre qui exprime l'aire d'un triangle rectangle dont [*bricht ab*]

1–5 Definitions ... dont *erg. L*

2 f. Vgl. N. 36 S. 366 Z. 4 f. 4 f. Vgl. *a. a. O.* S. 365 Z. 7–10.

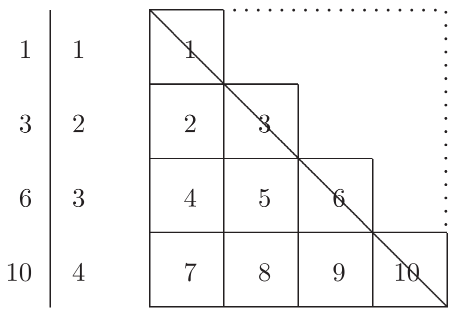
36. SUMMA FRACTIONUM A FIGURATIS, PER AEQUATIONES
September 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 5. 1 Bl. 2°. 2 S. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 755

S u m m a f r a c t i o n u m a f i g u r a t i s, per aequationes

Definitions.

N o m b r e t r i a n g u l a i r e est, qui exprime l'aire d'un triangle rectangle isoscele comme si le costé du triangle est exprimé par un nombre de pieds; par exemple 4, le nombre triangulaire exprimera le nombre des pieds quarrez, 10, dont ce triangle est composé.



[*Fig. 1*]

5 *Darüber:* Dudum ista inveneram, biennio abhinc, sed scripsi, ut amicis darem, 1674 Sept. Iam ante biennium Hugenio dixeram.

5 S u m m a *(1)* triangulorum pro *(2)* f r a c t i o n u m ... aequationes *erg. L* 7 f. rectangle | isoscele *erg.* | *(1)* c'est à dire le nombre *(a)* des quelques petits quarrez *(b)* des unités qua *(2)* par exemple *(3)* comme *L* 10 f. composé. | Ces nombres sont : 1. 3. 6. 10. 15. 21. etc.
Et leur costés 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. *gestr.* | 1 *L*

7–10 vgl. N. 35 S. 364 Z. 4 f. 17 Hugenio: Zu Leibniz' Gespräch mit Huygens über die Summierung der reziproken Dreieckszahlen im Jahre 1672 s. Einleitung S. XXV.

On peut juger par là, en considerant la figure, cy-joincte, que le nombre du costé estant nommé y. le nombre triangulaire se pourra exprimer ainsi analytiquement $\dfrac{y^2+ya}{2}$ la lettre a representant l'unité.

F r a c t i o n t r i a n g u l a i r e est dont le numerateur est l'unité, et le nominateur un nombre triangulaire. Son caractere analytique sera $\dfrac{2a^2}{y^2+ya}$.

F r a c t i o n n a t u r e l l e est dont le numerateur est l'unité et le nominateur est la racine ou le costé de quelque nombre figuré, comme triangulaire ou quarré etc. qui luy repond, son caractère sera $\dfrac{a}{y}$.

$$\begin{array}{rcccccccl} \text{Fractions triangulaires :} & \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \text{etc.} \\ \text{Naturelles :} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

T r i a n g l e p r o c h a i n e m e n t p l u s g r a n d est, dont le costé n'est augmenté que de l'unité comme si le costé du triangle proposé est y celuy du prochainement plus grand sera, $y + a$.

$$\begin{array}{ccccccc} A & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} \\ B & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ C & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} \\ D & \frac{1}{2} & \frac{4}{12} & \frac{9}{36} & \frac{16}{80} & \frac{25}{150} & \frac{36}{252} \\ E & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{array}$$

2 triangulaire *(1)* sera $\dfrac{\mathrm{y}^2+\mathrm{ya}}{2}$ ce qui est son caractère analytique à fin de le faire entrer dans le calcul en cas de besoin. *(2)* se *L* 4 *(1)* F r a c t i o n *(2)* R a n g d e s f r a c t i o n s t r i a n g u l a i r e s *(3)* F r a c t i o n *L* 5 triangulaire *(1)* par exemple $\frac{1}{10}$ *(2)* comme *(3)* . Son *L* 8 repond, *(1)* par ex *(2)* son *L* 11–13 T r i a n g l e ... y + a. *erg. L* 14–18 *Tabelle erg. L*

4 f. Vgl. N. 35 S. 364 Z. 2 f.

Lemme:

La moitié d'une fraction triangulaire estant ostée de la fraction naturelle qui luy repond il reste la fraction naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand ou la progression C estant ostée de la progression B, il restera la progression D, égale à la progression E, ou à la progression $B-1$.

Par exemple la moitié de $\frac{1}{6}$, (c'est à dire $\frac{1}{12}$), estant ostée de $\frac{1}{3}$, il reste $\frac{1}{4}$.

Demonstration:

Puisque le costé ou nombre naturel, qui répond à un triangle estant nommé y, v. g. 3. le nombre triangulaire sera $\dfrac{y^2+ya}{2a^2}$ par ce que nous venons de remarquer dans la definition; il s'ensuit que la fraction naturelle estant $\dfrac{a}{y}$, $\dfrac{1}{3}$, la fraction triangulaire sera $\dfrac{2a^2}{y^2+ya}$, $\dfrac{2}{9+3}$ ou $\dfrac{1}{6}$ et sa moitié, $\dfrac{1}{9+3}$ ou $\dfrac{1}{12}$. De $\dfrac{a}{y}$ ostez $\dfrac{a^2}{y^2+ya}$, le reste sera: $\dfrac{y^2a+ya^2-ya^2}{y^3+y^2a}$, ou $\dfrac{y^2a}{y^3+y^2a}$ ou $\dfrac{a}{y+a}$, $\dfrac{1}{3+1}$ ou $\dfrac{1}{4}$.

Or y estant le costé d'un triangle rectangle, $y+1$. sera le costé du triangle prochainement plus grand, sçavoir en nombres entiers. Donc $\dfrac{a}{y+a}$ ou $\dfrac{1}{4}$ reste de la soubstraction susdite est la fraction naturelle qui répond au triangle prochainement plus grand.

Ce qu'il falloit demonstrer.

5–7 ou ... B − 1 *erg. L* 10 *(1)* Puisque un nombre tri *(2)* Un nombre *(a)* trian *(b)* pris à discretion *(3)* Puisque *L* 10 f. v. g. 3. *erg. L* 16 f. reste ... susdite *erg. L*

1 Vgl. N. 35 S. 362 Z. 17 – S. 363 Z. 14.

Theoreme de l'Arithmetique des Infinis

Le Binaire est la somme d'une progression infinie de fractions, dont le numerateur est l'unité, et les denominateurs sont tous les nombres triangulaires, depuis l'unité inclusivement, jusque à l'infini.

$$A \qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \text{ etc. égale à 2.}$$

Demonstration.

Soit exposée la progression infinie de fractions naturelles

$$B \qquad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \text{ etc.}$$

Item la progression des moitiéz des fractions triangulaires, ou la moitíé de la progression A

$$C \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{42} \text{ etc. égale à } \frac{A}{2}.$$

Ostez la progression C de la progression B, chaque terme de chaque terme qui luy repond, il en proviendra

$$D \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{9}{36} \quad \frac{16}{80} \quad \frac{25}{150} \quad \frac{36}{252} \text{ etc.}$$

Et deprimant les nombres des fractions de la progression D, vous aurez la progression E.

$$E \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \text{ etc. à l'infini.}$$

par le lemme demonstré cy dessus.

De la même progression B ostez l'unité, et vous aurez aussi la progression E.

Donc $B - C$ estant égale à E.

Et $B - 1$ estant aussi égale à E.

Il s'ensuit que C est égale à 1.

---

1 *Darüber:* Voyez la page precedente.

1–369,4 Vgl. N. 35 S. 361 Z. 10 – S. 362 Z. 9.

Or C est égale à $\frac{A}{2}$.

Donc $\frac{A}{2}$ est égale à 1

et enfin A est égale à 2.

Ce qu'il falloit demonstrer.

Apres ce que je viens de dire, il est aisé de trouver la demonstration de mon theoreme general, sçavoir

La somme des fractions	triangulaires	infinies est égale à	$\frac{2}{1}$.
....	pyramidales	....	$\frac{3}{2}$.
....	triangulo-triangulaires	....	$\frac{4}{3}$.
	etc.	etc.	etc.

5 f. mon theoreme general: vgl. N. 5 S. 52 Z. 1 f. sowie *Accessio ad arithmeticam infinitorum, LSB* III, 1 N. 2, S. 1–20, v. a. S. 6–9.

37. DE PROGRESSIONIBUS CUBICIS

[September – Oktober 1674]

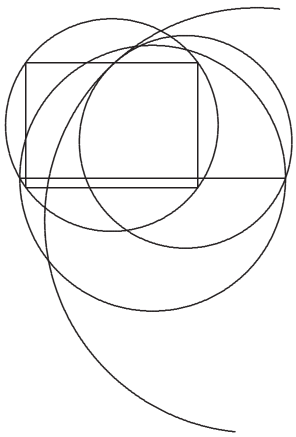
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 258–259. 1 Bog. 4°. 4 S. Goldschnitt. — Auf Bl. 258 r° vom Text Z. 16 – S. 371 Z. 3 und der Lesart zu S. 371 Z. 3 f. überschriebene Figur in Blindzeichnung.
Cc 2, Nr. 1036

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers und die verwendete Notation deuten auf eine Entstehung des Stückes in der zweiten Hälfte des Jahres 1674 hin. Teil 1 von N. 37 schließt inhaltlich an die Problemstellung am Ende von *De aequationibus ad circulum inveniendis* [September 1674] an; dies gilt auch für die überschriebene Figur in Blindzeichnung (vgl. *LSB* VII, 1 N. 130 S. 845 Z. 11). Auf S. 371 Z. 2 f. bemerkt Leibniz, daß Probleme, die durch zwei Kreise gelöst werden können, bereits mittels eines Kreises und einer Geraden lösbar sind. Diese Erkenntnis bildet den Ausgangspunkt der Überlegung des *Schediasma de constructione per curvam et lineam rectam*, datiert Oktober 1674 (*LSB* VII, 1 N. 138, s. insbesondere S. 884 Z. 9–11).

[*Teil 1*]

Esto aequatio ad circulum, $by - y^2 \sqcap x^2 + dx + ea$. et alia aequatio ad circulum, $fy - y^2 \sqcap x^2 + gx + ha$, pro $-y^2$ posterioris ponendo eius valorem ex priore, nempe

16–371,3 *Figur in Blindzeichnung überschrieben L*



$x^2+dx+ea-by$, fiet: $fy-by+\cancel{x}^2+dx+ea \sqcap \cancel{x}^2+gx+ha$, ideoque $y \sqcap \dfrac{\begin{matrix}-dx-ea\\+g\quad+ha\end{matrix}}{f-b}$ seu $x \sqcap y\dfrac{\mu}{a}+\pi$. quae aequatio est ad lineam rectam. Unde patet quicquid duobus circulis solvi potest, id etiam uno circulo et linea recta solvi posse.

Una aequatio datarum, $by-y^2-x^2,+dx+ea \sqcap 0$. multiplicetur per $y+c$, fiet:

$$by^2-y^3-yx^2+dxy+eay,+bcy-cy^2+cx^2+cdx+eac \sqcap 0.$$

Pro x substituatur eius valor ex aequatione ad lineam rectam, nempe $x \sqcap y\dfrac{\mu}{a}+\pi$, et $x^2 \sqcap y^2\dfrac{\mu^2}{a^2}+\dfrac{2\mu\pi}{a}y+\pi^2$, fiet:

$$\begin{array}{cccccccccc}
- & y^3 & - & \dfrac{2\mu\pi}{a}y^2 & - & \pi^2 y & + & c\pi^2 & \sqcap & 0.\\
- & \dfrac{\mu^2}{a^2}\ldots & + & b\ldots & + & d\pi\ldots & + & cd\pi & & \\
 & & + & d\dfrac{\mu}{a}\ldots & + & \dfrac{2\mu\pi c}{a}\ldots & & & & \\
 & & + & c\dfrac{\mu^2}{a^2}\ldots & + & ea\ldots & & & & \\
 & & - & c\ldots & + & bc\ldots & & & & \\
 & & & & + & \dfrac{cd\mu}{a}\ldots & & & &
\end{array}$$

2 ad *(1)* triangulum *(2)* lineam *L* 3 f. posse. *(1)* Sed aliter, veniamus ad radices attollendae aequationis causa; faciamusque $\sqrt{\mathrm{by}-\mathrm{y}^2\underbrace{-\,\mathrm{ea}+\frac{\mathrm{d}^2}{4}}} \sqcap \mathrm{x}+\mathrm{d}$, vel $\mathrm{z}+\underbrace{\mu+\mathrm{d}}$. Imo et pro y substituamus $\mathrm{v}+\lambda$, fiet $\mathrm{bv}+\mathrm{b}\lambda-\mathrm{v}^2-2\mathrm{v}\lambda-\lambda^2-\mathrm{ea}+\dfrac{\mathrm{d}^2}{4}$ et brevius $\sqrt{\mathrm{by}-\mathrm{y}^2+\mathrm{ca}} \sqcap \mathrm{x}+\mathrm{d}$, et alia aequatio $\sqrt{\mathrm{ey}-\mathrm{y}^2+\mathrm{fa}} \sqcap \mathrm{x}$ fiet $\sqrt{\mathrm{by}-\mathrm{y}^2+\mathrm{ca}} \sqcap \sqrt{\mathrm{ey}-\mathrm{y}^2+\mathrm{fa}}+$ *(a)* x *(b)* d, et quadrando utrobique: $\mathrm{by}-\mathrm{y}^2+\mathrm{ca} \sqcap \mathrm{ey}-\mathrm{y}^2+\mathrm{fa}+$ *(aa)* $\mathrm{d}^2+2\mathrm{d}\sqrt{\ldots}$ *(aaa)* Multiplicetur utraque aequationis pars per y+ *(bbb)* Ergo antequam huc procedatur multipli *(ccc)* Multiplicetur utraque aequationis pars per $\mathrm{y}+\mathrm{g} \sqcap 0$, *(aaaa)* fiet: (*bbbb*) seu radices per $\sqrt{\mathrm{y}^2+2\mathrm{gy}+\mathrm{g}^2}$, fiet: $\sqrt{\mathrm{by}^3+2\mathrm{bgy}+\mathrm{g}^2\mathrm{by}}-\mathrm{y}^4-2\mathrm{gy}^3$ *(bb)* omittatur d et multiplicetur utraque aequationis pars per $\mathrm{y}+\mathrm{g}$. fiet $\mathrm{by}^2-\mathrm{y}^3+\mathrm{cay}+\mathrm{gby}-\mathrm{gy}^2+\mathrm{gca} \sqcap \mathrm{ey}^2-\mathrm{y}^3$ etc. *(2)* Una *L*

Esto iam aequatio cubica pura

$$\begin{array}{llcll} - & 1y^3 & * & * & - 1a^2\xi \sqcap 0. \\ - & \dfrac{\mu^2}{a^2} & & & -\dfrac{\mu^2}{a^2} \end{array}$$

Conferenda cum factitia plana, ad cubicam sublata: fiet

$$c\pi^2 + cd\pi \sqcap a^2\xi \frown \begin{array}{c} -1 \\ -\dfrac{\mu^2}{a^2} \end{array} \text{. caetera erunt} \sqcap 0.$$

Ergo $b \sqcap \dfrac{2\mu\pi}{a} - \dfrac{d\mu}{a} - \dfrac{c\mu^2}{a^2} + c$. quo valore ipsius in tertio termino inserto, fiet:

$$-\pi^2 + d\pi + \frac{2\mu\pi c}{a} + ea + \frac{2\mu\pi c}{a} \quad \boxed{-\frac{d\mu c}{a}} \quad - \frac{c^2\mu^2}{a^2} + c^2 \quad \boxed{+\frac{cd\mu}{a}} \quad \sqcap 0. \text{ adeoque}$$

$$d \sqcap \frac{-\pi^2 + \dfrac{4\mu\pi c}{a} + ea - \dfrac{c^2\mu^2}{a^2} + c^2}{-\pi \quad \boxed{+\dfrac{\mu c}{a} - \dfrac{c\mu}{a}}}.$$

isque valor in termino ultimo inserendus.

Sed notandum est ipsam c nondum haberi, et metuendum, ne ad cubum assurgat, sed eius inquisitio in ultimam aequationem differatur; igitur eius valor substituendus, qui est: $c \sqcap \dfrac{-1 - \dfrac{\mu^2}{a^2}, \frown a^2\xi}{\pi^2 + d\pi}$. Imo possumus pergere ut ante substituendo valorem ipsius d in eius locum in aequatione ultima, fiet postrema aequatio haec:

371,3 f. *Zur Lesart, nicht gestrichen:* Male non ita assurgemus ad cubum, ergo sic potius.

6 termino | succedente *gestr.* | inserto *L* 9 *(1)* eoque valore in ultimo termino inserto, fiet: *(2)* isque *L*

371,4 Ab hier rechnet Leibniz nicht mehr mit $-dx-ea$, sondern mit $+dx+ea$. 371,5–373,2 Statt $+cx^2$ müßte es $-cx^2$ heißen. Bei der folgenden Substitution wird das Element $+eac$ vernachlässigt. Beide Fehler wirken sich bis S. 373 Z. 2 aus.

$$\begin{array}{cccccccccc} -c\pi^2, & -c\pi^2 & +\dfrac{4\mu\pi c^2}{a} & +eac & -\dfrac{c^3\mu^2}{a^2} & +c^3 & \sqcap & +1 & \frown & a^2\xi. \\ & & & & & & & +\dfrac{\mu^2}{a^2} & & \end{array}$$

Unde sequeretur ex tot incognitis super $c.\ \pi\ \mu.\ e$ omnes demta una sumi posse pro arbitrio quod videtur absurdum, sane c non potest sumi pro arbitrio, alioqui posset cubus $a^2\xi$ habere radicem quamlibet. An forte hinc sequitur ipsam c esse radicem imaginariam et sequeretur in omni aequatione cubica simplice unam esse radicem imaginariam. Sed nihil referret tamen, nam et ope radicum imaginariarum possent deprimi aequationes, si cognoscerentur.

Breviori calculo eadem includam: aequatio est ad circulum $by - y^2 - x^2 + dx + ea \sqcap 0$. Pro x substituatur eius valor: $y\frac{\mu}{a} + \pi$, fiet

$$by - y^2 - y^2\frac{\mu^2}{a^2} - 2y\frac{\mu\pi}{a} - \pi^2 + \frac{d\mu}{a}y + d\pi + ea \sqcap 0.$$

sive:
$$\begin{array}{cccccccc} + & 1y^2 & - & \dfrac{d\mu}{a}y & + & \pi^2 & \sqcap & 0. \\ + & \dfrac{\mu^2}{a^2}\ldots & - & b\ldots & - & d\pi & & \\ & & + & [2]\dfrac{\mu\pi}{a}\ldots & - & ea & & \end{array}$$

pro $\dfrac{-\dfrac{d\mu}{a} - b + [2]\dfrac{\mu\pi}{a}}{+1 + \dfrac{\mu^2}{a^2}}$ ponatur f. et pro $\dfrac{\pi^2 - d\pi - ea}{+1 + \dfrac{\mu^2}{a^2}}$ ponatur $[ga]$. fiet:

$y^2 + fy + ga \sqcap 0$. Multiplicanda per $y + c \sqcap 0$, fiet: $y^3 + fy^2 + gay, +cy^2 + cfy + cga \sqcap 0$, et ordinando:

$$\begin{array}{cccccccc} y^3 & + & fy^2 & + & gay & + & cga & \sqcap 0. \\ & + & c\ldots & + & cf\ldots & & & \\ y^3 & & * & & * & + & a^2q & \sqcap 0. \end{array}$$
Conferenda cum

12+15 $\sqcap$ 0. (*1*) multiplicetur per $y + c \sqcap 0$. (*2*) unitetur (*3*) pro $1 + \frac{\mu^2}{a^2}$, ponatur (*4*) pro *L*
14 f. 2 *erg. Hrsg. zweimal* 15 g *L ändert Hrsg.*

erit ergo $f + c \sqcap 0$. seu $c \sqcap -f$. Ergo $ga + cf \sqcap 0$. erit $ga - c^2 \sqcap 0$. unde denique $cga \sqcap c^3 \sqcap a^2q$. quod dudum satis sciebamus.

[*Teil 2*]

Si qua data sit progressio numerorum, huius aequationis e. g. $x^3 + fx^2 \sqcap N$. ita ut numero terminorum posito x, et f. 10 numerus sit N,

ut si x ponatur 1, erit $x^3 + fx^2 \sqcap 11$,

et si x ponatur 2, erit $x^3 + fx^2 \sqcap 48$.

Sed ponatur contra numerus esse datus, ut 40, et quaeri modum ita formandi progressionem, ut in eo reperiatur 40. progrediendo semper per numeros progressionis arithmeticae, et, quaeritur tunc vel unicus ex aliis numeris maioribus minoribusque, qui tunc in ea progressione reperirietur: eo enim habito daretur et dati radix; sumamus exemplum facilius:

$$\begin{array}{cccccccc} x - 3a & \frown & x + 4a & \text{fit}: & x^2 & -3x & -12a^2 & \text{sive} \quad x^2 + ax - 12a^2 \sqcap 0. \\ \sqcap 0 & & \sqcap 0 & & & +4\ldots & & \end{array}$$

Ponatur a, non esse unitas, sed 1000. fiet: $x^2 + 1000x - 12000000 \sqcap 0$.

Iam fiat $x^2 + 1000x - N \sqcap 0$.

			0							
					1001					
Posito	$x \sqcap 1$	fiet	$N \sqcap 1001$	(c)			2			
					1003	(d)			0	
	$x \sqcap 2$		$N \sqcap 2004$	(f)			2	(e)		
					1005	(g)			0	
	$x \sqcap 3$		$N \sqcap 3009$	(h)			2			Differentiae
					1007	(i)			0	
	$x \sqcap 4$		$N \sqcap 4016$	(k)			2			
					1009	(n)				
	$x \sqcap 5$		$N \sqcap 5025$	(m)						

4 numerorum *erg. L* 5 f. 10 *(1)* et numero posito N, sit N datus quaeraturque *(2)* numerus *L* 10 ex *(1)* illis numeris, *(2)* aliis *L*

[Numeri] alicuius in ea serie sumti, ut $(5)x$, radix deminuatur unitate habetur numerus radicis x proxime minoris seu $(4)x$ ut

$$\begin{array}{cccccc} x^2 & + & 1000lx & - & 5025l^2 & \sqcap 0. \qquad \text{ponatur} \quad x \sqcap z + l, \qquad \text{fiet} \\ z^2 & + & 2lz & + & l^2 & \\ & + & 1000l... & + & 1000l^2 & \\ & & & - & 5025l^2 & \end{array}$$

Imo video hoc nihil ad rem pertinere, non enim fit aequatio pro termino priore, sed manet prior tantum involuta, ergo per differentias procedendum, seriei iam cognitae: de quo post, tantum considero hac arte novam haberi aequationem, etsi series in qua numerus datus reperitur, sit progressionis arithmeticae, tamen non procedit per unitates, nisi in serie unitatum reperiatur, quaeritur modus reperiendi intervallum huius arithmeticae progressionis.

Ponatur cognitum et esse $\sqcap\ v$, erit terminus proxime minor $x - v$, fiet ergo eius aequatio

$$\begin{array}{cccccc} x^2 & - & 2vx & + & v^2 & \sqcap\ (4)N. \\ & + & 1000l... & - & 1000vl & \\ & & & - & 5025l^2 & \end{array}$$

Cuius differentia a dato seu proximo maiore, seu $(5)N, \sqcap x^2 + 1000lx - 5025l^2$ est utique $- 2vx + v^2 - 1000v$. Et ponendo $v \sqcap 1$, iam enim video id fieri posse (potest enim 1 vel l semper esse progressionis intervallum, etsi non sit eius terminus) fiet differentia $- 2lx + l^2 - 1000l^2$ quod posito $x \sqcap 5$ est 1009.

Iam ut pergamus quaerenda etiam differentia inter $(4)N$ et $(3)N$. Nam radix ipsius $(3)N$ est $x - 2v$, unde fiet:

$$\begin{array}{cccccc} x^2 & - & 4vx & + & 4v^2 & \sqcap\ (3)N. \\ & + & 1000l... & - & 2000v & \\ & & & - & 5025l^2 & \end{array}$$

1 *(1)* Esto iam numerus datus 40, cuius radix seu x, in ea progressione quaeritur, vel quod idem est proxime minor qui reperitur in *(a)* aequatio *(b)* progressione, ita ut error non sit multo maior millesima unitatis ab initio datae, seu a, parte seu $\sqcap \frac{a}{1000}$. Iam considerandum differentiam inter duos numeros datos. v. g. (5)N et (1)N *(2)* Numerus aliquis in ea serie sumtus *(3)* | Numerus *ändert Hrsg.* | alicuius *L* 2 (4)x *(1)* ut $x^2 + ax - 12a^2 \sqcap 0$, ponatur $x \sqcap z + l$ fiet $z^2 + 2lz + l^2$ / $a \ + al$ *(2)* ut *L* 3 z + l, | vel *gestr.* | fiet *L* 20 vel l *erg. L*

Et differentia inter $(3)N$ et $(4)N$ erit: $-\ 2vx\ +\ 3v^2\ -\ 1000v^2$ nempe $-$ 1007. et differentia differentiarum erit $2v^2$, seu differentia differentiarum erit 2, ponendo $v \sqcap 1$.

Iam a differentia prima seriei differentiarum penultimarum (hoc loco primarum) subtrahatur ultima, seu quae respondet ipsi $(1)N$. At illam inquies ignoramus fateor, sed quantum ad appropinquationes perinde est ac si haberemus. Et potest sumi radix $(1)N$, esse 1. Fiet ergo $+2vx - v^2 + 1000v^2 - 1001$ seu $\dfrac{2\cancel{v}x - \cancel{3v^2 - 1} - 4}{2} \sqcap x\ -\ 2$. oritur ergo aequatio identica, ac proinde inutilis. Sed si $-$ 1001 poneretur non dari, fieret aequatio: $\dfrac{2vx - v^2 + 1000v^2 - 1001wl}{2} \sqcap x - 2$.

Cumque semper necesse sit deleri sive destrui x in aequatione quadratica quia semper differentia quae restat tunc est 2, iam vero et multiplicatur per 2, ergo eo casu in quadraticis statim habetur terminus primus seu $(1)N$, nempe radix eius w. Imo male non habetur $1001w$, sed habetur eius homogenei valor seu terminus seriei primus, qui est $-\ w^2\ - 1000w$, et aequatur $\dfrac{+w^2 + 1000lw}{2} \sqcap \dfrac{-1000v^2 + v^2}{2} - 2$.
Sed haec accuratius expendenda, succedunt autem tantum in aequationibus quadraticis ut dixi, quia differentia ultima potestatis est 2, et numerus radicem multiplicans in differentia differentiarum etiam 2, cum in cubis differentia potestatum sit 6, et multiplus radicis in differentia differentiarum [6], ut ante.

Hinc autem ducitur, quod inventa radice ipsius $(1)N$, geometrice haberi potest radix ipsius etiam datae aequationis. Huic iam aequationi $\dfrac{2lx - l^2 + 1000l^2 - w^2 - 1000lw}{2} \sqcap$ $x\ -\ 2$, in qua duae incognitae (quia in cubis x non eliminatur, nec in potestatibus altioribus), iungenda est nova, ope eiusdem primi homogenei ut eius ope altera incognitarum inprimis w elidatur, et tentetur an veniri queat ad aequationem tractabiliorem ab initio proposita.

2 f. $\mathrm{v} \sqcap 1$. *(1)* Iam differentia prior, dividatur differentiam differentiarum: $\dfrac{-2\mathrm{vx} + \mathrm{v}^2 - 1000\mathrm{v}}{2\mathrm{v}^2}$ erit $\sqcap$ x *(2)* Iam *L* 10 et *(1)* dividitur per *(2)* multiplicatur *L* 15 differentia *(1)* quadratorum *(2)* ultima *L* 17 2 *L ändert Hrsg.* 17 f. ante. *(1)* Sed non video quid ex invento (1)N duci possit *(a)* nisi quod ad sola *(b)* nisi quod theorema sit memorabile, compendium etiam ni fallor inde ducatur, *(aa)* ut *(bb)* nisi *(2)* Hinc *L* 18 inventa *(1)* homogenei *(2)* radice *L*

6 Leibniz faßt die beiden Beziehungen in unzulässiger Weise zusammen, der Fehler wirkt sich bis Z. 23 aus. 8 Die Hilfsgröße w, die Leibniz ab hier verwendet, muß — ebenso wie vorher v — durchweg gleich 1 sein, was Leibniz im folgenden an mehreren Stellen auch selbst bemerkt.

Nimirum[:] $f \sqcap c + d.$

et $h \sqcap \underbrace{f}_{c+d} + \underbrace{g}_{d+e}$ seu $h \sqcap c + 2d + e.$

et $k \sqcap \underbrace{i}_{\underbrace{g}_{d+e}+e} + \underbrace{h}_{c+2d+e}$ sive $k \sqcap c + 3d + 3e.$

et $m \sqcap \underbrace{k}_{c+3d+3e} + \underbrace{n}_{\underbrace{i}_{d+2e}+e}$ seu $m \sqcap c + 4d + 6e.$

Numeri triangulares

Rectius omittendo c, et ponendo $d \sqcap 1001$, caetera praeclare procedent, ponendo scilicet d esse numerum primum, vel quod idem differentiam primam, e differentiam differentiarum ultimam, ex quibus caetera componuntur. Eodem ergo modo etiam terminus ultimus ex tribus primis differentiis componi potest in cubicis, ut hic ex duobus in quadraticis, et ita de caeteris in infinitum. In cubicis et altioribus hoc quoque considerabile, quod cum priore aequatione differentia ultima, seu aequatio quadratica ipsius w, semper inventa sit per consequens w, in postrema, ubi triangulares numeri sunt, ipsam w eliminari posse, et fieri novam aequationem in qua x rursus est incognita; sed quaeritur an omnis x, an vero aliqua, tantum si aliqua non video cur una prae altera; si omnes nulli id usui ad geometricas constructiones.

Sed res ipsa tentanda. Sit aequatio cubica simplex $x^3 \sqcap a^2b$.

11 Rectius *(1)* ponendo (*a*) c $\sqcap$ 0. et o (*b*) 1000 id quod hic vocaveramus c et, | et d *gestr.* | *(2)* omittendo *L* 19 non *(1)* habet quam *(2)* video *L*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & 216 \\
& 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & \\
& & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & \\
& & & 6 & & 6 & & 6 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
x \sqcap 1w \quad (1)N \sqcap & w^3 & & & \\
& & 3lw^2 + 3l^2w + l^3 & & \\
\sqcap 2w & 8w^3 & & 9lw^2 + 3l^2w & \\
& & 12lw^2 + 6l^2w + l^3 & & [6lw^2] \\
\sqcap 3w & 27w^3 & & 15lw^2 + 3l^2w & \\
& & 27lw^2 + 9l^2w + l^3 & & [6lw^2] \\
\sqcap 4w & 64w^3 & & 21lw^2 + 3l^2w & \\
& & 48lw^2 + 12l^2w + l^3 & & \\
\sqcap 5w & 125w^3 & & & \\
\sqcap 6w & 216w^3 & & &
\end{array}$$

Sive sic:

$$\begin{array}{llllll}
0 & & & & & l \sqcap w \text{ hic.} \\
& w^3 & & & & \\
w^3 & & \boxed{3lw^2 + 3l^2w + l^3 - w^3} & & & \\
& 3lw^2 + 3l^2w + l^3 & & 6lw^2 & & \\
8w^3 & & 9lw^2 + 3l^2w & & 0 & \\
& 12lw^2 + 6l^2w + l^3 & & 6lw^2 & & \\
27w^3 & & 15lw^2 + 3l^2w & & 0 & \\
& 27lw^2 + 9l^2w + l^3 & & 6lw^2 & & \\
64w^3 & & 21lw^2 + 3l^2w & & 0 & \\
& 48lw^2 + 12l^2w + l^3 & & 6lw^2 & & \\
125w^3 & & 27lw^2 + 3l^2w & & & \\
& 75lw^2 + 15l^2w + l^3 & & & & \\
216w^3 & & & & &
\end{array}$$

$w + l$, cubice facit $w^3 + 3lw^2 + 3l^2w + l^3$. Ergo

prima differentia primi gradus dat $3lw^2 + 3l^2w + l^3$

2^{da} differentia primi gradus dat $12lw^2 + 6l^2w + l^3$ etc., fingendo tantum w valere in 2do $2w$, in tertio $3w$, etc. Ponendo $l \sqcap w$. patet ultimam differentiam esse $6w^3$ et incipi posse a 0, quia tunc $l^3 - w^3 \sqcap 0$. et ita poni potest primus terminus $\sqcap 0$.

Iam differentia prima primi gradus (termino primo posito 0) est w^3, secunda $6w^3$, tertia etiam $6w^3$, quas appellemus $c + d + (d)$.

N. num. DD diff. 2. gr.
D. diff. 1. gr. [DDD diff. 3. gr.]

$(1)N \sqcap$	$(1)D \sqcap c$	$(1)D \sqcap c$	$(1)DD \sqcap d$	$(1)DDD \sqcap (d)$
$(2)N \sqcap$	$c + (2)D$	$(2)D \sqcap (1)N + (1)DD$	$(2)DD \sqcap d + (d)$	
	$c + d$	$c + d$		
[seu]	$2c + d$			
$(3)N \sqcap$	$c, +c + d, ,$	$(3)D \sqcap c + d, +d + (d),$	$(3)DD \sqcap d + (d), +(d),$	
	$+c + d, +d + (d)$			
[seu]	$3c + 3d + (d)$			
$(4)N \sqcap$	$3c + 3d + (d),$	$(4)D \sqcap c + d, +d + (d), ,$		
	$+c + 3d + 3(d), ,$	$+d + (d), +(d)$		
seu	$4c + 6d + 4(d)$			

378,15–28 Hinc patet demonstratio cur differentiae cuborum gradus 3tii sunt senarii.

378,8+10 $6l^2w$ *L ändert Hrsg. zweimal* 378,14 f. $216w^3$ *(1)* Ex quo patet differentiam primam *(2)* Sive *L* 378,29 f. Ergo *(1)* 2da *(2)* altera *(3)* prima *L* 1 tantum w *(1)* quod *(2)* semper valer *(3)* valere *L* 3 f. $\sqcap 0$. *(1)* Iam terminus *(a)* (1)N *(b)* (1)x fit *(2)* ergo iam *(a)* $0 \sqcap c$, *(b)* $w^3 \sqcap d, 3lw^2 + 3l$ *(3)* Iam *L* 7 DDD diff. 3. gr. *erg. Hrsg.* 11+13 seu *erg. Hrsg. zweimal*

378,15 f. Sive sic: Leibniz hat den Beginn der Tabelle zunächst gestrichen bzw. umrahmt, hat ihn aber aufgrund von Z. 1–3 wieder ergänzt und die Bemerkung $l \sqcap w$ hic hinzugefügt.

Ita

$(1)N \sqcap 1c$ $\quad$ $(2)N \sqcap 2c+d$ $\quad$ $(3)N \sqcap 3c+3d+(d)$ $\quad$ $(4)N \sqcap 4c+6d+4(d)$

$(2)N \sqcap 2c+1d$

$(3)N \sqcap 3c+3d+1(d)$

$(4)N \sqcap 4c+6d+4(d)$

Vides primam seriem ipsorum c esse numerorum naturalium, seriem ipsorum d esse triangularium, ipsorum (d) esse pyramidalium, vel etiam ponendo $d \sqcap (d)$ fiet:

$$\begin{aligned} &(1)N \sqcap 1c\\ &(2)N \sqcap 2c+1d\\ &(3)N \sqcap 3c+4d\\ &(4)N \sqcap 4c+10d \end{aligned}$$

Est autem $c \sqcap w^3$, et $d \sqcap 6w^3$.

Et numero ipsorum N, posito x, constat pyramidem esse trientem facti ex ductu numeri naturalis x in triangulum proxime maioris; iam triangulum proxime maioris est $\dfrac{x^2+2wx+w^2}{2}+\dfrac{x+w}{2}$, erit pyramis: $\dfrac{x^3+2wx^2+w^2x+x^2l+wxl}{6}$. Sed quaeritur pyramis numeri proxime minoris numeri x, ergo sic[:] $x-w$, ducatur in $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{xl}{2}$, fiet

$$\frac{x^3+x^2l-x^2w-xwl}{6}.$$

Eritque cubus numeri terminorum assumti,

$$x^{\overset{2}{\cancel{3}}}\ \cancel{w^3} \quad \sqcap \overset{1}{\cancel{x}}\cancel{w^3}, + \frac{x^{\overset{2}{\cancel{3}}}+x^{\cancel{2}}l-x^{\cancel{2}}w-\cancel{x}wl}{\cancel{6}} \ \frown\ \cancel{6}\cancel{w^3}.$$

Sed quia in hac aequatione duae sunt incognitae alia adhuc opus est aequatione, qualis est data $x^3 \sqcap a^2b$. Sed tentandum est an alia queat haberi, cuius ope w possit eliminari. Nimirum differentia postrema penultimi gradus demta prima eiusdem gradus, divisa per differentiam ultimi gradus [erit $\sqcap x$]. Verum identica fit aequatio, nisi differentia ista ul-

---

19 Aequatio identica ex qua sequitur esse $w \sqcap 1$.

19 f. $\cancel{6}\cancel{w^3}$. *(1)* unde denique *(a)* x *(b)* 0 $\sqcap$ *(2)* Sed *L*

21 f. eliminari. *(1)* $\dfrac{3x^2w^3+3xlw^3-6l^2w^3}{6lw^3} \sqcap$ x. *(2)* Nimirum *L* 23 erit $\sqcap$ x *erg. Hrsg.* 23 Verum *(1)* propositio rursus *(2)* identica *L*

tima penultimi gradus alio quodam valore habeatur quem tamen nullum reperio semper enim w divisione per w^3 hic evanescit. Quare id unum hinc discimus quod sane maximi momenti, quod hinc progressionis initium reperiatur dato termino aliquo, et contra, mirabili quadam imitatione verorum; ita enim quantitas w erit unitas quaedam repraesentatitia, id est eodem plane modo producet terminum datum, ut unitas cubum, totidem locis ab ea dissitum, seu huic cubo surdo, respondentem efficit. Magni momenti potest esse haec consideratio unitatis repraesentatitiae sane est plane nova. Imo rursus video eam aequationem evincere quod w semper ponenda $\sqcap$ 1.

7 f. video *(1)* esse eam quoque aequationem pure identicam, *(2)* eam *L*

Zum 2. Teil (S. 382)